

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,
кандидат пед. наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

« _____ » 2024 р.

Застосування похідної до розв'язування задач елементарної математики

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації — вчитель математики, викладач закладу фахової
передвищої, вищої освіти, вчитель інформатики

Автор роботи Семйоник Світлана Павлівна _____

підпис

Науковий керівник кандидат фізико-математичних наук,
доцент Хаць Руслан Васильович _____

підпис

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

Застосування похідної до розв'язування задач елементарної математики

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____	Голова ЕК	_____	_____
Дата		підпис	прізвище, ім'я

Секретар ЕК	_____	_____
	підпис	прізвище, ім'я

Анотація

Семйоник С.П. *Застосування похідної до розв'язування задач елементарної математики.* – Рукопис. – 43 с.

Магістерська робота присвячена застосуванню похідної до розв'язування задач елементарної математики. У роботі наведено приклади застосування похідної до побудови графіків та дослідження функцій, розв'язування рівнянь, доведення нерівностей і тожностей.

Annotation

Semionyk S.P. *Application of the derivative to solving problems of elementary mathematics.* – Manuscript. – 43 p.

The work is devoted to the application of the derivative to solving problems of elementary mathematics. Examples of the application of the derivative to the construction of graphs and the study of functions, the solution of equations, the proof of inequalities and identities, are given.

Зміст

Анотація	3
Вступ	5
1 Застосування похідної при порівнянні значень функції	8
2 Побудова графіків та дослідження функцій за допомогою похідної	13
3 Застосування похідної для доведення нерівностей	20
4 Застосування похідної до розв’язування рівнянь	25
5 Застосування похідної для доведення тотожностей	36
Висновки	41
Список використаних джерел	42

Вступ

У шкільному курсі математики значне місце займають елементи математичного аналізу, зокрема, диференціальне числення функцій однієї змінної [1]. Учні опановують новий математичний апарат, який ефективно застосовується при розв'язуванні багатьох задач математики, фізики, астрономії, техніки, економіки, хімії та біології [2, 5]. Багато вправ і задач елементарної математики можна розв'язувати за допомогою як "елементарних" так і "неелементарних" методів, зокрема, методів математичного аналізу [1-7].

Похідна – це основний інструмент диференціального числення, який є базовим методом у математиці. Також це поняття, яке характеризує швидкість зміни деякої функції $y = f(x)$. Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в цій точці до приросту аргументу Δx , якщо останній прямує до нуля, тобто існує границя

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Завдяки похідній можна розглянути низку задач, які не можна розв'язати за допомогою "елементарних" методів. Тому багато класичних елементар-

них задач (дослідження і розв’язання рівнянь, доведення нерівностей та тотожностей, геометричні задачі тощо) успішно розв’язуються із застосуванням похідної [1-7]. Навчальні посібники і шкільні підручники приділяють мало уваги цим питанням. При цьому, нестандартне використання методів математичного аналізу дозволяє глибше засвоїти ключові поняття теорії, яка вивчається.

Для розв’язання задач потрібно підбирати метод, перевіряти умови його застосовності, а також аналізувати одержані результати. На практиці часто доводиться робити невеликі математичні дослідження, в процесі яких розвиваються математичні здібності, логіка та підвищується математична культура.

Мета магістерської роботи полягає у розробці методичних підходів навчання учнів застосуванню похідної до розв’язування задач елементарної математики.

Об’єктом дослідження є функції, рівняння, нерівності і тотожності.

Предметом дослідження є застосування похідної до розв’язування задач елементарної математики.

Задачі дослідження: систематизувати методи розв’язання рівнянь та нерівностей, доведення тотожностей, побудови графіків і дослідження функцій за допомогою похідної.

Практичне значення отриманих результатів. Результати магістерської роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути вико-

ристані для підготовки випускників до національного мультипредметного тесту, у доуніверситетській підготовці молоді, ліцєях, гімназіях та школах з поглибленим вивченням математики.

Апробація результатів магістерської роботи. Результати досліджень викладено у доповіді на XI-й міжнародній науково-практичній конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій [8].

Структура і обсяг роботи. Магістерська робота складається з анотації, вступу, 5 розділів, висновку та списку використаних джерел. Повний обсяг роботи становить 43 с.

Розділ 1

Застосування похідної при порівнянні значень функції

Похідна використовується для порівняння значень диференційовних функцій $f(x)$ і $f(x+\alpha)$ з аргументами x та $x+\alpha$, де α – довільне додатне число. Очевидно, що x та $x+\alpha$ мають належати інтервалу диференційовності функції f [1].

Відомо, що якщо $f'(x) > 0$ на деякому відкритому інтервалі, то функція f зростає і $f(x) < f(x+\alpha)$. Якщо ж $f'(x) < 0$ на деякому відкритому інтервалі, то функція f спадає і $f(x) > f(x+\alpha)$.

Розглянемо функцію вигляду $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ при $x > 0$. Похідна цієї функції $f'(x) = \frac{1-\ln x}{x}$, і $f'(x) > 0$ при $x \in (0; e)$, а на проміжку $(e; +\infty)$ маємо $f'(x) < 0$. Отже, при $0 < x_1 < x_2 < e$ виконується $\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2}$. Тому $x_1^{x_2} < x_2^{x_1}$. Якщо $e < x_1 < x_2$, то $\frac{\ln x_1}{x_1} < \frac{\ln x_2}{x_2}$ і $x_1^{x_2} > x_2^{x_1}$ [1,5].

Розглянемо типові завдання на застосування похідної при порівнянні значень функції.

Задача 1.

Порівняти числові значення $\sqrt[100]{100}$ і $\sqrt[101]{101}$.

Розв’язання. Розглянемо функцію $f(x) = \sqrt{x}$ при $x > 0$. Знайдемо її похідну та прирівняємо до нуля. Маємо

$$f'(x) = (\sqrt{x})' = (e^{\frac{\ln x}{2}})' = e^{\frac{\ln x}{2}} \cdot \frac{1}{x} \cdot x - 1 \cdot \ln x = e^{\frac{\ln x}{2}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{\sqrt{x}(1 - \ln x)}{x^2},$$
$$\frac{\sqrt{x}(1 - \ln x)}{x^2} = 0, \quad x \neq 0, \quad x > 0, \quad \ln x = 1, \quad x = e.$$

На проміжку $(e; +\infty)$ похідна $f'(x) < 0$. Тому функція f спадає. Отже, $f(x) > f(x+1)$ і

$$\sqrt[100]{100} > \sqrt[101]{101}.$$

Задача 2.

Порівняти $\log_9 10$ і $\log_{10} 11$.

Розв’язання. Розглянемо функції

$$f(x) = \log_x(x + \alpha), \quad f(x) = \log_{x+\beta}(x + \alpha + \beta)$$

де α і β – довільні додатні числа, а $x > 1$. Нехай $f(x) = \log_x(x + \alpha)$.

Покажемо, що ця функція спадає на проміжку $(1; +\infty)$. Маємо

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln x} \right)' = \frac{\frac{1}{x+1} \cdot \ln x - \frac{1}{x} \ln(x+1)}{\ln^2 x} =$$

$$= \frac{x \cdot \ln x - (x+1) \cdot \ln(x+1)}{x(x+1) \ln^2 x}$$

Оскільки $x < x+1$, то $\ln x < \ln(x+1)$ і $f'(x) < 0$. Тому, розглядувана функція спадає на проміжку $(1; +\infty)$.

Отже,

$$\log_x(x+\alpha) > \log_{x+\beta}(x+\alpha+\beta),$$

і

$$\log_9 10 > \log_{10} 11.$$

Задача 3.

Порівняти $\frac{\sin 1,4}{1,4}$ і $\frac{\sin 1,5}{1,5}$.

Розв'язання. Оскільки $0 < 1,4 < 1,5 < \frac{\pi}{2}$, то розглянемо функцію $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ на інтервалі $(0; \frac{\pi}{2})$. Знайдемо похідну:

$$f'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x(x - \operatorname{tg} x)}{x^2}.$$

Для x з інтервалу $(0; \frac{\pi}{2})$ виконується $x < \operatorname{tg} x$. Тому $f'(x) < 0$. Отже, дана функція спадає на інтервалі $(0; \frac{\pi}{2})$. Отже,

$$\frac{\sin 1,4}{1,4} > \frac{\sin 1,5}{1,5}.$$

Задача 4.

Порівняти $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$ і $(\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$.

Розв'язання. Оскільки $0 < \sqrt{2} < \sqrt{3} < e$, то з міркувань на початку розділу випливає, що $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}} < (\sqrt{3})^{\sqrt{2}}$.

Задача 5.

Порівняти $(\sqrt{11})^{\sqrt{15}}$ і $(\sqrt{15})^{\sqrt{11}}$.

Розв'язання. Оскільки $e < \sqrt{11} < \sqrt{15}$, то з викладок на початку розділу випливає, що

$$(\sqrt{11})^{\sqrt{15}} > (\sqrt{15})^{\sqrt{11}}.$$

Задача 6.

Порівняти 1983^{1984} і 1984^{1983} .

Розв'язання. Оскільки $e < 1983 < 1984$, як в попередній задачі випливає, що $1983^{1984} > 1984^{1983}$.

Задача 7.

Порівняти $(\ln 20)^3$ і $3^{\ln 20}$.

Розв'язання. Оскільки $\ln 20 \approx 2.99573$, то $e < \ln 20 < 3$ і, як вище, отримуємо

$$(\ln 20)^3 > 3^{\ln 20}.$$

Задача 8.

Порівняти $(\sin \frac{\pi}{4})^{\sin \frac{\pi}{3}}$ і $(\sin \frac{\pi}{3})^{\sin \frac{\pi}{4}}$

Розв'язання. Маємо

$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Тому будемо порівнювати $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$ і $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$. Оскільки $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2} < e$, то $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} < \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$.

Отже,

$$\left(\sin \frac{\pi}{4}\right)^{\sin \frac{\pi}{3}} < \left(\sin \frac{\pi}{3}\right)^{\sin \frac{\pi}{4}}.$$

Розділ 2

Побудова графіків та дослідження функцій за допомогою похідної

Для дослідження функцій широко застосовується диференціальне числення. Для того щоб знайти проміжки монотонності функції, точки екстремуму, найбільше та найменше значення функції на замкненому проміжку, використовують властивості похідної. Далі, вже за допомогою цих даних можна побудувати ескіз графіка функції [8].

Проміжки зростання і спадання функції $y = f(x)$ на інтервалі монотонності характеризується знаком її похідної. Якщо на деякому інтервалі похідна функції $f'(x) > 0$, то ця функція зростає на даному інтервалі. Якщо ж $f'(x) < 0$, то ця функція спадає.

Точки в яких похідна функції $f'(x) = 0$ або не існує, називаються критичними точками. Для того щоб визначити чи критична точка є точкою максимуму чи мінімуму, потрібно використати достатні ознаки існування

екстремуму. Якщо при переході через точку похідна $f'(x)$ змінює свій знак з $'+'$ на $'-'$, то ця точка є точкою максимуму $-x_{max}$. Якщо похідна $f'(x)$ змінюється з $'-'$ на $'+'$ при переході через критичну точку, то ця точка є точкою мінімуму $-x_{min}$ [5, 15].

Задача 1.

Знайти проміжки зростання і спадання, а також точки x_{min} , x_{max} для функції

$$f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 84x + 8.$$

Розв'язання.

Область визначення для даної функції є $\mathbb{R}$. Маємо

$$f'(x) = 6x^2 - 30x - 84.$$

Для знаходження критичних точок потрібно похідну $f'(x)$ прирівняти до нуля:

$$6x^2 - 30x - 84 = 0, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 7.$$

Критичні точки функції $x_1 = -2$ і $x_2 = 7$ розділяють область визначення на проміжки монотонності $(-\infty; -2) \cup (-2; 7) \cup (7; +\infty)$. На проміжку $(-\infty; -2)$ похідна $f'(x) > 0$. Тому функція зростає на цьому проміжку. На проміжку $(-2; 7)$ похідна $f'(x) < 0$ і функція є спадною. На проміжку $(7; +\infty)$ знову $f'(x) > 0$ і функція зростає. Точка $x_1 = -2$ змінює знак похідної з $'+'$ на $'-'$ і це точка x_{max} , а точка $x_2 = 7$ змінює знак $'-'$ на $'+'$

і є точкою x_{min} .

x	$(-\infty; -2)$	-2	$(-2; 7)$	7	$(7; +\infty)$
y'	+	0	-	0	+
y	$\nearrow$	-236	$\searrow$	-629	$\nearrow$
		max		min	

Задача 2.

Дослідити функцію і накреслити ескіз графіка $y = \frac{2x}{1+x^2}$

Розв'язання.

Область визначення для даної функції є $\mathbb{R}$. Знайдемо похідну функції $y = f(x)$ та прирівняємо її до нуля. Маємо

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (1 + x^2) - 2x \cdot 2x}{(1 + x^2)^2} = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$$

і

$$f'(x) = \frac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2} = 0, \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 1.$$

Критичні точки функції $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$ розділяють область визначення на проміжки монотонності $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. На проміжку $(-\infty; -1)$ похідна $f'(x) < 0$. Отже, функція спадає. На проміжку $(-1; 1)$ похідна $f'(x) > 0$ і функція зростає. На проміжку $(1; +\infty)$ похідна $f'(x) < 0$ і функція спадає. Точка $x_1 = -1$ змінює знак похідної з $'-'$ на $'+'$ і є точкою x_{min} , а точка $x_2 = 1$ змінює знак $'+'$ на $'-'$ і це точка x_{max} .

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	-	0	+	0	-
y	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$
		<i>min</i>		<i>max</i>	

За даними з таблиці, побудуємо ескіз графіка заданої функції.

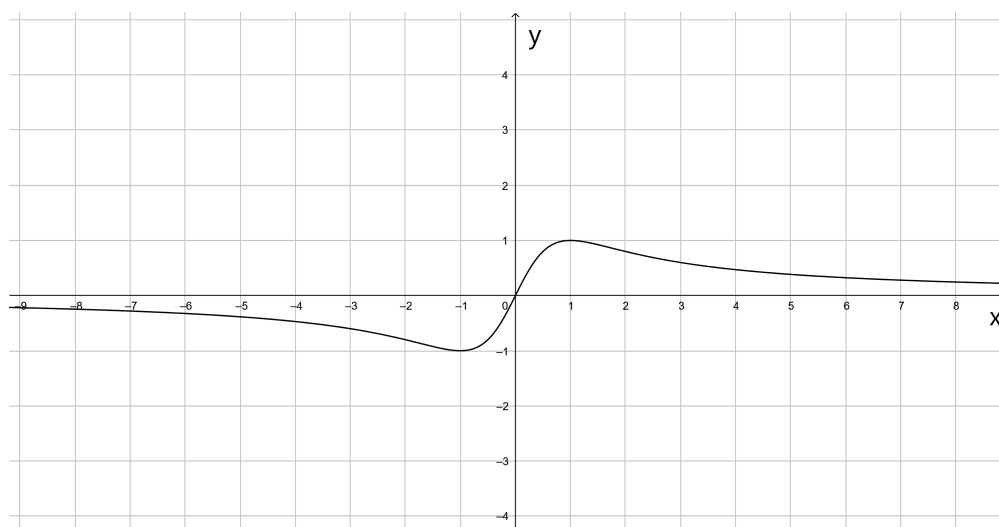


Рис. 2.1: Графік функції $y = \frac{2x}{1+x^2}$

Задача 3.

Дослідити функцію і накреслити ескіз графіка $y = \frac{2x}{1-x^2}$.

Розв'язання.

Область визначення функції: $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. Маємо

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (1 - x^2) + 2x \cdot 2x}{(1 - x^2)^2} = \frac{2x^2 + 2}{(1 - x^2)^2},$$

$$\begin{aligned}
1 - x^2 &\neq 0, & x^2 + 1 &= 0, \\
x^2 &\neq 1, & x^2 &= -1 \\
x_1 &\neq -1, & x_2 &\neq 1, & x &\in \emptyset.
\end{aligned}$$

Критичні точки функції $x_1 = -1$; $x_2 = 1$ розділяють область визначення на проміжки монотонності $(-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$. На всіх цих проміжках похідна $f'(x) > 0$ на всій області визначення. Запишемо дані у таблицю.

x	$(-\infty; -1)$	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; +\infty)$
y'	+	-	+	-	+
y	$\nearrow$	-	$\nearrow$	-	$\nearrow$

За даними з таблиці, побудуємо ескіз графіка функції.

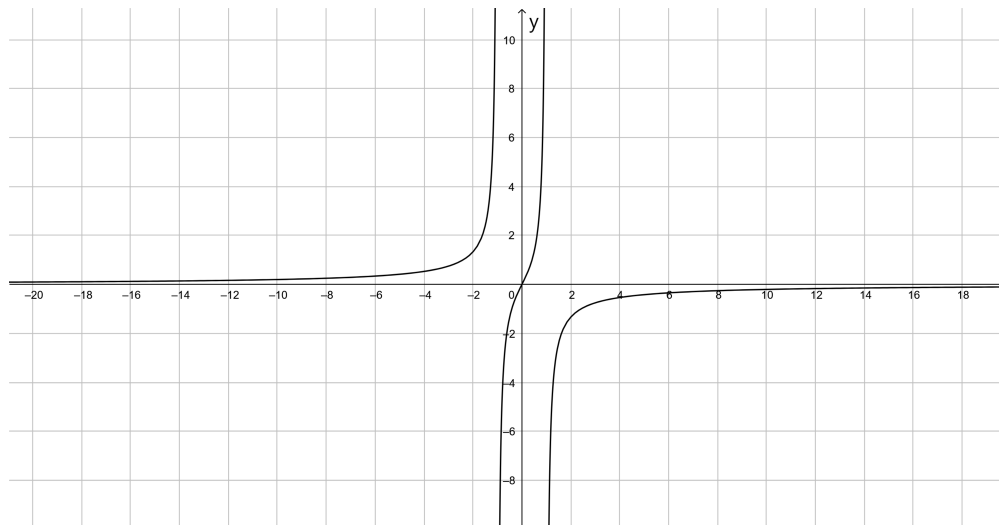


Рис. 2.2: Графік функції $y = \frac{2x}{1-x^2}$

Задача 4.

Скласти рівняння спільної дотичної до графіків функцій $g(x) = x^2 + 2x + 5$ та $\phi(x) = x^2 + 6x + 2$

Розв'язання. Рівняння дотичної має вигляд: $y = f'(x_{1/2})(x - x_{1/2}) + f(x_{1/2})$, і x_1 та x_2 – абсциси точок дотику до $g(x)$ та $\phi(x)$. Знайдемо похідні функцій $g'(x) = 2x + 2$, $\phi'(x) = 2x + 6$.

Рівняння дотичної до графіка функції $g(x)$ в точці x_1 : $y = (2x_1 + 2)(x - x_1) + x_1^2 + 2x_1 + 5$. Рівняння дотичної до графіка функції $\phi(x)$ в точці x_2 : $y = (2x_2 + 6)(x - x_2) + x_2^2 + 6x_2 + 2$.

Кутовий коефіцієнт повинен збігатися для двох функцій: $k = g'(x) = \phi'(x)$.

Внаслідок чого, отримаємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2 = 2x_2 + 6 \\ -x_1(2x_1 + 2) + x_1^2 + 2x_1 + 5 = -x_2(2x_2 + 6) + x_2^2 + 6x_2 + 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_1 = 2x_2 + 4 \\ -2x_1^2 - 2x_1 + x_1^2 + 2x_1 + 5 = -2x_2^2 - 6x_2 + x_2^2 + 6x_2 + 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 + 2 \\ -x_1^2 + 5 = -x_2^2 + 2, \end{cases}$$

$$x_2^2 + 4x_2 + 4 - 5 = x_2^2 - 2, \quad 4x_2 = -1,$$

$$x_2 = -\frac{1}{4}, \quad x_1 = 1\frac{3}{4}.$$

Знайдемо значення похідної функції $\phi'(x)$ і значення функції $\phi(x)$ в точці $x_2 = -\frac{1}{4}$. $\phi'(x_1) = \phi(-\frac{1}{4}) = 2 \cdot (-\frac{1}{4}) + 6 = 5, 5$.

$$\phi(x_1) = \phi(-\frac{1}{4}) = (-\frac{1}{4})^2 + 6 \cdot (-\frac{1}{4}) + 2 = \frac{9}{16}.$$

А тепер запишемо рівняння спільної дотичної:

$$y = 5,5(x + \frac{1}{4}) + \frac{9}{16} = 5,5x + 1\frac{15}{16}.$$

Розділ 3

Застосування похідної для доведення нерівностей

Нехай задано нерівність $f(x) \geq g(x)$, яку потрібно довести для $x \in [a; b]$.

Позначимо через $\varphi(x)$ різницю заданих функцій $f(x) - g(x)$. Тоді знайдемо похідну функції $\varphi(x)$ і прирівняємо її до нуля: $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0$. З отриманого рівняння знайдемо єдиний корінь x_0 . При цьому, має виконуватися нерівність $\varphi(x_0) = f(x_0) - g(x_0) \geq 0$ і точка x_0 повинна бути точкою мінімуму функції на заданому проміжку. З огляду на це, можна стверджувати, що на області визначення функції f та g виконується нерівність $f(x) \geq g(x)$ [3, 11, 13].

Даний метод також можна використовувати для доведення числових нерівностей, але для цього потрібно ввести функцію, яка приймає числові значення у заданих точках.

Задача 1.

Довести, що для $0 < a < b$ виконується нерівність

$$\ln \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \ln \left(\frac{b}{a} + 1 \right) < (\ln 2)^2.$$

Розв'язання. Позначимо

$$\varphi(x) = (\ln 2)^2 - \ln \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \ln \left(\frac{b}{a} + 1 \right).$$

Нехай $\frac{b}{a} = x$. Тоді $\frac{a}{b} = \frac{1}{x}$ і для $x > 1$

$$\varphi(x) = (\ln 2)^2 - \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \ln (x + 1).$$

Знайдемо похідну функції $\varphi(x)$ і прирівняємо її до нуля:

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= - \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \ln(x + 1) + \frac{1}{1 + x} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right) - \\ &- \left(\frac{1}{\frac{1}{x} + 1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \cdot \ln(x + 1) + \frac{1}{1 + x} \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \right) = 0, \\ \frac{1}{x + x^2} \ln(x + 1) - \frac{1}{x + 1} \ln \left(\frac{x + 1}{x} \right) &= 0, \\ \frac{1}{x + 1} \left(\frac{1}{x} \ln(x + 1) - \ln \left(\frac{x + 1}{x} \right) \right) &= 0, \end{aligned}$$

$$\frac{1}{x+1} = 0, \quad \ln \frac{x(x+1)^{\frac{1}{x}}}{x+1} = 0,$$

$$x \neq -1, \quad \frac{x(x+1)^{\frac{1}{x}}}{x+1} = 1,$$

$$x \in \emptyset, \quad x = 1.$$

Підставимо $x = 1$ у функцію $\varphi(x)$, отримаємо:

$$\varphi(1) = (\ln 2)^2 - \ln \left(\frac{1}{1} + 1 \right) \ln (1 + 1) = (\ln 2)^2 - \ln 2 * \ln 2 = 0.$$

За умовою задачі $0 < a < b$. Тому $x > 1$. Отже,

$$(\ln 2)^2 - \ln \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \ln (x + 1) > 0,$$

і

$$\ln \left(\frac{a}{b} + 1 \right) \ln \left(\frac{b}{a} + 1 \right) < (\ln 2)^2.$$

Задача 2.

Довести, що якщо $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$, то виконується нерівність

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{y}.$$

Розв'язання. Розглянемо функцію $\varphi(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

Знайдемо похідну функції $\varphi(x)$

$$\varphi'(x) = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \operatorname{tg} x}{x^2} = \frac{\frac{x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x}{\cos x}}{x^2} = \frac{x - \sin x \cos x}{\cos^2 x \cdot x^2}.$$

Прирівняємо похідну до нуля:

$$\frac{x - \sin x \cos x}{\cos^2 x \cdot x^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} \cos^2 x &\neq 0, & x^2 &\neq 0, \\ x &\neq 0, & x &\neq \frac{\pi}{2}, & x &\neq 0. \end{aligned}$$

Отже, інтервал $(0; \frac{\pi}{2})$ є проміжком монотонності функції $\varphi(x)$. Знайдемо значення похідної функції $\varphi'(x)$ в точці з проміжка $(0; \frac{\pi}{2})$.

Наприклад $x = \frac{\pi}{4}$.

$$\varphi' \left(\frac{\pi}{4} \right) = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\pi-2}{4}}{\frac{\pi}{8}} = \frac{(\pi-2) \cdot 8}{4\pi} = \frac{2 \cdot (\pi-2)}{\pi} = 2 - \frac{4}{\pi}.$$

Похідна функції $\varphi'(\frac{\pi}{4}) > 0$. Отже, задана функція зростаюча на проміжку $(0; \frac{\pi}{2})$.

Звідси випливає наступне, якщо $0 < x < y < \frac{\pi}{2}$ то виконується нерівність:

$$\frac{\operatorname{tg} x}{x} < \frac{\operatorname{tg} y}{y}.$$

Задача 3.

Довести нерівність

$$e^{x-1} \geq x.$$

Розв'язання. Позначимо функцію

$$\varphi(x) = e^{x-1} - x.$$

Область визначення для даної функції є $\mathbb{R}$. Знайдемо похідну функції $\varphi(x)$ і прирівняємо її до нуля:

$$\varphi'(x) = e^{x-1} - 1 = 0.$$

$$e^{x-1} = 1, \quad x - 1 = 0, \quad x = 1.$$

Критична точка $x_0 = 1$ розділяє область визначення на проміжки монотонності $(-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$. На проміжку $(-\infty; 1)$ похідна $\varphi'(x) < 0$ (від'ємна) отже функція спадає. На проміжку $(1; +\infty)$ похідна $\varphi'(x) > 0$ (додатня) отже функція зростає. Отже, точка $x_0 = 1$ є точкою мінімуму функції $\varphi(x)$.
. Перевіримо значення функції $\varphi(x)$ в точці $x_0 = 1$:

$$\varphi(1) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$$

Отже, $\varphi(1) \geq 0$, а звідси випливає, що $\varphi(x) \geq 0$.

Тому: $e^{x-1} - x \geq 0$.

Розділ 4

Застосування похідної до розв'язування рівнянь

В даному параграфі ми будемо знаходити корені рівнянь за допомогою похідної.

Для цього потрібно дослідити функцію на монотонність, знайти найбільше і найменше значення функції, і застосовувати властивості монотонних і неперервних функцій.

Властивість [3]

Якщо функція $y = f(x)$ спадає або зростає на вказаному проміжку $[a; b]$, то на даному проміжку рівняння $y = 0$ має не більше одного кореня. Тобто функція $f(x) = 0$ тоді і тільки тоді коли графік перетинає вісь абсцис (Ох), а корінь даного рівняння це абсциса даної точки.

Теорема Больцано-Коші [3]

Якщо функція $f(x)$ визначена і неперервна на даному проміжку $[a; b]$ і

на кінцях набуває значень різних знаків, то на цьому проміжку знайдеться точка c в якій $f(c) = 0$

Зробивши висновок з даної теореми випливає, що рівняння вигляду $f(x) = 0$ має розв'язок тоді і тільки тоді, коли значення $f(x)$ є різних знаків на кінцях проміжка $[a; b]$.

Задача 1.

Розв'язати рівняння

$$x^2 + x + 12\sqrt{x+1} = 36.$$

Розв'язання. Область визначення даного рівняння є проміжок $[-1; +\infty)$.

Перепишемо рівняння у вигляді:

$$x^2 + x + 12\sqrt{x+1} - 36 = 0.$$

Неважко помітити, що $x = 3$ є розв'язком даного рівняння, але перевіримо чи це єдиний розв'язок.

Позначимо $f(x) = x^2 + x + 12\sqrt{x+1} - 36$. Знайдемо похідну функції $f(x)$ і прирівняємо її до нуля:

$$f'(x) = 2x + 1 + \frac{6}{\sqrt{x+1}},$$

$$2x + 1 + \frac{6}{\sqrt{x+1}} = 0,$$

$$x \neq -1.$$

Видно, що дане рівняння не має розв'язків на області визначення. А похідна функції в будь якій точці з проміжка $[-1; +\infty)$ є додатня $f'(x) > 0$. Отже, функція зростає на всій області визначення.

Тоді $x = 3$ – єдиний розв'язок заданого рівняння.

Задача 2.

Довести, що рівняння має єдиний розв'язок

$$x^3 + x^2 + x - 1 = 0$$

Розв'язання. Область визначення рівняння $x \in \mathbb{R}$. Позначимо:

$$f(x) = x^3 + x^2 + x - 1,$$

і знайдемо похідну функції.

$$f'(x) = 3x^2 + 2x + 1,$$

$$3x^2 + 2x + 1 = 0,$$

$$D = -8 < 0.$$

Отже рівняння розв'язків немає. Ця функція є монотонна на всій області визначення. А похідна функції $f'(x) > 0$, то вона зростає на всій області визначення. Тепер за допомогою теореми Больцано–Коші визначимо чи функція перетинає вісь абсцис. Підставимо, наприклад точки $x = 0$ та $x = 1$ у задане рівняння.

$$f(0) = 0 + 0 + 0 - 1 = -1,$$

$$f(1) = 1 + 1 + 1 - 1 = 2,$$

Видно, що $f(0) < 0$, а $f(1) > 0$, отже функція перетинає вісь абсцис.

Випливає, що функція має єдиний розв'язок з проміжку $[0; 1]$.

Задача 3.

Знайти корінь рівняння

$$(5x + 2)(5 + \sqrt{(5x + 2)^2 + 4}) + (3x - 7)(5 + \sqrt{(3x - 7)^2 + 4}) = 0.$$

Розв'язання. Область визначення рівняння $x \in \mathbb{R}$. Перепишемо рівняння у вигляді

$$(5x + 2)(5 + \sqrt{(5x + 2)^2 + 4}) - (7 - 3x)(5 + \sqrt{(7 - 3x)^2 + 4}) = 0,$$

і

$$(5x + 2)(5 + \sqrt{(5x + 2)^2 + 4}) = (7 - 3x)(5 + \sqrt{(7 - 3x)^2 + 4}).$$

Тепер можна ввести заміну:

$$5x + 2 = t, \qquad 7 - 3x = z.$$

Після заміни рівняння матиме вигляд

$$t(5 + \sqrt{t^2 + 4}) = z(5 + \sqrt{z^2 + 4}),$$

$$f(t) = f(z).$$

Отже, можемо позначити

$$f(t) = f(z) = f(u) = u(5 + \sqrt{u^2 + 4}).$$

Знайдемо похідну функції $f(u)$ і прирівняємо до нуля:

$$f'(u) = 5 + \sqrt{u^2 + 4} + \frac{1}{2\sqrt{u^2 + 4}} \cdot 2u \cdot u = 5 + \sqrt{u^2 + 4} + \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + 4}},$$

$$5 + \sqrt{u^2 + 4} + \frac{u^2}{\sqrt{u^2 + 4}} = 0.$$

Дане рівняння коренів немає.

Звідси видно, що $f'(u) > 0$ на всій області визначення, отже вона зростає на всій множині $\mathbb{R}$.

Тоді рівність $f(t) = f(z)$ виконується $\iff t = z$. Отже,

$$5x + 2 = 7 - 3x,$$

$$8x = 5,$$

$$x = \frac{5}{8} - \text{єдиний розв'язок}.$$

Отже, розв'язком заданого рівняння є $x = \frac{5}{8}$

Задача 4.

Розв'язати рівняння

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{12-x} = x^2 - 16x + 68.$$

Розв'язання. Область визначення $[4; 12]$.

Позначимо функції $f(x) = \sqrt{x-4} + \sqrt{12-x}$, $g(x) = x^2 - 16x + 68$.

А тепер досліджуємо функції на екстремум. Для цього знайдемо похідну $f(x)$ та $g(x)$ і прирівняємо до нуля:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-4}} - \frac{1}{2\sqrt{12-x}} = 0,$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x-4}} = \frac{1}{2\sqrt{12-x}},$$

$$x \neq 4 \qquad x \neq 12,$$

$$12 - x = x - 4, \qquad x_0 = 8,$$

$$g'(x) = 2x - 16 = 0,$$

$$x_0 = 8.$$

Критична точка $x_0 = 8$ розбиває область визначення на два інтервали $(4; 8) \cup (8; 12)$. На інтервалі $(4; 8)$ похідна функції $f'(x) > 0$ (додатня), отже, вона зростає.

А на інтервалі $(8; 12)$ похідна $f'(x) < 0$ (від'ємна), отже, функція спадає. Причому в точці $x_0 = 8$ функція $f(x)$ має максимум.

Похідна $g'(x) < 0$ на інтервалі $(4; 8)$. Отже функція спадає. А на інтервалі $(8; 12)$ похідна $g'(x) > 0$. Отже функція спадає. Причому в точці $x_0 = 8$ функція $g(x)$ має мінімум. Знайдемо значення функцій $f(x)$ та $g(x)$, в точці $x_0 = 8$:

$$f(8) = \sqrt{8-4} + \sqrt{12-8} = 2 + 2 = 4,$$

$$g(8) = 8^2 - 16 \cdot 8 + 68 = 64 - 128 + 68 = 4.$$

Отже, в точці $x_0 = 8$ функції $f(8) = g(8) = 4$, набувають однакових значень.

Звідси $x = 4$ - єдиний розв'язок рівняння.

Задача 5.

При яких значеннях $a \in \mathbb{R}$ має розв'язок рівняння

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{4-2x} = a$$

Розв'язання Область визначення даної функції $[1; 2]$.

Позначимо $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{4-2x}$. Функція $f(x) > 0$ і неперервна, а на інтервалі $[1; 2]$ диференційована. Знайдемо похідну функції $f(x)$ і прирівняємо до нуля:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} - \frac{2}{2\sqrt{4-2x}} = \frac{\sqrt{4-2x} - 2\sqrt{x-1}}{2\sqrt{x-1}\sqrt{4-2x}} = 0$$

$$4 - 2x = 4x - 4$$

$$x = \frac{4}{3} - \text{критична точка функції } f(x)$$

Точка $x = \frac{4}{3}$ розбиває область визначення на два проміжки монотонності $(1; \frac{4}{3}) \cup (\frac{4}{3}; 2)$. Похідна функції $f'(x) > 0$ (додатня) на першому інтервалі, а отже функція зростає на $(1; \frac{4}{3})$. А на інтервалі $(\frac{4}{3}; 2)$ похідна функції $f'(x) < 0$ (від'ємна), отже функція спадає. Звідси в точці $x = \frac{4}{3}$ функція має максимум.

$$f\left(\frac{4}{3}\right) = \sqrt{\frac{4}{3} - 1} + \sqrt{4 - 2 * \frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

А у точках $x = 1$ і $x = 2$ значення функції дорівнює

$$f(1) = \sqrt{1-1} + \sqrt{4-2*1} = 0 + \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$$f(2) = \sqrt{2-1} + \sqrt{4-2*2} = \sqrt{1} + 0 = 1$$

Функція $f(x)$ є неперервна на інтервалі $[1; 2]$, а область значень даної функції є на проміжку $[1; \sqrt{3}]$.

Отже дане рівняння має розв'язок тоді і тільки тоді, коли $a \in [1; \sqrt{3}]$

Задача 6.

При яких значеннях a рівняння

$$\left| \frac{5}{9}x - a \right| = \frac{3x + 1}{x + 2}$$

має рівно два розв'язки.

Розв'язання. Розглянемо окремо дві частини рівняння.

Графік функції $f(x) = \left| \frac{5}{9}x - a \right|$ - це сім'я графіків, як видно на Рис 4.1

Графік функції $g(x) = \frac{3x+1}{x+2}$ - це гіпербола, як видно на Рис 4.2.

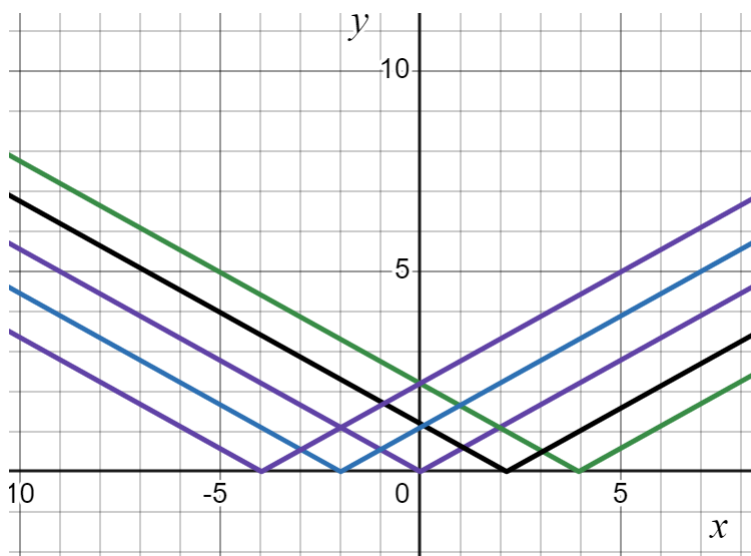


Рис. 4.1: Графік функції $f(x) = \left| \frac{5}{9}x - a \right|$

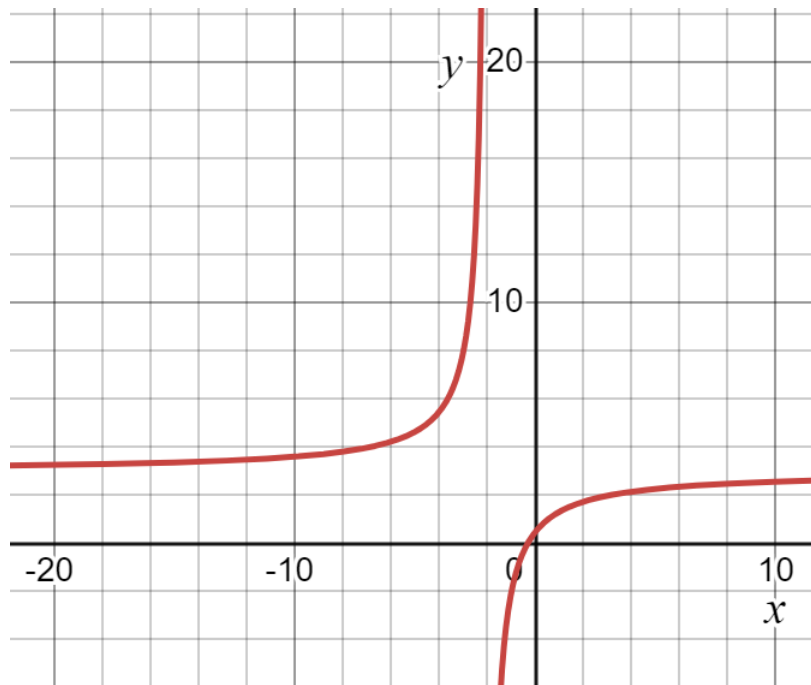


Рис. 4.2: Графік функції $g(x) = \frac{3x+1}{x+2}$

Тому ці два графіки функцій можуть перетинатися в одній точці, як видно на Рис 4.3 (а), тобто є один корінь рівняння.

На Рис 4.3 (б),(в) графіки функцій перетинаються в двох точка, тому є два корені.

На Рис 4.3 (г),(д) графіки функцій перетинаються в трьох точках, тому і коренів рівняння є три.

А для того щоб було рівно два розв'язки, потрібно, щоб пряма $y = \frac{5}{9}x - a$ дотикалася до гіперболи $g(x) = \frac{3x+1}{x+2}$, так як видно на Рис 3.3 (б),(в) .

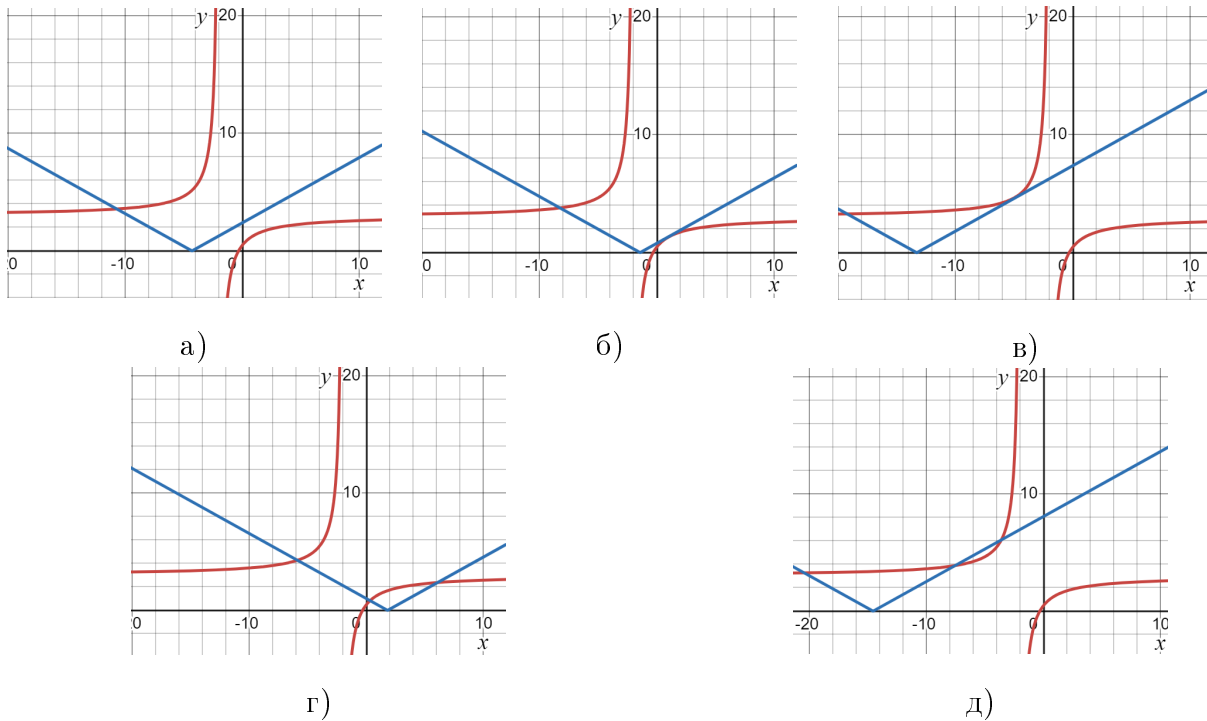


Рис. 4.3: Випадки перетину двох функцій.

Згідно з геометричним змістом функції $f'(x_0) = \frac{5}{9}$, де точка x_0 - абсциса точки дотику. Тому, знайдемо похідну функції $g(x)$ і прирівняємо її до похідної функції $f(x)$.

$$g'(x) = \frac{3(x+2) - 3x - 1}{(x+2)^2} = \frac{5}{(x+2)^2} = \frac{5}{9},$$

$$(x+2)^2 = 9,$$

$$x+2 = 3,$$

$$x+2 = -3,$$

$$x = 1,$$

$$x = -5.$$

Складемо рівняння двох дотичних до графіка функції $g(x)$ у точках $x_0 = 1$ та $x_0 = -5$.

$$y = g'(x_0)(x - x_0) + g(x_0).$$

$$y_1 = \frac{5}{9}(x + 5) + \frac{-5 * 3 + 1}{-5 + 2} = \frac{5}{9}x + \frac{25}{9} + \frac{14}{3} = \frac{5}{9}x + \frac{67}{9}.$$

$$y_2 = \frac{5}{9}(x - 1) + \frac{3 * 1 + 1}{1 + 2} = \frac{5}{9}x - \frac{5}{9} + \frac{4}{3} = \frac{5}{9}x + \frac{7}{9}.$$

Звідси випливає, що при $a = \frac{67}{9}$ і при $a = \frac{7}{9}$ задане рівняння

$$\left| \frac{5}{9}x - a \right| = \frac{3x + 1}{x + 2}$$

має рівно два розв'язки.

Розділ 5

Застосування похідної для доведення тотожностей

До задач елементарної математики відносяться задачі на доведення тотожностей і тотожні перетворення.

В деяких випадках потрібно спростити заданий вираз і тим самим довести тотожність. А в інших випадках тотожні перетворення використовують як додатковий спосіб при розв'язуванні рівнянь, нерівностей, для дослідження функцій тощо.

Доведення тотожності базується на ознаці сталості функції.

Ознака сталості [3]

Якщо на деякому інтервалі похідна функції $f'(x) = 0$, то ця функція є сталою на цьому інтервалі.

Тому для доведення тотожності $f(x) = g(x)$ на проміжку $(a; b)$ достатньо перевірити, що похідна $f'(x) = g'(x)$ на $(a; b)$ і хоча би в одній точці c

при $a < c < b$ справджується $f(c) = g(c)$ [1].

Задача 1.

Довести тотожність

$$(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 - 3(b+c)(c+a)(a+b) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$$

Розв'язання.

Позначимо ліву і праву частину тотожності через функції:

$$f(b) = (b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 - 3(b+c)(c+a)(a+b),$$

$$g(b) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).$$

де b -аргумент, a і c довільні числа.

Знайдемо похідні цих функцій:

$$\begin{aligned} f'(b) &= 3(b+c)^2 + 3(a+b)^2 - 3(c+a)(a+b+b+c) = \\ &= 3b^2 + 6bc + 3c^2 + 3a^2 + 6ab + 3b^2 - 3ac - 6bc - 3c^2 - 3a^2 - 6ab - 3ac = 6b^2 - 6ac. \end{aligned}$$

$$g'(b) = 2(3b^2 - 3ac) = 6b^2 - 6ac.$$

Ленко помітити, що похідні функцій рівні, тобто $f'(b) = g'(b)$.

Отже, $f(b) = g(b) + C$ Нехай $b = 0$. Тоді:

$$\begin{aligned} f(0) &= c^3 + (c+a)^3 + a^3 - 3ac(c+a) = \\ &= c^3 + c^3 + c^2a + 2ac^2 + 2a^2c + a^2c + a^3 + a^3 - 3ac^2 - 3a^2c = 2c^3 + 2a^3. \end{aligned}$$

Тобто $f(0) = 2c^3 + 2a^3$,

$$g(0) = 2(a^3 + c^3)$$

Виходить що $f(0) = g(0)$, а отже $C = 0$. Звідси випливає висновок, що $f(b) = g(b)$.

$$(b+c)^3 + (c+a)^3 + (a+b)^3 - 3(b+c)(c+a)(a+b) = 2(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc).$$

Задача 2.

Довести, що при $x > -1$ справджується

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язання. Позначу тотожність функцією

$$f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}.$$

Знайдемо похідну функції і прирівняємо її до нуля:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} + \\ &+ \frac{(1+x)^2}{(1+x)^2 + (1-x)^2} \cdot \frac{-1-x-1+x}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{1+2x+x^2+1-2x+x^2} = \\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{2}{2+2x^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2} = 0. \end{aligned}$$

Відповідно до ознаки сталості функцій $f(x) = c$, при $x > -1$. Підставимо $x = 0$ для знаходження значення c .

Отримаємо:

$$f(0) = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} \frac{1-0}{1+0} = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arctg} 1 = 0 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Звідси випливає, що $f(x) = \frac{\pi}{4}$, отже тотожність доведена

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}.$$

Задача 3.

Довести, що при $x > 0$ виконується дана тотожність

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x.$$

Розв'язання. Позначимо дану тотожність через дві функції:

$$f(x) = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad g(x) = \operatorname{arctg} x.$$

Перевіримо чи похідні цих функцій співпадають:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1+x^2}}} * \left(-\frac{1}{2(\sqrt{1+x^2})^3} * 2x \right) = \frac{x}{\sqrt{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} * (\sqrt{1+x^2})^3} = \\ &= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{x(\sqrt{1+x^2})^3} = \frac{1}{1+x^2}. \\ g'(x) &= 1 \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Отже, похідні функцій співпадають, $f'(x) = g'(x)$.

Тепер візьмемо довільне число, яке задовільняє умову задачі $x > 0$. Наприклад $x = 1$.

Знайдемо значення функцій в даній точці:

$$\begin{aligned} f(1) &= \arccos \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}. \\ g(1) &= \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Випливає, що $f(1) = g(1) = \frac{\pi}{4}$.

Отже, для будь якого $x > 0$ виконується задана тотожність

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \operatorname{arctg} x.$$

Задача 4.

Довести тотожність

$$3(\sin^4 \beta + \cos^4 \beta) - 2(\sin^6 \beta + \cos^6 \beta) = 1$$

Розв'язання. Позначу даний вираз через функцію:

$$f(\beta) = 3(\sin^4 \beta + \cos^4 \beta) - 2(\sin^6 \beta + \cos^6 \beta)$$

, яка на множині $\mathfrak{R}$ диференційована. Знайдемо її похідну і спростимо

$$\begin{aligned} f'(\beta) &= 3(4\sin^3 \beta \cos \beta - 4\cos^3 \beta \sin \beta) - 2(6\sin^5 \beta \cos \beta - 6\cos^5 \beta \sin \beta) = \\ &= 3(2\sin^2 \beta \sin 2\beta - 2\cos^2 \beta \sin 2\beta) - 2(3\sin^4 \beta \sin 2\beta - 3\cos^4 \beta \sin 2\beta) = \\ &= 6\sin 2\beta(\sin^2 \beta - \cos^2 \beta) - 6\sin 2\beta(\sin^4 \beta - \cos^4 \beta) = 6\sin 2\beta(\sin^2 \beta - \\ &\cos^2 \beta - (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta)(\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)) = 6\sin 2\beta(-\cos 2\beta + \cos 2\beta * 1) = \\ &= 6\sin 2\beta * 0 = 0 \end{aligned}$$

Отже для $\forall \beta \in \mathfrak{R}$, $f(\beta) = a$.

Знайдемо a . Для цього знайдемо значення функції для $\beta = 0$

$$f(\beta) = f(0) = 3(0 + 1) - 2(0 + 1) = 3 - 2 = 1$$

Звідси випливає що $\forall \beta \in \mathfrak{R}$, $f(\beta) = 1$, тобто

$$3(\sin^4 \beta + \cos^4 \beta) - 2(\sin^6 \beta + \cos^6 \beta) = 1$$

Висновки

В магістерській роботі систематизовано методи розв'язування задач елементарної математики за допомогою похідної. Це дає можливість звертати увагу учнів на найбільш раціональний, красивий спосіб розв'язання даної задачі, на новий ефективний математичний апарат. Зокрема, в роботі показано, як за допомогою похідної ефективно можна розв'язувати наступні задачі елементарної математики: порівняння значень функцій, дослідження властивостей функцій, побудова їх графіків, дослідження і розв'язання рівнянь, доведення нерівностей та тотожностей.

Отже, для розв'язання кожної задачі спочатку необхідно проаналізувати і вибрати відповідний метод розв'язування, перевіряти умови його застосовності, а також аналізувати одержані результати.

Результати магістерської роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути використані для підготовки випускників до національного мультипредметного тесту, у доуніверситетській підготовці молоді, ліцелях, гімназіях та школах з поглибленим вивченням математики.

Список використаних джерел

1. Чорний В.З., Хохлова Л.Г., Хома-Могильська С.Г. Прикладні аспекти диференціального числення: Навчальний посібник. – Тернопіль: «Тайп», 2016. – 72 с.
2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2011. – 480 с.
3. Бродський Я.С., Сліпенко А.К. Похідна та інтеграл у нерівностях, рівняннях, тотожностях. – Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2012. – 120 с.
4. Лященко М.Я. Застосування похідної для доведення тотожностей. У світі математики. – 1980. – Вип. 11. – С. 48–61.
5. Рижов Ю.М. Похідна та її застосування. – К.: Вища шк., 1977. – 83 с.
6. Лейфура В.М., Мітельман І.М., Радченко В.М., Ясінський В.А. Математичні олімпіади школярів України 2001-2006. – Львів: Каменярь, 2008. – 348 с.
7. Сарана О.А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навчальний посібник. Друге видання, доповнене. – Тернопіль: Навчальна книга -

Богдан, 2011. – 400 с.

8. Семйоник С.П. Застосування похідної до розв'язування задач елементарної математики. Актуальні проблеми сучасної науки: матеріали XI-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій. – Дрогобич, 2024. – С. 320–321.

9. Сивашинський І.Х. Нерівності в задачах. – М.: Наука, 1967. – 275 с.

10. Федак І.В. Методи розв'язування олімпіадних завдань з математики і не тільки їх. – Чернівці.: Зелена Буковина, 2002. – 340 с.

11. Собкович Р.І., Кульчицька Н.В. Основні методи доведення нерівностей. – Івано-Франківськ, 2014. – 100 с.

12. Шунда Н.М. Застосування похідної до розв'язування задач: Посібник. – К.: Техніка. 1991. – 240 с.

13. Ушаков Р.П. Похідна допомагає доводити нерівності. У світі математики, 2010. – № 2. – С. 24–30.

14. Вайнтрауб М., Каган Л., Каган М. Застосування похідної при розв'язуванні задач шкільного курсу: методика, досвід, пошук. Математика в школі, 2006. – № 9. – С. 33–37.

15. Євтодьева Т. Застосування похідної до розв'язування прикладних задач: алгебра та початки аналізу: 11 клас. Шкільний світ, 2013. – № 3. – С. 8–13.