

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних технологій
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК «__» _____ 2024 р.

Формування математичної компетентності
учнів у процесі вивчення функцій

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації
«Вчитель математики, викладач закладу фахової передвищої,
вищої освіти, вчитель інформатики»

Автор роботи – Стаськів Діана Іванівна _____

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук,
доцент Комарницька Леся Іванівна _____

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

Формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення функцій

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____	Голова ЕК	_____	_____
дата		підпис	власне ім'я та прізвище
	Секретар ЕК	_____	_____
		підпис	власне ім'я та прізвище

Анотація. Стаськів Діана. Формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення функцій

У магістерській роботі досліджується розвиток математичної компетентності як важливого компонента сучасної освіти, а також особливості вивчення функцій у шкільному курсі математики. У першому розділі представлено історичний контекст формування математичної компетентності, її значення в освітньому процесі та основні поняття, що включають структуру і компоненти. Другий розділ присвячено специфіці вивчення функцій у школі. Описуються основні поняття та типи функцій, що вивчаються в навчальному процесі, а також типові труднощі, з якими стикаються учні під час опанування цієї теми. У третьому розділі наведені конкретні приклади завдань, розроблених для покращення методологічних підходів до вивчення функцій. Завдання спрямовані на розвиток критичного мислення та практичних навичок учнів, що є необхідними для формування їхньої математичної компетентності.

Abstract. Staskiv Diana. Formation of Students' Mathematical Competence in the Process of Studying Functions

This master's thesis explores the development of mathematical competence as an important component of modern education, as well as the peculiarities of studying functions in the school mathematics curriculum. The first chapter presents the historical context of the formation of mathematical competence, its significance in the educational process, and key concepts including its structure and components. The second chapter is dedicated to the specifics of studying functions in school. It describes the fundamental concepts and types of functions covered in the educational process, as well as the typical difficulties students encounter while mastering this topic. The third chapter provides specific examples of tasks designed to enhance methodological approaches to the study of functions. These tasks aim to develop students' critical thinking and practical skills, which are essential for forming their mathematical competence.

Зміст

Вступ	5
1. Історія розвитку та значення математичної компетентності в сучасній освіті.....	7
1.1 Історична довідка.....	7
1.2 Поняття математичної компетентності: визначення, структура, компоненти.	10
1.3 Аналіз підходів до формування математичної компетентності в процесі навчання.....	12
2.Особливості вивчення функцій у шкільному курсі математики.....	15
2.1 Основні поняття та типи функцій, які вивчаються в школі.	15
2.2 Типові труднощі, з якими стикаються учні під час вивчення функцій	34
2.3 Методологічні підходи до вивчення функцій.....	35
3.Приклади завдань для покращення методологічних підходів до вивчення функцій	38
Висновки	46
Список використаних джерел.....	47

Вступ

У сучасному світі математична компетентність є однією з ключових навичок, що забезпечують успіх у багатьох професійних сферах, таких як інженерія, ІТ, економіка тощо. В умовах стрімкого розвитку технологій та зростаючої важливості аналітичного мислення, підвищення рівня математичної підготовки стає критично важливим завданням освіти. Вивчення функцій займає центральне місце в шкільному курсі математики. Знання про функції є основою для розуміння багатьох інших математичних концепцій, таких як диференціальне й інтегральне числення, а також застосування математики в природничих науках та економіці. Формування глибокого розуміння функцій є необхідним для подальшого успішного навчання.

Вивчення функцій сприяє розвитку критичного мислення, здатності до аналізу та синтезу інформації, що є важливими компонентами математичної компетентності. Учні, які опановують ці навички, здатні більш ефективно вирішувати як математичні, так і життєві завдання.

Багато учнів стикаються з труднощами при вивченні функцій через їх абстрактний характер. Недостатнє розуміння цієї теми може призвести до зниження загального рівня математичної компетентності. Це вимагає розробки ефективних методик навчання, які б полегшили учням освоєння цієї важливої теми.

Традиційні методи викладання часто не забезпечують належного рівня розуміння функцій учнями. Це вимагає дослідження нових підходів та методик, які б сприяли кращому засвоєнню матеріалу та формуванню необхідних навичок.

У сучасному світі, де знання та компетенції мають вирішальне значення, формування математичної компетентності стає одним з основних завдань освітнього процесу. Це особливо актуально в контексті підготовки учнів до

майбутньої професійної діяльності, де математичні знання та навички можуть відігравати ключову роль.

Таким чином, дослідження, спрямоване на формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення функцій, має високу **актуальність** з огляду на сучасні освітні та соціально-економічні виклики.

Метою магістерської роботи є покращення методичних підходів до формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення функцій, що сприяють глибшому засвоєнню математичних знань, розвитку критичного мислення та підвищенню рівня підготовки учнів до подальшого навчання і професійної діяльності.

Об'єктом роботи є процес формування математичної компетентності учнів загальноосвітніх шкіл. **Предметом** – методичні підходи та дидактичні засоби, спрямовані на формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення функцій.

Завдання магістерської роботи:

1. Проаналізувати теоретичні основи формування математичної компетентності.
2. Вивчити сучасні методичні підходи до викладання функцій.
3. Розробити рекомендації щодо покращення методичних підходів для викладання функцій.

Для виконання завдань магістерської роботи будуть використані такі методи, як аналіз наукової літератури з тематики дослідження, анкетування та аналіз.

Результати дослідження доповідалися на міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка [16].

1. Історія розвитку та значення математичної компетентності в сучасній освіті

1.1 Історична довідка

Історія виникнення поняття **математичної компетентності** пов'язана з розвитком освіти та еволюцією підходів до навчання, які ставили перед собою мету не лише передати знання, але й навчити їх практичному застосуванню. Поняття математичної компетентності почало формуватися у другій половині XX століття в контексті змін освітніх парадигм і вимог до навчання математики [2].

Перші згадки поняття компетентності з'явилися в освітніх системах після Другої світової війни, у 1950-1960-х роках, коли багато країн почали реформування освіти. Акцент почав зміщуватися з передачі знань до розвитку практичних навичок і компетенцій. Ідея компетентнісного підходу виникла на противагу традиційному підходу, який орієнтувався на репродуктивне навчання. У післявоєнний період також зростав попит на технічні та інженерні кадри, що вимагало від фахівців не тільки знання теорії, але й вміння її застосовувати на практиці [5].

У 1970-х роках поняття компетентності, включно з математичною компетентністю, стало активно обговорюватися в педагогіці Європи та Америки в рамках концепції **ключових компетенцій**. Освітні системи різних країн почали більше уваги приділяти тому, щоб учні могли використовувати знання для вирішення реальних проблем. Математична компетентність тоді почала розглядатися як здатність вирішувати проблеми, а не лише як накопичення математичних знань.

Важливий етап у формуванні сучасного розуміння математичної компетентності припадає на 1980-1990-ті роки, коли міжнародні дослідження, такі як TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) і PISA

(Programme for International Student Assessment) [7], почали оцінювати рівень математичної підготовки учнів. Ці дослідження розширили розуміння математичної компетентності як сукупності умінь та навичок, які необхідні для успішної соціальної адаптації та застосування в життєвих ситуаціях. Зокрема, PISA акцентувала увагу на здатності учнів використовувати математичні знання для вирішення життєвих завдань.

На початку XXI століття компетентнісний підхід став офіційно впроваджуватися у навчальні програми багатьох країн, і математична компетентність стала однією з ключових. У 2006 році **Європейська Рада** затвердила документ «Європейські ключові компетенції для навчання впродовж життя», де математична компетентність була визнана однією з восьми ключових компетенцій [10]. Це було важливим кроком у закріпленні математичної компетентності як центрального елемента навчальних програм, орієнтованих на підготовку учнів до життя в сучасному світі.

Сьогодні математична компетентність є одним із важливих компонентів компетентнісного підходу в освіті. Вона охоплює не тільки базові математичні знання, але й здатність критично мислити, вирішувати проблеми, використовувати математичне моделювання та застосовувати математичні методи у професійній діяльності [11]. Міжнародні оцінювання, такі як PISA, продовжують оцінювати рівень математичної компетентності учнів у контексті їхньої готовності до викликів сучасного суспільства.

Зарубіжні дослідники, такі як Лестер, підкреслюють, що математична компетентність – це не лише володіння знаннями, але й здатність до їх ефективного використання. У цьому контексті література розкриває важливість інтеграції математичних знань у практичну діяльність, що стає ключовою вимогою для сучасного навчання. Роботи таких науковців, як Кілпатрік, Сваффорд і Філліпс звертають увагу на те, що математична компетентність – це

комплекс навичок, що включає в себе також аналітичне мислення, математичну грамотність та здатність до моделювання.

Наукові праці таких авторів, як Віктор Андрущенко, Сергій Гончаренко, Іван Зязюн, Василь Кремень та Сергій Кримський, закладають теоретичні підвалини для дослідження компетентнісного підходу. Їхні роботи визначають сучасні тенденції в освіті, які ґрунтуються на розвитку особистості через освіту та культивування критичного й аналітичного мислення. Зокрема, Василь Кремень у своїх працях досліджує концепцію філософії освіти в умовах глобалізації та технологізації, підкреслюючи, що освіта повинна підготувати людину до адаптації в складних умовах та вирішення соціальних проблем, до чого безпосередньо спричиняється формування математичної компетентності.

Роботи Анатолія Алексюка, Геннадія Корнетова, Тетяни Кочубей, Олександра Мороза, Миколи Фіцули та Бориса Шияна аналізують педагогічну освіту як основу для впровадження компетентнісного підходу. Вони підкреслюють, що підготовка вчителів повинна орієнтуватися на розвиток компетентностей учнів, зокрема математичної. Микола Фіцула та Борис Шиян акцентують увагу на необхідності зміщення акценту від запам'ятовування теоретичних знань до практичного застосування математичних вмінь для вирішення реальних життєвих проблем.

Праці Євгенії Антоненко, Неллі Бібік, Валентини Завіної, Ольги Комар, Ольги Овчарук, Ольги Пометун, Петра Підкасистого, Олександра Савченка та Галини Щукіної зосереджуються на дослідженні процесу формування математичної компетентності як важливого аспекту освіти. Неллі Бібік активно працює над питанням розвитку математичної компетентності через діяльнісний підхід, за допомогою якого учні самостійно здобувають знання та використовують їх у реальному житті. Ольга Пометун та Ольга Овчарук досліджують реалізацію компетентнісного підходу в навчальному процесі, наголошуючи на міждисциплінарних підходах до викладання. Роботи Неллі

Бібік, Ольги Овчарук та Олександра Савченка стосуються практичних аспектів впровадження компетентнісного підходу в освітній процес. Вони підкреслюють, що компетентнісне навчання передбачає не лише засвоєння знань, але й їх практичне застосування для вирішення міждисциплінарних завдань, що є ключовим для розвитку математичної компетентності.

1.2 Поняття математичної компетентності: визначення, структура, компоненти

Математична компетентність – це здатність особистості ефективно використовувати математичні знання, уміння та навички для вирішення завдань у різних життєвих ситуаціях. Вона охоплює не лише володіння математичним апаратом, але й здатність до логічного мислення, аналізу та моделювання, а також уміння застосовувати математичні методи для вирішення реальних проблем [3]. Математична компетентність передбачає вміння будувати аргументи та логічно обґрунтовувати власні рішення, адаптуючи математичні знання до різних контекстів.

Структура математичної компетентності складається з кількох основних компонентів. **Концептуальний компонент** охоплює знання математичних понять, формул та теорем, а також розуміння основних ідей і взаємозв'язків між ними [5]. Наприклад, учень знає, що таке функція, розуміє основні математичні терміни та визначення, наприклад, «похідна», «графік», «модуль числа». При вивченні тригонометрії учень може пояснити, що таке синус, косинус і тангенс, та використовувати їх для розв'язання задач.

Операційний компонент включає вміння виконувати математичні операції, такі як розв'язування рівнянь, обчислення або аналіз графіків. Тобто, учень може розв'язувати рівняння та нерівності, обчислювати похідні та інтеграли [8]. Під час вивчення геометрії учень розв'язує завдання на обчислення площ та об'ємів фігур, виконуючи всі необхідні математичні операції.

Важливим аспектом є **проблемно-орієнтований компонент**, який передбачає здатність застосовувати математичні знання для вирішення практичних завдань та моделювання реальних ситуацій. Наприклад, учень здатний застосовувати знання про лінійні функції для вирішення економічних задач, наприклад, обчислити прибуток залежно від продажів. При розв'язанні задачі на рух учень може побудувати математичну модель, використовуючи відомі формули для швидкості, часу та відстані.

Також значущими є **логічний компонент [10]**, що включає навички побудови математичних доказів, аналізу та аргументації (наприклад, учень здатний побудувати доведення теореми, наприклад, довести, що сума кутів трикутника дорівнює 180 градусів; у процесі вирішення задач учень логічно обґрунтовує кожен крок, пояснюючи, чому вибрав саме таке рішення), та **евристичний компонент [12]**, який відображає здатність знаходити нові підходи до розв'язування задач і проявляти креативність у пошуку рішень. Прикладами евристичного компоненту є: якщо стандартний метод не підходить для розв'язання задачі, учень пропонує новий підхід або використовує нестандартну стратегію; він може використовувати геометричні перетворення для спрощення складної задачі. У задачах на оптимізацію (як знайти максимальну чи мінімальну величину) учень може спробувати кілька різних підходів і знайти найбільш ефективний.

Комунікативний компонент полягає в здатності чітко і зрозуміло висловлювати математичні ідеї та результати, спілкуватися з іншими в процесі обговорення математичних питань [14]. Наприклад, учень може пояснити розв'язок математичної задачі іншим учням або викладачу, аргументуючи свої кроки. У дискусіях щодо рішення учень може чітко формулювати математичні ідеї та доводити, чому його рішення є правильним.

1.3 Аналіз підходів до формування математичної компетентності в процесі навчання

Основні підходи, що застосовуються в сучасній освіті для розвитку математичної компетентності, включають діяльнісний, компетентнісний, проблемний, технологічний, індивідуалізований та міждисциплінарний підходи [13]. Діяльнісний підхід акцентує увагу на практичному застосуванні знань, де учні не лише засвоюють теоретичний матеріал, але й вчаться застосовувати його в реальних життєвих ситуаціях. Він спрямований на розвиток аналітичного мислення, логіки та здатності до самостійного пошуку рішень. Наприклад, учні отримують завдання знайти залежність між доходом і витратами сімейного бюджету за місяць, використовуючи функції. Наприклад, функція може відображати, як змінюється залишок на рахунку в залежності від кількості витрат. Учні мають змодельовати цю залежність, використовуючи реальні дані. Це допоможе їм зрозуміти застосування математичних функцій у повсякденному житті.

Компетентнісний підхід зосереджується на формуванні не лише знань, але й умінь, здатностей та мотивації для їх самостійного використання. У цьому контексті важливу роль відіграє критичне мислення та здатність застосовувати математичні концепції для вирішення міждисциплінарних задач [10]. Під час вивчення функцій учні повинні не лише знати теорію (наприклад, властивості квадратичної функції), але й вміти застосовувати їх для вирішення практичних завдань. Наприклад, вирішуючи задачі оптимізації (максимізація прибутку або мінімізація витрат), учні повинні аналізувати графіки функцій та знаходити їхні екстремуми.

Проблемне навчання передбачає, що учні отримують завдання, які виходять за межі стандартних ситуацій і вимагають не лише застосування засвоєних знань, але й творчого підходу та логіки. Учням пропонується вирішити реальну задачу, наприклад, проєктування водопостачальної системи, де потік води залежить від тиску, що може бути описано функцією [9]. Вчитель

не дає готового рішення, але направляє учнів до самостійного пошуку розв'язку шляхом застосування функціональних залежностей.

Інформаційно-комунікаційні технології (ІКТ) дозволяють зробити навчальний процес більш інтерактивним, використовуючи візуальні інструменти, симуляції та моделювання для вивчення складних математичних понять. Прикладом цього може бути використання програмного забезпечення, як-от GeoGebra, для побудови та аналізу графіків функцій. Учні можуть вводити різні рівняння функцій і відразу бачити їх графічне зображення, досліджувати залежності між параметрами функцій та їх вплив на графік.

Індивідуалізований підхід передбачає адаптацію навчальних матеріалів під рівень підготовки кожного учня, що дозволяє ефективніше працювати з різними групами учнів і сприяти їхньому розвитку залежно від їхніх потреб. Викладач може дати різнорівневі завдання з теми функцій, де слабшим учням пропонуються базові вправи на побудову графіків, а більш підготовленим — задачі на аналіз складніших функцій, наприклад, визначення асимптот або розв'язок систем рівнянь, які включають логарифмічні чи тригонометричні функції [11].

Міждисциплінарний підхід інтегрує математичні знання у інші навчальні предмети та сфери життя, що допомагає учням краще розуміти практичну цінність математики та застосовувати її в різних контекстах. Учні можуть вивчати функції в контексті фізичних явищ, наприклад, залежність швидкості руху об'єкта від часу (лінійні та квадратичні функції) або зміну напруги у колі під час заряду конденсатора (експоненційна функція) [5].

Усі ці підходи спрямовані на формування математичної компетентності, що включає здатність учнів розуміти математичні концепції, використовувати їх у повсякденному житті та продовжувати навчатися протягом усього життя. Педагогічні дослідження підтверджують, що створення сприятливого навчального середовища, яке дозволяє учням проявляти ініціативу та застосовувати свої знання на практиці, є важливим для успішної реалізації цих

підходів.

2. Особливості вивчення функцій у шкільному курсі математики

2.1 Основні поняття та типи функцій, які вивчаються в школі

Основні поняття та типи функцій, які вивчаються в школі, є важливою частиною курсу математики, оскільки саме функції становлять одну з базових структур алгебри та аналізу. Вивчення функцій дає можливість учням ознайомитися з математичними моделями, що описують різні реальні процеси та явища [11]. Функції виступають засобом для встановлення залежностей між змінними, що дозволяє вирішувати широкий спектр задач з інших дисциплін, таких як фізика, економіка, інформатика тощо. У шкільному курсі математики велика увага приділяється базовим типам функцій, як-от лінійні, квадратичні, степеневі, логарифмічні, експоненційні та тригонометричні функції.

Розглянемо детальніше кожен із типів функцій.

Функцією називається залежність змінної y від змінної x , якщо кожному значенню x відповідає єдине значення y .

Функцію позначають латинськими буквами $f, g, h, \dots$ (або $f(x), g(x), h(x), \dots$) або рівностями $y = f(x), y = g(x), y = h(x), \dots$. Якщо задане конкретне значення незалежної змінної $x = x_0$, то $y_0 = f(x_0)$ називається значенням функції f в точці x_0 .

1) Площу круга можна визначити за формулою $Q = \pi r^2$, де r – аргумент, Q – функція.

2) Суму внутрішніх кутів багатокутника можна знайти за формулою $S = \pi(n - 2)$, де n – число сторін багатокутника. Дану формулу можна розглядати як функціональну залежність, де S – функція від n , n – аргумент.

Множина значень, яких набуває незалежна змінна x , називається **областю визначення функції**. Область визначення функції позначається $D(f)$ (від англ. *define* – визначити) [3]. Множина, яка складається із всіх чисел $f(x)$

таких, що x належить області визначення функції f , називається **областю значень функції** і позначається $E(f)$ (від англ. *exist* – існувати).

Розглянемо приклад. Результати вимірювання температури тіла хворого в залежності від часу подано в таблиці:

Час доби x (год)	9	12	15	18	21	24
Температура тіла $y=f(x)$ (C°)	39	38,5	38,3	37,3	37,1	37

За допомогою таблиці 1 згадаємо найбільш важливі моменти, які треба врахувати при знаходженні області визначення функції.

Таблиця 1

Область визначення функції

№ з/п	Функція	Область визначення
1.	$f(x) = Ax^n + Bx^{n-1} + \dots + C$ (многочлен n -го степеня)	$x \in (-\infty; +\infty)$
2.	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
3.	$y = \sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
4.	$y = \frac{g(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$f(x) > 0$

Числовою функцією з областю визначення X називається залежність, при якій кожному числовому значенню x з множини X поставлено у відповідність єдине число y .

Способи задання функцій:

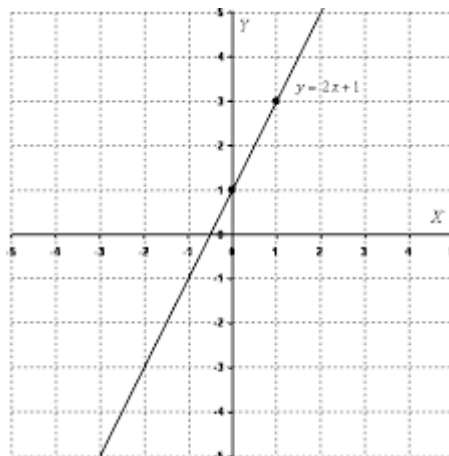
1) за допомогою формули:

а) $f(x) = \pi x^2$; б) $f(x) = \pi(x - 2)$;

2) за допомогою таблиці:

X	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81

3) за допомогою графіка;



4) описанням: «Кожному натуральному числу поставлено у відповідність його куб»;

5) аналітичне задання:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x < -1 \text{ або } x > 1; \\ -1, & \text{якщо } -1 < x < 1; \\ 0, & \text{якщо } x = \pm 1. \end{cases}$$

Лінійна функція

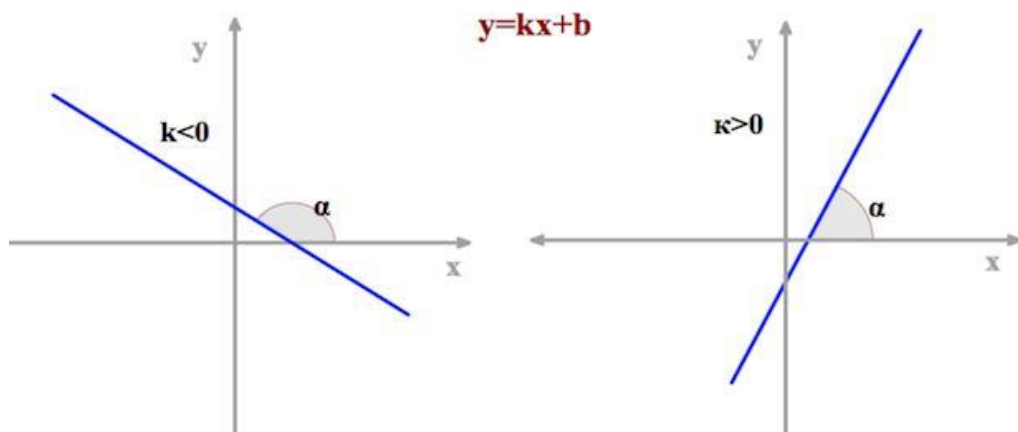
Означення. Лінійною функцією називається функція, яку можна задати формулою виду $y = kx + b$, де x – незалежна змінна, k, b – будь-які числа.

Графіком функції $y = kx + b$ є пряма лінія. Для побудови графіка $y = kx + b$ достатньо знати координати двох точок цього графіка. Узявши $x = 0 \Rightarrow y = b \Rightarrow A(0; b)$ – точка перетину з віссю Oy . Узявши

$y = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{k} (k \neq 0) \Rightarrow B(-\frac{b}{k}; 0)$ – точка перетину з віссю Ox . Таким

чином, точки перетину графіка функції $y = kx + b$ з осями координат будуть

$B(-\frac{b}{k}; 0), A(0; b)$, якщо $k \neq 0$.



При $k = 0$ отримаємо пряму $y = b$, яка паралельна осі Ox і збігається з віссю Ox , якщо $b = 0$.

Властивості лінійної функції $y = kx + b$

1. Областю визначення є множина всіх дійсних чисел.
2. Областю значень функції при $k \neq 0$ є множина всіх дійсних чисел; при $k = 0$ функція набуває лише одного значення $y = b$.
3. Графіком функції є пряма.
4. Графік функції утворює з додатним напрямом осі x гострий кут, якщо $k > 0$, тупий кут, якщо $k < 0$. Якщо $k = 0$, то графік паралельний осі x , зокрема, якщо $k = 0$ і $b = 0$, то він збігається з віссю x .

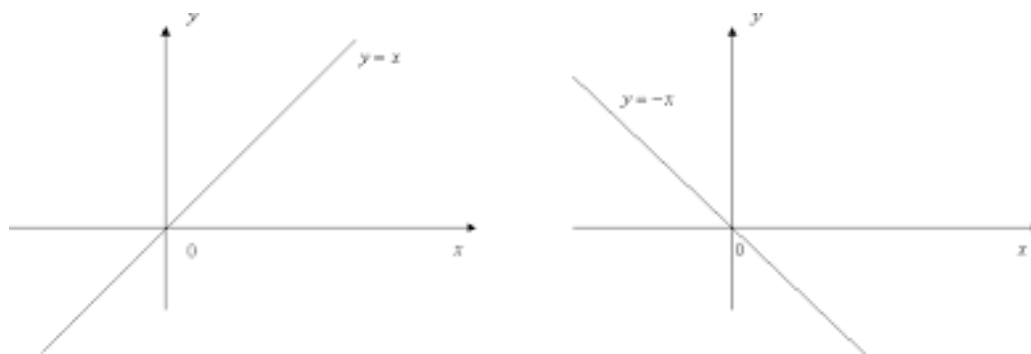
Функція виду $y = kx$

Функція виду $y = kx$ ($k \neq 0$) називається прямою пропорційністю, де k – коефіцієнт прямої пропорційності. Графіком функції $y = kx$ є пряма, яка проходить через початок координат [8].

Зауваження. Для лінійної функції $y = kx + b$ достатньо задати координати двох точок.

Графіком функції $y = x$ є пряма лінія, яка проходить через початок координат. Її називають бісектрисою 1-го і 3-го координатних кутів.

Графіком функції $y = -x$ є пряма лінія, яка проходить через початок координат. Її називають бісектрисою 2-го і 4-го координатних кутів.



Властивості функції $y = x$ і $y = -x$

- 1) $D(f) = R$;
- 2) $E(f) = R$;
- 3) нулі функції: $y = 0$ при $x = 0$.
- 4) функція набуває від'ємних значень при $x \in (-\infty; 0)$; функція набуває додатних значень при $x \in (0; +\infty)$; функція набуває від'ємних значень при $x \in (0; +\infty)$; функція набуває додатних значень при $x \in (-\infty; 0)$;
- 5) функція зростає на всій області визначення; функція спадає на всій області визначення;
- 6) функція не має екстремумів;
- 7) $y(-x) = -y(x)$ функція $y = x$ непарна, її графік симетричний відносно початку координат.

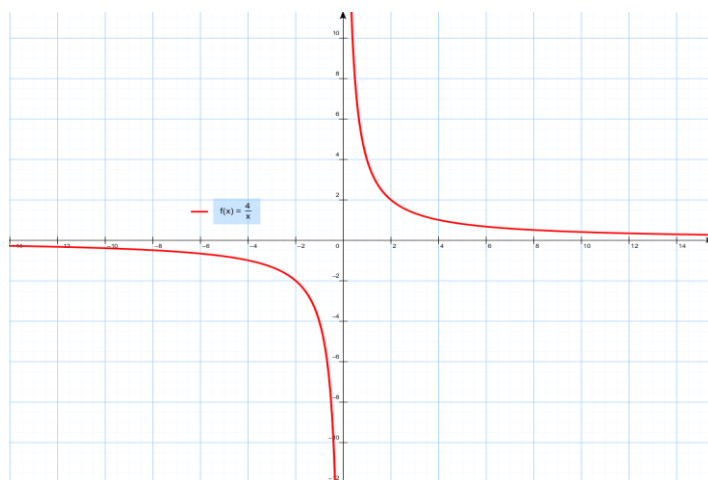
Функція $y = \frac{k}{x}$ і її графік

Означення. Функція виду $y = \frac{k}{x}$, ($k \neq 0$) називається оберненою пропорційністю; k – коефіцієнт оберненої пропорційності [5].

Побудуємо графік функції $y = \frac{4}{x}$. Складемо таблицю.

x	-8	-4	-2	-1	-0,5	0,5	1	2	4	8
y	-0,5	-1	-2	-4	-8	8	4	2	1	0,5

Позначимо на координатній площині точки і отримаємо графік функції.



Графіком оберненої функції є гіпербола, яка складається з двох віток, розміщених у першій (другій) і третій (четвертій) координатних чвертях.

Властивості функції $y = \frac{k}{x}$

- 1) $D(f) = R$;
- 2) $E(f) = R$;
- 3) графіком функції є гіпербола, яка складається з двох віток;
- 4) графік функції лежить у I і III координатних чвертях, якщо $k > 0$; та II і IV координатних чвертях, якщо $k < 0$;
- 5) графік функції симетричний відносно початку координат.

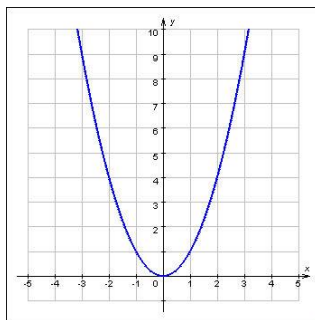
Функція виду $y = x^2$

Функція, задана формулою $y = x^2$, називається квадратичною.

Побудуємо графік функції $y = x^2$. Складемо таблицю для декількох значень:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4	1	0	1	4	9

Графіком квадратичної функції є парабола.



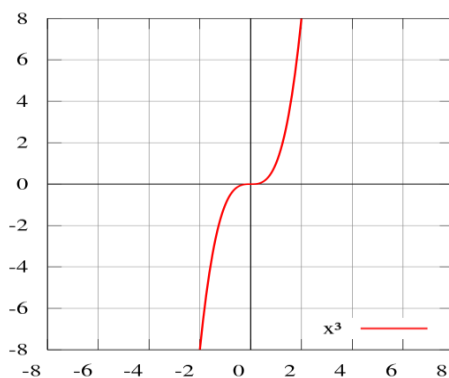
Властивості функції $y = x^2$

- 1) $D(f) = R$;
- 2) $E(f) = [0; +\infty)$;
- 3) графіком функції є парабола;
- 4) якщо $y = 0$, $x = 0$. Графік проходить через точку $(0;0)$. Ця точка називається вершиною параболи. Якщо $x \neq 0, y > 0$, то всі точки параболи, крім її вершини, розміщені вище осі x ;
- 5) протилежним значенням аргумента відповідає одне й те ж значення функції. Це означає, що графік функції симетричний відносно осі y .

Функція виду $y = x^3$

Складемо таблицю значень функції:

x	-2	-1	0	1	2
y	-8	-1	0	1	8



Властивості функції $y = x^3$

- 1) $D(f) = R$;

2) $E(f) = R$;

3) графіком функції є кубічна парабола;

4) якщо $y = 0$, $x = 0$. Графік проходить через точку (0;0). Ця точка називається вершиною параболи. При $x < 0$ точки кубічної параболи розміщені вище осі x , а при $x > 0$ – нижче осі x ;

5) протилежним значенням аргументу відповідають протилежні значення функції. Це означає, що графік функції симетричний відносно початку координат.

Після вивчення елементарних функцій в курсі старшої школи більш поглиблено вивчають степеневу, показникову, логарифмічну та тригонометричну функції.

Розглянемо **властивості функції** $y = \sqrt[n]{x}$. Оскільки деякі властивості коренів непарного степеня не збігаються з властивостями коренів парного степеня , то для відповідних випадків ці корені будемо розглядати окремо [6].

№ з/п	n – непарне ($n = 2k + 1, k \in N$)	n – парне ($n = 2k, k \in N$)
1.	Область визначення. При непарних значення n корінь непарного степеня з числа x існує при будь-яких значеннях x , тому областю визначення функції $y = \sqrt[n]{x}$ є всі дійсні числа: $D(\sqrt[n]{x}) = R$	Область визначення. При парних значеннях n ($n = 2k, k \in N$) корінь парного степеня з числа x існує тільки при $x \geq 0$, тому областю визначення функції $y = \sqrt[n]{x}$ є множина невід’ємних чисел: $D(\sqrt[n]{x}) = [0; +\infty)$
2.	При непарних значеннях n функція непарна, оскільки $\sqrt[n]{-x} = -\sqrt[n]{x}$, отже, графік функції $y = \sqrt[n]{x}$ симетричний	При парних значеннях n функція ні парна, ні непарна (тому що її область визначення несиметрична відносно початку координат).

	відносно початку координат.	
3.	Оскільки при $x = 0$ значення $y = 0$, то графік функції $y = \sqrt[n]{x}$ завжди проходить через початок координат (інших точок перетину з осями координат немає: при $y = 0$ з рівняння $\sqrt[n]{x} = 0$ знову одержуємо тільки $x = 0$).	
4.	На всій області визначення $y = \sqrt[n]{x}$ зростає. Справді, для невід'ємних значень x_1 і x_2 за властивістю 8, якщо $x_1 > x_2$, то $\sqrt[n]{x_1} > \sqrt[n]{x_2}$, а це означає, що функція зростає при невід'ємних значеннях x . Отже, при парному значенні n функція дійсно зростає на всій області визначення. Для непарного значення n достатньо врахувати, що графік функції $y = \sqrt[n]{x}$ симетричний відносно початку координат, і, відображуючи графік зростаючої при $x \geq 0$ функції, знову одержати графік зростаючої функції.	
5.	Для того, щоб знайти область значень функції $y = \sqrt[n]{x} (n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$, складемо рівняння $\sqrt[n]{x} = a$ (*)	
	Якщо n - непарне, то вираз $\sqrt[n]{x}$ набуває як невід'ємних, так і від'ємних значень, і рівняння (*) при будь-якому a за означенням кореня n -го степеня має корінь $x = a^n$. Отже, для непарних n множина значень складається з усіх дійсних чисел: $E(\sqrt[n]{x}) = \mathbb{R}$. Тому найменшого і найбільшого значень функція $y = \sqrt[n]{x}$ не має.	Якщо n - парне, то вираз $\sqrt[n]{x}$ позначає арифметичне значення кореня ($\sqrt[n]{x} \geq 0$), тому рівняння (*) має корінь тільки при $a \geq 0$. Тоді для всіх $a \geq 0$ маємо $x = a^n$. Отже, для парних n множина значень складається з усіх невід'ємних чисел: $E(\sqrt[n]{x}) = [0; +\infty)$. Тому найбільшого значення функція

		$y = \sqrt[2k+1]{x}$ не має, а найменшого $y = 0$ - набуває при $x = 0$
6.	Проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y > 0$, а при $x < 0$ значення $y < 0$.	Проміжки знакосталості: при $x > 0$ значення $y > 0$.

Зазначимо також, що при $x=1$ маємо $y=1$, отже, графік функції $y = \sqrt[n]{x}$ завжди проходить через точку $(1;1)$.

Наведене дослідження дозволяє побудувати графік функції $y = \sqrt[n]{x}$ для непарних (рис. 1) і парних (рис. 2) значень n .

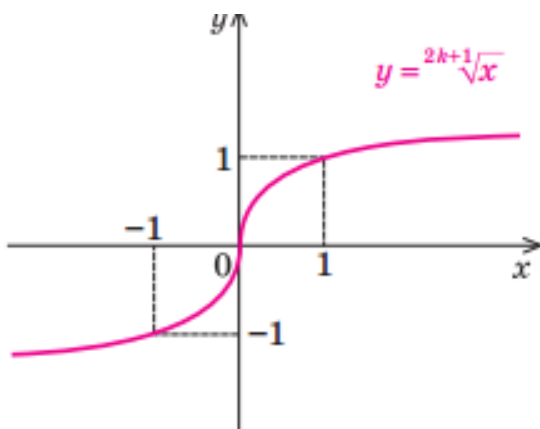


Рис. 1

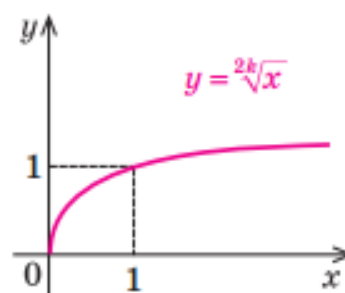
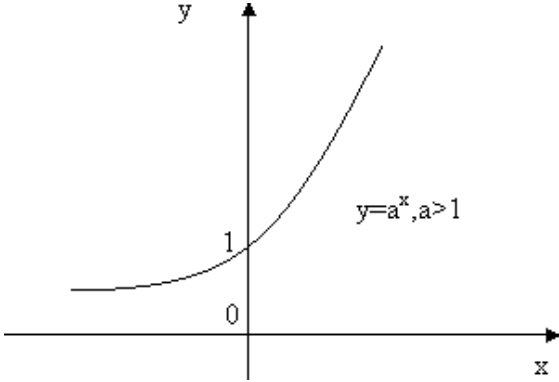
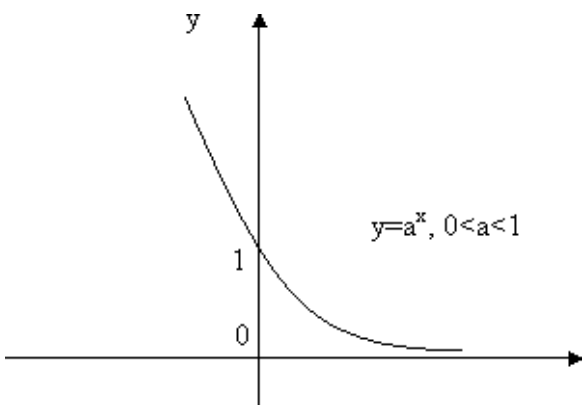


Рис. 2

Функція $y = a^x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається **показниковою** (з основою a).

Властивості показникової функції

	$a > 1$	$0 < a < 1$
1	$D(y) = R$	
2	$E(y) = (0; +\infty)$	
3	Графік функції розміщений у верхній півплощині, перетинає вісь Oy у точці $(0;1)$, вісь Ox є для нього асимптотою	

4	Функція зростає на R	Функція спадає на R
5	Якщо $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$	
6	Якщо $x > 0$, то $a^x > 1$; якщо $x < 0$, то $0 < a^x < 1$	Якщо $x < 0$, то $a^x > 1$; якщо $x > 0$, то $0 < a^x < 1$
7	Якщо $N > 0$, то існує, і до того ж єдине, значення x , при якому $a^x = N$. (Тобто рівняння $a^x = N$ завжди має розв'язок, і до того ж єдиний, якщо $a > 0$, $a \neq 1$, $N > 0$)	
8	На рисунку внизу зображений графік показникової функції $y = a^x$	
		

Оберемо додатне число a , відмінне від 1. Кожному додатному числу x можна поставити у відповідність число y таке, що $y = \log_a x$. Тим самим задано функцію $f(x) = \log_a x$ з областю визначення $D(f) = (0; +\infty)$.

Цю функцію називають **логарифмічною**.

Покажемо, що логарифмічна функція $f(x) = \log_a x$ є оберненою до показникової функції $g(x) = a^x$.

Властивості функції $y = \log_a x$

Область	$(0; +\infty)$
---------	----------------

визначення	
Область значень	R
Нулі функції	$x = 1$
Проміжки знакосталості	Якщо $a > 1$, то $y < 0$ на $(0;1)$; $y > 0$ на $(1;+\infty)$; якщо $0 < a < 1$, то $y < 0$ на $(1;+\infty)$; $y > 0$ на $(0;1)$.
Зростання, спадання	Якщо $a > 1$, то функція є зростаючою; якщо $0 < a < 1$, то функція є спадною.
Неперервність	Неперервна
Диференційовність	Диференційовна
Асимптоти	При $x = 0$ - вертикальна асимптота, коли x прямує до нуля справа.

Характеризуючи властивості тригонометричних функцій, ми будемо виділяти такі їх характеристики: 1) область визначення, 2) область значень, 3) парність чи непарність, 4) періодичність, 5) точки перетину з осями координат, 6) проміжки знакосталості, 7) проміжки зростання і спадання, 8) найбільше і найменше значення функцій.

Зауваження. Абсциси точок перетину графіка функції з віссю Ox (тобто ті значення аргументу, при яких функція дорівнює нулю) називають **нулями функції**.

Нагадаємо, що значення синуса – це ордината відповідної точки одиничного кола. Оскільки ординату можна знайти для будь-якої точки одиничного кола, то область визначення функції $y = \sin x$ – усі дійсні числа. Це можна записати так: $D(\sin x) = R$.

Для точок одиничного кола ординати набувають усіх значень від -1 до 1 , отже, область значень функції $y = \sin x : y \in [-1;1]$. Це можна записати так: $E(\sin x) = [-1;1]$. Як бачимо, найбільше значення функції $\sin x$ дорівнює одиниці. Найменше значення функції $\sin x$ дорівнює мінус одиниці [5].

Синус – непарна функція: $\sin(-x) = -\sin x$, отже, її графік симетричний відносно початку координат. Було раніше обґрунтовано також, що синус – періодична функція з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, отже, через проміжки довжиною 2π вигляд графіка функції $\sin x$ повторюється. Тому при побудові графіка цієї функції досить побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною 2π , а потім одержану лінію паралельно перенести праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані $kT = 2\pi k$, де k – будь-яке натуральне число.

Щоб знайти точки перетину графіка функції з осями координат, згадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \sin 0 = 0$, тобто графік функції $\sin x$ проходить через початок координат.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x , при яких $\sin x = 0$, тобто ордината відповідної точки одиничного кола буде дорівнювати нулю.

Проміжки знакосталості. Значення функції синус додатні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола додатна) у I і II чвертях. Отже, $\sin x > 0$ при $x \in (0; \pi)$, а також, враховуючи період, при

$$x \in (2\pi k; \pi + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

всіх

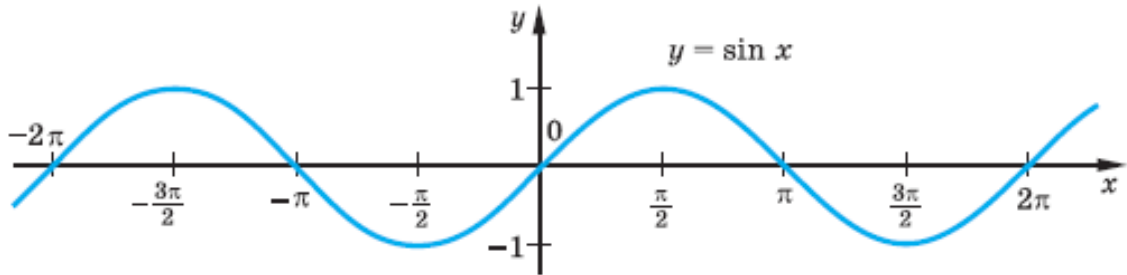
Значення функції синус від’ємні (тобто ордината відповідної точки одиничного кола від’ємна) у III і IV чвертях, отже, $\sin x < 0$

$$x \in (-\pi + 2\pi k; 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}$$

при

Проміжки зростання і спадання. Функція $\sin x$ зростає на кожному з проміжків $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$, і спадає на кожному з проміжків $[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Графік функції $y = \sin x$ називається синусоїдою.



Нагадаємо, що значення косинуса – це абсциса відповідної точки одиничного кола. Оскільки абсцису можна знайти для будь-якої точки одиничного кола, то область визначення функції $y = \cos x$ – усі дійсні числа. Це можна записати так: $D(\cos x) = \mathbb{R}$.

Для точок одиничного кола абсциси набувають усіх значень від -1 до 1 , отже, область значень функції $y = \cos x$: $y \in [-1; 1]$. Це можна записати так: $E(\cos x) = [-1; 1]$.

Як бачимо, найбільше значення функції $\cos x$ дорівнює одиниці. Це можливо при $x = 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найменше значення функції $\cos x$ дорівнює мінус одиниці. Це можливо при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Косинус – парна функція: $\cos(-x) = \cos x$, тому її графік симетричний відносно осі Oy .

Косинус – періодична функція з найменшим додатним періодом $T = 2\pi$: $\cos(x + 2\pi) = \cos x$. Отже, через проміжки довжиною 2π вид графіка функції $\cos x$ повторюється.

Щоб знайти точки перетину графіка функції з осями координат, згадаємо, що на осі Ox значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \cos 0 = 1$.

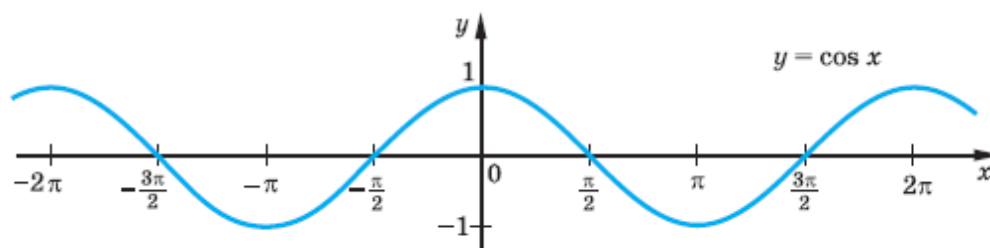
На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x , при яких $\cos x$, тобто абсциса відповідної точки одиничного кола, буде дорівнювати нулю. Це буде тільки тоді, коли $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Проміжки знакосталості. Значення функції косинус додатні (тобто абсциса відповідної точки одиничного кола додатна) в I і IV чвертях. Отже, $\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, а також, враховуючи період, при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Значення функції косинус від'ємні (тобто абсциса відповідної точки одиничного кола від'ємна) у II і III чвертях, отже, $\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Проміжки зростання і спадання. Функція $\cos x$ зростає на кожному з проміжків $(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$ і спадає на кожному з проміжків $(2\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$.

Графік функції $y = \cos x$ називається косинусоїдою.



Нагадаємо, що $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Отже, областю визначення тангенса будуть усі

значення аргументу, при яких $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Отримуємо

$D(\operatorname{tg} x): x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Цей результат можна одержати й геометрично.

Значення тангенса – це ордината відповідної точки T_x на лінії тангенсів (рис. 3).

Оскільки точки A і B одиничного кола лежать на прямих OA і OB , паралельних лінії тангенсів, ми не можемо знайти значення тангенса для $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Для всіх інших значень аргументу ми можемо знайти відповідну точку на лінії тангенсів і її ординату – тангенс. Отже, всі

значення $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ входять до області

Рис. 3 визначення функції $y = \operatorname{tg} x$.

Для точок одиничного кола (які не збігаються з точками A і B) ординати відповідних точок на лінії тангенсів набувають усіх значень від $(-\infty; +\infty)$.

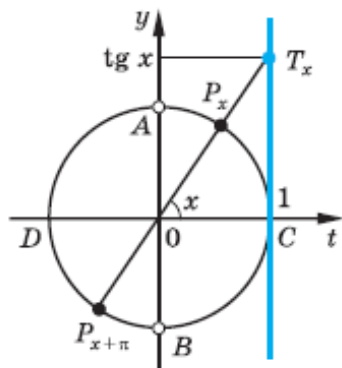
Таким чином, область значень функції $y = \operatorname{tg} x$ – всі дійсні числа, тобто $y \in \mathbb{R}$.

Це можна записати так: $E(\operatorname{tg} x) = \mathbb{R}$. З наведених міркувань також випливає, що найбільшого і найменшого значень функція $\operatorname{tg} x$ не має [7].

Тангенс – непарна функція: $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, отже, її графік симетричний відносно початку координат.

Тангенс – періодична функція з найменшим додатним періодом

$T = \pi : \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$. Тому при побудові графіка цієї функції досить побудувати графік на будь-якому проміжку довжиною π , а потім одержану лінію перенести паралельно праворуч і ліворуч уздовж осі Ox на відстані $kT = \pi k$, де k – будь-яке натуральне число.



Щоб знайти точки перетину графіка функції з осями координат, згадаємо, що на осі Oy значення $x = 0$. Тоді відповідне значення $y = \operatorname{tg} 0 = 0$, тобто графік функції $y = \operatorname{tg} x$ проходить через початок координат.

На осі Ox значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x , при яких $\operatorname{tg} x$, тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів, дорівнюватиме нулю. Це

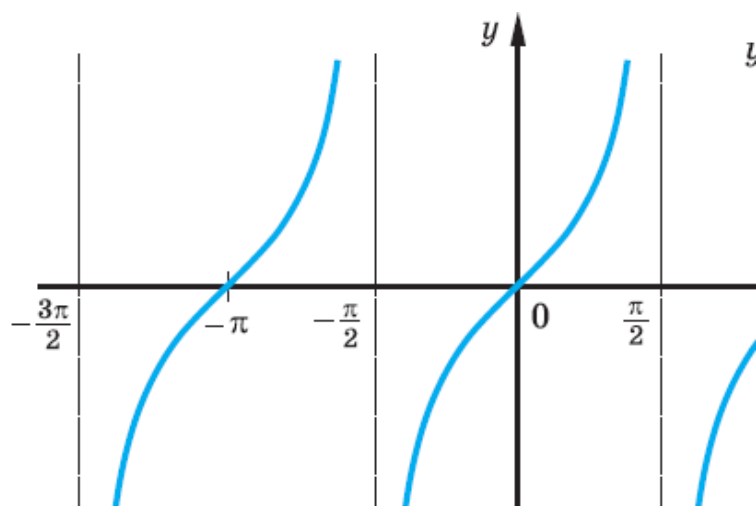
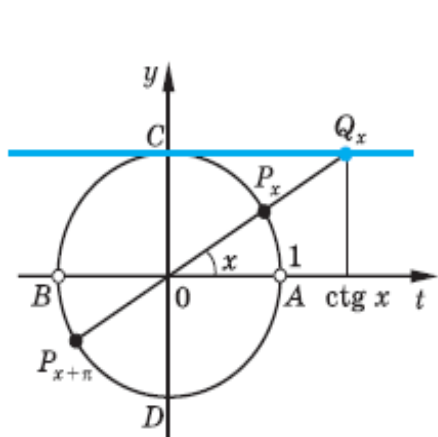
буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка С або D (Рис. 3), тобто при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Проміжки знакосталості. Значення функції тангенс додатні (тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів додатна) у I і III чвертях. Отже, $\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а також, ураховуючи період, при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Значення функції тангенс від'ємні (тобто ордината відповідної точки лінії тангенсів від'ємна) у II і IV чвертях. Отже, $\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Проміжки зростання і спадання. Функція $\operatorname{tg} x$ зростає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називається тангенсоїдою.



Нагадаємо, що $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$. Отже, областю визначення котангенса будуть усі значення аргументу, при яких $\sin x \neq 0$, тобто $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Таким чином, $D(\operatorname{ctg} x): x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Той самий результат можна одержати, використовуючи геометричну ілюстрацію. Значення котангенса – це абсциса відповідної точки на лінії

котангенсів (рис. 4). Оскільки точки А і В одиничного кола лежать на прямих ОА і ОВ, паралельних лінії котангенсів, ми не зможемо знайти значення котангенса для $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$. Для всіх інших значень аргументу ми можемо знайти відповідну точку на лінії котангенсів і її абсцису — котангенс. Таким чином, усі значення $x \neq \pi k$ входять до області визначення

Рис.4 функції $y = \operatorname{ctg} x$.

Для точок одиничного кола (які не збігаються з точками А і В) абсциси відповідних точок на лінії котангенсів набувають усіх значень від $(-\infty; +\infty)$, отже, область значень функції $y = \operatorname{ctg} x$ — усі дійсні числа, тобто $y \in \mathbb{R}$. Це можна записати так: $E(\operatorname{ctg} x) = \mathbb{R}$. З наведених міркувань також випливає, що найбільшого і найменшого значень функція $\operatorname{ctg} x$ не має.

Котангенс — непарна функція: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$, тому її графік симетричний відносно початку координат.

Котангенс — періодична функція з найменшим додатним періодом $T = \pi$: $\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$.

Щоб знайти точки перетину графіка функції з осями координат, згадаємо, що на осі Оу значення $x = 0$. Але $\operatorname{ctg} 0$ не існує, значить, графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ не перетинає вісь Оу.

На осі Ох значення $y = 0$. Отже, нам потрібні такі значення x , при яких $\operatorname{ctg} x$, тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів, дорівнюватиме нулю. Це буде тільки тоді, коли відповідною точкою одиничного кола є точка С або D, тобто при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Проміжки знакосталості. Значення функції котангенс додатні (тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів додатна) у I і III чвертях (рис.4).

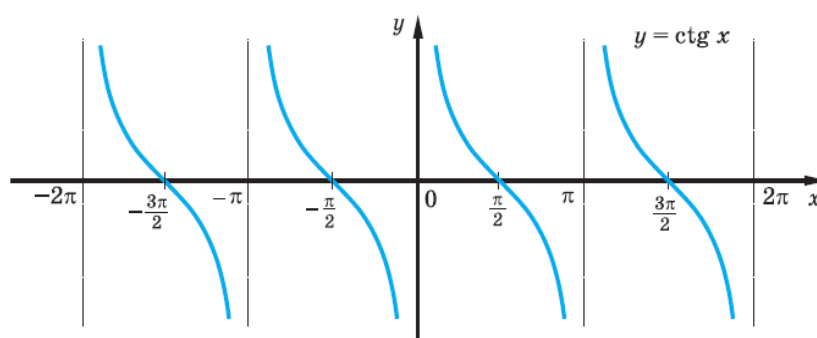
Тоді $\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Враховуючи період, отримуємо, що $\operatorname{ctg} x > 0$

при всіх $x \in \left(\pi k; \frac{\pi}{2} + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Значення функції котангенс від'ємні (тобто абсциса відповідної точки лінії котангенсів від'ємна) у II і IV чвертях, отже, $\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k; \pi + \pi k\right), k \in \mathbb{Z}$.

Проміжки зростання і спадання. Функція $\operatorname{ctg} x$ спадає на кожному з проміжків своєї області визначення, тобто на кожному з проміжків $(\pi k; \pi + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ називається котангенсоїдою.



2.2 Типові труднощі, з якими стикаються учні під час вивчення функцій

Учні часто стикаються з рядом труднощів під час вивчення функцій, оскільки ця тема потребує не лише розуміння теоретичних аспектів, але й уміння застосовувати ці знання на практиці. Основні труднощі включають неправильне розуміння визначення функції, коли учні плутають функцію з іншими математичними об'єктами, такими як співвідношення чи рівняння, і не усвідомлюють, що функція – це залежність між двома змінними, де кожному значенню з однієї множини відповідає лише одне значення з іншої [11].

Також учням складно інтерпретувати графіки функцій, зокрема зрозуміти зміну графіків залежно від параметрів, таких як зміна коефіцієнтів у квадратичній функції [7]. Крім того, учні часто мають труднощі з розумінням області визначення та області значень функції, особливо при роботі зі складними функціями. Проблеми виникають і з математичними перетвореннями, такими як піднесення до степеня чи добування коренів, що ускладнює розв'язання рівнянь і нерівностей. Учні також стикаються з труднощами у розумінні суті змінної та відмінності між незалежною і залежною змінними.

Важливою проблемою є й те, що учням часто важко побачити практичне застосування функцій у реальному житті, що знижує інтерес до теми. Засвоєння різних типів функцій також викликає труднощі, оскільки кожен тип має свої особливості та властивості, які складно запам'ятати. Крім того, учні відчують труднощі з аналізом поведінки функцій, включаючи визначення проміжків зростання і спадання, екстремумів та асимптот, що ускладнює графічний аналіз функцій. Використання символічного запису іноді теж стає перепорою, коли учні не розуміють, як правильно інтерпретувати вирази чи спрощувати їх [8].

Нарешті, нестача мотивації часто заважає учням бачити значущість теми функцій у їхньому житті або кар'єрі, що знижує їхню зацікавленість і мотивацію до глибшого вивчення матеріалу.

Дослідження мало на меті виявити рівень мотивації учнів до вивчення функцій та визначити основні труднощі, з якими вони стикаються під час навчання [12]. Основними аспектами, які перевірили, були мотивація на уроках математики, самостійність у розв'язуванні задач, застосування функцій в житті, частота розв'язування задач та основні труднощі. Під час опитування було виявлено, що 6,7% учнів завжди відчувають мотивацію, 46,7% – майже завжди, 36,7% – іноді, а 10% – ніколи. Це свідчить про необхідність покращення мотивації, оскільки 46,7% учнів висловили низьку мотивацію до розв'язування задач з функцій. Що стосується самостійності у розв'язуванні задач, лише 3,3% учнів завжди можуть це зробити, 20% – майже завжди, 33,3% – іноді, а 43,3% – ніколи. У питанні застосування числових функцій у житті 26,7% учнів знають деякі з них, тоді як 73,3% не мають уявлення про їх застосування. Це питання потребує подальшого дослідження, оскільки має важливе значення для мотивації. На запитання про частоту розв'язування задач з функцій лише 3,3% учнів відповіли, що роблять це часто, 86,7% – зрідка, а 10% – ніколи. Серед основних труднощів, які впливають на виконання завдань з функцій, 43,3% учнів вказали на незрозумілість поняття функції, 70% – на недостатність матеріалів у підручниках, а 73,3% – на відсутність збірників задач. Крім того, 60% учнів визнали труднощі в розумінні проблеми та моделюванні ситуацій. Дослідження виявило низький рівень мотивації учнів до вивчення функцій, а також значні труднощі в розумінні матеріалу. Вчителі визнають необхідність підвищення якості підготовки та забезпечення учнів належними матеріалами для ефективного навчання.

2.3 Методологічні підходи до вивчення функцій

Вивчення функцій є важливим аспектом математичної освіти, і для ефективного засвоєння цього матеріалу необхідно використовувати різноманітні методологічні підходи. Ось декілька з них [4].

Конструктивістський підхід: цей підхід акцентує увагу на активному залученні учнів у процес навчання. Учні самостійно відкривають математичні

закономірності через дослідження та експерименти, що сприяє глибшому розумінню функцій. Використання реальних задач та проектів допомагає учням побачити практичне застосування функцій. Приклад: Проведення уроку, на якому учні самостійно відкривають властивості лінійної функції, досліджуючи графіки на основі різних коефіцієнтів. Завдання: Учням пропонується побудувати графіки функцій $y=mx+b$ з різними значеннями m та b та проаналізувати, як зміни в цих параметрах впливають на форму графіка.

Проблемно-орієнтований підхід: в основі цього підходу лежить використання проблемних ситуацій для стимулювання навчального процесу. Учні розв'язують реальні задачі, пов'язані з функціями, що спонукає їх до аналізу, розробки стратегій розв'язання та критичного мислення. Це підвищує мотивацію і залученість [5]. Приклад: Використання реальної ситуації, наприклад, моделювання витрат на поїздку. Завдання: Учні мають визначити функцію витрат, якщо відомо, що вартість проїзду y залежить від відстані x . Наприклад, якщо вартість проїзду складає 50 гривень за 10 км, учні повинні створити рівняння функції і розв'язати, скільки вони витратять на поїздку 30 км.

Інтерактивні методи навчання: ці методи включають використання сучасних технологій, таких як інтерактивні дошки, комп'ютерні симуляції та математичні програми [9]. Вони дозволяють учням візуалізувати функції, експериментувати з графіками та спостерігати зміни в залежності від параметрів, що сприяє глибшому розумінню.

Модульний підхід: модульне навчання передбачає вивчення функцій у вигляді окремих модулів, кожен з яких фокусується на певному аспекті (наприклад, лінійні, квадратичні, показникові функції) [12]. Це дозволяє учням поступово поглиблювати знання, що сприяє кращому засвоєнню матеріалу. Приклад: Розподіл тем на окремі модулі (лінійні функції, квадратичні, показникові). Завдання: Учні виконують завдання в модулі «Квадратичні

функції»: знайти корені квадратного рівняння за допомогою формули дискримінанта та побудувати графік функції.

Проектний підхід: цей підхід передбачає виконання учнями проектів, пов'язаних із застосуванням функцій. Наприклад, учні можуть досліджувати, як функції використовуються в економіці, природничих науках або технологіях. Це дозволяє інтегрувати знання з різних предметів і розвивати навички дослідницької діяльності [13]. Приклад: Дослідження застосування функцій в різних сферах. Завдання: Учні працюють у групах, щоб розробити проект, в якому досліджують застосування функцій у бізнесі (наприклад, розрахунок прибутку в залежності від продажів) і представляють свої результати класу.

Диференційований підхід: цей підхід враховує різноманітність учнів у класі, їхні інтереси, здібності та рівень підготовки. Використання різних рівнів складності завдань дозволяє кожному учню працювати на своєму рівні, що сприяє більшій інклюзивності в навчанні [9]. Приклад: Завдання з різними рівнями складності. Завдання: Для вивчення функцій $y=mx+b$ учням пропонуються три рівні завдань:

Легкий: Побудувати графік функції з даними m та b .

Середній: Визначити, які значення m та b забезпечать певну точку на графіку.

Складний: Розв'язати систему рівнянь з двома лінійними функціями.

Методика співпраці: групова робота та обговорення в парах дозволяють учням обмінюватися ідеями, вчитися один в одного та підвищувати свої комунікативні навички. Приклад: Робота в парах або малих групах для обговорення функцій. Завдання: Учні працюють у парах, щоб вирішити завдання на знаходження оберненої функції. Кожна пара обирає одну функцію та разом обговорює, як знайти її обернену, потім представляють результати іншим парам [6].

3. Приклади завдань для покращення методологічних підходів до вивчення функцій

Завдання 1: Дослідження графіків лінійних функцій

Побудуйте графіки лінійних функцій для наступних рівнянь:

1. $y=2x+3$

2. $y=-1.5x+4$

3. $y=0.5x-2$

Проаналізуйте, як зміни у коефіцієнтах m та b впливають на нахил та перетин графіка з осями координат.

Завдання 2: Аналіз реальних даних

Дані про температуру протягом тижня:

- Понеділок: 20°C
- Вівторок: 22°C
- Середа: 19°C
- Четвер: 21°C
- П'ятниця: 23°C
- Субота: 25°C
- Неділя: 24°C

Побудуйте графік функції температури від дня тижня. Проаналізуйте отриманий графік і зробіть висновки про тенденції змін температури.

Завдання 3: Моделювання задачі з життя

Розробіть функцію, яка описує витрати на поїздку залежно від відстані. Вартість пального становить 10 гривень за літр, а автомобіль споживає 8 літрів на 100 км. Побудуйте графік функції витрат на поїздку. Обговоріть, як витрати змінюються залежно від відстані.

Завдання 4: Дослідження квадратичних функцій

Вивчіть квадратичну функцію $y=ax^2+bx+cy$ з наступними значеннями параметрів:

1. $a=1, b=0, c=0$

2. $a=-1, b=2, c=3$

3. $a=2, b=-3, c=1$

Побудуйте графіки для кожного з рівнянь та проаналізуйте, як зміни в параметрах a , b і c впливають на форму графіка.

Завдання 5: Створення ігор

Створіть гру, в якій потрібно відгадати функцію за графіком. Підготуйте кольорові картки: на одних напишіть графіки, на інших – відповідні рівняння функцій. Обмінюйтеся картками з однокласниками і знайдіть відповідність.

Завдання 6: Прогнозування

Дані про зростання населення в місті (у тисячах):

- 2010 рік: 150
- 2015 рік: 165
- 2020 рік: 180

Розробіть функцію, що описує зростання населення. Використайте отриману функцію для прогнозування населення через 10 років. Обговоріть результати з однокласниками.

Завдання 7: Зворотна функція

Оберіть просту функцію (лінійну або квадратичну) та спільно розв'яжіть задачу на знаходження оберненої функції. Визначте умови, за яких можна знайти обернену функцію, і представте свої висновки іншим групам.

Завдання 8: Витрати на поїздку

Уявіть, що ви плануєте подорож на автомобілі. Вартість пального становить 12 гривень за літр, а ваш автомобіль споживає 7 літрів на 100 км.

1. Розробіть функцію, яка описує загальні витрати у на поїздку в залежності від відстані x у км.
2. Яка буде вартість поїздки на відстань 150 км? Побудуйте графік функції.

Завдання 9: Зростання рослин

Ваше завдання – дослідити, як зростання рослин залежить від кількості отриманого світла. Дослідження показало, що:

- При 2 годинах світла рослина виросла на 5 см.
 - При 4 годинах — на 10 см.
 - При 6 годинах — на 15 см.
1. Побудуйте графік залежності зростання рослини від кількості світла.
 2. Яка функція найкраще описує цю залежність? Зробіть прогноз зростання рослини при 8 годинах світла.

Завдання 10: Аналіз продажів

Ваша компанія продає дві моделі смартфонів. Відомо, що продажі моделі А зростають на 10 одиниць на місяць, а моделі Б – на 5 одиниць.

1. Якщо на початку року продажі моделі А становили 50 одиниць, а моделі Б – 30, розробіть функції для продажів обох моделей.
2. Які продажі будуть через 6 місяців? Обговоріть результати з однокласниками.

Завдання 11: Споживання електроенергії

Ваше завдання – дослідити, як споживання електроенергії в домогосподарстві залежить від використання побутових приладів.

1. При складанні таблиці виявлено, що споживання електроенергії (у кВт·год) за тиждень залежить від кількості приладів:
 - 3 прилади — 30 кВт·год
 - 5 приладів — 50 кВт·год
 - 7 приладів — 70 кВт·год.
2. Побудуйте графік функції споживання електроенергії. Яка функція найкраще описує цю залежність?

Завдання 12: Висота параболи

У вас є м'яч, який підкидають у повітря. Висота у м'яча в залежності від часу t може бути описана квадратичною функцією.

1. Відомо, що м'яч досягає висоти 10 м через 1 секунду, а через 2 секунди його висота становить 15 м.

2. Визначте функцію, яка описує рух м'яча, і знайдіть, коли він повернеться на землю (висота 0 м).

Завдання 13: Розробка бізнес-моделі

Уявіть, що ви відкриваєте кав'ярню. Ваші щомісячні витрати складають 5000 гривень. Знаючи, що ви заробляєте 50 гривень на кожному проданому напої, розробіть функцію прибутку P залежно від кількості проданих напоїв x .

1. Як зміниться прибуток, якщо ви продасте 100 напоїв?
2. При якій кількості проданих напоїв ваш бізнес стане прибутковим?

Завдання 14: Статистика

Вам дано статистичні дані про середні температури в регіоні за рік.

- Січень: -5°C
- Лютий: -3°C
- Березень: 5°C
- Квітень: 10°C
- Травень: 15°C
- Червень: 20°C
- Липень: 25°C
- Серпень: 24°C
- Вересень: 18°C
- Жовтень: 10°C
- Листопад: 0°C
- Грудень: -4°C

1. Побудуйте графік температури за місяцями.
2. Яка функція описує зміни температури протягом року? Які висновки можна зробити на основі графіка?

Завдання 15: Дослідження графіків функцій у GeoGebra

Використовуйте програму GeoGebra для побудови графіків наступних функцій:

1. $y=2x+3$

2. $y = -x^2 + 4x$

3. $y = x$

Проаналізуйте, як зміни в коефіцієнтах та типах функцій впливають на форму графіка. Поділіться своїми спостереженнями з однокласниками.

Розв'язок:

1. **Графіки:** Використовуючи GeoGebra, побудуйте графіки функцій:

- $y = 2x + 3$ (пряма, нахил 2, перетин з віссю y на 3).
- $y = -x^2 + 4$ (парабола, відкрита вниз, вершина в точці $(0, 4)$).
- $y = x$.

2. **Аналіз:** Учні можуть спостерігати, що зміни m і b у лінійній функції впливають на нахил і положення графіка, а параметри квадратичної функції змінюють форму параболи.

Завдання 16: Візуалізація залежностей

Побудуйте графік функції $y = \frac{1}{x}$ за допомогою інтерактивного графічного калькулятора.

1. Визначте, як змінюється функція, коли x набуває різних значень.
2. Обговоріть, що відбувається з графіком, коли x наближається до нуля.

Розв'язок:

1. **Графік:** У GeoGebra побудуйте графік функції $y = \frac{1}{x}$.

2. **Аналіз:** Графік покаже дві гілки, які наближаються до осі y , але ніколи її не перетинають. Учні можуть обговорити асимптотичну поведінку графіка при $x \rightarrow 0$.

Завдання 17: Прогнозування на основі даних

Використовуйте інтерактивні таблиці та графіки, щоб проаналізувати дані про населення міста за останні 10 років:

- 2010 рік: 200,000
- 2015 рік: 220,000
- 2020 рік: 250,000

1. Створіть функцію, що описує зростання населення, і побудуйте графік.
2. Використайте функцію для прогнозування населення на 2025 рік.
Поділіться результатами з класом.

Розв'язок:

1. **Функція:** Залежність населення P від року t (рік - 2010, 2015, 2020):
 - Використайте метод найменших квадратів або лінійну регресію, щоб знайти функцію.
 - Приблизно: $P(t)=200+10(t-2010)$
2. **Графік:** Побудуйте графік. Для 2025 року:
 $P(2025)=200+10(2025-2010)=200+150=350,000.$
3. **Обговорення:** Учні можуть обговорити, наскільки точним буде цей прогноз.

Завдання 18: Дослідження функцій у природі

Проект: «Функції навколо нас»

Завдання:

1. Знайдіть три приклади функцій у природі (наприклад, зростання рослин, температура води в річці, зміна фази Місяця).
2. Оформіть презентацію, де описуєте, які функції описують ці явища, та побудуйте графіки залежностей.

Завдання 19: Економічний проект

Проект: «Фінансовий аналіз»

Завдання:

1. Складіть бюджет для невеликого бізнесу (наприклад, кафе або інтернет-магазину).
2. Визначте функції витрат та доходів залежно від обсягу продажу.
3. Створіть графік, що демонструє співвідношення між витратами та доходами, і проаналізуйте, коли бізнес почне приносити прибуток.

Завдання 20: Вимірювання і моделювання

Проект: «Моделювання температури»

Завдання:

1. Збирайте дані про температуру в різні часи доби протягом тижня.
2. Складіть функцію, що описує залежність температури від часу.
3. Побудуйте графік та проаналізуйте, у якій годині температура була найвищою і найнижчою.

Завдання 21: Інтерпретація даних**Проект: «Аналіз спортивних результатів»****Завдання:**

1. Виберіть вид спорту та зберіть дані про результати (наприклад, біг на 100 м, стрибки у висоту).
2. Створіть функцію, яка описує залежність результату від часу тренувань.
3. Оформіть звіт, в якому вкажіть, як можна поліпшити результати за допомогою тренувань.

Завдання 22: Графічна реклама**Проект: «Реклама за допомогою функцій»****Завдання:**

1. Розробіть рекламну кампанію для продукту або послуги, використовуючи графіки функцій.
2. Складіть графік, що ілюструє, як змінюється попит на ваш продукт залежно від ціни.
3. Підготуйте постер або слайд-презентацію для представлення вашої кампанії.

Завдання 23: Дослідження руху**Проект: «Моделювання руху»****Завдання:**

1. Оберіть об'єкт (наприклад, автомобіль, літак або мотоцикл) та досліджуйте його рух.
2. Створіть функцію, що описує залежність відстані від часу.

3. Проаналізуйте, при яких умовах (наприклад, швидкість, зупинки) змінюється графік руху.

Завдання 24: Екологічний проект

Проект: «Вплив забруднення на екосистему»

Завдання:

1. Зберіть дані про рівень забруднення в вашому регіоні та його вплив на рослинність.
2. Складіть функцію, що описує залежність між рівнем забруднення і здоров'ям рослин.
3. Оформіть звіт з рекомендаціями для покращення екологічної ситуації.

Висновки

У даній магістерській роботі було проаналізовано значення математичної компетентності в сучасній освіті, зосереджуючи увагу на вивченні функцій як ключового елемента шкільного курсу математики. Визначено, що глибоке розуміння функцій є необхідним для подальшого освоєння більш складних математичних концепцій, таких як диференціальне та інтегральне числення, а також їх застосування в природничих науках і економіці.

Дослідження виявило, що багато учнів стикаються з труднощами під час вивчення функцій, що часто зумовлено їх абстрактним характером. Це призводить до зниження загального рівня математичної компетентності та потребує впровадження нових, більш ефективних методик навчання, які б сприяли кращому засвоєнню матеріалу.

На основі проведеного аналізу сучасних методичних підходів до викладання функцій були розроблені рекомендації, що включають використання інтерактивних методів навчання, проектного підходу та диференційованого навчання. Впровадження цих рекомендацій може значно поліпшити процес навчання, допомогти учням подолати труднощі, пов'язані з функціями, і сприяти розвитку критичного мислення та аналітичних здібностей.

Таким чином, формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення функцій є важливим завданням, що має значний вплив на їхню майбутню професійну діяльність. Результати дослідження підкреслюють актуальність і необхідність постійного вдосконалення методичних підходів до навчання математики, щоб забезпечити успішну підготовку учнів до викликів сучасного світу.

Список використаних джерел

1. Дудник, О. В. (2015). *Математична компетентність: теорія і практика формування*. Київ: Видавництво «Літера ЛТД». – 200 с.
2. Левченко, О. П. (2017). *Математика в школі: підходи до формування компетентностей*. Харків: Вид-во «Ранок». – 150 с.
3. Буря, С. Г., & Кузнецова, Л. В. (2018). *Дидактика математики*. Київ: Педагогічна думка. – 300 с.
4. Мохов, О. С. (2019). *Сучасні методи викладання математики*. Київ: Академвидав. – 250 с.
5. Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan. – 1200 с.
6. National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM. – 196 с.
7. Ma, L. (2010). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teachers' Understanding of Fundamental Mathematics in China and the United States*. New York: Routledge. – 265 с.
8. Нікітенко, Н. В. (2020). *Методологічні основи викладання функцій у загальноосвітній школі*. Запоріжжя: ЗНУ. – 180 с.
9. Рудченко, Т. В. (2021). *Математичні функції у навчанні старшокласників: проблеми та рішення*. Київ: Вид-во «Генеза». – 220 с.
10. Kerslake, D. (1986). *Mathematics for the Future: A New Curriculum*. London: Routledge. – 160 с.
11. Sutherland, R., & Pegg, J. (2007). Teaching Mathematics. In M. Niss (Ed.), *Competencies in Mathematics Teaching* (pp. 71-86). Roskilde: University of Roskilde. – 300 с. (всього)
12. Шевченко, О. В. (2016). *Викладання математики в умовах інтеграції: методичні аспекти*. Одеса: Фенікс. – 200 с.

13. Clements, D. H., & Sarama, J. (2014). *Learning and Teaching Early Math: The Learning Trajectories Approach*. New York: Routledge. — 400 с.
14. Задорожний, О. О. (2015). *Формування математичної компетентності учнів на уроках математики*. Львів: Видавництво «Світ». — 230 с.
15. NCTM. (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten Through Grade 8 Mathematics: A Quest for Coherence*. Reston, VA: NCTM. — 104 с.
16. Діана Стаськів. Формування математичної компетентності учнів у процесі вивчення функцій. Актуальні проблеми сучасної науки: Збірник XI Міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій / За ред. Юрія Матуріна, Ігоря Столярчука. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2024. – С. 315-317.