

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана
Франка

Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних
технологій

Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК «___» _____ 2024 р.

Застосування методів комплексного аналізу у прогнозуванні
даних.

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації «Магістр середньої освіти.

Вчитель математики, викладач закладу фахової передвищої,
вищої освіти, вчитель інформатики»

Автор роботи – Летнянчин Даніїл Андрійович _____
(підпис)

Науковий керівник – доктор філософії, доцент
Войтович Христина Олегівна _____
(підпис)

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

Застосування методів комплексного аналізу у прогнозуванні даних.

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____ Голова ЕК _____

дата

Секретар ЕК	підпис	власне ім'я та прізвище
	підпис	власне ім'я та прізвище

Анотація. Летнянчин Даніїл. Застосування методів комплексного аналізу у прогнозуванні даних.

У роботі розглянуто сучасний підхід до прогнозування — методи комплексного аналізу, зокрема комплексне експоненційне згладжування (CES), які дозволяють ефективно аналізувати тренди, сезонність та залежності у часових рядах. Метою дослідження є аналіз можливостей підвищення точності прогнозів за допомогою методів комплексного аналізу та вивчення застосування його елементів у прогнозуванні даних. У роботі виконано огляд сучасних підходів до прогнозування, досліджено математичні основи експоненційного згладжування та його варіантів, а також проаналізовано, як окремі елементи комплексного аналізу використовуються для виділення трендів, сезонних компонентів та складних залежностей. Наведено приклади практичних задач із застосуванням CES та їх розв'язки.

Abstract. Letnyanchyn Danyil. Application of Complex Analysis Methods in Data Forecasting

This thesis examines a modern approach to forecasting—complex analysis methods, particularly Complex Exponential Smoothing (CES), which effectively analyze trends, seasonality, and dependencies in time series data. The study aims to explore the potential for improving forecast accuracy using complex analysis methods and to investigate the application of its elements in data forecasting. The paper provides a review of modern forecasting approaches, explores the mathematical foundations of exponential smoothing and its variations, and analyzes how specific elements of complex analysis are utilized to identify trends, seasonal components, and intricate dependencies. Practical examples of tasks involving CES and their solutions are presented.

Зміст

Вступ.....	5
1. Прогнозування, планування та цілі	7
1.1 Загальні характеристики.....	7
1.2 Дані та методи прогнозування.....	10
2.Експоненціальне згладжування	15
2.1 Просте експоненціальне згладжування	15
2.2 Середньозважена форма.....	17
2.3 Лінійний метод Хольта.....	18
2.4 Методи демпфованого тренду	18
2.5 Сезонний метод Холта-Вінтерса	19
3. Комплексне експоненційне згладжування.....	21
3.1 Основні ідеї.....	21
3.2 Приклади використання CES в математиці.....	29
Висновок	36
Список використаних джерел	37

Вступ

Прогнозування є важливим інструментом для ефективного планування у різних сферах діяльності. Воно дозволяє ухвалювати обґрунтовані рішення в умовах невизначеності, забезпечуючи точність оцінки майбутніх подій. Наприклад, прийняття рішень про будівництво електростанцій, планування роботи кол-центрів або створення запасів потребує чіткого розуміння майбутнього попиту. Прогнози можуть охоплювати різні часові горизонти: від кількох хвилин (у телекомунікаційній маршрутизації) до кількох років (у капітальних інвестиціях).

Деякі процеси передбачити легше, ніж інші. Наприклад, час сходу сонця можна передбачити з високою точністю завдяки стабільності та зрозумілості фізичних законів, що його визначають. У той же час, прогнозування обмінних курсів валют значно складніше через невизначеність факторів, що впливають на них, та їхню змінну природу. У таких випадках прогнозистам необхідно чітко усвідомлювати обмеження своїх моделей та реалістично оцінювати рівень їхньої точності.

Одним із сучасних підходів до прогнозування є застосування методів комплексного аналізу, зокрема, комплексного експоненційного згладжування (CES). Ці методи дозволяють ефективно виділяти тренди та сезонні компоненти в часових рядах, а також обробляти складні залежності між змінними.

Мета дослідження: дослідження спрямоване на аналіз застосування методів комплексного аналізу для підвищення точності прогнозування даних у різних прикладних галузях.

Об'єкт дослідження: процеси прогнозування даних у часових рядах.

Предмет дослідження: методи комплексного аналізу, зокрема комплексне експоненційне згладжування, та їх застосування у прогнозуванні часових рядів та математиці.

Завдання дослідження

1. Провести огляд літератури щодо сучасних методів прогнозування даних.
2. Дослідити математичні основи та алгоритми експоненційного згладжування.
3. Дослідити математичні основи та алгоритми комплексного експоненційного згладжування.
4. Навести приклади задач з використанням методів комплексного експоненційного згладжування та розв'язки.

1. Прогнозування, планування та цілі

1.1 Загальні характеристики

Часто в прогнозуванні ключовим кроком є знання того, коли щось можна спрогнозувати точно, а коли прогнози будуть не кращими, ніж підкидання монети. Хороші прогнози враховують справжні моделі та зв'язки, які існують в історичних даних, але не повторюють минулі події, які більше не повторяться. У цій книзі ми навчимося відрізнити випадкові коливання в минулих даних, які слід ігнорувати, та справжній шаблон, який слід змоделювати та екстраполювати.

Багато людей помилково вважають, що прогнози неможливі в мінливому середовищі. Будь-яке середовище змінюється, і хороша модель прогнозування відображає те, як все змінюється. Прогнози рідко припускають, що середовище залишається незмінним. Зазвичай припускають, що навикишнє середовище змінюватиметься й у майбутньому. Тобто високомінливе середовище буде й надалі залишатися високомінливим; бізнес із коливаннями продажів матиме коливання продажів; і економіка, яка пройшла через буми та спади, продовжуватиме проходити через буми та спади. Модель прогнозування призначена для того, щоб фіксувати те, як рухаються речі, а не лише те, де вони є. Як сказав Авраам Лінкольн: «Якби ми могли спочатку знати, де ми знаходимося і куди прагнемо, ми могли б краще судити, що і як робити».

Ситуації прогнозування значно відрізняються за часовими горизонтами, факторами, що визначають фактичні результати, типами шаблонів даних і багатьма іншими аспектами. Методи прогнозування можуть бути простими, як-от використання останнього спостереження як прогнозу (що називається найвним методом), або дуже складними, як-от нейронні мережі та економетричні системи одночасних рівнянь. Іноді даних взагалі не буде. Наприклад, ми можемо захотіти спрогнозувати продажі нового продукту в

перший рік, але явно немає даних для роботи. У подібних ситуаціях ми використовуємо оціночне прогнозування, яке обговорювалося в розділі 4. Вибір методу залежить від того, які дані доступні, і передбачуваності величини, яку потрібно спрогнозувати.

Прогнозування є звичайним статистичним завданням у бізнесі, де воно допомагає прийняти інформативні рішення щодо планування виробництва, транспортування та персоналу, а також надає керівництво для довгострокового стратегічного планування. Однак бізнес-прогнозування часто робиться погано, і його часто плутають з плануванням і цілями. Це три різні речі.

Прогнозування

передбачає якомога точніше прогнозування майбутнього, враховуючи всю доступну інформацію, включаючи історичні дані та знання про будь-які майбутні події, які можуть вплинути на прогнози.

Цілі

те, що ви хотіли б, щоб сталося. Цілі повинні бути пов'язані з прогнозами і планами, але це відбувається не завжди. Дуже часто цілі встановлюються без будь-якого плану щодо їх досягнення та без прогнозів щодо їх реалістичності.

Планування

є відповіддю на прогнози та цілі. Планування передбачає визначення відповідних дій, які необхідні, щоб ваші прогнози відповідали вашим цілям.

Прогнозування має бути невід'ємною частиною процесу прийняття рішень керівництвом, оскільки воно може відігравати важливу роль у багатьох сферах діяльності компанії. Сучасні організації потребують короткострокових, середньострокових і довгострокових прогнозів залежно від конкретного застосування.

Короткострокові прогнози

необхідні для планування персоналу, виробництва та транспорту. Як частина процесу планування, часто також потрібні прогнози попиту.

Середньострокові прогнози

необхідні для визначення майбутніх потреб у ресурсах, щоб придбати сировину, найняти персонал або придбати машини та обладнання.

Довгострокові прогнози

використовуються в стратегічному плануванні. Такі рішення мають враховувати ринкові можливості, фактори зовнішнього середовища та внутрішні ресурси.

Організація повинна розробити систему прогнозування, яка передбачає кілька підходів до прогнозування невизначених подій. Такі системи прогнозування вимагають розвитку досвіду визначення проблем прогнозування, застосування ряду методів прогнозування, вибору відповідних методів для кожної проблеми, а також оцінки та вдосконалення методів прогнозування з часом. Також важливо мати сильну організаційну підтримку для використання формальних методів прогнозування, якщо вони хочуть бути успішним.

На ранніх стадіях проекту прогнозування необхідно прийняти рішення про те, що слід прогнозувати. Наприклад, якщо прогнози потрібні для товарів у виробничому середовищі, необхідно запитати, чи потрібні прогнози для: для кожної лінії продуктів чи для груп продуктів? кожна торгова точка, чи для торгових точок, згрупованих за регіонами, чи лише для загального обсягу продажів? тижневі дані, місячні дані чи річні дані?

Також необхідно враховувати горизонт прогнозування. Чи будуть потрібні прогнози на місяць наперед, на 6 місяців чи на десять років? Будуть необхідні різні типи моделей залежно від того, який горизонт прогнозу є найважливішим.

Як часто потрібні прогнози? Прогнози, які потрібно створювати часто, краще робити за допомогою автоматизованої системи, ніж за допомогою методів, які потребують ретельної ручної роботи.

Варто витратити час на розмову з людьми, які використовуватимуть прогнози, щоб переконатися, що ви розумієте їхні потреби та те, як прогнози використовуватимуться, перш ніж приступати до масштабної роботи зі створення прогнозів.

Після того, як визначено, які прогнози потрібні, необхідно знайти або зібрати дані, на яких базуватимуться прогнози. Дані, необхідні для прогнозування, можуть уже існувати. Сьогодні записується багато даних, і завдання прогнозиста часто полягає в тому, щоб визначити, де і як зберігаються необхідні дані. Дані можуть включати дані про продажі компанії, історичний попит на продукт або рівень безробіття в географічному регіоні. Значну частину часу прогнозист може витратити на пошук і зіставлення наявних даних перед розробкою відповідних методів прогнозування.

1.2 Дані та методи прогнозування

Відповідні методи прогнозування значною мірою залежать від наявних даних. Якщо немає доступних даних або якщо наявні дані не відповідають прогнозам, то необхідно використовувати якісні методи прогнозування. Ці методи не є суто припущеннями — існують добре розроблені структуровані підходи до отримання хороших прогнозів без використання історичних даних.

Кількісне прогнозування може бути застосоване при виконанні двох умов: доступна чисельна інформація про минуле; розумно припустити, що деякі аспекти минулих моделей триватимуть і в майбутньому.

Існує широкий спектр кількісних методів прогнозування, які часто розробляються в рамках конкретних дисциплін для певних цілей. Кожен

метод має свої властивості, точність і вартість, які необхідно враховувати при виборі конкретного методу.

У більшості задач кількісного прогнозування використовуються або дані часових рядів (зібрані через регулярні проміжки часу), або перехресні дані (зібрані в один момент часу). У цій книзі ми стурбовані прогнозуванням майбутніх даних і зосереджені на часових рядах.

Прогнозування часових рядів

Приклади даних часових рядів включають: щоденні ціни на акції IBM, місячна кількість опадів, квартальні результати продажів Amazon, річний прибуток Google.

Все, що спостерігається послідовно в часі, є часовим рядом. У цій книзі ми розглядатимемо лише часові ряди, які спостерігаються через рівні проміжки часу (наприклад, щогодини, щодня, щотижня, щомісяця, щокварталу, щороку). Також можуть виникати часові ряди з нерегулярним інтервалом, але вони виходять за рамки цієї книги.

Під час прогнозування даних часових рядів мета полягає в тому, щоб оцінити, як послідовність спостережень триватиме в майбутньому. На малюнку 1.1 показано квартальне виробництво пива в Австралії з 1992 року по другий квартал 2010 року.

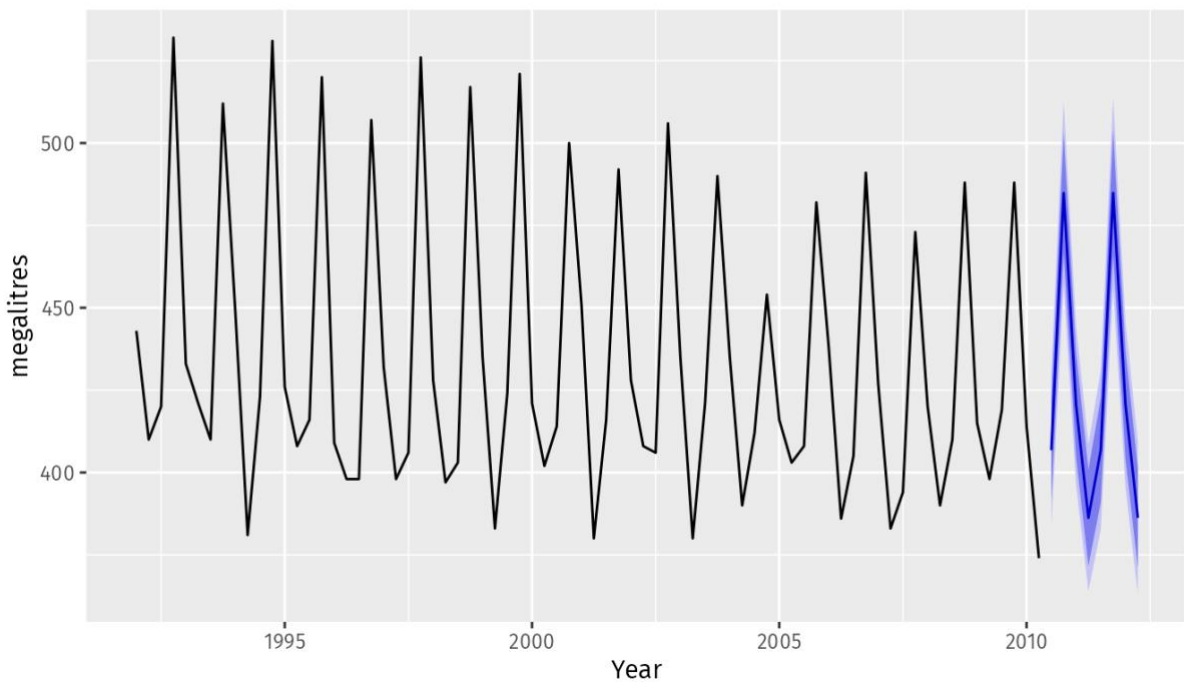


Рисунок 1.1: Австралійське квартальне виробництво пива: 1992Q1–2010Q2, з прогнозами на два роки

Сині лінії показують прогнози на наступні два роки. Зверніть увагу, як прогнози зафіксували сезонні закономірності, які можна побачити в історичних даних, і відтворили їх на наступні два роки. Темна затінена область показує 80% інтервалів передбачення. Тобто очікується, що кожне майбутнє значення буде лежати в темній заштрихованій області з імовірністю 80%. Світла затінена область показує 95% інтервалів передбачення. Ці інтервали передбачення є корисним способом відображення невизначеності в прогнозах. У цьому випадку очікується, що прогнози будуть точними, а отже, інтервали прогнозів досить вузькі.

Найпростіші методи прогнозування часових рядів використовують лише інформацію про змінну, яку потрібно прогнозувати, і не намагаються виявити фактори, які впливають на її поведінку. Тому вони екстраполують тенденції та сезонні моделі, але вони ігнорують всю іншу інформацію, таку як маркетингові ініціативи, діяльність конкурентів, зміни в економічних умовах тощо.

Моделі часових рядів, що використовуються для прогнозування, включають моделі декомпозиції, моделі експоненціального згладжування та моделі ARIMA.

Прогностичні змінні та прогнозування часових рядів

Змінні прогнозу часто корисні для прогнозування часових рядів. Наприклад, припустимо, що ми хочемо спрогнозувати погодинну потребу в електроенергії (E) жаркого регіону протягом літнього періоду. Модель із змінними-предикторами може мати вигляд

$$E=f(\text{поточна температура, потужність економіки, населення, час доби, день тижня, помилка}).$$

Взаємозв'язок не є точним — у попиту на електроенергію завжди відбуватимуться зміни, які не можна пояснити змінними прогнозу. Термін «помилка» праворуч враховує випадкову варіацію та вплив відповідних змінних, які не включені в модель. Ми називаємо це пояснювальною моделлю, оскільки вона допомагає пояснити, що спричиняє коливання попиту на електроенергію.

Оскільки дані про попит на електроенергію утворюють часовий ряд, ми також можемо використовувати модель часових рядів для прогнозування. У цьому випадку відповідне рівняння прогнозування часових рядів має вигляд

$$E_{t+1} = f(E_t, E_{t-1}, E_{t-2}, E_{t-3}, \dots, \text{помилка}),$$

де t теперішня година, $t+1$ наступна година, $t-1$ це попередня година, $t-2$ дві години тому і так далі. Тут передбачення майбутнього базується на минулих значеннях змінної, але не на зовнішніх змінних, які можуть вплинути на систему. Знову ж таки, термін «помилка» справа враховує випадкову варіацію та вплив відповідних змінних, які не включені в модель. Існує також третій тип моделі, який поєднує в собі особливості двох вищевказаних моделей. Наприклад, це може бути надано

$$E_{t+1} = f(E_t, \text{поточна температура, час доби, день тижня, помилка}),$$

Ці типи змішаних моделей отримали різні назви в різних дисциплінах. Вони відомі як динамічні регресійні моделі, панельні моделі даних, поздовжні моделі, моделі передавальної функції та моделі лінійної системи (припускаючи, що f є лінійним). Ці моделі обговорюються в Розділі 9.

Пояснювальна модель є корисною, оскільки вона містить інформацію про інші змінні, а не лише історичні значення змінної, яку потрібно прогнозувати. Однак є кілька причин, чому прогнозіст може вибрати модель часових рядів, а не пояснювальну або змішану модель. По-перше, систему можна не зрозуміти, і навіть якщо її зрозуміти, може бути надзвичайно важко виміряти зв'язки, які, як передбачається, керують її поведінкою. По-друге, необхідно знати або прогнозувати майбутні значення різних предикторів, щоб мати можливість спрогнозувати цікаву змінну, а це може бути надто важко. По-третє, головна турбота може полягати лише в тому, щоб передбачити, що станеться, а не в тому, щоб знати, чому це відбувається. Нарешті, модель часових рядів може давати точніші прогнози, ніж пояснювальна або змішана модель.

Модель, яка буде використовуватися для прогнозування, залежить від наявних ресурсів і даних, точності конкуруючих моделей і способу використання моделі прогнозування.

2.Експоненціальне згладжування

Експоненціальне згладжування було запропоновано наприкінці 1950-х років (Brown, 1959; Holt, 1957; Winters, 1960), і стало мотивом для деяких з найбільш успішних методів прогнозування. Прогнози, створені за допомогою методів експоненціального згладжування, є середньозваженими значеннями минулих спостережень, причому ваги зменшуються експоненціально, коли спостереження стають старшими. Іншими словами, чим пізніше спостереження, тим вища відповідна вага. Ця структура швидко генерує надійні прогнози для широкого діапазону часових рядів, що є великою перевагою та має велике значення для застосувань у промисловості.

2.1 Просте експоненціальне згладжування

Найпростіший із методів експоненціального згладжування природно називається простим експоненціальним згладжуванням (SES)¹⁶. Цей метод підходить для прогнозування даних без чіткої тенденції або сезонної закономірності. Наприклад, дані на рисунку 2 не відображають чіткої тенденції чи сезонності. (За останні кілька років спостерігається зростання, що може свідчити про певну тенденцію. Далі в цьому розділі ми розглянемо, чи буде трендовий метод кращим для цієї серії.)

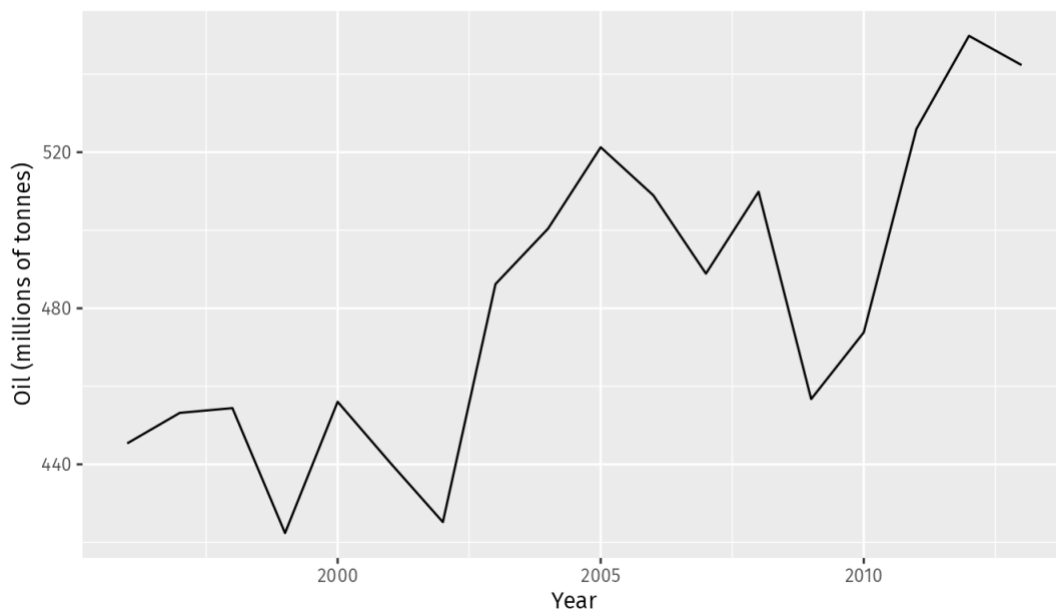


Рисунок 2: Видобуток нафти в Саудівській Аравії з 1996 по 2013 рік.

Використовуючи найвний метод, усі прогнози на майбутнє дорівнюють останньому спостережуваному значенню ряду,

$$\hat{y}_{T+h|T} = y_T$$

для $h=1, 2, 3, \dots$. Отже, найвний метод передбачає, що останнє спостереження є єдиним важливим, а всі попередні спостереження не дають інформації на майбутнє. Це можна вважати середньозваженим, де вся вага надається останньому спостереженню.

Використовуючи метод середнього, усі майбутні прогнози дорівнюють простому середньому спостережених даних,

$$\hat{y}_{T+h|T} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T y_t,$$

для $h=1, 2, 3, \dots$. Таким чином, середній метод припускає, що всі спостереження мають однакову важливість, і надає їм однакову вагу при створенні прогнозів.

Ми часто хочемо чогось середнього між цими двома крайнощами. Наприклад, може бути доцільним надавати більшу вагу недавнім спостереженням, ніж спостереженням із далекого минулого. Це саме

концепція простого експоненціального згладжування. Прогнози розраховуються за допомогою зважених середніх значень, де ваги зменшуються експоненціально, оскільки спостереження надходять із більш далекого минулого — найменші ваги пов'язані з найдавнішими спостереженнями:

$$\hat{y}_{T+1|T} = \alpha y_T + \alpha(1 - \alpha)y_{T-1} + \alpha(1 - \alpha)^2 y_{T-2} + \dots, \quad (1)$$

де $0 \leq \alpha \leq 1$ є параметром згладжування. Прогноз часу на крок вперед $T+1$ це зважене середнє значення всіх спостережень серії $y_1, \dots, y_T$. Швидкість зменшення ваг контролюється параметром α .

2.2 Середньозважена форма

Прогноз на час $T + 1$ дорівнює середньозваженому між останнім спостереженням y_T і попереднім прогнозом $\hat{y}_{T|T-1}$:

$$\hat{y}_{T+1|t} = \alpha y_T + (1 - \alpha)\hat{y}_{T|T-1},$$

де $0 \leq \alpha \leq 1$ є параметром згладжування. Аналогічно ми можемо записати підібрані значення як

$$\hat{y}_{t+1|t} = \alpha y_t + (1 - \alpha)\hat{y}_{t|t-1},$$

для $t=1, \dots, T$. (Пам'ятайте, що підібрані значення – це просто одноетапні прогнози навчальних даних.)

Альтернативним представленням є компонентна форма. Для простого експоненціального згладжування єдиним компонентом, який включається, є рівень, l_t . (Інші методи, розглянуті далі в цьому розділі, також можуть включати тренд b_t і сезонна складова s_t .) Компонентні представлення методів експоненціального згладжування містять рівняння прогнозу та рівняння згладжування для кожного компонента, включеного в метод. Компонентна форма простого експоненційного згладжування задається так:

$$\hat{y}_{t+h|t} = l_t, \text{ - рівняння прогнозу}$$

$$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)l_{t-1}, \text{ рівняння згладжування}$$

де l_t це рівень (або згладжене значення) ряду в момент часу t . При $h = 1$ надає встановлені значення, а під час налаштування $t = T$ дає правдиві прогнози, окрім даних навчання.

2.3 Лінійний метод Хольта

Холт (1957) розширив просте експоненціальне згладжування, щоб дозволити прогнозувати дані з тенденцією. Цей метод включає рівняння прогнозу та два рівняння згладжування (одне для рівня та одне для тенденції)

$$\hat{y}_{t+h|t} = l_t + hb_t - \text{рівняння прогнозу,}$$

$$l_t = \alpha y_t + (1 - \alpha)(l_{t-1} + b_{t-1}) - \text{рівняння рівня,}$$

$$b_t = \beta^*(l_t - l_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1} - \text{рівняння тренду,}$$

де l_t позначає оцінку рівня ряду в момент часу t , b_t позначає оцінку тренду (нахилу) ряду в момент часу t , α є параметром згладжування для рівня, $0 \leq \alpha \leq 1$ і β^* – параметр згладжування для тренду, $0 \leq \beta^* \leq 1$.

Як і у випадку простого експоненціального згладжування, рівняння рівня тут показує, що l_t є середньозваженим значенням спостереження y_t та тренувального прогнозу на один крок вперед для часу t , тут поданого як $l_{t-1} + b_{t-1}$. Рівняння тенденції показує, що b_t є середньозваженим значенням оціненої тенденції в момент часу t на основі $l_t - l_{t-1}$ і b_{t-1} , попередньої оцінки тенденції.

Функція прогнозу більше не є плоскою, а трендовою. Прогноз на крок вперед дорівнює останньому оціненому рівню плюс h , помножене на останнє оцінене значення тенденції. Отже, прогнози є лінійною функцією h .

2.4 Методи демпфованого тренду

Прогнози, створені за допомогою лінійного методу Холта, відображають постійну тенденцію (збільшення чи зменшення) на невизначений термін у майбутньому. Емпіричні дані вказують на те, що ці

методи мають тенденцію до завищення прогнозу, особливо для більш довгих горизонтів прогнозування. Вмотивовані цим спостереженням, Gardner & McKenzie (1985) ввели параметр, який «гасить» тенденцію до рівної лінії через деякий час у майбутньому. Методи, які включають демпфирований тренд, виявилися дуже успішними та, мабуть, є найпопулярнішими індивідуальними методами, коли прогнози потрібні автоматично для багатьох серій.

У поєднанні з параметрами згладжування α і β^* (зі значеннями від 0 до 1, як у методі Холта), цей метод також включає параметр демпфування $0 < \phi < 1$:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+h|t} &= \ell_t + (\phi + \phi^2 + \dots + \phi^h)b_t \\ \ell_t &= \alpha y_t + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + \phi b_{t-1}) \\ b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)\phi b_{t-1}.\end{aligned}$$

Якщо $\phi=1$, метод ідентичний лінійному методу Холта. Для значень між 0 і 1, ϕ гасить тенденцію так, щоб вона наближалася до константи через деякий час у майбутньому.

На практиці ϕ рідко буває меншим за 0,8, оскільки демпфування має дуже сильний ефект для менших значень. Значення ϕ , близькі до 1, означатимуть, що демпфовану модель неможливо відрізнити від недемпфованої моделі. З цих причин ми зазвичай обмежуємо ϕ мінімум 0,8 і максимум 0,98.

2.5 Сезонний метод Холта-Вінтерса

Холт (1957) і Вінтерс (1960) розширили метод Холта для визначення сезонності. Сезонний метод Холта-Вінтерса складається з рівняння прогнозу та трьох рівнянь згладжування — одне для рівня ℓ_t , одне для тренду b_t та одне для сезонної складової s_t з відповідними параметрами згладжування α, β^*, γ . Ми використовуємо m для позначення частоти

сезонності, тобто кількості сезонів у році. Наприклад, для квартальних даних $m=4$, а для місячних $m=12$.

Існує два варіанти цього методу, які відрізняються характером сезонної складової. Адитивний метод є кращим, коли сезонні коливання є приблизно постійними протягом ряду, тоді як мультиплікативний метод є кращим, коли сезонні коливання змінюються пропорційно рівню ряду. При адитивному методі сезонна складова виражається в абсолютних величинах у масштабі спостережуваного ряду, а в рівнянні рівня ряд сезонно скоригований шляхом віднімання сезонної складової. Протягом кожного року сезонна складова складатиме приблизно нуль. При мультиплікативному методі сезонна складова виражається у відносних величинах (відсотках), а ряд сезонно скоригований діленням на сезонну складову. У межах кожного року сезонна складова становитиме приблизно m .

Компонентна форма для адитивного методу:

$$\begin{aligned}\hat{y}_{t+h|t} &= \ell_t + hb_t + s_{t+h-m(k+1)} \\ \ell_t &= \alpha(y_t - s_{t-m}) + (1 - \alpha)(\ell_{t-1} + b_{t-1}) \\ b_t &= \beta^*(\ell_t - \ell_{t-1}) + (1 - \beta^*)b_{t-1} \\ s_t &= \gamma(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1}) + (1 - \gamma)s_{t-m},\end{aligned}$$

де k є цілою частиною $(h-1)/m$, що гарантує, що оцінки сезонних індексів, які використовуються для прогнозування, надходять з останнього року вибірки.

Рівняння рівня показує зважене середнє між сезонно скоригованим спостереженням $(y_t - s_{t-m})$ і несезонним прогнозом $(\ell_{t-1} + b_{t-1})$ для часу t . Рівняння тренду ідентичне лінійному методу Холта. Сезонне рівняння показує зважене середнє значення між поточним сезонним індексом $(y_t - \ell_{t-1} - b_{t-1})$ і сезонним індексом того самого сезону минулого року (тобто m періодів часу тому).

3. Комплексне експоненційне згладжування

3.1 Основні ідеї

Complex Exponential Smoothing (CES) – це сучасний метод прогнозування, що є варіацією на основі класичного підходу експоненційного згладжування. Його основною особливістю є можливість обробляти складні патерни даних, включаючи нелінійності, сезонність і тренди.

Основні ідеї CES: об'єднання вхідних компонентів: CES моделює дані через трансформацію, яка об'єднує адитивні та мультиплікативні компоненти. Це дозволяє ефективніше працювати з часорядом, що має складну динаміку; гнучкість: на відміну від класичних моделей (наприклад, Holt-Winters), CES не потребує явного розділення даних на тренд і сезонність. Модель здатна адаптуватися до структури даних автоматично; математичний фундамент: Основою CES є використання комплексних чисел (complex numbers) для представлення складних залежностей у даних. Це розширює можливості звичайних моделей згладжування; відсутність розподілу параметрів: CES може працювати без необхідності заздалегідь вибрати між адитивними чи мультиплікативними формами залежностей.

Зосереджуючись на несезонних випадках, загальний процес генерації даних ETS має таку форму:

$$y_t = f(l_{t-1}, b_{t-1}, \varepsilon_t), \quad (1)$$

де y_t — значення ряду, l_t — компонент рівня, b_t — компонент тренду, ε_t — помилка, а $f(C(\cdot))$ — деяка функція, яка дозволяє включати ці компоненти в адитивній або мультиплікативній формі. Проте зведені прогнози, обговорені в Kolassa (2011) та Kourentzes et al. (2014) вказують на відсутність чіткого поділу між компонентами рівня та тенденції. Цю декомпозицію в (1) можна вважати довільною: залежно від обраної моделі

ETS, її початкових значень і параметрів згладжування можна отримати різні оцінки компонентів часового ряду. Крім того, ці компоненти є неспостережними, і їх ідентифікація залежить від відповідного розкладання. Наприклад, часто важко відрізнити часовий ряд локального рівня від ряду трендів. Розглянемо просте експоненціальне згладжування (SES):

$$\hat{y}_t = \alpha y_{t-1} + (1 - \alpha)\hat{y}_{t-1}, \quad (2)$$

де $\hat{y}_t$ — оцінене значення ряду, а α — параметр згладжування, який повинен лежати всередині області $(0, 2)$. Дотримуючись позначення Hyndman et al. (2002) SES має базову модель ETS

$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + \varepsilon_t \\ l_t = l_{t-1} + \alpha \varepsilon_t \end{cases} \quad (3)$$

Коли параметр згладжування в (3) збільшується, зміни рівня стають настільки швидкими, що згенерований часовий ряд може виявити особливості трендів. Коли параметр згладжування стає більшим за одиницю, ряд може виявити навіть більш чітку глобальну тенденцію (Hyndman et al., 2008, p.42). Вибір правильної моделі в цій ситуації стає непростим завданням. Це лише один приклад, коли важко визначити правильну модель за допомогою стандартного підходу декомпозиції експоненціального згладжування.

Замість декомпозиції часових рядів пропонуються дві характеристики: 1) спостережене значення ряду y_t ; і 2) його «інформаційний потенціал» p_t . Ми вводимо інформаційний потенціал як неспостережувану складову часового ряду, яка його характеризує та впливає на спостережувані значення y_t . Ми припускаємо, що, незважаючи на те, що фактичне значення y_t і його прогноз є змінними, які представляють головний інтерес для моделювання, неспостережуваний інформаційний потенціал p_t містить додаткову корисну інформацію про спостережуваний ряд. При цьому необхідно включити його в моделі.

Кодуються ці дві реальні змінні в єдину комплексну змінну $y_t + ip_t$, яка дозволяє враховувати їх обидві під час процесу моделювання (Світунков, 2012). Тут i — уявна одиниця, яка задовольняє рівняння: $i^2 = -1$. Таким чином, загальний процес генерування даних з використанням цієї нотації має вигляд:

$$y_t + ip_t = f(Q, \varepsilon_t), \quad (4)$$

де Q — набір деяких комплексних змінних, вибраних для передбачення $y_t + ip_t$. Використовуючи цю ідею, ми пропонуємо комплексне експоненціальне згладжування (CES), засноване на процесі генерації даних (4), аналогічно традиційній моделі експоненціального згладжування. Поєднання методу простого експоненційного згладжування з ідеєю інформаційного потенціалу, заміна реальних змінних у (2.2) на комплексні змінні, дає нам складний метод експоненціального згладжування:

$$\hat{y}_{t+1} + i\hat{p}_{t+1} = (\alpha_0 + i\alpha_1)(y_t + ip_t) + (1 - \alpha_0 + i - i\alpha_1)(\hat{y}_t + i\hat{p}_t), \quad (5)$$

де $\hat{y}_t$ — оцінене значення ряду, $\hat{p}_t$ — оцінене значення інформаційного потенціалу, а $\alpha_0 + i\alpha_1$ — комплексний параметр згладжування.

Використання комплексних чисел у Complex Exponential Smoothing (CES) є однією з ключових інновацій цього методу, що дозволяє ефективно моделювати складні взаємозв'язки в часових рядах. Комплексні числа забезпечують додатковий вимір для аналізу часового ряду, що дозволяє: моделювати одночасно тренд і сезонність у нелінійних формах, відображати фазові зрушення (наприклад, зміщення сезонності), забезпечувати гнучкість при моделюванні патернів, які неможливо точно описати реальними числами.

Опрацюємо статистичну модель, що лежить в основі CES, щоб вивчати її властивості. Модель може бути записана в наступному вигляді простору станів

$$\begin{cases} y_t = l_{t-1} + \epsilon_t \\ l_t = l_{t-1} - (1 - \alpha_1)c_{t-1} - \alpha_1 p_t + \alpha_0 \epsilon_t, \\ c_t = l_{t-1} + (1 - \alpha_0)c_{t-1} + \alpha_0 p_t + \alpha_1 \epsilon_t \end{cases} \quad (7)$$

де l_t – компонент рівня, c_t – інформаційний компонент під час спостереження t та $\epsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Зауважимо, що залежності в часових рядах мають нелінійну структуру, і в часовому ряді немає явного компонента тренду, оскільки цій моделі не потрібно штучно розбивати ряд на рівень і тренд, як це робить ETS. Ця ідея все ще дозволяє переписати (7) коротшим більш загальним способом, схожим на загальну структуру простору станів SSOE

$$\begin{cases} y_t = w'x_{t-1} + \epsilon_t, \\ x_t = Fx_{t-1} + qp_t + g\epsilon_t' \end{cases} \quad (8)$$

де $x_t = \begin{pmatrix} l_t \\ c_t \end{pmatrix}$ – вектор стану, $F = \begin{pmatrix} 1 & -(1 - \alpha_1) \\ 1 & 1 - \alpha_0 \end{pmatrix}$ – матриця переходу, $g = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ є вектор персистентності, $q = \begin{pmatrix} -\alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$ – вектор стійкості інформаційного потенціалу, а $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – вектор вимірювання.

Форма простору станів (8) дозволяє розширити CES подібним чином до ETS, щоб включити додаткові стани для сезонних або екзогенних змінних. Основна відмінність між моделлю (8) і звичайним ETS полягає в тому, що перша включає термін інформаційного потенціалу. Крім того, матриця переходів у (8) включає параметри згладжування, що не є стандартною функцією для моделей ETS. Ця форма використовує загальну нотацію експоненціального згладжування в просторі станів SSOE і дозволяє чітко зрозуміти модель.

Властивості CES

Будучи методом експоненціального згладжування, CES здатний розподіляти вагу між спостереженнями іншим способом. Розглянемо, як комплексний параметр згладжування впливає на цей розподіл.

Повторно підставляючи оцінені значення в праву частину рівняння (5), можна отримати таку рекурсивну форму CES:

$$\hat{y}_{t+1} + i\hat{p}_{t+1} = (\alpha_0 + i\alpha_1) \sum_{j=0}^T (1 - \alpha_0 + i - i\alpha_1)^j (y_{t-j} + ip_{t-j}), \quad (9)$$

де $T \rightarrow \infty$.

Щоб отримати межі комплексного параметра згладжування, ваги в (9) можна сприймати як геометричну прогресію з комплексним співвідношенням $(1 - \alpha_0 + i - i\alpha_1)$; отже, цей ряд буде сходиться до деякого комплексного числа, лише якщо абсолютне значення відношення менше одиниці:

$$v = \sqrt{(1 - \alpha_0)^2 + (1 - \alpha_1)^2} < 1. \quad (10)$$

Умова (10) є вирішальною для збереження умови стабільності (Hyndman et al., 2008): старіші спостереження повинні мати меншу вагу порівняно з новими спостереженнями. Для CES це графічно представлено на площині у вигляді кола з центром у координатах (1, 1), як на малюнку 1.

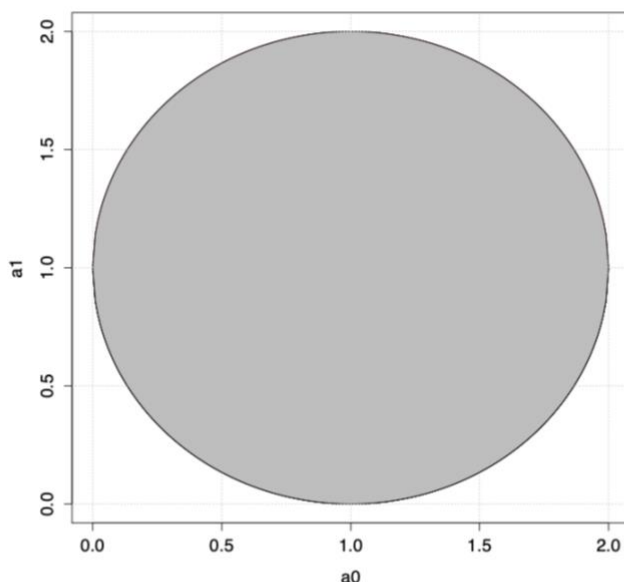
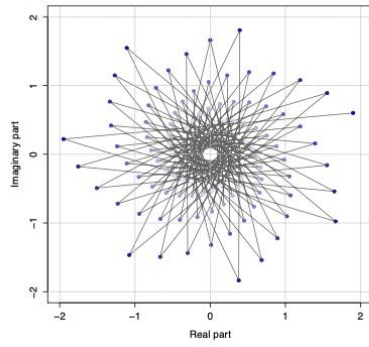
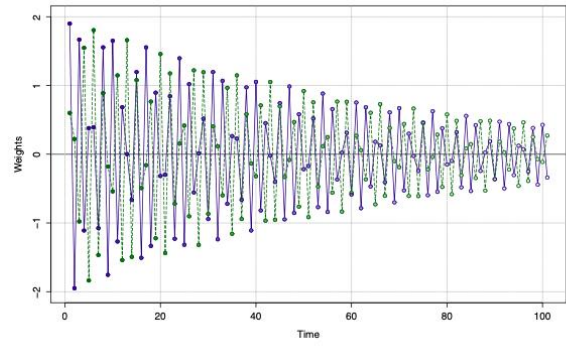


Figure 1: Bounds of complex smoothing parameter.

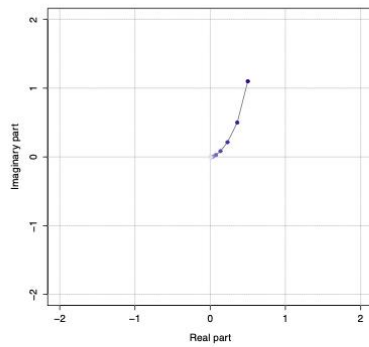
Наприклад, коли $\alpha_0 + i\alpha_1 = 0,2 + 1,2i$ вагові коефіцієнти розподіляються, як показано на малюнках 2.2a і 2.2b: вони повільно сходяться до нуля, демонструючи горб для 4-го спостереження. Їхня абсолютна величина зменшується з часом за рахунок (10). Цей розподіл ваг призводить до прогнозів на основі характеристик довгострокових часових рядів, враховуючи деякі спостереження з більшою вагою. Цей приклад демонструє гнучкість розподілу ваги в CES. Більш звичайний випадок показаний на малюнках 2.2c і 2.2d. Параметр згладжування дорівнює $0,1 + 1,01i$, що призводить до повільного експоненціального спадання вагових коефіцієнтів у часі. Графіки 2.2a і 2.2b показують зменшення ваг на комплексній площині. Вони демонструють, що відбувається з еквівалентним параметром комплексного згладжування, коли він підноситься до степеня j з $j = 1, \dots, T$: вихідний вектор обертається на комплексній площині, величина обертання залежить від значення комплексного згладжування



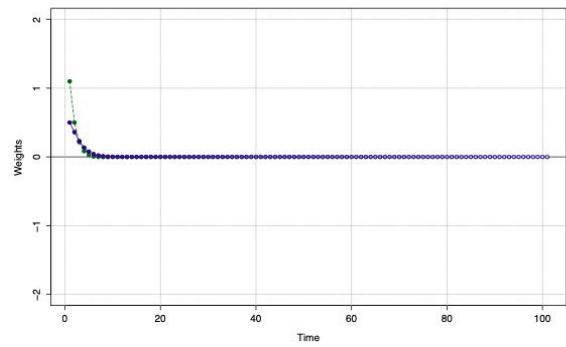
(a) on complex plane



(b) in time



(c) on complex plane



(d) in time

Малюнок 2: Розподіл ваг CES. 2b і 2d: сині суцільні лінії – дійсні частини комплексних ваг, зелені пунктирні лінії – уявні частини комплексних ваг.

Діаграми на малюнку 2 також демонструють, що через складну природу ваг їх сума зазвичай буде комплексним числом, яке можна обчислити за допомогою:

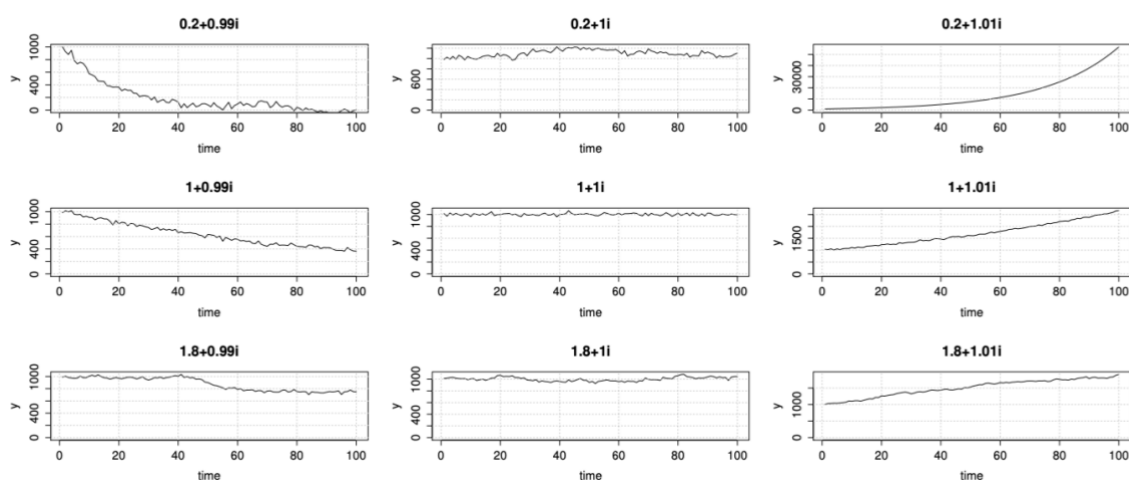
$$S = (\alpha_0 + i\alpha_1) \sum_{j=0}^{\infty} (1 - \alpha_0 + i - i\alpha_1)^j = \frac{\alpha_0^2 - \alpha_1 + \alpha_1^2 + i\alpha_0}{\alpha_0^2 + (1 - \alpha_1)^2}. \quad (10)$$

Сума ваг залежить виключно від значення комплексного параметра згладжування. Воно може стати дійсним числом лише тоді, коли $\alpha_0=0$, що суперечить умові (10). Можна також зробити висновок, що дійсна частина S може бути будь-яким дійсним числом, тоді як його уявна частина обмежена лише додатними дійсними числами. S вказує на те, що CES не є

моделлю усереднення, яка відрізняється від традиційної інтерпретації експоненційного згладжування.

Щоб краще зрозуміти, що CES здатний виробляти як процес генерування даних, ми створили кілька часових рядів, які показано на рисунку 3. Зауважимо, що уявна частина параметра комплексного згладжування визначає напрям тренда (або його відсутність при $\alpha_1 = 1$), тоді як дійсна частина впливає на крутину тренду. При $\alpha_0 < 1$ тренд має явний експоненціальний характер. При $\alpha_0 = 1$ тенденція сповільнюється, але все ще демонструє риси експоненціальної функції. Нарешті, при $\alpha_0 > 1$ ряд виявляє ознаки адитивного тренду з можливою зміною рівня та нахилу. Одним із цікавих висновків є те, що коли $\alpha_0 + i\alpha_1 = 1 + i$ створений ряд стає стаціонарним. Інша особливість CES полягає в тому, що поведінка тренду з $\alpha_1 < 1$ нагадує модель затухлого тренду. Нарешті, якщо з якоїсь причини рівень ряду стає від'ємним, тоді ті самі комплексні значення параметра згладжування призведуть до протилежного напрямку траєкторій (наприклад, $\alpha_0 < 1$ призведе до збільшення, а не до зниження).

Ці приклади демонструють гнучкість CES і його потенціал у роботі з часовими рядами рівнів і трендів.



3.2 Приклади використання CES в математиці

Аналіз часових рядів має широкий спектр застосувань. У складних економічних системах CES (комплексне згладжування) допомагає моделювати сезонні цикли, такі як зміни в попиті на товари залежно від пори року, і довгострокові тенденції, наприклад, економічне зростання чи спад. У кліматичних дослідженнях CES використовується для аналізу температурних аномалій, сонячної активності та рівня опадів із врахуванням трендів і сезонності. На фінансових ринках метод дозволяє аналізувати циклічність у зміні цін на акції чи валюту, враховуючи вплив довгострокових тенденцій. У сфері динамічних систем CES застосовується в обробці сигналів для декомпозиції складних сигналів на тренд і гармоніки, що корисно в інженерії зв'язку, аудіо- та відеообробці. Він також використовується для моделювання періодичних фізичних процесів, таких як хвилі, вібрації чи коливання в складних середовищах. У задачах оптимізації CES інтегрується в моделі для аналізу часових змін у функціях витрат, що дозволяє передбачати майбутні зміни витрат чи ефективності. У теорії чисел і аналітичних обчисленнях CES використовується для аналізу числових рядів, розділення їх на періодичні й аперіодичні компоненти, що сприяє вивченню гармонійних функцій. У машинному навчанні CES може стати основою для створення нових функцій активації, які враховують короткострокові коливання та довгострокові зміни, а також використовується для попередньої обробки даних у часових моделях. У комп'ютерній графіці CES застосовується для моделювання хвильових процесів, наприклад, поверхні води чи світлових хвиль. Для прогнозування та управління CES інтегрується в системи управління, які потребують прогнозування періодичних явищ, таких як енергетика або транспорт.

Ось декілька прикладів таких задач

1. Моделювання температури з сезонністю

Задача:

Дано часовий ряд середньодобових температур за рік. Застосуйте CES для розділення тренду (зміна середньої температури через зміну клімату) і сезонної компоненти (порів рік).

Розв'язок:

1. Реалізуйте CES з параметрами $\alpha=0.3$, $\beta=0.2$.
2. Реальна частина дає довгостроковий тренд, уявна — сезонність.
3. Оцініть, як змінюється тренд за останні 5 років.

Розв'язок

1. Модель CES

Комплексне експоненційне згладжування моделює час серією рекурсивних рівнянь:

$$z_t = y_t + i \cdot s_t,$$

де: z_t — комплексне представлення даних: y_t (реальна частина, тренд) і s_t (уявна частина, сезонність); α — параметр згладжування тренду; β — параметр фазової адаптації для сезонності.

Оновлення компонент:

$$y_{t+1} = \alpha \cdot y_t + (1 - \alpha) \cdot z_t,$$

$$s_{t+1} = \beta \cdot s_t + (1 - \beta) \cdot z_t.$$

2. Алгоритм застосування CES

1. Ініціалізація:

- Задайте початкові значення y_0 (середнє за перший рік) та s_0 (амплітуда сезонності).

- Виберіть параметри α (для тренду) і β (для сезонності) в межах $(0,1)(0,1)$. Наприклад, $\alpha=0.3, \beta=0.2$.

2. Циклічне оновлення: для кожного t у часовому ряду:

- Оновіть тренд y_t за формулою: $y_{t+1} = \alpha \cdot y_t + (1-\alpha) \cdot z_t$.
- Оновіть сезонність s_t : $s_{t+1} = \beta \cdot s_t + (1-\beta) \cdot z_t$.
- Запишіть результат у вигляді: $z_{t+1} = y_{t+1} + s_{t+1}$.

3. Виділення компонент:

- Реальна частина ($\Re(z_t)$) — тренд.
- Уявна частина ($\Im(z_t)$) — сезонність.

4. Прогнозування:

Використовуйте останнє значення тренду ($\Re(z_t)$) та сезонності ($\Im(z_t)$) для прогнозу температур.

3. Приклад на синтетичних даних

1. Дані:

Нехай дані температури мають вигляд:

$$T_t = 20 + 2 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right) + \epsilon_t,$$

де: 20 — середня температура; $2 \sin\left(\frac{2\pi t}{365}\right)$ — сезонна складова; ϵ_t — випадковий шум ($N(0,0.5)$).

Реалізація CES (Python):

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Генерація даних
np.random.seed(42)
days = 365 * 5 # 5 років
t = np.arange(days)
seasonality = 2 * np.sin(2 * np.pi * t / 365)
trend = 20 + 0.01 * t
noise = np.random.normal(0, 0.5, days)
temperature = trend + seasonality + noise

# Параметри CES
alpha = 0.3
beta = 0.2

# Ініціалізація
z = np.zeros(days, dtype=complex)
z[0] = temperature[0]

# CES обчислення
for i in range(1, days):
    y = alpha * z[i - 1].real + (1 - alpha) * temperature[i]
    s = beta * z[i - 1].imag + (1 - beta) * temperature[i]
    z[i] = complex(y, s)

# Виділення компонент
trend_ces = z.real
seasonality_ces = z.imag

# Графік результатів
plt.figure(figsize=(14, 6))
plt.plot(t, temperature, label="Температура (дані)", alpha=0.6)
plt.plot(t, trend_ces, label="Тренд (CES)", color="red", linewidth=2)
plt.plot(t, seasonality_ces, label="Сезонність (CES)", color="blue", 1
plt.legend()
plt.title("Розділення тренду та сезонності за допомогою CES")
plt.xlabel("День")
plt.ylabel("Температура")
plt.show()

```

2. Прогнозування попиту на товари

Задача:

Дані продажів містять тренд (ріст попиту) та сезонність (піки на свята). Використовуйте CES для прогнозу продажів на наступний місяць.

Розв'язок:

1. Підберіть α і β , які мінімізують помилку на історичних даних.
2. Використайте останнє значення реальної компоненти для прогнозу тренду та додайте сезонну компоненту.

3. Визначення основного циклу в даних**Задача:**

Часовий ряд відображає коливання в електроспоживанні. Знайдіть основний цикл та амплітуду сезонних змін.

Розв'язок:

1. Обчисліть амплітуду уявної частини CES.
2. Побудуйте графік амплітудного спектра для визначення основного циклу.

4. Фільтрація фінансових сигналів**Задача:**

Дані про ціну акцій містять тренди та короткострокові коливання. Виділіть тренд за допомогою CES.

Розв'язок:

1. Налаштуйте CES ($\alpha=0.1$) для придушення шуму.
2. Реальна частина буде трендом, уявна — видалена.

5. Декомпозиція демографічних даних

Задача:

У вас є дані про населення за роками. Виділіть вплив довгострокового зростання та сезонного коливання (наприклад, народжуваність).

Розв'язок:

1. Використайте CES із низьким β для врахування повільних циклів.
2. Реалізуйте прогноз на 5 років уперед.

6. Аналіз кліматичних циклів**Задача:**

Дані про сонячні плями містять 11-річний цикл. Розділіть тренд і сезонну компоненти, щоб оцінити довгострокову зміну активності.

Розв'язок:

1. Застосуйте CES ($\alpha=0.2, \beta=0.1$).
2. Уявна частина відобразить періодичність 11 років.

7. Обробка біологічних сигналів**Задача:**

Аналізуйте серцевий ритм, що має базову частоту і короткострокові коливання. Виділіть тренд і амплітуду.

Розв'язок:

1. CES дає основну частоту в уявній частині.
2. Знайдіть варіації тренду через реальну частину.

8. Контроль промислових процесів**Задача:**

Дані температурного датчика мають тренд (підвищення температури через поломку) та шум. Використайте CES для прогнозу.

Розв'язок:

1. Фільтруйте дані, використовуючи CES ($\alpha=0.1$).
2. Тренд реальної частини сигналізує про необхідність обслуговування.

9. Аналіз динаміки популяцій**Задача:**

Дані чисельності популяцій мають сезонність (періодичність) та тенденцію (ріст/спад). Знайдіть ці компоненти.

Розв'язок:

1. Застосуйте CES для визначення реальної та уявної частин.
2. Порівняйте сезонність із зовнішніми факторами (температура, їжа).

10. Прогнозування енергетичного споживання**Задача:**

Дані про споживання енергії мають пікові значення (зимові місяці). Використовуйте CES для оцінки майбутніх піків.

Розв'язок:

1. Налаштуйте $\alpha=0.3, \beta=0.1$
2. Реальна частина передбачає загальний рівень, уявна — періодичність.

Висновок

У магістерській роботі розглянуто роль прогнозування як важливого інструменту для ефективного планування в умовах невизначеності. Основна увага зосереджена на застосуванні елементів комплексного аналізу, зокрема комплексного експоненційного згладжування (CES), для підвищення точності прогнозування даних у часових рядах.

Дослідження продемонструвало, що елементи комплексного аналізу дозволяють більш глибоко та точно аналізувати складні залежності між змінними, виділяти тренди та сезонні компоненти навіть у випадках нестабільності чи невизначеності. Особливу увагу приділено математичним основам CES, які забезпечують гнучкість моделей та адаптивність до змін у даних.

Наведені у роботі приклади використання CES ілюструють його ефективність у вирішенні як короткострокових, так і довгострокових задач прогнозування, включаючи задачі, що потребують врахування складних взаємозв'язків. Зокрема, було показано, що застосування елементів комплексного аналізу сприяє адаптації моделей до специфічних умов прогнозування, таких як сезонність, трендові зміни чи випадкові флуктуації.

Таким чином, дослідження підкреслює перспективність застосування елементів комплексного аналізу у прогнозуванні даних. Це відкриває нові можливості для розробки більш точних та ефективних моделей, які можна використовувати в різноманітних галузях, де прогнозування відіграє ключову роль. Отримані результати створюють основу для подальших досліджень у напрямку інтеграції методів комплексного аналізу у системи підтримки прийняття рішень.

Список використаних джерел

2. Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2021). *Forecasting: Principles and Practice* (3rd ed.). OTexts.
3. Makridakis, S., Wheelwright, S. C., & Hyndman, R. J. (1998). *Forecasting Methods and Applications* (3rd ed.). Wiley.
4. Gardner, E. S. (2006). Exponential smoothing: The state of the art – Part II. *International Journal of Forecasting*, 22(4), 637-666.
5. Holt, C. C. (2004). Forecasting trends and seasonals by exponentially weighted averages. *International Journal of Forecasting*, 20(1), 5-10.
6. Taylor, J. W. (2003). Exponential smoothing with a damped multiplicative trend. *International Journal of Forecasting*, 19(4), 715-725.
7. Chatfield, C. (2000). *Time-Series Forecasting*. Chapman & Hall/CRC.
8. Snyder, R. D., & Ord, J. K. (2011). Forecasting for inventory control with exponential smoothing. *Journal of the Operational Research Society*, 62(3), 522-531.
9. Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. (2015). *Time Series Analysis: Forecasting and Control* (5th ed.). Wiley.
10. De Gooijer, J. G., & Hyndman, R. J. (2006). 25 years of time series forecasting. *International Journal of Forecasting*, 22(3), 443-473.
11. Taleb, N. N. (2010). *The Black Swan: The Impact of the Highly Improbable* (2nd ed.). Random House.