

Міністерство освіти і науки України

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка

Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних технологій

Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК «__» _____ 2024 р.

**Методика вивчення звичайних дробів
в курсі математики 5 класу**

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації

«Вчитель математики, викладач закладу фахової передвищої,

вищої освіти, вчитель інформатики

Автор роботи Федис Роксолана Ігорівна _____

підпис

Науковий керівник кандидат педагогічних наук,

доцент Гордієнко Ірина Валеріївна _____

підпис

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

Методика вивчення звичайних дробів в курсі математики 5 класу

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

[illegible]

дата

Голова ЕК _____

підпис

прізвище, ім'я

Секретар ЕК

підпис

прізвище, ім'я

Анотація. Федис Роксолана. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДРОБІВ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 5 КЛАСУ

У даній роботі проаналізовано дидактичну, психологічну та методичну літературу по темі дослідження. З'ясовано, в якій мірі методична література, підручники та посібники задовольняють умови вивчення звичайних дробів в курсі математики 5 класу. Експериментально перевірено ефективність розробленої методики вивчення звичайних дробів.

Annotation. Fedys Roksolana. METHODS OF STUDYING COMMON FRACTIONS IN THE 5TH CLASS MATHEMATICS COURSE.

Didactic, psychological, and methodical literature on the research topic was analyzed in this work. It was found out to what extent methodical literature, textbooks and manuals satisfy the conditions for studying common fractions in the 5th grade mathematics course. The effectiveness of the developed methodology for studying ordinary fractions was experimentally verified.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи теми “Дробові числа”	7
1.1. Тема “Дробові числа” в елементарній математиці	7
1.2. Аналіз методичної літератури по темі дослідження	17
1.3. Аналіз підручників щодо викладу даної теми	26
РОЗДІЛ 2. Методика вивчення теми “Звичайні дроби”	32
2.1. Методика вивчення звичайних дробів та їх властивостей.....	33
2.2. Методика вивчення додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками	45
2.3. Експериментальна перевірка розробленої методики	50
ВИСНОВКИ	54
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	57

ВСТУП

Актуальність дослідження. Необхідність в дробових числах виникла в результаті практичної діяльності людей на досить ранній стадії розвитку. Уже поділ здобичі, який складався із декількох вбитих тварин, між учасниками полювання, коли число тварин не було кратним числу мисливців, могло привести первісну людину до поняття про дробове число. Так на основі потреб практики виникло поняття дробу.

В Єгипті працювали з дробами ще 4000 років тому, що підтверджується стародавніми документами, які дійшли до нас. Проте загальної системи для запису всіх дробів, як сьогодні, коли чисельник пишуть зверху, знаменник знизу, а між ними ставлять риску, єгиптяни не мали. При виконанні обчислень вони використовували лише так звані одиничні дроби – дроби з чисельником 1 та дріб

. Ці дроби єгиптяни позначали, ставлячи крапку над знаменником. Усі інші дроби вони переводили в одиничні. Наприклад, дріб $\frac{5}{6}$ записували як суму

одиничних дробів $\frac{1}{2}$ і $\frac{1}{3}$.

У Стародавній Греції також добре знали про звичайні дроби. Понад 2,5 тисячі років тому греки вміли виконувати арифметичні дії з дробами. Вони використовували як одиничні дроби, так і дроби загального виду.

У Стародавній Русі дроби називали частками, а згодом ламаними числами.

Окремі дроби мали спеціальні назви. Наприклад, $\frac{1}{3}$ – треть, $\frac{1}{2}$ – півтреть,

— п'ятина, — десятина, тощо. А в стародавньому Китаї називалась

.

половиною, — малою половиною, — великою половиною.

Запис дробів за допомогою риски став загальноприйнятим з XVI ст.

Колись виконання дій зі звичайними дробами завдавало людям значних труднощів. Саме тоді, ймовірно, з'явилося німецьке прислів'я "попасти в дроби", що означало опинитися в скрутному становищі. Причина цього полягала в тому, що не існувало встановлених правил для виконання дій з дробами та відповідної теорії.

Конкретне виникнення дробів зафіксовано в нашій мові. Ми називаємо 60-ту частину години хвилинами, а 60-ті частини хвилини — секундами. Крім того, ми використовуємо 60-ті частини для вимірювання кутів і дуг кола. Така назва одними і тими ж словами мір зовсім різних величин (часу і кута) пояснюється тим, що жителі старовинного Вавилону більше ніж за 3000 р до н. е. мали

систему мір, в якій менша одиниця виміру становила частину більшої

одиниці. Тобто: перша частина — , друга частина — , третя частина — і т. д.

Таким чином, практика привела людину до необхідності використання різних одиниць вимірювання. Відношення цих конкретних мір спричинило виникнення абстрактного поняття дробу. [14].

Звичайні дробы були відомі єгипетським математикам кілька тисячоліть тому, тоді як десяткові дробы з'явилися лише в XV столітті. У книзі "Арифметика"

Л. П. Магницького, виданій у 1703 році, звичайним дробам присвячено всю другу частину першої книги, а десятковим – всього три сторінки [6].

Наприкінці ХХ століття середня загальноосвітня школа увійшла в новий етап свого розвитку. Цей період характеризується розбудовою освіти на основі нових прогресивних концепцій, впровадженням сучасних педагогічних та інформаційних технологій, а також науково-методичних досягнень у навчально-виховний процес.

До школи дитина зазвичай приходить вже маючи уявлення про натуральні числа. У процесі вивчення математики це поняття поступово розширюється. Це пов'язано з практичним застосуванням чисел – вимірюванням величин. Для цих цілей натуральних чисел виявляється недостатньо, оскільки не завжди одиниця величини вкладається цілу кількість разів у вимірювану величину. Для висловлення результатів будь-якого вимірювання необхідно розширювати поняття чисел шляхом введення нових числових понять, відмінних від натуральних чисел. Це призводить до появи раціональних (дробових) чисел, а згодом і ірраціональних чисел, що разом утворюють безліч дійсних чисел. Цей процес розширення поняття чисел не зупиняється, оскільки важливий для розвитку інших наук і для математики самої по собі.

У початкових класах діти зазвичай знайомляться з поняттям дробових чисел, і з часом їх розуміння цього поняття розширюється і поглиблюється. Отже, вчителю необхідно володіти ефективними методами введення учнів у світ дробових чисел, викладанням операцій додавання і віднімання з їх використанням, розглядом взаємозв'язків між множинами натуральних і раціональних чисел, а також повним освоєнням поняття раціонального числа. Поняття дробу і операції з дробами не є такими простими, як може здатися математикам і вчителям математики. Часто операції з дробами викликають значні труднощі навіть у старшокласників і студентів. Тому проблема надійного і точного освоєння поняття дробу і властивостей дробів є дуже важливою.

У зв'язку з впровадженням Нової української школи (НУШ) виникає необхідність розробки методики вивчення дробових чисел, яка б відповідала її вимогам.

Все це і зумовило вибір теми дослідження “Методика вивчення звичайних дробів в курсі математики 5 класу”.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики в 5 класі.

Предметом дослідження є розробка методики навчання учнів з теми "Звичайні дроби" за чотирма рівнями.

Мета дослідження полягає в розробці методики навчання учнів теми "Звичайні дроби" на чотирьох рівнях складності. Головні завдання включають розробку методичних рекомендацій, системи завдань і матеріалів, спрямованих на формування розуміння поняття "звичайний дріб" в 5 класі, а також експериментальну перевірку цієї методики на її ефективність.

Для досягнення мети потрібно:

- Ознайомитися та проаналізувати основні підручники та навчально-методичну літературу для 5 класу з даної теми;
- розробити систему вправ та завдань та методику роботи з нею;
- експериментально перевірити ефективність розробленої методики вивчення звичайних дробів.

Для вирішення поставлених завдань було використано комплекс теоретичних та експериментальних методів:

- *Аналіз методичної та психологічної літератури* (оцінка і вивчення наукової літератури щодо навчання звичайним дробам, включаючи методичні рекомендації та психологічні аспекти освоєння матеріалу);
- *Порівняння різних підручників і посібників* (аналіз різноманітних навчальних матеріалів з математики для вибору найбільш ефективних підходів до вивчення дробів у 5 класі);
- *Практична діяльність* (організація і проведення навчального процесу на уроках математики, що включає застосування розробленої методики та системи вправ);

- *Педагогічний експеримент* (проведення педагогічного експерименту для оцінки ефективності розробленої методики навчання звичайним дробам. Опрацювання результатів експерименту з використанням методів математичної статистики для обґрунтування отриманих висновків).

Розроблена методика перевірялася експериментально в 5-их класах Либохорівського закладу загальної середньої освіти І- II ступенів Славської селищної ради Стрийського району Львівської області. Результати дослідження доповідались на міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка.

РОЗДІЛ 1. Теоретичні основи вивчення дробових чисел

1.1. Тема “Дробові числа” в елементарній математиці

Питання про те, з яких дробів (звичайних чи десяткових) доцільно починати вивчення дробових чисел у школі, є предметом дискусій. Протягом більш як ста років існує розбіжність думок щодо оптимального підходу:

1. *Початок із звичайних дробів:* Деякі методисти та педагоги вважають, що починати з вивчення звичайних дробів є більш природнім підходом. Це дозволяє учням спочатку ознайомитися з базовими поняттями дробів, такими як чисельник і знаменник, і засвоїти основні операції над ними (додавання, віднімання, множення, ділення).

2. *Початок із десяткових дробів:* Інші підходять до навчання, розпочинаючи з десяткових дробів. Цей підхід аргументують тим, що десяткові дроби мають прямий зв'язок з десятковою системою числення, яка є основою для розуміння десяткових дробів. Вони також вважають, що це спрощує вивчення дробових чисел, оскільки вони можуть бути представлені у форматі, зрозумілому для учнів з відповідною базовою математичною освітою.

Кожен підхід має свої переваги та недоліки, і вибір між ними може залежати від конкретних умов навчання, підручників та вікових особливостей учнів. Важливо, щоб методика вивчення дробів була збалансованою і сприяла глибокому розумінню цих математичних концепцій учнями.

У наших загальноосвітніх школах довгий час спочатку вивчали звичайні дроби, а потім десяткові. Прихильники такої послідовності вивчення дробових чисел наводять такі аргументи:

- 1) десятковий дріб є видом звичайного дробу, і щоб ввести означення десяткового дробу, треба спочатку означити звичайний дріб;
- 2) якщо починати з вивчення десяткових, то при множенні і діленні виникнуть труднощі і неминуче знизиться науковий рівень викладання.

Однак інші методисти вважають, що краще починати з десяткових дробів,

бо:

- 1) для практичних потреб досить знати лише десяткові дроби;
- 2) дії над десятковими дробами виконувати легше, ніж над звичайними;
- 3) усю теорію десяткових дробів можна побудувати, не звертаючись до

поняття звичайного дроби, а просто розширюючи звичну нам десяткову систему нумерації на розряди, менші за одиницю.

Ця дискусія ще не закінчилась, хоч тепер, як і раніше, учні спочатку розглядають звичайні дроби і лише потім – десяткові [2].

Ми знаємо, що для визначення будь-якої величини необхідно її виміряти, тобто порівняти з одиницею. Наприклад, щоб дізнатися довжину стола, ми вимірюємо її аршинами. Якщо аршин уміщується по довжині стола рівно двічі, ми отримуємо ціле число. Однак, якщо ми захочемо виміряти цей стіл сажнями, то побачимо, що сажень не міститься в ньому жодного разу. Тоді ми ділимо сажень на декілька рівних частин, наприклад, на 6, і бачимо скільки раз одна така частина міститься в довжині стола. Якщо шоста частина міститься 4 рази, то довжина

столова рівна частині або просто сажня. Це число сажня називається дробом. Отже, дріб — це число, що показує, скільки разів яка-небудь відома частина одиниці повторюється в предметі. Тому, щоб повністю зрозуміти дроб, потрібно знати:

- 1) на скільки рівних частин була поділена одиниця;
- 2) скільки таких частин було взято або скільки разів така частина повторювалась у предметі.

На основі цього, дріб зображується за допомогою двох чисел, які записуються одне під другим і відділяються рискою. Одне з них показує, на скільки рівних частин була розділена одиниця, і називається знаменником; воно пишеться під рискою. Друге число показує, скільки таких частин взято, і називається чисельником; воно пишеться над рискою. Наприклад, дріб "чотири

шостих" записується як $\frac{4}{6}$, де 6 є знаменником і показує, що одиниця була розділена на 6 рівних частин, а 4 є чисельником і показує, що взято 4 таких частини. Чисельник і знаменник разом називають членами дробу [14].

На ранній стадії розвитку людина прийшла до поняття одиничного дробу. Навіть ті, хто ніколи не чули терміна "дріб", використовують частини (половина,

четвертина, восьма частина) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$ у повсякденному житті, розуміючи їх як частки або частини чогось цілого.

Єгиптяни, які досягли високого рівня розвитку в техніці та мистецтві, в арифметиці дробових чисел не пішли далі одиничних дробів. Усі відомі нам єгипетські математичні документи, що датуються від 2000 року до н. е. до VIII ст. н. е., містять лише одиничні дроби. Окрім них, єгиптяни використовували ще дріб

$\frac{2}{n}$, який мав особливе значення.

Якщо результати яких-небудь розрахунків приводили до дробу неединичного, його замінювали сумою одиничних:

Рукопис Архімеда містить таблицю всіх дробів виду $\frac{1}{n}$ з чисельником 1 і непарними знаменниками від 5 до 99, які записувалися сумою одиничних дробів. Очевидно, що такі таблиці були створені раз і назавжди, і ними користувався кожен, хто вивчав математику. Шкіряний згорток Британського

музею, що належить до більш ранньої епохи, ніж рукопис Райнда, містить, окрім зазначених, ще 26 випадків запису неодиначних дробів у вигляді суми одиначних.

Єгипетські методи обчислень за допомогою одиначних дробів перейшли до греків уже в епоху Піфагора (VI ст. до н. е.). До III ст. до н. е. грецькі математики використовували виключно ці методи. З цього часу поряд з одиначними дробами почали з'являтися інші види дробів, але одиначні дроби залишалися в практичному житті до кінця грецької історії.

Шумери в давню епоху також використовували одиначні дроби, але вже в третьому тисячолітті до нашої ери ці дроби почали витіснятися шістдесятковими дробами.

Араби перейняли одиначні дроби очевидно від греків, так як Герон і Діофант користуються, якщо і не виключно, ще й одиначними дробами. І аль-Хорезмі (IX ст.) і аль-Кархі (XI ст.) роблять обчислення за допомогою одиначних дробів.

Від арабів ці дроби перейшли в перші європейські підручники, зокрема в книгу Леонардо Пізанського (XIII ст.). Леонардо Пізанський переважно використовував одиначні дроби для обчислень, хоча добре знав і інші види дробів. З цієї книги одиначні дроби потрапили в пізніші підручники комерційної арифметики всіх європейських народів і залишалися там досить довго.

У вже третьому тисячолітті до нашої ери жителі Вавилону ввели в ужиток систематичні дроби, де знаменниками були степені числа 60. Ці народи мали систему числення з основою 60. Вони застосували цю ідею утворення дробових

одинач у зворотньому напрямку, розглядаючи дроби , і т. д. як розряди чисел і записуючи їх тими ж знаками, що й для цілих чисел.

Вавилонці перевершили ідею нашої метричної системи, десяткового ділення і десяткових дробів. Їхня система мала єдиний недолік — тривалу відсутність знака 0 і спеціального знака для відділення цілої частини від дробової. Знак для

позначення відсутності розряду, що не є останнім у числі, у вавилонців з'явився близько 500 р. до н. е. Система шістдесяткових дробів, створена ними, була настільки зручною, що вже до 200 р. до н. е. була прийнята грецькими астрономами. Згодом вона перейшла в європейську науку і використовувалася до кінця XVI ст. До того часу звичайні дробі вже отримали широке розповсюдження в практичному житті і називалися народними, тоді як шістдесяткові дробі носили назву фізичних і астрономічних. Шістдесяткові дробі поступилися місцем десятковим дробам лише в XVII ст.

Грецькі математики використовували для обчислень як одиничні, так і шістдесяткові дробі. Проте історія звичайних дробів починається в Греції. Греки не називали раціональний дріб виду $\frac{p}{q}$ числом, а відношенням. Тим не менше, розгляд таких відношень грецькими математиками став основою для розвитку теорії та практики звичайних дробів.

Архімед (287-212 pp.) формулює визначення довжини кола словами так: вона рівна 3-м цілим діаметрам і кусочку, який знаходиться (по величині) між

одною сьомою і десяти сімдесят перших ($\frac{1}{70}$). Ератосфен (276 – 194 pp.) пише: частина меридіана між тропіками містить 11 таких частин, яких весь меридіан містить 83 (замість того щоби сказати, що цей відрізок меридіана складає $\frac{11}{83}$ усього меридіана). Птолемей (II ст н. е.), обчислюючи довжину хорди, говорить, що в ній міститься майже 84 таких частин, яких діаметр містить 120 (замість $\frac{84}{120}$ діаметра). Коментатори їх праць (Прокл – V ст. і Евтокій – VI ст. н. е.) вживають лише одні одиничні дробі.

Римляни не розвивали далі поняття звичайних дробів. Основний дріб був

унція (). Дроби , , , ... вони називали «7, 8, 9, ... унцій».

Ідея звичайних дробів походить з Індії. Спочатку індійці також використовували одиничні дроби, але вже досить рано вони почали застосовувати звичайні дроби загального вигляду. В давніх індійських пам'ятках, створених у IV столітті до н.е. (Сульвасутра – книги про побудову алтарів – Апастамби),

зустрічаються дроби на зразок , тощо. Водночас деякі дослідники, зокрема Кей, сумніваються у віці цих пам'яток. Брамагупта (народився в 598 році н.е.) викладав правила дій з дробами майже в сучасних термінах: «ділення дробів – це ділення чисельників, поділених на частку знаменників» і т.д.

Звичайні дроби індійців, поряд з єгипетськими одиничними дробами та вавилонськими шістдесятковими дробами, перейшли до арабів. Однак навіть аль-Хорезмі (820 р.) у своєму підручнику індійської арифметики лише побіжно згадує про індійські дроби. В одному творі Абу-ол-Вафа зустрічається дріб виду $\frac{m}{n}$, $n > m > 1$. Автор стверджує, що дроби такого виду негарні і їх слід уникати. Ділові люди не люблять такі дроби і вважають за краще їх виражати (точно або наближено) сумою одиничних дробів (частин). Насаві (1030 р.) і європейські перекладачі праць аль-Хорезмі (XII ст.) на латинську мову доповнили цей розділ. Вивчення звичайних дробів почало з'являтися в європейських підручниках, але цей процес відбувався досить повільно. Зрозумілий виклад звичайних дробів з'явився лише в підручнику Симона Стевіна (1585 р.). Як іронія долі, це була книга того автора, який завдав найбільшого удару по звичайних дробах у Європі своєю книгою про десяткові дроби, що вийшла в тому ж році. Стевін писав свою «Арифметику» для освічених людей. Він добре розумів труднощі їх засвоєння і саме на цьому підґрунті базував свою агітацію за десяткові дроби.

Виклад дробів у підручниках європейських шкіл з'явився лише у XVIII

столітті. У працях Вольфа вперше з'являється вимога, що властивості арифметичних дій, встановлені для цілих чисел, мають виконуватися і для дробів. В Англії вивчення дробів і арифметики загалом входило до програми комерційних шкіл. В середніх загальноосвітніх школах для знаті, таких як Ітонський коледж, заснований у 1446 році, арифметика стала обов'язковим предметом викладання лише у 1851 році.

Десяткові дробі є видом систематичних дробів, які сьогодні мають особливе значення завдяки прийнятій у всьому світі метричній системі мір і ваги, що відповідає використовуваній системі числення. Попередницею десятикових дробів, як ми вже з'ясували, є система шістдесятикових дробів вавилонців, яка повністю відповідала їхній системі мір і ваги.

Зручність шістдесятикових дробів для обчислень була визнана, як ми вже бачили, ще грецькими вченими. На початку нового часу виникає розуміння, що зручність цих дробів зумовлена не стільки властивостями числа 60, скільки систематичністю цих дробів.

Почала визрівати ідея, що основу системи дробів може становити будь-яке інше число. При використанні десятикової системи числення для натуральних чисел, цим числом має бути десять. Це розуміння вже можна побачити в підручнику арифметики середини XII століття, приписуваному Іоанну Севільському. Іордан Неморарій (XIII ст.) навіть ввів спеціальну назву для таких систематичних дробів, подібних до шістдесятикових. У XIV столітті вчені дійшли висновку, що число 60 стало основою системи дробів лише через велику кількість дільників і що замість нього можна було б взяти інше число, наприклад, 12 або 10. У наступні століття з'явилася думка, що число 10 має стати основою системи дробів.

Ще на ранніх етапах можна спостерігати часткове захоплення окремими властивостями десятикових дробів і дій з ними. Багато старих авторів, від аль-Хорезмі до Іордана Неморарія, використовували властивості десятикових дробів при обчисленні квадратного кореня та ділення. Так, замість $\sqrt{26}$ береться $\sqrt{260000}$. Одержаний корінь 509 ділиться на 100 і частка перетворюється на

5°5'24"

шістдесятковий дріб або в конкретне значення:

. Рідше і значно пізніше з'являються в літературі випадки ділення, що використовують властивості десяткових дробів. В рукописах XV ст.

можна знайти значення кореня із 392 у вигляді $19\frac{7989}{10000}$.

Відокремлення дробової частини числа від цілої частини рисочкою вже зустрічається у Регіомонтана, а Франческо Пеллос (Пелліцаті) у своїй «Арифметиці» 1492 року вперше використовує крапку для відокремлення.

Ряд інших авторів користувалися тими ж й іншими властивостями десяткових дробів: Кардано (1539 р.) знаходить частку від ділення числа на 10, 100, 1000 відкиданням останніх цифр діленого і називає цей прийом «правилом

Регіомонтана», а Апіан (1527 р.) пише, що , , ,

з тією ж метою, з якою сучасний учитель підкреслює ці рівності на перших уроках, що присвячені десятковим дробам.

Етьєн Бонфільс, французький математик XIV століття, зробив значний внесок у розвиток десяткових дробів. Його праці, знайдені лише 600 років потому, описують визначення, правила арифметики та застосування десяткових дробів. Ці дослідження мали значний вплив на популяризацію та поширення використання десяткових дробів у Європі. Рукопис Бонфільса містить опис не

лише десяткових дробів, але й показникового (логарифмічного) обчислення за основою 10. Бонфільс використовує терміни "перші", "другі" і так далі для позначення розрядів десяткових дробів. Ця термінологія схожа на ту, що використовується для шістдесяткових дробів, які були поширені в той час. Автор не встиг завершити свою роботу над десятковими дробами. Його рукопис є лише коротким ескізом теми, але він демонструє глибоке розуміння.

Джемшид Гіяседдін Каші, видатний астроном з Самарканда, який жив у першій половині XV століття, зробив значний внесок у розвиток теорії десяткових дробів. Його роботи, на відміну від рукопису Бонфільса, характеризуються вичерпною повнотою та ґрунтовним викладом теми. "Ключ до арифметики" та "Трактат про коло", два найвідоміші твори Каші з десяткових дробів, були перекладені професором Б. А. Розенфельдом. Ці переклади, доповнені цінними примітками Розенфельда та професора А. П. Юшкевича, роблять доступними для сучасних читачів глибокі знання Каші в цій галузі.

Каші зазначає, що астрономи використовували шістдесяткову систему числення для позначення частин часу (хвилини, секунди, терції тощо). Ґрунтуючись на цій практиці, автор вводить десяткову систему числення для десяткових дробів, де знаменниками є степені числа 10 (десяті, десяткові секунди, десяткові терції тощо). Каші використовує специфічну термінологію для позначення різних розрядів десяткових дробів, що робить його систему чіткою та зрозумілою.

Джемшид Гіяседдін Каші у наступних главах "Ключа до арифметики" не лише чітко викладає правила арифметичних дій з десятковими дробами (додавання, віднімання, множення, ділення), але й описує різні прийоми для знаходження дробової частини в десятковому дробі. Каші використовує спосіб "жалюзі" для множення десяткових дробів. Цей метод, який візуально подібний до роботи жалюзі, допомагає чітко продемонструвати процес множення та отримати правильний результат. Каші описує кілька прийомів для виділення дробової частини в десятковому дробі: цілу частину числа можна писати чорним чорнилом, а дробову – іншим кольором, наприклад, червоним; вертикальна риска

може бути використана для чіткого відокремлення цілої частини від дробової; цілу та дробову частини числа можна розмістити в окремі прямокутники, щоб чітко їх візуалізувати; над кожною цифрою в десятковому дробі можна надписати назву розряду, до якого вона належить (десяті, десяткові секунди, десяткові терції тощо).

У праці Джемшида Гіяседдіна Каші “Ключ до арифметики” дійсно відсутня кома для позначення дробової частини числа. Це пов’язано з тим, що в той час не було загальноприйнятої системи запису десяткових дробів. Каші використовував шістдесяткову систему числення для позначення як цілих, так і дробових частин, а для переведення їх у десяткову систему він розробив спеціальні методи. У четвертій книзі “Ключа до арифметики”, яка присвячена вимірюванню різних фігур, Каші приділяє багато уваги перетворенню шістдесяткових дробів у десяткові. Він описує різні методи, такі як використання таблиць та арифметичні дії. Каші склав таблиці відповідності між шістдесятковими та десятковими дробами, які допомагали йому швидко та легко переводити одні в інші. Він також використовував арифметичні дії, такі як множення, ділення, додавання та віднімання, для переведення шістдесяткових дробів у десяткові.

Періодичні десяткові дробі з'явилися в наукових працях ще в XVII столітті, але в підручниках вони почали фігурувати лише з XIX століття.

Арабський математик XV століття аль-Марадіні вперше відзначив, що при

$$1^{\circ}25'$$

діленні $47^{\circ}50'$ на частка (в шістдесяткових дробах) є періодичною з 8 розрядами, які повторюються.

Приклади найпростіших випадків перетворення звичайних дробів у десяткові і навпаки вже були у працях Апіана (1527 р.). Великий трактат з алгебри Валліса, виданий у 1676 році, містить низку тверджень про періодичні дробі.

Валліс, який стверджував, що не має попередників у цій області, знав, які звичайні дробі перетворюються на періодичні чисті або мішані дробі, скільки

цифр містить період, і як перетворити періодичний дріб у звичайний. Він також знав, що при добуванні квадратного кореня з неповного квадрата або кубічного кореня з неповного куба ніколи не виходить періодичний дріб. Однак Валліс не розглядав питання про природу неперіодичних нескінченних десяткових дробів (ірраціональних чисел), які виникають при добуванні таких коренів.

Шкільне правило перетворення чистих і мішаних періодичних дробів у звичайні вперше було викладено у праці Августа (1822 р.). Терміни «чистий» та «мішаний» періодичний дріб з'явилися в праці Коппе (1836 р.). У венгерського математика Сегнера вперше з'явилися терміни «правильні» і «неправильні» дроби (1747 р.). До цього часу ці поняття не були визначені.

Додавання дробів майже завжди обмежується лише двома компонентами, що спрощує зведення їх до спільного знаменника. Цей термін з'явився в підручниках лише в XVIII столітті; до того часу говорилося лише про відповідність розширення дробів. Бхаскара (XII ст.) розглядав спільний знаменник як добуток знаменників даних дробів, не звертаючи уваги на їхні спільні дільники. Леонардо (1228 р.) зазначив, що спільний множник двох знаменників потрібно брати в спільний знаменник лише один раз і використовував для його найменування спеціальний, штучний термін – "columna". Ідея Леонардо залишалася невідомою протягом кількох століть, поки її не використали Тарталья (1556 р.) і Клавій (1583 р.). Вони запропонували знаходити найменший спільний знаменник при додаванні та відніманні дробів. Для цього знаменник першого дробу множиться на 2, 3, 5 і т.д., поки не вийде число, кратне другому знаменнику; потім це число комбінується з третім знаменником і так далі. Лише наприкінці XVII століття (1696 р.) з'явилося сучасне правило знаходження спільного знаменника [6].

1.2. Аналіз методичної літератури по темі дослідження

У сучасному світі надзвичайно важливим є забезпечення якісної математичної підготовки, оскільки більшість професій нині потребують ґрунтовних знань у цій галузі. Як результат, дедалі більше людей визнають математику одним із ключових навчальних предметів.

Сьогодні основними завданнями навчання математики є:

- спрямування на усвідомлене опанування учнями системи математичних знань, умінь і навичок, які є необхідними як для повсякденного життя та майбутньої професійної діяльності, так і для успішного освоєння інших навчальних предметів і продовження освіти впродовж життя;
- розвиток когнітивних здібностей учнів, що передбачає не лише засвоєння фактів і навичок, але й формування мислення, здатності аналізувати, критично оцінювати інформацію та самостійно знаходити рішення проблем.;
- формування в учнів наукового світогляду, який базується на системі поглядів на світ, заснованій на наукових знаннях та методах пізнання.;
- економічне, екологічне, естетичне, патріотичне виховання;
- розвиток позитивних якостей особистості та загальнолюдських духовних цінностей.

Використання різноманітних методів навчання, які роблять акцент на самостійній роботі учнів, дослідженнях, проектній діяльності, співпраці та використанні інформаційно-комунікаційних технологій, допоможе їм не лише оволодіти математичними знаннями, але й розвинути ключові компетентності, необхідні для успішного життя в сучасному світі.

При вивченні математики виникають труднощі, що пов'язані з особливостями самого предмету, вони обумовлюються специфікою психології мислення, індивідуальною особливістю пізнавальної діяльності учнів.

У сучасному світі, де знання та технології постійно оновлюються, принцип безперервної освіти стає все більш актуальним. Це стосується й математики, адже

математичні навички та знання є ключовими для успішного навчання в інших дисциплінах, а також для вирішення проблем у різних сферах життя.

Задача навчання вчитися передбачає розвиток у школярів самостійного мислення, пізнавальної активності та творчої ініціативи. Психологічні дослідження показали, що матеріал стає найбільш зрозумілим і запам'ятовується краще, коли він є предметом активних дій учнів, причому ці дії повинні повністю відповідати їхньому рівню знань.

О. І. Левус [12] вважає, що одним із головних завдань школи є підготовка учнів до життя в сучасному суспільстві, виховання мислячої особистості, здатної аналізувати, порівнювати і орієнтуватися в потоці інформації. Для цього важливо створити умови, що сприяють виявленню творчих здібностей дитини, формувати в учнів самостійне мислення, заохочувати їх до творчості та готувати до безперервного навчання і самоосвіти, усвідомлюючи необхідність постійного поповнення знань та навичок.

Розвиток особистості у процесі навчання математики є складнішим завданням, ніж просто навчання розв'язуванню задач чи доведенню математичних тверджень. Однак метою особистісно-орієнтованої освіти є включення не лише предметного змісту, визначеного освітніми стандартами, а й компонентів, що стосуються розвитку особистості учня.

Особистісно-орієнтована освіта спрямована не на формування особистості з певними властивостями, а на створення умов для розвитку її особистісних функцій. Важливо, щоб цілі навчання предмета чи теми були не лише чітко визначені вчителем, а й сприйняті учнями. Значення набувають задачі, що вирішуються за допомогою математичних методів, але виходять за межі математики, тобто ті, які виникають у реальному житті в різних сферах науки та виробництва.

В умовах особистісно-орієнтованої математичної освіти вчителю необхідно поєднувати різні форми навчання: індивідуальну та колективну, діалогову та контекстну. Важливо створювати умови для розвитку творчої діяльності учнів, застосовуючи як активні, так і пасивні методи навчання. Таким чином, вчителі

мають орієнтуватися на формування особистості, не через тиск, а через активізацію природних здібностей дитини, що дозволить зробити навчання цікавим, різноманітним, ефективним і демократичним (Т. Гаврильченко).

Н. Забранська та В. Забранський у своїй науковій праці [9] зазначають, що в шкільній математиці існує декілька підходів до вивчення дробів. Один із них передбачає послідовне вивчення звичайних дробів, а потім десяткових як їхнього часткового випадку. За іншим підходом, після натуральних чисел переходять до десяткових дробів, розширюючи таким чином числову пряму вправо. Існує також підхід, що передбачає паралельне вивчення обох типів дробів, при цьому десяткові розглядаються як зручна форма запису дробів.

Вивчення дробів у школі здійснюється поступово. У початкових класах закладається фундамент, вводяться поняття частин цілого, долей та їхнє графічне зображення. Учні вчаться порівнювати частини та виконувати прості дії з ними. У 5 класі відбувається перехід до формального визначення дробу як результату ділення. Учні розширюють свої знання про дроби, вивчаючи їхні властивості та операції.

У своїй роботі Н. Буряк [5] критикує пасивний підхід до навчання, коли учень сприймає знання лише як готові факти. Вона стверджує, що для справжнього засвоєння матеріалу необхідна активна участь учня в навчальному процесі. Лише через самостійний пошук та застосування знань вони перетворюються на особистий інструмент мислення.

Будуючи на знаннях, отриманих у початковій школі про дроби, у 5 класі можна розширити уявлення учнів про дроби, вводячи поняття доповнення дробу до одиниці. Ефективним прийомом є використання геометричних моделей, зокрема, кругів, які є знайомими для учнів з початкової школи. Доки учні відповідають, на дошці можна записати:

$$\begin{array}{cccc} \overset{1}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{1}}\overset{1}{\cancel{2}}\overset{1}{\cancel{3}} & \overset{1}{\cancel{2}}\overset{1}{\cancel{2}} & \overset{1}{\cancel{3}}\overset{1}{\cancel{1}} \\ \hline 22 & 44 & 44 & 44 \end{array}$$

На думку Н. Буряк, учителю слід зосередити увагу учнів на чисельнику та знаменнику поданих пар дробів. Він пропонує ставити питання, як із чисельника

першого дробу можна отримати чисельник другого, що для цього необхідно зробити, і заохочувати учнів самостійно дійти висновку про принцип доповнення дробу до одиниці. На наступному уроці, перевіряючи домашнє завдання, варто повторити цей процес і запропонувати учням обчислити значення виразів на

зразок: $1 - \frac{3}{5}$; $1 - \frac{1}{2}$; $1 - \frac{1}{4}$; $1 - \frac{2}{5}$ тощо.

Для закріплення знань про мішані числа у 5 класі учням можна запропонувати завдання: представити кілька мішаних чисел у вигляді суми натурального числа і дробу. Це допоможе їм навчитися не лише записувати суму в форматі мішаного числа, а й виконувати зворотну операцію. Далі повторивши віднімання числа від суми, виконати з ними дії типу: (подавши). Одночасно

варто розглянути також різниці вигляду: $5 - \frac{4}{7}$; $6 - \frac{3}{4}$ (подавши $5 = 4 + 1$; $6 = 5 + 1$). І, нарешті, з'ясувати, що для того, щоб відняти правильний дріб від цілого числа, потрібно число зменшити на одиницю і праворуч дописати

доповнення даного дробу до одиниці ($5 - \frac{4}{7} = 4 - \frac{3}{7}$).

Практика показує, що багато учнів старших класів виконують додавання та віднімання мішаних чисел, спочатку перетворюючи їх на неправильні дроби, а потім отриманий результат повертають у формат мішаного числа. Для них цей метод здається єдиним можливим. Причиною цього може бути те, що вчитель не акцентував увагу на різноманітності підходів до обчислень і на виборі найбільш зручного з них або ж почав вивчення теми саме з цього способу, приділивши йому більше часу, ніж іншим методам. Тому в 5 класі приклади типу бажано не розглядати, щоб при вивченні додавання і віднімання мішаних чисел не був першим спосіб перетворення у неправильний дріб. Його краще розглядати після всіх інших способів обчислень різниці.

Г. П. Бевз у своєму навчальному посібнику [2] присвячує дробовим числам §26. Автор пропонує кілька способів введення поняття звичайного дробу: 1) як частки від ділення одного числа на інше, 2) як позначення однієї чи кількох однакових часток певного предмета, 3) як результат вимірювання. У теоретичній

математиці зазвичай надають перевагу першому підходу. Розглянувши неможливість виконання ділення в межах множини натуральних чисел, вводять новий тип чисел – дробові. Це дозволяє створити числову множину, у якій ділення завжди можливе (крім ділення на нуль).

Г. П. Бевз зазначає, що у 5 класі складні пояснення варто уникати. Натомість краще почати з конкретного об'єкта, який легко поділити на рівні частини, наприклад, торт, кавун, яблуко чи мотузку. Учням пропонується розділити об'єкт, скажімо, на 8 рівних частин і пояснити, що замість фрази "одна

восьма частина кавуна" використовують запис « кавуна». Пізніше варто звернути увагу на те, що для вимірювання довжин, площ чи інших величин натуральних чисел недостатньо, і тому потрібні дробові числа. Далі слід показати, що дробові числа виникають також у результаті ділення. При поясненні цього матеріалу Г. П. Бевз рекомендує активно застосовувати наочні матеріали:

паперові смужки, лінійки, прямокутники, кола, поділені на рівні частини тощо. Уже на першому уроці варто ввести поняття «чисельник» і «знаменник». Пояснити як читати і записувати дроби. Він зазначає, що звичайні дроби читаються неоднозначно. Наприклад, словами «тисяча сто двадцять третіх» можна прочитати будь-який з трьох дробів: $\frac{1000}{123}$; $\frac{1100}{23}$; $\frac{1120}{3}$. А паузи між назвою чисельника та знаменника дають можливість розрізняти такі дроби.

Г. П. Бевз наголошує на важливості того, щоб учні розуміли: кожний дріб представляє частку від ділення чисельника на знаменник. Найкраще пояснювати це на практичних прикладах, наприклад, розділивши плитку шоколаду порівну між кількома дітьми. Такий підхід робить поняття дроби зрозумілішим. Після цього легко пояснити, що будь-яке натуральне число можна записати у вигляді дроби, знаменник якого дорівнює 1.

Важливо ознайомити учнів із розміщенням дробів на координатному промені, зображуючи їх точками. Також варто запропонувати обернені завдання: позначати на промені точки із заданими координатами. Це не лише сприятиме

кращому розумінню дробів, але й забезпечить зручний спосіб для пояснення їх порівняння.

Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками, зауважує Бевз Г. П., доцільно ілюструвати конкретними прикладами. Він пропонує пояснити спочатку додавання дробів, користуючись секторами круга.

Можна показати, що $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ і т.д. Після кількох таких прикладів, формулюється правило: *щоб додати дроби з однаковими знаменниками, треба додати їх чисельники і залишити той самий знаменник*. Аналогічно познайомити учнів із правилом віднімання дробів.

У деяких методиках звертають увагу на недоліки термінології щодо мішаних чисел. Зокрема, зазначається, що мішане число не слід називати дробом. У розділі, присвяченому десятковим дробам, поняття "мішане число" взагалі не

вводиться, однак у підручниках число $1\frac{1}{2}$ прийнято називати мішаним числом. А. М. Колмогоров вважав цей термін невдалим і пропонував замінити його на "мішаний дріб".

У навчальному посібнику [8] О. С. Дубинчук присвячує звичайним дробам §1 першого розділу. Автор наголошує, що формування поняття звичайного дроби має на меті підготувати учнів до вивчення десяткових дробів. Тому вчитель повинен приділити особливу увагу терміну "дробове число", як зазначено у програмі та підручнику. Терміни "звичайний дріб", "чисельник" і "знаменник" вводяться в контексті поділу предметів на рівні частини, наприклад, пирога. Одразу ж пояснюється поняття рівних дробів, на прикладі співвідношення двох чвертей пирога і половини пирога.

О. С. Дубинчук зазначає, що формування в учнів поняття звичайного дроби є тривалим процесом. Учні продовжують розв'язувати приклади на утворення

дробів через поділ предметів на частини та вимірювання, а також виконують задачі на знаходження дробу від числа та числа за його дробом.

В.І. Мішин [20] вказує на важливість створення проблемної ситуації при введенні дробів. Автор пропонує розпочинати вивчення теми з поділу предметів на рівні частини. Коли учні стикаються з необхідністю записати результати такого поділу, виникає потреба в нових математичних знаках – дробах. Це дозволяє плавно перейти до формального запису дробів і їхніх властивостей

Автор підкреслює, що використання координатного променя є незамінним інструментом для візуалізації дробів. Завдяки цьому учні можуть наочно побачити, як дробові розташовуються на числовій прямій, що сприяє кращому розумінню їхніх значень та взаємозв'язків

Ляпін С.Є. у своєму підручнику [13] приділяє значну увагу темі звичайних дробів, розглядаючи її як логічне продовження вивчення натуральних чисел. Автор підкреслює, що введення дробів дозволяє значно розширити можливості арифметичних дій та вирішувати ширший спектр задач. Детально аналізує особливості введення дробових чисел, зокрема, необхідність переосмислення таких фундаментальних понять, як рівність, сума та добуток. Автор показує, як ці поняття адаптуються до нової числової системи, що дозволяє виконувати арифметичні дії з дробами так само, як і з натуральними числами

Ляпін С.Є. підкреслює важливість систематичного вивчення дробів, починаючи з 5 класу. Він пропонує не обмежуватися початковими уявленнями, а переходити до більш глибокого аналізу цього поняття, спираючись на конкретні приклади з вимірювань. Автор звертає увагу на те, що дробові виникли з практичної потреби вимірювати різноманітні величини. Тому Ляпін С.Є. пропонує використовувати завдання на вимірювання довжин, площ і об'ємів для ілюстрації поняття дробу та його застосування.

Після введення поняття дробу виникає природна потреба порівнювати їх між собою. Ляпін С.Є. пропонує розпочинати вивчення порівняння дробів з конкретних прикладів, використовуючи моделі одиниці. Це дозволяє учням наочно побачити, що одні дробові можуть бути більшими, меншими або рівними

іншим, і таким чином підводить до формального визначення рівності та нерівності дробів.

Ляпін С.Є. пропонує використовувати числовий промінь як ефективний інструмент для порівняння дробів. Наочно зображуючи дроби точками на числовому промені, учні можуть легко встановити, який дріб більший, менший або дорівнює іншому. Такий підхід не лише допомагає порівнювати дробы, а й підводить до важливого поняття рівності дробів.

Щоб учні закріпили навички додавання дробів з однаковими знаменниками, пропонується розробити систему вправ, яка охоплюватиме різні комбінації чисел: додавання цілих чисел до дробів, додавання цілих чисел до мішаних чисел, додавання правильних дробів, що в сумі дають як правильні, так і неправильні дробы, а також додавання мішаних чисел з різними результатами. Такий підхід дозволить учням глибше освоїти алгоритм додавання дробів та застосовувати його в різних ситуаціях.

Для закріплення навичок віднімання дробів з однаковими знаменниками необхідно підбирати різноманітні приклади, які б охоплювали всі можливі ситуації: віднімання від одиниці, від цілого числа, від мішаних чисел з різним співвідношенням дробових частин. Це дозволить учням краще зрозуміти алгоритм віднімання і застосовувати його в різних задачах.

Вивчення звичайних дробів – це не просто окрема тема в курсі математики, а ключовий етап у формуванні математичної компетентності учня. Знання про звичайні дробы є необхідною умовою для успішного освоєння десяткових дробів та подальшого вивчення математики.

1.3. Аналіз підручників щодо викладу даної теми

Проаналізуємо, як викладена теорія звичайних дробів у шкільних підручниках з математики для 5 класу.

Розглянемо підручник [1]. Підручник містить два розділи з поділом на параграфи. Тема «Дробові числа» висвітлюється в другому розділі. У порівнянні з підручником [16], в якому на вивчення звичайних дробів відводиться 5 пунктів, то тут лише два параграфи.

У §21 «Дробові числа і звичайні дроби» на основі прикладів з життя вводиться поняття дробового числа (половина яблука, одна десята частина кавуна), пояснюється як записується і що означає звичайний дріб, де записується знаменник і чисельник дробу. Далі пояснюється як знайти частину від числа і

формулюється правило: щоб знайти $\frac{a}{n}$ від числа a , потрібно a поділити на n ; щоб знайти $\frac{m}{n}$ від числа, потрібно частку $a : n$ помножити на m . Після цього формулюють правила порівнювання звичайних дробів з однаковими знаменниками: із двох дробів з однаковими знаменниками той дріб більший, в якого чисельник більший. Далі кажуть, що порівнювати звичайні дроби можна також, користуючись координатним променем і наводять приклад. Звертають увагу, що на координатному промені точка з меншою координатою розташована ближче до точки 0, ніж точка з більшою координатою і формулюють означення правильного і неправильного дробів: звичайний дріб, у якого чисельник менший від знаменника, називають правильним; дріб, у якого чисельник не менший від знаменника, називають неправильним.

У §22 «Додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками» спочатку формулюють правила додавання і віднімання, такі ж самі як і в підручнику [16], також зауважують: які b не були натуральні числа a , b і c ,

завжди: $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$ і $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$. Далі на конкретному прикладі вводять поняття мішаних чисел. У порівнянні з підручником [16], де наводяться правила додавання і віднімання мішаних дробів, то тут лише згадується, що кожне мішане число має цілу і дробову частину, і наводяться приклади. Також дається таке правило: *кожне мішане число дорівнює деякому неправильному дроби з тим самим знаменником; щоб знайти чисельник цього дроби, треба цілу частину мішаного числа помножити на його знаменник і до результату додати чисельник дробової частини*; наводяться приклади перетворення мішаного дроби в неправильний і навпаки.

Розглянемо підручник [16].

Підручник містить два розділи, які діляться на параграфи, а останні на пункти. Викладу теми «Дробових чисел» присвячений розділ другий, який містить два параграфи. Перший параграф носить назву «Звичайні дроби» (5 пунктів), другий – «Десяткові дроби» (10 пунктів). Висвітлення теми розпочинається із пункту 25 «Уявлення про звичайні дроби». У світі навколо нас ми часто стикаємося з ситуаціями, коли ціле потрібно розділити на частини. Саме для опису таких частин і використовують дроби. Наприклад, половина яблука, чверть години чи півтора метра — це все дроби. У підручнику на прикладі святкового пирога детально пояснюється, що таке звичайний дріб і як його записати. Ви дізнаєтесь, що чисельник показує, скільки шматочків пирога ми взяли, а знаменник – на скільки рівних шматочків розрізали весь пиріг.

Підручник пропонує різноманітні завдання для закріплення матеріалу: від простих усних вправ до складніших письмових. Завдання для домашньої роботи виділені окремо, щоб ти міг легко їх віднайти. А рубрики «Вправи на повторення», «Задачі від Мудрої Сови» та «Коли зроблено уроки» додають навчальному процесу інтерактивності та роблять його цікавішим.

Після виконання всіх завдань учнів чекає захоплива подорож у минуле! У розділі "Коли зроблено уроки" вони зможуть дізнатися про те, як з'явилися дроби

і чому вони такі важливі для нас. Цікаві факти про історію дробів допоможуть розширити світогляд і краще зрозуміти цей математичний розділ.

На прикладі прямокутника, який поділено на 7 рівних частин, пояснюють виникнення неправильних дробів. Дають та наступні означення :

1. Дріб, у якого чисельник більший за знаменник або дорівнює йому, називається неправильним.
2. Дріб, у якого чисельник менший від знаменника, називається правильним.

Вчитель може побудувати своє пояснення так: «Щоб правильно порівнювати дроби, нам знадобиться уявити їх як частини одного цілого. У підручнику ти побачиш, як це можна зробити на прикладі прямокутника, розділеного на рівні частини. А за допомогою координатного променя ми зможемо легко визначити, який дріб більший, а який менший. Це знання тобі знадобиться для розв'язання багатьох математичних задач».

На прикладах порівняння дробів з 1 можна проілюструвати таку властивість: усі правильні дроби менші від одиниці, а неправильні – більші або дорівнюють одиниці. Ця властивість дозволяє зробити висновок: кожний неправильний дріб більший за будь-який правильний дріб.

Вчитель: «Уяви собі два однакові шоколадки. Одну розділили на 7 рівних частинок, а іншу – на 10. Який шматочок буде більшим? Саме так ми порівнюємо дроби з однаковими чисельниками. А тепер уяви, що у тебе є дві пластинки пластиліну, розділені на 9 рівних частин. Якщо ти з'єднаєш кілька частинок з однієї пластинки з кількома частинками з іншої, то отримаєш новий дріб. Саме так ми додаємо дроби. А якщо від більшої частини відламаєш меншу, то отримаєш новий, менший дріб. Це віднімання дробів».

Дається буквенний запис цих правил:

$$\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$$

Вчитель: «Уяви собі три великі піци. Якщо ми захочемо поділити їх на чотирьох друзів, то кожен отримає по три четвертинки піци. Тобто, коли ми ділимо ціле число на більше число, то отримуємо дріб. Дріб – це як шматочок чогось великого».

У п.29 «Мішані числа» на основі конкретних прикладів пояснюють, що називається мішаним числом, цілою частиною. Підсумовують, що будь-який неправильний дріб, у якого чисельник націло не ділиться на знаменник, можна записати у вигляді мішаного числа. Далі знову, користуючись конкретним

прикладом _____, пояснюють, що є цілою частиною дробу, чисельником і знаменником дробової частини. Формулюють правила перетворення неправильного дробу в мішане число і, навпаки, мішаного числа у неправильний дріб, додавання і віднімання мішаних чисел.

Наприкінці параграфа автор пропонує завдання у вигляді тесту «Перевір себе», яке охоплює основні правила та поняття, розглянуті в цьому розділі. Тести включають різні типи вправ, що дає можливість учням оцінити рівень своїх знань і підготуватися до тематичної перевірки.

Розглянемо підручник [29].

Підручник складається із 8 розділів, які розбиті на параграфи. Звичайні дроби вивчаються у двох розділах 5 та 6 («Звичайні дроби» та «Дії першого ступеня зі звичайними дробами з однаковими знаменниками»). На вивчення даної теми відводиться шість параграфів.

Вчитель: «Уявіть собі, що ми розрізали яблуко на 4 рівні частини. Кожна така частинка – це четверта частина цілого яблука. Щоб записати цю частину, ми використовуємо дріб. У дробовому записі зверху пишемо кількість взятих частин (у нашому випадку 1), а знизу – на скільки рівних частин ми розділили ціле (у

нашому випадку 4). Отже, одна четверта частина яблука записується як $\frac{1}{4}$. Число зверху називається чисельником, а число знизу – знаменником».

В цьому ж параграфі подається означення правильних та неправильних дробів, використовуючи задачу про торт. Використовуючи шкільну лінійку, пояснюється порівняння дробів та формулюються всі правила порівняння дробів. Крім знаків «більше» та «менше», вводяться знаки «більше або дорівнює» та $\leq$ «менше або дорівнює».

У §24 «Дроби і ділення» говориться, що дріб – це математичний запис, який використовується для представлення частини цілого. Ділення натуральних чисел можна записати у вигляді дробу. Мішане число складається з цілої частини і дробової частини. Ми навчимося перетворювати неправильні дроби в мішані числа і навпаки. Також розглянемо поняття дробу від числа і навпаки, а також навчимося розв'язувати відповідні задачі

У роботі цікавими є завдання із рубрики «Застосуйте на практиці». Тут зібрано задачі прикладного характеру, які демонструють необхідність вивчення даної теми.

Додавання та віднімання дробів з однаковими знаменниками пояснюється на прикладі плитки шоколаду, яка складається з 18 часточок. Формулюються правила додавання та віднімання дробів, після чого наводяться буквені вирази. Окремо розглядається різниця між цілим числом та правильним дробом. Лише після цього вивчається додавання та віднімання мішаних дробів, використовуючи два способи. Перший спосіб передбачає перетворення мішаних дробів на неправильні, виконання операцій додавання чи віднімання, а потім виділення цілої частини з отриманого результату. Другий спосіб є аналогічним тому, що описано у згаданих підручниках.

Кожен підручник має свої переваги та недоліки. Виклад матеріалу у параграфі підручника [29] є дещо складним для п'ятикласників, оскільки він

містить велику кількість нових термінів і понять. Вивчення одного параграфа займає кілька уроків, що ускладнює учням орієнтування в матеріалі.

Доцільно враховувати, що мислення п'ятикласників здебільшого наочно-образне з елементами логічного. Це важливо при поясненні матеріалу. Одним із значних недоліків підручника є те, що задачі не поділені на рівні складності, є обмежена кількість вправ високого та достатнього рівня, а також надмірна кількість однотипних, нецікавих задач. На мою думку, вчитель повинен самостійно обирати спосіб пояснення цієї теми, використовуючи власні приклади та життєві ситуації.

РОЗДІЛ 2

Методика вивчення теми “Звичайні числа”

У 5-му класі на вивчення дробових чисел відводиться 64 години [23]. З них пропонується на вивчення звичайних дробів 15 годин. Їх можна розподілити як вказано в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1

Календарне планування з математики 5 клас тема “Звичайні дроби”

№ п/п	Тема уроку	К-сть годин
	Звичайні дроби	15
1-2	Уявлення про звичайні дроби	2
3-4	Правильні та неправильні дроби. Порівняння дробів	2
5-6	Додавання і віднімання звичайних дробів з однаковими знаменниками	2
7-8	Дробі і ділення натуральних чисел.	2
9-11	Мішані числа	3
12-13	Розв’язування вправ	2
14	Контрольна робота	1
15	Аналіз контрольної роботи. Розв’язування вправ	1

При розробці конспектів користуватимемося підручником «Математика 5 клас» А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонський, М. С. Якір.

2.1. Методична технологія введення звичайних дробів та їх властивостей

Тема: Уявлення про звичайні дроби

На початку доцільно ознайомити учнів з навчальними темами, які будуть розглянуті: «Дробові числа», «Звичайні дроби та дії з ними», «Десяткові дроби та дії з ними»; з питаннями, які учні повинні засвоїти в процесі вивчення цих тем.

Розпочати урок доцільно з усних вправ, які є пропедевтичними для вивчення теми. До виконання усних вправ залучаються всі учні класу.

Усні вправи

1. Скільки:

1) у метрі – сантиметрів (100); дециметрів (10); міліметрів (1000);

2) у годині – хвилин (60); секунд (3600);

3) у тонні – кілограмів (1000); центнерів (10); грамів (1000000)?

2. Знайдіть координати точок, зображених на рис. 2.1:

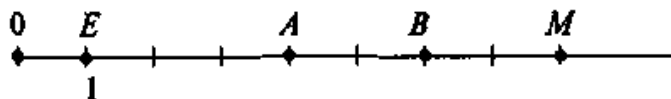


Рис. 2.1

Учні повинні свідомо відчувати необхідність вивчення дробових чисел, зрозуміти, що натуральних чисел недостатньо для оцінювання величин.

Тому вчитель може запропонувати колективне розв'язування практичних вправ:

Вчитель: Накресліть відрізок довжиною 6 см. Поділіть його на три рівних частини. Виділіть одну з цих частин іншим кольором.

Вчитель: Скільки сантиметрів буде мати одна частина?

Учні: 2см.

Вчитель: Побудуйте квадрат зі стороною 3 см. Обчисліть площу цього квадрата.

Учні: Площа квадрата 9 см^2 .

Вчитель: Поділіть квадрат на 4 рівні частини. Чому дорівнює (у сантиметрах) площа кожної з одержаних частин?

В учнів виникла проблема: число 9 не ділиться на 4. Тому учитель пояснює, що крім натуральних чисел існують дробові. Дробові числа можна записувати в різних формах. Одна з них – звичайні дробі.

З метою підвищення інтересу учнів до вивчення математики можна запропонувати учням коротку історію виникнення звичайних дробів.

Вивчення нового матеріалу можна провести у формі бесіди.

Вчитель: У повсякденному житті можна навести багато прикладів, що дають уявлення про звичайні дробі. Наприклад, святковий пиріг, розрізаний на певну кількість шматків (можна скористатись паперовою моделлю торта). Спробуйте ви навести приклади.

Учні: Апельсин, поділений між двома дітьми; яблуко, поділене на трьох; піца, поділена на 9 друзів і т.д.

Вчитель: Давайте повернемося до святкового торта і спробуємо розділити його між 8 друзями (паперова модель, розділена на 8 частин). Яку частину торта отримає кожен гість.

Учні: Одну частину із восьми.

Вчитель: Справді. Це число пишуть і читають «одна восьма торта». Такий запис використовується для позначення й інших дробових чисел.

Наприклад, півкілограма – кілограма (читають: «одна друга кілограма»);

чверть години – години (читають «одна четверта години»); третина шляху –

шляху (читають «одна третя шляху»).

Пропоную вам іншу задачу. Ми розрізали торт на 10 частин (паперова модель). Один із ваших друзів любить солодке і хоче отримати три шматки тарту. Скільки ласун отримає тарту? Записати дріб та прочитати його.

Учні: Ласун отримає торта. Читається «три десятих торта».

Вчитель: Отже, записи тощо називають звичайними дробами, або коротше – дробами.

Давайте розглянемо як записуються звичайні дроби.

Учні: Звичайні дроби записуються за допомогою двох чисел та риски дробу.

Вчитель: Число, записане над рискою дробу, називають чисельником; число, записане під рискою, називають знаменником дробу. Що показує знаменник дробу?

Учні: Знаменник дробу показує на скільки рівних частин поділене щось ціле.

Вчитель: Що показує чисельник?

Учні: Чисельник показує – скільки таких частин узяли.

Вчитель має обов'язково наголосити, якщо не було сказано, поділ відбувається на рівні частини.

Вчитель: Звичайні дроби можна позначати на координатному промені.

Наприклад, вам потрібно позначити одиничного відрізка.

Насамперед, потрібно розібратися з учнями, що таке одиничний відрізок (відрізок довжиною в одиницю виміру).

Учні: Відрізок потрібно поділити на 5 частин і взяти 3 частини.

Вчитель: Як практично поділити одиничний відрізок на 5 частин?

Учні: Накреслити одиничний відрізок завдовжки 5 або 10 клітинок.

Учні виконують завдання в зошитах, один виконує на дошці, де заготовлений одиничний відрізок.

На закріплення можна розв'язати наступні вправи:

№1. Встановіть відповідність між зображеннями і дробами відповідно до рис. 2.2:

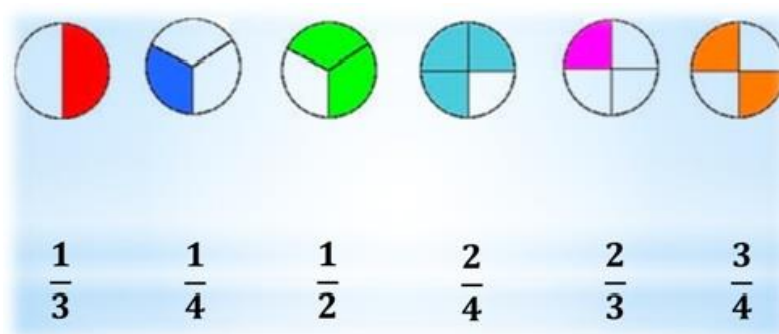


Рис. 2.2

Назвіть чисельник і знаменник кожного дробу і поясніть, що вони означають. (працюємо усно, маркером учні з'єднують малюнки із відповідними дробами).

№680. Запишіть у вигляді дробу число [16]:

- 1) дві п'ятих;
- 2) сім тринадцятих;
- 3) двадцять дві шістдесятих;
- 4) тридцять чотири сорок третіх;
- 5) тридцять дев'ять сотих;
- 6) сто двадцять сім тисячних.

Всі учні записують у зошитах, по одному учню викликаю для запису на дошці.

№2. Є квадрат зі стороною 6 см. Розділіть його на чотири рівні частини.

Зафарбуйте квадрата. Яка частина квадрата залишилась не зафарбованою?

№3. Прямокутник зі сторонами 6 см і 2 см. розділіть на 12 рівних частин.

Зафарбуйте 5 частин червоним олівцем, а 3 частини – синім. Запишіть за допомогою дробів:

- а) яка частина прямокутника зафарбована;
- б) яка частина прямокутника зафарбована червоним кольором;
- в) яка частина прямокутника зафарбована синім кольором;
- г) яка частина прямокутника не зафарбована.

№4. Є квадрат. Зафарбуйте три чверті цього квадрата.

Перед виконанням цієї вправи доцільно обговорити з учнями такі питання:

- На скільки частин потрібно розділити квадрат?
- Чи можуть ці частини бути довільними?
- Скільки таких частин потрібно зафарбувати?

Задачі (2-4) виконуються учнями усно на дошці на заготовлених листах з поділками.

№5. У книзі 90 сторінок, 13 з них займають ілюстрації. Яку частину книги займають ілюстрації?

Далі учні повинні навчитись записувати одиниці виміру у вигляді дробу, але перш ніж давати учням це завдання, потрібно провести деяку підготовчу роботу колективного характеру. А саме: скільки в одному сантиметрі (дециметрів, міліметрів)? На скільки рівних частин треба поділити відрізок довжиною 1 м, щоб отримати рівні частини довжиною 1 см (1 дм, 1 мм)?

Після виконання цього завдання доцільно скласти своєрідний «алгоритм» розв'язання задач виду «Виразити величину меншими одиницями вимірювання».

1) Знайти, скільки в даній одиниці шуканих, і записати це натуральне число в знаменник дробу.

2) З'ясувати, скільки шуканих одиниць взяли, записати це натуральне число в чисельник дробу.

Для кращого розуміння потрібно зауважити: коли щось ціле: сад, книжка тощо – поділено на рівні частини – дерева, сторінки, то кількість одиниць поділу є знаменником дробу, а кількість «відмічених» одиниць є чисельником дробу. Далі потрібно розглянути конкретні вправи. Викликаю до дошки по черзі двох учнів і вони із поясненнями розв'язують наступне завдання [16]:

№683. Виразіть:

- 1) у метрах: 1 см; 5 см; 24 см; 1 дм; 7 дм; 1 мм; 4 мм; 39 мм; 247мм;
- 2) у годинах: 1 хв; 7 хв; 19 хв; 39 хв; 1 с; 4 с; 58 с.

№6. Розмістіть числа в кульках на координатних променях (рис. 2.3):

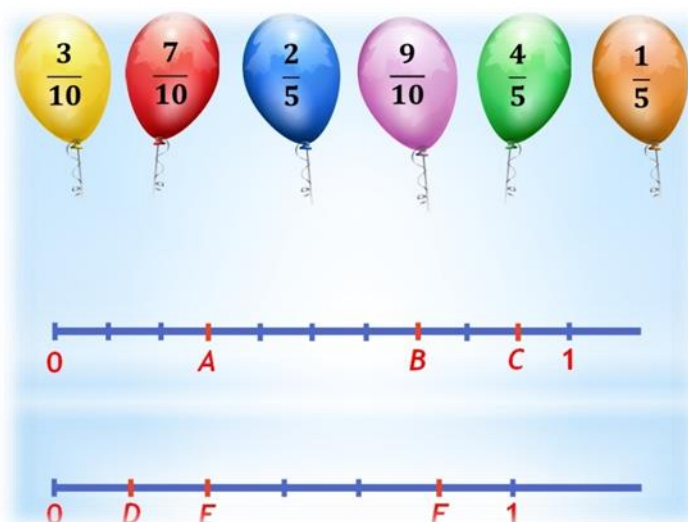


Рис. 2.3

Слід на уроці повторити з учнями задачі на дроби, які вони розв'язували у молодших класах.

№705.

Учні читають задачу та дають відповідь на питання вчителя (що питає задача, що таке решта, чи відомо скільки риби зловили Щукін та Окунєв).

Записують задачу в зошитах по діях з поясненням.

Аналогічно розв'язують задачу №708.

На наступних двох уроках, що виділяються на цю тему, потрібно окрім розв'язування задач, дати невеличку самостійну роботу, розраховану на 15 хв.

I-варіант:

1. Виразіть у метрах:

1) 5 см; 2) 3 дм; 3) 4 дм 2 см;

2. Розв'яжіть задачу.

1) У хлопчика було 56 зошитів, з них становили зошити в клітинку.

Скільки зошитів у клітинку було у хлопчика?

2) У саду росло 36 яблунь, що становило усіх дерев. Скільки дерев росло в саду?

3. Знайдіть число якого становлять числа 210.

II-варіант:

1. Виразіть у метрах:

1) 5 см; 2) 3 дм; 3) 4 дм 2 см;

2. Розв'яжіть задачу.

1) У хлопчика було 56 зошитів, з них становили зошити в клітинку.

Скільки зошитів у клітинку було у хлопчика?

2) У саду росло 36 яблунь, що становило усіх дерев. Скільки дерев росло в саду?

3. Знайдіть число якого становлять числа 350.

Тема: Правильні та неправильні дроби. Порівняння дробів

Перевірка домашнього завдання повинна мати на меті оцінити, як учні засвоїли матеріал на тему «Звичайні дроби»: поняття звичайного дробу, визначення чисельника та знаменника, а також вміння знаходити дріб від числа і число за його дробом. Тестові завдання доцільно видавати кожному учню на окремих картках для зручності та індивідуальної роботи.

Виконання тестових завдань

1. Чисельник якого з наведених дробів дорівнює 8?

$$\frac{8}{12} \quad \frac{12}{8} \quad \frac{8}{16} \quad \frac{16}{8}$$

А) $\frac{8}{12}$; Б) $\frac{12}{8}$; В) $\frac{8}{16}$; Г) $\frac{16}{8}$.

2. У 5 класі 29 учнів, з них 8 написали контрольну роботу на 12 балів. Яку частину класу вони становлять?

$$\frac{12}{29}$$

А) $\frac{8}{29}$; Б) $\frac{12}{29}$; В) $\frac{8}{12}$; Г) $\frac{12}{8}$.

3. На клумбі росте 18 кущів троянд, з них $\frac{1}{3}$ червоного кольору. Скільки кущів червоних троянд росте на клумбі?

А) 4; Б) 81; В) 6; Г) 11.

4. Олесь зловив 12 карасів, що становить $\frac{2}{3}$ всього вилову. Скільки всього риби зловив Олесь?

А) 9; Б) 16; В) 7; Г) 14.

Відповіді: 1-В; 2-Г; 3-А; 4-Б

Одразу після виконання тестової роботи її потрібно перевірити, за потреби провести корекцію знань учнів.

Пропонуємо учням логічну вправу. На дошці записано декілька дробів, причому правильні дроби записано одним кольором, наприклад синім, а неправильні – іншим, наприклад червоним:

Вчитель: Чому деякі дроби записані одним кольором, а деякі – іншим?

Учні можуть давати різноманітні відповіді.

Вчитель: Що спільного у всіх дробів, записаних синім кольором? Що спільного у всіх дробів, записаних червоним кольором?

Учні: В дробах, записаних синім кольором, чисельники менші за знаменники, а в дробах, записаних червоним кольором, навпаки – знаменники менші за чисельники.

Якщо в учнів виникнуть труднощі з відповідями на запитання, можна використовувати навідні запитання, такі як: «Назвіть чисельник і знаменник кожного з дробів», «Порівняйте чисельник і знаменник дробів, записаних синім кольором», «Порівняйте чисельник і знаменник дробів, записаних червоним кольором». Ці запитання допоможуть учням зосередитися на ключових елементах дробів і полегшити виконання завдання.

Після цього вчитель наголошує, що дроби, записані синім кольором, – це правильні дроби, а дроби, записані червоним кольором, – неправильні дроби. Отже, завдання уроку: засвоїти поняття правильного і неправильного дроби.

Оскільки на попередньому уроці учні засвоїли, що знаменник дроби вказує, на скільки рівних частин ділиться ціле, а чисельник – скільки таких частин береться, під час введення дроби, у якого чисельник більший за знаменник, можуть виникнути певні труднощі. Це пов'язано з тим, що учні можуть не одразу зрозуміти, як інтерпретувати дроби, де чисельник перевищує знаменник, і як це відображається на значенні числа.

Усунути ці ускладнення можна, розглянувши конкретні приклади.

Вчитель: На день народження Котигорошка мама спекла пиріг і поділила на 10 запрошених. Але Івасик Телесик повідомив, що приїхати не зможе. Яку частину отримав кожен, хто приїхав на день народження? Скільки частин пирога з'їли? Яка частина пирога залишилася?

Учні: Кожен отримав частину, з'їли – частин, залишилось –

.

Вчитель: Нехай на день народження прийшли усі запрошені. Скільки частин пирога з'їли гості?

Учні: Гості з'їли $\frac{10}{10}$ частин.

Учні: Гості з'їли весь пиріг.

Вчитель: Всі ви міркуєте правильно, то який висновок можна зробити?

Учні:

Вчитель: Даваймо поміркуємо над слідкуючою задачею. Мама спекла два однакових пироги на день народження і поділила на 10 частин. Гості з'їли по одному кусочку, а потім двоє з них попросили ще по шматочку з другого пирога. Яку частину пирогів з'їли всі гості разом?

Учні: Всі гості разом з'їли $\frac{12}{10}$ частин пирогів.

Вчитель: Даваймо зробимо висновок: які є звичайні дроби?

Учні: Дроби у яких чисельник менший за знаменник, чисельник та знаменник рівні, чисельник більший знаменника.

Вчитель: Всі ці дроби мають свої назви (формулює правила).

Дріб, у якого чисельник менший від знаменника, називають правильним.
Дріб, у якого чисельник більший за знаменник або дорівнює йому, називають неправильним.

Можна зробити у зошитах такі записи

Правильний дріб $\frac{a}{b}$, $a < b$

Неправильний дріб $\frac{a}{b}$, $a \geq b$

Вчитель: Наведіть приклади правильних, неправильних дробів.

Учні: Правильні, неправильні

Вчитель: Наведіть приклади дробів рівних одиниці.

Учні: .

Також на даному уроці пояснюється порівняння звичайних дробів.

Для закріплення можна використати наступні вправи:

Усно:

1. Які з дробів: є правильними? Неправильними?

2. Правильний чи неправильний буде дріб якщо $\frac{y}{12}$, якщо: $y = 10$;
 $y = 1$; $y = 20$; $y = 12$.

3. Назвіть у порядку зростання чотири перших неправильних дробів: із знаменником 5; із чисельником 5.

4. При яких натуральних значеннях x дріб $\frac{x}{9}$ буде правильним?

Письмово:

№722. Запишіть усі правильні дробів зі знаменником 8.

(Відповідь:).

№724. Запишіть усі неправильні дробів з чисельником 8.

(Відповідь:).

№730. Знайдіть усі натуральні значення x , при яких дріб буде правильним. (Відповідь: 1;2;3;4;5;6;7;8).

№732. Знайдіть усі натуральні значення x , при яких дріб буде неправильним. (Відповідь: 1;2;3;4;5;6).

Задача. Готуючись до контрольної роботи Тарас запланував розв'язати 10 задач. Тарас любив математику і розв'язав задач. Скільки задач розв'язав Тарас? На скільки він перевиконав план?

Учні розв'язують задачу у зошиті та на дошці.

Розв'язок: 1) $10 : 5 \cdot 6 = 12$ (з) – стільки задач розв'язав Тарас;

2) $12 - 10 = 2$ (з) – на стільки задач більше розв'язав Тарас.

Поширеною помилкою учнів є те, що вони не вважають дріб, у якого чисельник рівний знаменнику, неправильним. Учитель повинен звернути на це їх увагу. Для кращого засвоєння матеріалу доцільно вимагати від учнів пояснень, чому той чи інший дріб є правильним або неправильним. Під час виконання вправ учні мають засвоїти, що кожний дріб є або правильним, або неправильним — інших варіантів не існує.

Вчитель: Ви уже можете розрізняти правильні і неправильні дроби. Залишилося навчитись їх порівнювати. Для цього побудуємо прямокутник і поділимо на 7 рівних частин. Із них зафарбуємо 2 частини. Отже, скажіть, за допомогою того, що уже вивчили, скільки частин зафарбовано.

Учень: Зафарбовано цього прямокутника.

Вчитель: А скільки частин залишилося не зафарбованими?

Учень: Не зафарбовано цього прямокутника.

Вчитель: Як ви вважаєте, чого більше: зафарбованих чи не зафарбованих частин?

Учень: Якщо поглянути на малюнок то видно, що більше не зафарбованих частин бо їх 5 із 7.

Вчитель: Так, вірно. Отже, ми підійшли до правила порівняння дробів: з двох дробів з однаковими знаменниками більший той, у якого чисельник більший.

Наприклад, $\frac{1}{2}$. Також, $\frac{1}{3}$.
Тому всі правильні дроби менші від одиниці, а неправильні – більші або дорівнюють одиниці. Кожний неправильний дріб більший за будь-який правильний дріб. Дроби можна порівнювати за допомогою координатної прямої. Потрібно запам'ятати, що у цьому випадку більший той, який лежить правіше. Взагалі, з двох дробів з однаковими чисельниками більший той, у якого знаменник менший, а менший той, у якого знаменник більший. А зараз давайте перевіримо здобуті знання на практиці. Спочатку розглянемо вправи усного характеру.

1. Назвіть у порядку зростання чотири перших неправильних дробу: із знаменником 5; із чисельником 5.

2. Назвіть у порядку спадання три правильних дробу із знаменником 6; із чисельником 6.

Далі переходимо до виконання письмових вправ.

3. Порівняйте дробу:

- a) $\frac{11}{15}$; d) $\frac{11}{15}$ і $\frac{11}{13}$;
b) $\frac{37}{41}$ і $\frac{34}{41}$; e) $\frac{29}{5}$ і $\frac{29}{6}$;
c) $\frac{1}{2}$; j) $\frac{1}{3}$.

На самостійне виконання учням пропонується наступна задача, після її виконання один із учнів коментує свій розв'язок, а решта порівнюють зі своїми.

4. За зміну робітник має виготовити за нормою 63 деталі. Але Іван

Працелюб виготовляє _____ норми. Скільки деталей виготовляє за зміну Іван Працелюб? На скільки деталей він виготовляє більше за норму?

Учням, які вправи виконують дещо швидше за всіх, можна дати додаткове завдання:

Два десятилітрових цебра повністю наповнене водою. З першого спочатку

виливають _____ цебра, а потім _____ остачі. З другого, навпаки, спочатку

виливають _____ цебра, а потім _____ остачі. В якому з цебер води залишилось більше?

2.2. Методична технологія вивчення додавання і віднімання дробів з однаковими знаменниками

Вчитель: Дробові числа, як і натуральні, можна додавати і віднімати. Даваймо побудуємо прямокутник і поділимо його на 9 рівних частин. Перші дві частини зафарбуємо червоним кольором, а наступні 5 жовтим. Як це ми можемо виразити дробами?

Учень: Червоних – ; жовтих – .

Вчитель: А скажіть, що потрібно зробити, щоб дізнатися скільки усього частин зафарбовано?

Учень: Якщо дивитись по малюнку, то буде .

Вчитель: Так, вірно. Але рахувати на малюнку не зручно, потрібно

. Отже, ми можемо сформулювати правило: *щоб додати два дроби з однаковими знаменниками, треба додати їхні чисельники, а знаменник залишити той самий*. У буквенному вигляді це записується так:

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

Очевидно, що . *Щоб відняти дроби з однаковими знаменниками, треба від чисельника зменшуваного відняти чисельник від'ємника, а знаменник залишити той самий*.

А зараз перейдемо до розв'язування вправ. Спочатку розглянемо усні вправи.

1. Виконайте дії:

$$1) \quad ; \quad 3) \quad \frac{31}{58} - \frac{16}{58};$$

$$2) \quad \frac{11}{24} + \frac{8}{24}; \quad 4) \quad \frac{23}{47} - \frac{14}{47};$$

2. Назвіть усі пари (правильних) дробів зі знаменником 9, сума яких

дорівнює .

Після цього перейдемо до письмових вправ. Викликаю до дошки двох учнів, а решта працюють на місцях.

3. Виконайте дії:

$$1) \quad ;$$

$$2) \quad \frac{16}{21} - x = \frac{9}{21}.$$

Далі колективно розглядаємо першу із наступних задач і учні записують її в зошит, а другу учні розв'язують самостійно.

4. За перший день Михайлик прочитав книжки, а за другий день –

книжки. Яку частину книжки прочитав Михайлик за два дні?

«Сильним» учням слід дати додаткові вправи:

1. Василь склав такий план розміщення овочів на ділянці: ділян-

ки – морква, – редиска, – буряк, а $\frac{12}{25}$ – картопля. Чи вдасться здійснити цей план?

2. Поставте замість зірочок знаки «+» або «-» так, щоб була правильна рівність: . Як інакше можна записати число в правій частині рівності?

Оскільки на цю тему виділяється дві години, то на наступному уроці доречно дати на 15 хв невеличку самостійну роботу.

I-варіант:

1. Виконайте дії: $\frac{12}{13} - \left(\frac{5}{13} - \frac{3}{13} \right)$.

2. Розв'яжіть рівняння $x - \frac{7}{17} = \frac{3}{17}$; $\frac{5}{17} - x = \frac{2}{17}$ і знайдіть суму їх коренів.

3. Яке з поданих чисел задовольняє нерівність $x > \frac{16}{21} - \frac{5}{21}$?

1) $\frac{11}{21}$; 2) $\frac{13}{21}$; 3) ; 4) .

II-варіант:

1. Виконайте дії: $\frac{15}{19} - \left(\frac{8}{19} - \frac{7}{19} \right)$.

2. Розв'яжіть рівняння і знайдіть різницю їх коренів.

3. Яке з поданих чисел задовольняє нерівність $x < \frac{15}{31} - \frac{2}{31}$?

1) $\frac{10}{31}$; 2) $\frac{15}{31}$; 3) $\frac{16}{31}$; 4) $\frac{17}{31}$.

Щоб перевірити, як учні засвоїли даний розділ, потрібно провести письмову роботу.

I-варіант:

I-й рівень:

1. Розмістіть дроби у порядку зростання:

.

2. При яких значеннях x дріб $\frac{x}{9}$ правильний?

3. Запишіть усі неправильні дроби із знаменником 7.

4. Який дріб більший:

$\frac{11}{10}$ чи $\frac{7}{10}$; $\frac{7}{6}$ чи $\frac{5}{6}$; $\frac{5}{4}$ чи $\frac{5}{3}$.

5. Обчисліть:

1) ; 3) ;

2) ; 4) $\frac{19}{20} - \frac{12}{20}$.

II-й рівень:

1. Виділіть цілу і дробову частини числа:

.

2. Виконайте дії:

1) ;

2) .

3. При яких значеннях x дріб $\frac{x}{10}$ менший від дробу $\frac{1}{10}$? Запишіть усі ці дроби.

III-й рівень:

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x}{10} = \frac{1}{10}$;

2) $\frac{x}{10} = \frac{1}{10}$.

2. При яких значеннях x дріб $\frac{x}{10}$ менший від дробу $\frac{1}{10}$?

IV-й рівень:

1. Магазин мав продати 714 кг яблук. Першого дня продали $\frac{1}{2}$ усіх

яблук, а другого — $\frac{1}{3}$. Скільки яблук продали за два дні?

II-варіант:

I-й рівень:

1. Розмістіть дроби у порядку зростання:

.

2. При яких значеннях x дріб $\frac{11}{x}$ неправильний?

3. Запишіть усі неправильні дроби із знаменником 8.

4. Який дріб більший:

$$\frac{15}{19} \text{ чи } \frac{2}{19}; \frac{7}{8} \text{ чи } \frac{3}{8}; \frac{1}{4} \text{ чи } \frac{3}{4}.$$

5. Обчисліть:

1) ; 3) ;

2) ; 4) $\frac{19}{21} - \frac{12}{21}$

II- й рівень:

1. Виділіть цілу і дробову частини числа:

.

2. Виконайте дії:

1) ;

2) .

3. При яких значеннях x дріб $\frac{x}{10}$ менший від дробу ? Запишіть усі ці дроби.

III-й рівень:

1. Розв'яжіть рівняння:

1) $\frac{x-4}{11} - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}$;

2) $\left(x - \frac{4}{11}\right) - \frac{3}{11} = \frac{2}{11}$.

2. При яких значеннях x дріб $\frac{x}{15}$ менший від дробу $\frac{1}{5}$?

IV-й рівень:

1. Від села до міста 132 км. За першу годину автобус проїхав усього шляху, а за другу - $\frac{1}{3}$ шляху. Скільки кілометрів проїхав автобус за 2 години?

2.3. Експериментальна перевірка розробленої методики

Сконцентрувавши освітній процес на "середньому учневі", ми нерідко ігноруємо індивідуальні особливості кожної дитини. Це призводить до того, що багато учнів не можуть повноцінно засвоїти матеріал, що негативно впливає на їхню мотивацію до навчання математики.

Під час педагогічної практики ми зіткнулися з аналогічними труднощами, тому було визначено завдання провести дослідження щодо розробки методичних підходів до вивчення звичайних дробів у 5 класі та вивчити, як їх застосування впливає на навчальний процес та засвоєння матеріалу учнями.

На уроках математики були проведені рівневі самостійні роботи, а також здійснено рівневий поділ завдань для класних, домашніх та перевірочних робіт. Це призвело до значного підвищення інтересу учнів до уроків математики, збільшення їхньої активності на заняттях і заповнення прогалин у знаннях. Усі ці результати підтвердили ефективність застосування рівневого підходу в навчанні математики.

Під час вибору задач для рівневої роботи було виявлено, що існуючі методики та дидактичні матеріали не повною мірою відповідають вимогам чотирьохрівневого навчання, запровадженого в рамках реформи освіти. У зв'язку з цим була розроблена методика вивчення звичайних дробів та система різнорівневих задач з математики для 5 класу, що враховує принципи чотирьохрівневого підходу в навчанні.

Експериментальна перевірка розробленої методики проводилась в Либохорівському закладі загальної середньої освіти І- ІІ ступенів Славської селищної ради Стрийського району Львівської області. За експериментальну групу було взято учнів 5-А класу (вчитель математики Федис Роксолана Ігорівна). Середній бал успішності в даних класах за ІІ-ге півріччя минулого навчального року становив відповідно 7,1 та 6,8. За контрольну групу було взято учнів 5-Б класу (вчитель математики Кирейто Віктор Михайлович). Середній бал успішності у цих класах складав відповідно 7,5 та 7,3.

З вчителем було обговорено, в чому суть та особливості експерименту. Учні експериментального класу навчалися за даною методикою, а учні контрольного – за шкільними програмами та підручниками. По закінченні навчання учням і експериментального, і контрольного класів було запропоновано перевірочну роботу з теми “Звичайні дроби”.

Учні даних класів одержали такі результати (таблиця 2.2).

Таблиця 2.2

Результати оцінювання

Бали	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Експериментальний клас (к-сть учнів)	0	0	1	1	2	4	3	2	4	2	3	2
Контрольний клас (к-сть учнів)	0	1	2	3	4	3	5	2	1	2	1	0

Результати цих робіт зображено графічно на рис. 2.4:

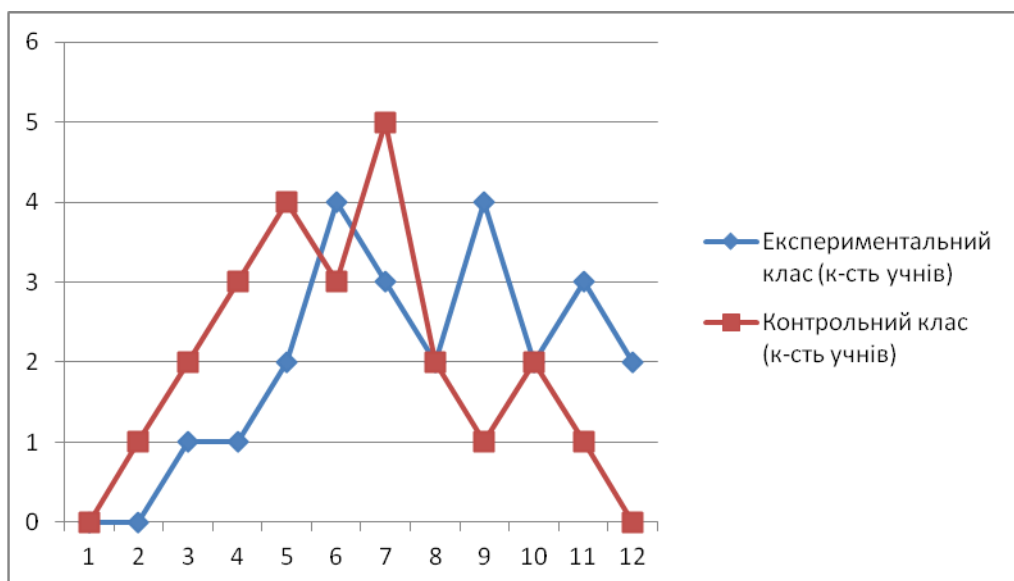


Рис. 2.4

Як видно з одержаних результатів, в експериментальних групах спостерігається ріст позитивних оцінок, причому кількість їх більша, ніж в контрольних групах. Це доводить, що розроблена методика є ефективною.

Для того щоб більш точно з'ясувати, як застосування різнорівневих завдань з математики впливає на формування знань, було використано метод кореляції на

прикладі даних класів. Для цього визначався коефіцієнт кореляції, який відображає міру зв'язку між змінними. Чим вищий коефіцієнт кореляції, тим сильніша залежність між використанням різнорівневих завдань для перевірки та підтвердження рівня знань учнів. Якщо зв'язок між показниками відсутній, коефіцієнт кореляції буде близьким до нуля.

Обчислимо коефіцієнт кореляції у 5-му класі.

Коефіцієнт кореляції визначають за формулою:

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x \cdot SS_y}}, \text{ де } SS_x - \text{сума квадратів відхилень:}$$

$$SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}, \text{ аналогічно для } SS_y:$$

$$SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}, SP_{xy} - \text{суму скоректованих добутоків:}$$

$$SP_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \cdot \sum y}{N}, \text{ де } N - \text{кількість учнів.}$$

Таблиця 2.3

Обрахунки коефіцієнту кореляції

Кількість учнів	Загальна кількість балів		Допоміжні розрахунки		
	В експериментальному класі $(\sum x)$	В експериментальному класі $(\sum y)$	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
24	148	191	2776	2991	4759

1. Знаходимо суму квадратів відхилень: $SS_x = 2991 - \frac{148^2}{24} = 2078$,

$$SS_y = 4759 - \frac{191^2}{24} = 3239.$$

2. Суму скоректованих добутоків: $SP_{xy} = 2776 - \frac{148 \cdot 191}{24} = 1598,2$.

3. Коефіцієнт кореляції $r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x \cdot SS_y}} = \frac{1598,2}{\sqrt{2078 \cdot 3239}} \approx 0,62$.

Отримані коефіцієнти кореляції, близькі до одиниці, свідчать про наявність тісного зв'язку між застосуванням різнорівневих задач для перевірки та досягненням учнями відповідних рівнів знань. Це підтверджує доцільність впровадження такої методичної системи в навчальний процес. Її використання в шкільній практиці сприяє ефективному засвоєнню навчального матеріалу, розвитку стійкого інтересу учнів до поглибленого вивчення математики та формуванню відповідних рівнів знань, а також їх об'єктивній перевірці.

ВИСНОВКИ

Вирішення освітніх завдань значною мірою залежить від розробки та впровадження нових методичних підходів, які враховують індивідуальні інтереси і здібності учнів. Такі системи повинні сприяти їх всебічному розвитку, забезпечуючи умови для гармонійного і повного розкриття потенціалу кожного учня.

Першим етапом у створенні таких систем навчання математики стали обов'язкові результати навчання. Це було зумовлено реальністю, що учні мають різний рівень готовності до вивчення математики. Ці відмінності проявляються, зокрема, у темпі освоєння навчального матеріалу: деякі учні швидше сприймають нову математичну інформацію, а інші потребують більше часу та вправ для розвитку необхідних навичок і вмінь для вирішення певних завдань.

Аналіз методичної літератури показує, що існуючі методичні системи не повною мірою відповідають вимогам сучасного чотирьохрівневого навчання. Це створює необхідність розробки нових методик для викладання математики. Оскільки задачі займають ключову роль у курсі математики, виникає потреба в розробці методики створення і використання різнорівневих завдань, що дозволяють враховувати індивідуальні можливості учнів та забезпечити їх ефективне навчання.

Аналіз задачного матеріалу підручників з математики показав, що вони не повною мірою відповідають принципам рівневого навчання. В багатьох з них бракує або зовсім відсутні вправи високого рівня, а також існують суперечності в розподілі завдань по різних рівнях складності. Хоча системи вправ містять значну кількість задач середньої складності, ідея поступового ускладнення вмінь реалізується лише в обмеженій кількості завдань. Інші ж задачі часто дублюють одна одну і використовуються для формування базових вмінь, без суттєвого розвитку складніших навичок.

Слід підкреслити, що для ефективного засвоєння звичайних дробів у 5 класі оптимальним є поєднання дидактичних матеріалів із тематичними перевірочними роботами в навчальному процесі:

- розв'язуючи запропоновані задачі, учень отримує уявлення про складність кожного завдання, що дозволяє йому самостійно відстежувати свій прогрес і оцінювати досягнутий рівень. У разі труднощів із розв'язанням завдань бажаного рівня складності, це слугує сигналом про потребу в додаткових заняттях або консультаціях;
- звичайний підхід передбачає виконання учнем великої кількості завдань, частина з яких є надто простими. Такі однотипні задачі не сприяють демонстрації високого рівня знань, проте вимагають значних часових витрат.

Результати експериментальної перевірки розробленої моделі підтверджують існування тісного зв'язку між використанням різнорівневих задач для оцінювання та досягненням учнями відповідних рівнів знань, про що свідчить коефіцієнт кореляції, близький до одиниці. Це підтверджує доцільність впровадження такої методичної системи в освітній процес. Застосування цих задач у шкільній практиці сприяє формуванню в учнів стійкого інтересу до поглибленого вивчення математики, а також забезпечує ефективне засвоєння знань та їх об'єктивну перевірку

Запропонована методика дає можливість учителю організувати навчання математики у 5-му класі так, щоб обрати найоптимальніший підхід до навчального процесу, враховуючи особливості учнів цього класу та школи. Вона також забезпечує раціональний і логічно обґрунтований добір кількості задач для кожного розділу.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г. П., Бевз В. Г., Васильєва Д. В., Владімірова Н. Г. Математика: підручник для 5 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: Видавничий дім «Освіта». 2022 р. 256
2. Бевз Г.П. Методика викладання математики. К.: Вища школа, 1989. 368 с.
3. Біос Дж. Е. Математика: підручник для 5 кл. закладів загальної середньої освіти 2022 р. Київ: «Видавництво «Лінгвіст». 2022 р. 288 с.
4. Біос Дж. Е. Математика: підручник для 6 кл. закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах): Частина 1. Київ: «Видавництво «Лінгвіст». 2023 р. 162 с.
5. Буряк Н. Про усну лічбу та деякі прийоми обчислень у курсі математики 5–6 класів. *Математика в школі*. 2004. № 2 С. 41
6. Дуткевич Т. В. Дитяча психологія: навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2012. 424 с.
7. Істер О. Математика: підручник для 5 кл. закладів загальної середньої освіти. Київ: «Генеза». 2022 р. 303 с.
8. Дубинчук О.С. Методика викладання математики в 5 класах: Арифметика і початки алгебри. К: Рад. Школа, 1980. 171 с.
9. Забранська Н., Забранська В. Десяткові дробі та дії над ними. *Математика в школі*. 2002. №2. С. 32 – 36.
10. Кушнір В. Дослідження та розвиток творчості під час вивчення математики. *Математика в школі*. 2009. № 6, С. 3-5.
11. Математична галузь: критерії оцінювання. 5–9 класи НУШ <https://osvita.ua/school/estimation/92736/>
12. Левус О.І. Формування навичок самостійної роботи учнів на різних етапах уроку. *Математики в школі*. 2009. № 5 – 2 с.
13. Ляпин С.Е. Методика викладання математики – К.: «Радянська школа», 1952. 451 с.

14. Маєргойз Д. М., Дубинчук О. С. Методика викладання арифметики в V-VI класах восьмирічної школи. Київ: Вид-во «Радянська школа», 1966. 396 с.
15. Марнянський І. Розвиваюче навчання та формування математичних понять. *Математика в школі*. 1999. №2 – 2-3 с.
16. Мерзляк А., Полонський В., Якір М. Математика: підручник для 5 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків: «Гімназія». 2022 р. 351 с.
17. Мерзляк А., Полонський В., Якір М. Математика: підручник для 6 кл. закладів загальної середньої освіти (у 2-х частинах): Частина 1. Харків: «Гімназія». 2023 р. 208 с.
18. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти / Мерзляк А. Г., Номіровський Д. А., Пихтар М. П., Рубльов Б. В., Семенов В. В., Якір М. С. Київ, 2021.
19. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти / Істер О.С. Київ, 2021.
20. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти / Скворцова С.О., Тарасенкова Н.А. Київ, 2021.
Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти / автори Бурда М.І., Васильєва Д.В. Київ, 2021
21. Москаленко О., Філімонова М. Створення креативного середовища у процесі навчання математики учнів 5–6 класів // *Математика в школі*. 2007. № 9-10, С. 15-19.
22. Модельна навчальна програма «Математика. 5-6 класи» для закладів загальної середньої освіти /Радченко С.С., Зайцева К.С. Київ, 2021.
23. Плахотник В. Рушійні сили виховання в математиці / В. Плахотник // *Математика в школі*. 2004. № 5 4-8 с.
24. Сікорський П. Психолого-педагогічні проблеми навчання математики / Сікорський П. // *Математика в школі*. 2004. № 4 5-9 с.
25. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студ. мат. спеціальностей пед. навч.закладів. Київ: Зодіак-ЕКО, 2000. 512 с.

26. Тарасенкова Н.А. Математика: підручник для 5 класу загальноосвітнього навчального закладу / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.П. Бочко, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. К.: Видавничий дім «Освіта», 2013. – 352 с.