

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Т.І.Війчук «____» _____ 2024 р.

Методи доведення нерівностей у шкільному курсі математики

Спеціальність: 014 Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття професійної кваліфікації:

*«Вчитель математики, викладач закладу фахової передвищої, вищої освіти,
вчитель інформатики»*

Автор роботи:

Хлопик Іван Васильович _____

Науковий керівник:

кандидат педагогічних наук, доцент

Війчук Тарас Іванович _____

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

«Методи доведення нерівностей у шкільному курсі математики»

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

[illegible]

дата

Голова ЕК _____ підпис _____ прізвище, ім'я

Секретар ЕК _____ підпис _____ прізвище, ім'я

ЗМІСТ

ВСТУП.....	5
Розділ I. Теоретичні основи доведення нерівностей у шкільному курсі математики.....	8
1.1. Нерівності та їх властивості.....	8
1.2. Основні логічні схеми доведення нерівностей	12
1.3. Методи доведення алгебраїчних та числових нерівностей	13
1.3.1. Доведення за допомогою визначення понять «більше», «менше»	13
1.3.2. Доведення за допомогою очевидної або раніше доведеної нерівності	16
1.3.3. Доведення за допомогою наближеної оцінки величин обох частин нерівності	20
1.3.4. Представлення буквеного виразу у вигляді суми або різниці.....	23
1.3.5. Розкладання буквених виразів на множники	26
1.3.6. Тотожні перетворення числових нерівностей, які містять степені.....	27
Розділ II. Доведення нерівностей на факультативних заняттях.....	27
2.1. Використання окремих методів доведення нерівностей у старшій школі..	27
2.2. Використання класичних нерівностей.....	29
2.2.1. Нерівність Коші.....	29
2.2.2. Нерівність Буняковського	32
2.2.3. Нерівність Бернуллі	35
2.3. Доведення нерівностей за допомогою похідної	37
2.4. Метод мажорювання.....	40
2.5. Доведення нерівностей методом від супротивного.....	44
2.6. Метод математичної індукції.....	47
ВИСНОВКИ	50
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	52

ВСТУП

Теорія нерівностей є важливим розділом шкільного курсу математики. На тему «Нерівності» опираються такі питання курсу алгебри як поняття числа, вимірювання величин, виконання наближених обчислень, поняття функції, дослідження способів розв'язування математичних задач тощо.

Для учнів, які вивчатимуть математику в старших класах, знання теорії нерівностей є необхідною умовою для засвоєння курсу математичного аналізу.

Нерівностям належить чільне місце у різних галузях сучасної математичної науки. Зауважимо, що останнім часом розвивається цілий ряд нових розділів сучасної математики, таких як теорія інформації, теорія ігор, лінійне програмування тощо, в яких нерівності відіграють дуже суттєву, навіть, можна сказати, вирішальну роль. У зв'язку з цим виникає питання: «Чи займає теорія нерівностей належне місце в шкільному курсі математики, тобто таке місце, яке відповідає питомій вазі нерівностей в математичній науці?» Навряд чи можна дати позитивну відповідь на це питання, адже досвід показує, що абітурієнти багатьох середніх шкіл, які вміють розв'язувати складні рівняння, відчують значні труднощі, пов'язані з простими нерівностями, і, особливо, з дослідженням нерівностей.

З іншого боку, при вивченні теорії нерівностей існують великі можливості для розвитку логічного мислення учнів. Дослідження психологів і педагогів показали, що для розвитку мислення учнів необхідно формувати узагальнені способи міркувань над ними, навчати методам розв'язування цілого ряду задач [1; 3]. У зв'язку з цим особливої актуальності набуває теоретичне і практичне дослідження деяких методів доведення нерівностей. Це і обумовило вибір теми роботи.

Мета роботи: проаналізувати сучасні підходи до навчання учнів доведенню нерівностей та розробити дидактичні засоби, що дозволять підвищити ефективність засвоєння ними даної теми та сформулювати в них глибоке розуміння математичних понять.

Об'єктом дослідження є процес навчання математики в загальноосвітніх навчальних закладах.

Предметом дослідження є методи доведення нерівностей у шкільному курсі математики.

У процесі дослідження ми намагалися розв'язати такі **завдання**:

- осмислити проблему доведення нерівностей учнями загальноосвітніх навчальних закладів;
- виявити логічні прогалини в шкільному курсі математики при навчанні учнів доведенню нерівностей;
- розробити методику доведення нерівностей у шкільному курсі математики.

Спираючись на праці психологів, педагогів, методистів, ми дотримуємося такої думки, що основою доведення нерівностей є дослідження самого твердження, яке ми повинні довести. Це дослідження полягає в точному з'ясуванні всіх понять, які входять в умову задачі.

При виконанні роботи ми використовували такі **методи дослідження**:

- аналіз психолого-педагогічної та науково-методичної літератури з даної теми [5; 8];
- аналіз програм навчальних підручників і посібників з математики для загальноосвітньої школи [2; 10; 15; 16];
- вивчення, аналіз та узагальнення педагогічного досвіду вчителів з даної проблеми;
- проведення спостережень, бесід, тестування учнів;
- дослідно-експериментальна робота під час навчання математики в ліцеї № 16 імені Юрія Дрогобича, що дало змогу використати окремі методи доведення нерівностей на факультативних заняттях.

Практична цінність роботи полягає в узагальненні та систематизації способів доведення нерівностей, які можуть бути використані для навчання учнів доводити нерівності.

Апробація дослідження. За темою дослідження виконано публікацію тези «Формування вмінь доведення нерівностей як метод інтелектуального розвитку учнів» у збірник матеріалів Міжнародної дистанційної науково-практичної конференції «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу – ІТМ*плюс-2024».

Структура роботи. Робота складається зі вступу, двох розділів, висновку, списку використаних джерел. У вступі підкреслена актуальність дослідження. Перший розділ присвячений розгляду теоретичних основ доведення нерівностей у шкільному курсі математики, складовим алгебраїчної культури учнів в даній темі. У другому розділі описана методика формування умінь і навичок доведення нерівностей, зокрема на факультативних заняттях.

Розділ I. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ У ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

1.1. Нерівності та їх властивості

Всі дійсні числа поділяються на додатні, від’ємні та нуль. Для того, щоб показати, що число a додатне, використовують запис $a > 0$. Нагадаємо, що сума або добуток додатних чисел є додатним числом a . Якщо число a від’ємне, то число $-a$ додатне і навпаки. І на завершення, для деякого додатного числа a знайдеться таке додатне раціональне число x , що $x < a$.

Ці факти лежать в основі теорії нерівностей. Можна порівнювати будь-які числа a і b і записувати результати порівняння у вигляді рівності або нерівності, використовуючи знаки $=$, $<$, $>$. Для довільних чисел a і b виконується одне і тільки одне із співвідношень: $a = b$; $a > b$; $a < b$ [13].

Означення:

Число a вважається більшим за число b , якщо різниця $(a - b)$ є додатним числом; число a вважається меншим за число b , якщо різниця $(a - b)$ є від’ємним числом.

Якщо різниця $(a - b) = 0$, то числа a і b – рівні. Знаки $< (\leq)$, $> (\geq)$ називаються знаками нерівностей і читаються відповідно: менше (менше або дорівнює), більше (більше або дорівнює). Нерівності, які записуються за допомогою знаків $<$ і $>$, називаються строгими нерівностями, а нерівності, в яких є знаки $\leq$ і $\geq$ – нестрогими [19].

Розглянемо основні властивості нерівностей:

1. Якщо $a > b$, то $b < a$ і навпаки.

Доведення: Якщо $a > b$, то число $(a - b)$ додатне. Тоді $-(a - b)$, тобто $(b - a)$ – від’ємне число, звідки $b < a$. Аналогічно, якщо $a < b$, $(a - b)$ від’ємне число, то $-(a - b)$, тобто $(b - a)$ додатне, отже $b > a$.

2. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $a > c$; якщо $a < b$ і $b < c$, то $a < c$. (властивість транзитивності).

Доведення. Якщо $a > b$ і $b > c$, то $(a - b)$ і $(b - c)$ – додатні числа. Тому $(a - b) + (b - c)$, тобто $(a - c)$ – додатне число, звідки $a > c$.

Аналогічно можна довести і другу частину властивості.

Якщо $a < b$ і $b < c$, то $(a - b)$ і $(b - c)$ від'ємне число. Тому $(a - b) + (b - c)$, тобто $(a - c)$ від'ємне число, звідки $a < c$.

3. Якщо $a > b$ і m – довільне число, то $(a + m) > (b + m)$; якщо $a < b$ і m – довільне число, то $(a + m) < (b + m)$.

Доведення. Якщо $a > b$, то $(a - b)$ – додатне число. Але $(a - b) = (a + m) - (b + m)$. Тому $(a + m) - (b + m)$ додатне число, звідки $(a + m) > (b + m)$.

Аналогічно можна довести і другу частину властивості. Якщо $a < b$, то $(a - b)$ від'ємне число. Але $(a - b) = (a + m) - (b + m)$. Тому $(a + m) - (b + m)$ від'ємне число, звідки $(a + m) < (b + m)$.

З цієї теореми безпосередньо випливають такі наслідки: якщо $a > b$ і m – довільне число, то $(a - m) > (b - m)$. Якщо $a < b$ і m – довільне число, то $(a - m) < (b - m)$.

Якщо $(a + b) > c$, то $a > (c - b)$.

Якщо $(a + b) < c$, то $a < (c - b)$.

4. Якщо $a > b$ і $c > d$, то $(a + c) > (b + d)$; якщо $a < b$ і $c < d$, то $(a + c) < (b + d)$.

Доведення. Оскільки $a > b$ і $c > d$, то за властивістю (3) $(a + c) > (b + c)$ і $(b + c) > (b + d)$. Тоді за властивістю (2) $a + c > b + d$.

Оскільки $a < b$ і $c < d$, то за властивістю (3) $(a + c) < (b + c)$ і $(b + c) < (b + d)$. Тоді за властивістю (2) $(a + c) < (b + d)$.

5. Якщо $a > b$ і $c < d$, $(a - c) > (b - d)$; якщо $a < b$ і $c > d$, $(a - c) < (b - d)$.

Доведення. Оскільки $c < d$, то $d > c$ за властивістю (1). Крім того, $a > b$. Тому за властивістю (4) $(a + d) > (b + c)$, звідки, застосовуючи наслідок з властивості (3), отримуємо: $(a - c) > (b - d)$.

Другу частину властивості можна довести аналогічно. Звідси $a < b$, тоді згідно властивості (1) $b > a$. Крім того, $c > d$. Тому за властивістю (4) $(b + c) > (a + d)$.

+ d), звідки, застосовуючи наслідок з властивості (3), отримуємо: $b - d > a - c$ і за властивістю (1) $a - c < b - d$.

6. Якщо $a > b$ і $m > 0$, то $a \cdot m > b \cdot m$; якщо $a < b$ і $m > 0$, то $a \cdot m < b \cdot m$.

Доведення. Якщо $a > b$, то $a - b > 0$ і, крім того, $m > 0$. Тому $(a - b) \cdot m > 0$, тобто $a \cdot m - b \cdot m > 0$, звідки $a \cdot m > b \cdot m$.

Аналогічно, якщо $a < b$, $(a - b) < 0$ і, крім того, $m > 0$. Тому $(a - b) \cdot m < 0$, тобто $(a \cdot m - b \cdot m) < 0$, звідки $a \cdot m < b \cdot m$.

Якщо $a > b$ і $m > 0$, то $a/m > b/m$; якщо $a < b$ і $m > 0$, то $a/m < b/m$.

7. Якщо $a > b$ і $m < 0$, то $a \cdot m < b \cdot m$; якщо $a < b$ і $m < 0$, то $a \cdot m > b \cdot m$.

Доведення. Якщо $a > b$, $(a - b) > 0$, $m < 0$, $(a - b) \cdot m < 0$, то $(a \cdot m - b \cdot m) < 0$, звідки $a \cdot m < b \cdot m$.

Другу частину властивості можна довести аналогічно.

Якщо $a < b$, то $(a - b) < 0$ і, крім того, $m < 0$. Тому $(a - b) \cdot m > 0$, тобто $a \cdot m - b \cdot m > 0$, звідки $a \cdot m > b \cdot m$.

Якщо $a > b$ і $m < 0$, то $a/m < b/m$; якщо $a < b$ і $m < 0$, то $a/m > b/m$.

8. Якщо $a > b$, а і b мають однаковий знак, то $1/a < 1/b$.

Доведення. За умовою $a > b \Leftrightarrow (a - b) > 0$, або $(b - a) < 0$. Далі шукаємо різницю $1/a - 1/b = (b - a)/ab < 0 \Leftrightarrow 1/a < 1/b$.

9. Якщо $a > b \geq 0$ і $c > d \geq 0$, то $a \cdot c > b \cdot d$; Якщо $0 \leq a < b$ і $0 \leq c < d$, то $a \cdot c < b \cdot d$.

Доведення. Оскільки $a > b \geq 0$ і $c > d \geq 0$, то, застосовуючи властивість (6), отримаємо: $a \cdot c > b \cdot c$ і $b \cdot c > b \cdot d$, звідки $a \cdot c > b \cdot d$.

Оскільки $b > a \geq 0$ і $d > c \geq 0$, застосовуючи властивість (6), отримаємо: $0 \leq a \cdot c < b \cdot c$ і $b \cdot d > b \cdot c \geq 0$, звідки $a \cdot c < b \cdot d$. Зауважимо, що властивості 4 і 9 можна узагальнити на будь-яку кількість нерівностей.

10. Якщо $a > b \geq 0$ і n натуральне число, то $a^n > b^n$; якщо $0 \leq a < b$ і n натуральне число, $a^n < b^n$.

Доведення. Розглянемо n подібних нерівностей $a > b \geq 0$. Застосуємо до них властивість (9). Отримаємо $a^n > b^n$. Аналогічно отримаємо $a^n < b^n$.

11. Якщо $a > b$ і n непарне натуральне число, то $a^n > b^n$; якщо $a < b$ і n непарне натуральне число, то $a^n < b^n$.

Доведення. Якщо $a > b \geq 0$, то твердження про це впливає безпосередньо з властивості (10). Нехай $a > b$, причому $a > 0$, $b < 0$. Тоді, оскільки n – непарне число, $a^n > 0$, $b^n < 0$, звідки $a^n > b^n$.

Нехай $0 \geq a > b$. Тоді $0 \leq -a < -b$ and $(-a)^n < (-b)^n$, звідки, оскільки n – непарне число, $-a^n < -b^n$ і, відповідно $a^n > b^n$.

12. Якщо $a > b \geq 0$ і k додатне дійсне число, то $a^k > b^k$; якщо $0 \leq a < b$ і k додатне дійсне число, то $a^k < b^k$.

Доведення. Якщо k – натуральне число, то твердження цієї властивості впливає з властивості (10).

Нехай k – раціональне (не натуральне) число, тобто нехай $k = p/q$, де p і q – взаємно прості натуральні числа, а $q \neq 1$.

Потрібно довести, що $a^{p/q} > b^{p/q}$.

Припустимо, що це не так.

Нехай $a^{p/q} \leq b^{p/q}$. Тоді $(a^{p/q})^q \leq (b^{p/q})^q$, або $a^p \leq b^p$, що суперечить нерівності $a^p > b^p$.

Доведення властивості у випадку, коли k – ірраціональне число, ми не наводимо.

13. Якщо $a > b > 0$ і k від'ємне дійсне число, то $a^k < b^k$; якщо $0 < a < b$ і k від'ємне дійсне число, то $a^k > b^k$ [13].

Довести цю властивість неважко, застосувавши властивості 12 і 8.

1.2. Основні логічні схеми доведення нерівностей

Існує дві логічні схеми доведення нерівностей: схема слідування та схема еквівалентних перетворень [23].

1. Схема дотримання виду: $A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow A_{n-1} \Rightarrow A_n$. Тут A_k ($k \in N$) – деяка нерівність або система нерівностей; A_1 - відома нерівність; A_n - нерівність, яку потрібно довести.

2. Схема еквівалентних перетворень має наступний вигляд

$$A_1 \Leftrightarrow A_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow A_{n-1} \Leftrightarrow A_n.$$

Перетворення $A_k \Leftrightarrow A_{k+1}$ від k -ї до $(k+1)$ -ї нерівності називається еквівалентним перетворенням.

Наступна теорема має велике значення для реалізації еквівалентних перетворень.

Теорема. Якщо функція $f(x)$ зростає на деякому проміжку і числа a та b належать цьому проміжку, то $a < b \Leftrightarrow f(a) < f(b)$. Наведемо приклади застосування цієї теореми.

1. Функція $f(x) = x^n$, $x \in [0; \infty)$ монотонно зростає. Тому

$$(0 < a < b) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ a^n < b^n \end{cases}$$

2. Функція $f(x) = x^{2n-1}$, $n \in N$, $x \in R$, монотонно зростає, отже

$$a < b \Leftrightarrow a^{2n-1} < b^{2n-1}.$$

3. Функція $f(x) = 1/x$, $x \in (0, \infty)$ монотонно спадає, тому

$$(0 < a < b) \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \\ 1/a < 1/b \end{cases}$$

1.3. Методи доведення алгебраїчних та числових нерівностей

Не існує загального методу доведення нерівностей, проте у школах найчастіше застосовуються наступні методи:

- за допомогою визначення понять «більше», «менше»;
- на основі очевидної або раніше доведеної нерівності;
- за допомогою наближеного обчислення величин обох частин нерівності;
- представлення буквеного виразу у вигляді суми або різниці;
- розклад буквених виразів на множники;
- тотожні перетворення числових нерівностей, які містять степені тощо.

1.3.1. Доведення за допомогою визначення понять «більше», «менше»

Визначення понять «більше» і «менше», що лежить в основі першого методу, базується на дослідженні знаку різниці між лівою і правою частинами нерівностей. Цей метод використовується для доведення нерівностей у дев'ятому класі. А саме, для доведення нерівності $a > b$ достатньо довести, що різниця $a - b > 0$, а для доведення нерівності $a < b$ достатньо показати, що $a - b < 0$ [3].

Приклад 1. Довести нерівність $c / (c^2 + 1) < 1/2$.

Доведення.

$$\begin{aligned} c / (c^2 + 1) - 1/2 &= (2c - c^2 - 1) / (2(c^2 + 1)) = -(c^2 - 2c + 1) / (2(c^2 + 1)) = \\ &= -(c - 1)^2 / (2(c^2 + 1)) \leq 0. \end{aligned}$$

Останній дріб не додатний, оскільки $2(c^2 + 1) > 0$ і $(c - 1)^2 \geq 0$ для будь-якого $c \in \mathbb{R}$.

Отже, $c / (c^2 + 1) < 1/2$.

Приклад 2. Довести, що $a/b + b/a > 2$, для всіх $a > 0$, $b > 0$.

Доведення.

$$a/b + b/a - 2 = (a^2 + b^2 - 2ab) / ab = (a - b)^2 / ab$$

У дробі справа чисельник є додатним: $(a - b)^2 > 0$, знаменник також додатний, оскільки $a > 0, b > 0$. Отож, $a/b + b/a - 2 \geq 0, a/b + b/a \geq 2$.

Приклад 3. Довести, що при $a > 0$ і $b > 0$, виконується нерівність

$(a + b)/2 > \sqrt{ab}$, яка переходить у рівність тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

Доведення.

Ця нерівність рівносильна нерівності $a + b > 2\sqrt{ab}$.

Знайдемо різницю $(a + b) - 2\sqrt{ab} = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$.

$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ ця нерівність очевидна і перетворюється на рівність лише при $a = b$.

Приклад 4. Довести, що для кожного довільного значення a виконується нерівність:

$$(a - 3)(a - 5) < (a - 4)^2.$$

Доведення. Сформуємо різницю лівої та правої частин нерівності і перетворимо її.

$(a - 3)(a - 5) - (a - 4)^2 = a^2 - 5a - 3a + 15 - a^2 + 8a - 16 = -1$. Для кожного a ця різниця від'ємна. Отже, для кожного a справедлива нерівність

$$(a - 3)(a - 5) < (a - 4)^2.$$

Приклад 5. Довести нерівність $(a - 2)^2 > a(a - 4)$.

Доведення. Сформуємо різницю лівої та правої частин нерівності і перетворимо її. $(a - 2)^2 - a(a - 4) = a^2 - 4a + 4 - a^2 + 4a = 4; 4 > 0$

$$(a - 2)^2 - a(a - 4) > 0$$

Отже, $(a - 2)^2 > a(a - 4)$.

Приклад 6. Довести нерівність $a^2 + b^2 + 2 \geq 2(a + b)$.

Доведення. Сформуємо різницю лівої та правої частин нерівності і перетворимо її.

$$a^2 + b^2 + 2 - 2(a + b) = a^2 + b^2 + 2 - 2a - 2b = (a^2 - 2a + 1) + (b^2 - 2b + 1) =$$

$$= (a - 1)^2 + (b - 1)^2.$$

Нерівність $(a - 1)^2 + (b - 1)^2 > 0$ очевидна для кожного a .

$$a^2 + b^2 + 2 - 2(a + b) \geq 0.$$

Отже, $a^2 + b^2 + 2 > 2(a + b)$.

Всі нерівності, які розглядаються у дев'ятому класі, доводяться подібним методом.

Наведемо кілька прикладів.

1. Доведіть, що для всіх значень змінної виконується нерівність

а) $3(a + 1) + a < 4(2 + a)$;

б) $(7p - 1)(7p + 1) < 49p^2$;

в) $(2a + 3)(2a + 1) > 4a(a + 2)$.

2. Доведіть нерівність:

а) $2b^2 - 6b + 1 > 2b(b - 3)$;

д) $a(a + b) \geq ab$;

б) $(c + 2)(c + 6) < (c + 3)(c + 5)$;

е) $a(a - b) \geq b(a - b)$;

в) $p(p + 7) > 7p - 1$;

є) $2bc < b^2 + c^2$.

г) $8y(3y - 10) < (5y - 8)^2$;

3. Чи справедлива нерівність для кожного значення x :

а) $4x(x + 0,25) > (2x + 3)(2x - 3)$;

б) $(5x - 1)(5x + 1) < 25x^2 + 2$;

в) $(3x + 8)^2 > 3x(x + 16)$;

г) $(7 + 2x)(7 - 2x) < 49 - x(4x + 1)$.

4. Доведіть, що сума довільного додатного числа і числа, оберненого до заданого, не менша від 2.

5. До кожного з чисел 0, 1, 2, 3 додали одне і те ж число k . Порівняйте добуток крайніх членів утвореної послідовності чисел з добутком її середніх членів.

1.3.2. Доведення за допомогою очевидної або раніше доведеної нерівності

Другий спосіб полягає в тому, що будь-яка очевидна або раніше доведена нерівність перетворюється на ту нерівність, яку ми повинні довести.

Приклад 1. Довести, що $(a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$, де $a \geq 0, b \geq 0$.

Доведення. Очевидною є нерівність:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0, \text{ де } a \geq 0 \text{ і } b \geq 0$$

Перетворимо цю нерівність:

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{ab} + (\sqrt{b})^2 = a - 2\sqrt{ab} + b$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0, \text{ або } a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} \geq 0 \Rightarrow (a + b)/2 \geq \sqrt{ab}.$$

Приклад 2. Довести, що для довільних дійсних чисел a, b, c виконується нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}$.

Доведення. (1 спосіб) Очевидними є нерівності:

$$a^2 + b^2 \geq 2\sqrt{ab};$$

$$b^2 + c^2 \geq 2\sqrt{bc};$$

$$a^2 + c^2 \geq 2\sqrt{ac}.$$

Додавши ці нерівності, а потім поділивши отриману нерівність на 2, отримаємо:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}) \quad | :2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ac}.$$

Саме це і потрібно було довести.

(2 спосіб)

Цю нерівність можна довести іншим способом. Очевидно, що для будь-яких a, b, c нерівність

$$(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0 \text{ справедлива, звідки}$$

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac > 0, \text{ отже } a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac.$$

Приклад 3. Довести, що якщо a, b, c – додатні числа, то

$$\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$$

Доведення. Очевидною є наступна нерівність

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \text{ або } (a + b)/2 \geq \sqrt{ab}$$

Оскільки a, b, c – додатні числа за умовою, то $\frac{bc}{a}, \frac{ac}{b}, \frac{ab}{c}$ – додатні числа.

Отже, для них можна записати очевидні нерівності про середнє арифметичне та середнє геометричне

$$\frac{cb/a + ac/b}{2} \geq \sqrt{cb/a \cdot ac/b} = c$$

$$\frac{ac/b + ba/c}{2} \geq \sqrt{ac/b \cdot ba/c} = a$$

$$\frac{ba/c + bc/a}{2} \geq \sqrt{ba/c \cdot bc/a} = b$$

Додавши ці нерівності, отримаємо:

$$\frac{bc/a + ac/b}{2} + \frac{ba/c + ac/b}{2} + \frac{ba/c + bc/a}{2} \geq a + b + c$$

Отже, $\frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} + \frac{ab}{c} \geq a + b + c.$

Що й треба було довести.

Приклад 4. Довести, що для довільних невід'ємних чисел a_1, a_2, a_3, a_4 виконується нерівність

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} \geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}$$

Доведення. Використаємо очевидну нерівність для середнього арифметичного та середнього геометричного.

$$\frac{(a_1 + a_2)}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}; \quad \frac{(a_3 + a_4)}{2} \geq \sqrt{a_3 a_4}.$$

Складемо ці нерівності і поділимо на 2

$$\frac{\frac{(a_1 + a_2)}{2} + \frac{(a_3 + a_4)}{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2}.$$

Дріб у правій частині нерівності про середнє арифметичне та середнє геометричне запишемо так :

$$\frac{\sqrt{a_1 a_2} + \sqrt{a_3 a_4}}{2} \geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}}$$

Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\frac{(a_1 + a_2)}{2} + \frac{(a_3 + a_4)}{2}}{2} &\geq \sqrt{\sqrt{a_1 a_2} \sqrt{a_3 a_4}} \\ \frac{a_1 + a_2 + a_3 + a_4}{4} &\geq \sqrt[4]{a_1 a_2 a_3 a_4}. \end{aligned}$$

Що й треба було довести.

Приклад 5. Довести, що якщо $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, то

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8abc.$$

Доведення. Очевидними є наступні нерівності:

$$(a + b) \geq 2\sqrt{ab}$$

$$(a + c) \geq 2\sqrt{ac}$$

$$(b + c) \geq 2\sqrt{bc}$$

Помноживши нерівності одна на одну, отримаємо

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8\sqrt{ab} \sqrt{bc} \sqrt{ac} = 8\sqrt{a^2 b^2 c^2},$$

$$(a + b)(b + c)(a + c) \geq 8 \cdot a \cdot b \cdot c,$$

що й треба було довести.

Приклад 6. Довести нерівність

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5} \geq \frac{2(a + b + c) - 3}{5}$$

Доведення. Очевидно, що існує така нерівність

$$(a - 1)^2 + (b - 1)^2 + (c - 1)^2 \geq 0.$$

Запишемо цю нерівність так

$$a^2 - 2a + 1 + b^2 - 2b + 1 + c^2 - 2c + 1 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2(a + b + c) + 3 \geq 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq 2(a + b + c) - 3$$

Розділивши цю нерівність на 5, отримаємо

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{5} \geq \frac{2(a + b + c) - 3}{5}$$

1.3.3. Доведення за допомогою наближеної оцінки величин обох частин нерівності

Третій спосіб полягає у використанні наближеного оцінювання величин обох частин нерівності [1].

Приклад 1. Порівняти числа: $\sqrt{\sqrt{5} + 2}$ та $\sqrt{3} + 1$

Доведення. Обидві частини додатні, тому піднесемо до квадрату обидві частини:

$$(\sqrt{\sqrt{5} + 2})^2 \text{ та } (\sqrt{3} + 1)^2$$

$$\sqrt{5} + 2 \text{ та } 4 + 2\sqrt{3}$$

Знову піднесемо обидві сторони до квадрата і отримаємо:

$$9 + 4\sqrt{5} \text{ та } 28 + 16\sqrt{3}$$

Оскільки $9 + 4\sqrt{5} < 28 + 16\sqrt{3}$, то і

$$\sqrt{\sqrt{5} + 2} < \sqrt{3} + 1$$

Приклад 2. Без допомоги таблиць чи калькулятора визначте, що більше: $\log_{189}1323$ чи $\log_{63}147$?

Доведення.

$$\log_{189}1323 = \frac{\log_7 1323}{\log_7 189} = \frac{\log_7 (3^3 \cdot 7^2)}{\log_7 (3^3 \cdot 7)} = \frac{2 + 3\log_7 3}{1 + 3\log_7 3} = m;$$

$$\log_{63}147 = \frac{\log_7 147}{\log_7 63} = \frac{\log_7 (3 \cdot 7^2)}{\log_7 (3^2 \cdot 7)} = \frac{2 + \log_7 3}{1 + 2\log_7 3} = n;$$

Взявши $n < m$, враховуючи, що $\log_7 3 > 0$, матимемо

$$n < m \Leftrightarrow \frac{2 + \log_7 3}{1 + 2\log_7 3} < \frac{2 + 3\log_7 3}{1 + 3\log_7 3} \Leftrightarrow 3\log_7^2 3 + 7\log_7 3 + 2 < 6\log_7^2 3 +$$

$$+ 7\log_7 3 + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 < \log_7^2 3.$$

Отже, $\log_{189}1323 > \log_{63}147$.

Приклад 3. Що більше, $\log_7 8$ чи $\log_8 9$?

Доведення.

$$(\log_7 8 \vee \log_8 9) \Leftrightarrow (\log_7 8 + \log_8 7 \vee \log_8 9 + \log_8 7) \Leftrightarrow (\log_7 8 + 1/\log_7 8 \vee \log_8 63).$$

Оскільки $\log_7 8 > 1$, $\log_7 8 + 1/\log_7 8 > 2$, $\log_8 63 < 2$,

то $\log_7 8 > \log_8 9$.

Приклад 4. Без допомоги таблиць чи калькулятора довести, що $\operatorname{tg} 208^\circ < \sin 492^\circ$

Доведення.

$$(\operatorname{tg} 208^\circ < \sin 492^\circ) \Leftrightarrow (\operatorname{tg}(180^\circ + 28^\circ) < \sin(360^\circ + (180^\circ - 48^\circ))) \Leftrightarrow (\operatorname{tg} 28^\circ < \sin 48^\circ)$$

Запишемо послідовність правильних нерівностей

$$\operatorname{tg} 28^\circ < \operatorname{tg} 30^\circ = 1/\sqrt{3} < \sqrt{2}/2 = \sin 45^\circ < \sin 48^\circ$$

Звідси випливає, що $(\operatorname{tg} 28^\circ < \sin 48^\circ) \Leftrightarrow (\operatorname{tg} 208^\circ < \sin 492^\circ)$

Приклад 5. Довести, що $3\sqrt{7} + 5\sqrt{2} > 6\sqrt{5}$

Доведення.

Піднесемо обидві частини нерівності до квадрату

$$(3\sqrt{7} + 5\sqrt{2})^2 \vee (6\sqrt{5})^2$$

$$63 + 30\sqrt{14} + 50 \vee 180$$

$$113 + 30\sqrt{14} \vee 180$$

$$30\sqrt{14} \vee 67$$

Піднісши вираз до квадрату ще раз, отримаємо

$$900 \cdot 14 \vee 67^2$$

$$12600 > 4489$$

Отже $3\sqrt{7} + 5\sqrt{2} > 6\sqrt{5}$.

Такими методами ми можемо довести наступні нерівності:

1. а) $\sqrt{5} + \sqrt{10} > \sqrt{6} + \sqrt{8};$

б) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} < \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{8}};$

в) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}} < \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}};$

г) $\sqrt{14} - \sqrt{3} > 2.$

2. а) $\sin 39^\circ > \frac{1}{\sqrt{3}};$

б) $\operatorname{tg} 48^\circ > \cos 68^\circ;$

3. а) $\log_2 3 < \log_3 5;$

б) $\frac{1}{\sqrt{6}} - 1 > -\frac{4}{5};$

в) $\log_6 3 < \log_3 6;$

г) $\frac{131}{273} < \frac{179}{235};$

д) $\log_8 7 < \log_7 6;$

е) $\sqrt{12} - \sqrt{11} < \sqrt{11} - \sqrt{10};$

є) $2\log_3 4 > 3\log_7 6;$

ж) $2 < 3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}.$

1.3.4. Представлення буквенного виразу у вигляді суми або різниці

Деякі нерівності доводяться вдало підібраними тотожними перетвореннями, де використовуються такі прийоми, як перегруповання множників або доданків, подання виразу у вигляді різниці квадратів чисел, введення понять.

Отримання многочлена, всі члени якого легко порівняти з одиницею або нулем, є основною метою таких перетворень [13].

Приклад 1. Доведіть, що $x \cdot (x + 1) (x + 2) \cdot (x + 3) > -1$, якщо x – довільне число.

Доведення. Виконавши множення $x (x + 3)$ на $(x + 1) (x + 2)$, побачимо, що вираз у лівій частині нерівності, яка доводиться, можна звести до вигляду:

$$(x^2 + 3x) (x^2 + 3x + 2).$$

Перепишемо цей вираз як добуток різниці та суми тих самих виразів:

$$((x^2 + 3x + 1) - 1) ((x^2 + 3x + 1) + 1) - (x^2 + 3x + 1)^2 - 1 \geq -1.$$

Приклад 2. Доведіть, що

$$(x + a + b) (x + a - b) (x - a + b) (x - a - b) \geq -4a^2b^2$$

Доведення.

Перетворимо ліву частину нерівності:

$$((x + a) + b)((x + a) - b)((x - a) + b)((x - a) - b) = ((x + a)^2 - b^2)((x - a)^2 - b^2).$$

$$((x + a)^2 - b^2) ((x - a)^2 - b^2) \geq -4a^2b^2;$$

$$(x^2 + 2ax + a^2 - b^2) (x^2 - 2ax + a^2 - b^2) \geq -4a^2b^2;$$

$$((x^2 + a^2 - b^2) + 2ax) ((x^2 + a^2 - b^2) - 2ax) \geq -4a^2b^2;$$

$$(x^2 + a^2 - b^2)^2 - (2ax)^2 \geq -4a^2b^2$$

$$x^4 + 2x^2(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 - 4a^2x^2 + 4a^2b^2 \geq 0$$

$$x^4 + 2x^2(a^2 - b^2) - 4a^2x^2 + (a^2 + b^2)^2 \geq 0$$

$$x^4 + 2x^2a^2 - 2x^2b^2 - 4a^2x^2 + (a^2 + b^2)^2 \geq 0$$

$$x^4 - 2x^2a^2 - 2x^2b^2 + (a^2 + b^2)^2 \geq 0$$

$$x^4 - 2x^2(a^2 + b^2) + (a^2 + b^2)^2 \geq 0$$

$$(x^2 - (a^2 + b^2))^2 \geq 0.$$

Отже, $(x + a + b)(x + a - b)(x - a + b)(x - a - b) \geq -4a^2b^2$.

Приклад 3. Доведіть, що

$$2^{x+y} + 2^{y+z} + 2^{z+x} < 2^{x+y+z+1} + 1,$$

де x, y, z – натуральні числа.

Доведення.

Позначимо $2^x = a, 2^y = b, 2^z = c$.

Очевидно, що кожне з чисел a, b, c більше 1. Віднімемо ліву частину нерівності від правої.

$$\text{Отримаємо: } 2^{x+y+z+1} - 2^{x+y} - 2^{y+z} - 2^{z+x} + 1 = 2abc - ab - bc - ac + 1$$

Запишемо останній многочлен як суму таких виразів, кожний з яких більший за нуль:

$$\begin{aligned} 2abc - ab - bc - ac + 1 &= (abc - ab - ac + a) + (abc - ab - bc + b) + \\ &+ (abc - a - b + 1) = a(c - 1)(b - 1) + b(a - 1)(c - 1) + (a - 1)(b - 1) > 0 \end{aligned}$$

Приклад 4. Доведіть, що для додатних значень x, y виконується нерівність

$$2(x^3 + y^3)^2 > (x^2 + y^2)^3$$

Доведення. Зробимо заміну $x^3 = a, a > 0, y^3 = b, b > 0$

$$2(a + b)^2 \geq \sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{b^2};$$

$$2(a^2 + 2ab + b^2) - \sqrt[3]{b^2} - \sqrt[3]{a^2} \geq 0$$

$$2a^2 + 4ab + 2b^2 - \sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{b^2} \geq 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 + 2ab + a^2 - \sqrt[3]{a^2} + b^2 - \sqrt[3]{b^2} \geq 0$$

$$(a + b)^2 + 2ab + (a - \sqrt[3]{a})(a + \sqrt[3]{a}) + (b - \sqrt[3]{b})(b + \sqrt[3]{b}) \geq 0$$

що й потрібно було довести.

Приклад 5. Доведіть, що для додатних значень x, y виконується нерівність:

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^8 \geq 64xy(x + y)^2$$

Доведення. Зробимо заміну $\sqrt{x} = a, a > 0, x = a^2$;

$$\sqrt{y} = b, b > 0, y = b^2.$$

$$(a + b)^8 \geq 64a^2 b^2(a^2 + b^2)^2;$$

$$(a + b)^8 - 64a^2 b^2(a^2 + b^2)^2 \geq 0;$$

$$((a + b)^4 - 8ab(a^2 + b^2))((a + b)^4 + 8ab(a^2 + b^2)) \geq 0;$$

$$((a + b)^4 + 8ab(a^2 + b^2)) \geq 0 - \text{очевидно.}$$

Доведемо, що $((a + b)^4 - 8ab(a^2 + b^2)) \geq 0$.

$$a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 - 8a^3b - 8ab^3 \geq 0$$

$$a^4 - 4a^3b + 6a^2b^2 - 4ab^3 + b^4 \geq 0$$

$$(a - b)^4 \geq 0.$$

Як відомо, добуток двох додатних чисел є додатним числом.

Отже,

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^8 \geq 64xy(x + y)^2.$$

1.3.5. Розкладання буквених виразів на множники

Якщо функція f – зростає і a, b – числа з області визначення функції f , то виконується нерівність

$$(a - b)(f(a) - f(b)) \geq 0. [18]$$

Приклад 1. Доведіть, що для додатних значень x, y виконується нерівність:

$$x^4 + y^4 \leq x^6/y^2 + y^6/x^2$$

Доведення. Зробимо заміну $x^2 = a, a > 0$;

$$y^2 = b, b > 0.$$

Отримаємо

$$\begin{aligned} x^6/y^2 + y^6/x^2 - x^4 - y^4 &= a^3/b + b^3/a - a^2 - b^2 = \\ &= (a^2/b)(a - b) + (b^2/a)(b - a) - (a - b)(a^2/b - b^2/a) = \\ &= - (1/ab)(a - b)(a^3 - b^3) \geq 0 \end{aligned}$$

Приклад 2. Доведіть, що для додатних значень x, y виконується нерівність:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \sqrt{x^2/y} + \sqrt{y^2/x}.$$

Доведення. Зробимо заміну $\sqrt{x} = a, a > 0$;

$$\sqrt{y} = b, b > 0.$$

$$a + b \leq a^2/b + b^2/a$$

$$a + b - a^2/b - b^2/a \leq 0$$

$$a(1 - a/b) + b(1 - b/a) \leq 0;$$

$$a((b - a)/b) + b((a - b)/a) \leq 0;$$

$$a((b - a)/b) - b((b - a)/a) < 0;$$

$$(b - a)(a/b - b/a) \leq 0;$$

$$(b - a)((a^2 - b^2)/ab) \leq 0;$$

$$\frac{-(a - b)(a - b)(a + b)}{ab} \leq 0;$$

$$\frac{-(a - b)^2(a + b)}{ab} \leq 0.$$

1.3.6. Тотожні перетворення числових нерівностей, які містять степені

У цьому пункті будемо порівнювати числа між собою, ставити традиційне питання: «Яке з двох чисел більше?» [18].

Приклад 1. Яке з чисел більше $2^{100} + 3^{100}$ чи 4^{100} ? [6]

Доведення. Доведемо, що $4^{100} > 2^{100} + 3^{100}$.

Оскільки $2^{100} + 3^{100} < 2 \cdot 3^{100}$, то достатньо лише довести:

$$4^{100} > 2 \cdot 3^{100}$$

Тобто $(4/3)^{100} > 2$.

Звідси випливає остання нерівність

$$(4/3)^{100} > (4/3)^3 = (64/27) > 2.$$

Отже, доведено, що $4^{100} > 2^{100} + 3^{100}$, крім того, з доведення видно, що 4^{100} значно більше, ніж $2^{100} + 3^{100}$.

Приклад 2. Яке з чисел більше: 5^{94} , 6^{90} , 7^{83} чи 8^{79} ?

Доведення. Спочатку доведемо, що

$$6^{90} > 5^{94}, \text{ тобто } 6^{45} > 5^{47}, \text{ або } (6/5)^{45} > 5^2.$$

Піднесемо число $6/5$ до п'ятого степеня:

$$(6/5)^5 = (1 + 1/5)^5 > 1 + 1/5 + \dots \downarrow \dots + 1/5 = 2$$

5 доданків

З цього випливає, що

$$(6/5)^{45} > 2^9 > 25.$$

Дійсно

$$(6/7)^{18} = ((6/7)^6)^3 = ((1 + 1/6)^6)^3 > (1 + 1/6 + 1/6 + \dots + 1/6)^3 = 2^3 > 7.$$

Отже, 7^{85} найбільше з перших трьох чисел.

Залишилось порівняти два числа 7^{85} і 8^{79} .

Доведемо, що $7^{85} > 8^{79}$, тобто $7^6 > (8/7)^{79}$.

Розглянемо тепер посилену нерівність $7^6 > (8/7)^{80}$, або $(8/7)^{40} < 7^3$.

Вона є правильною, оскільки

$$(8/7)^{40} = ((8/7)^8)^5 = ((4096/2401)^2)^5 < (1,712)^5 < 3^5 = 243 < 343 = 7^3.$$

Отже, найбільше з даних чисел 7^{85} .

Наведемо такі приклади:

1. Що більше?

а) 7^{92} чи 8^{91} ;

б) 2^{40} чи 3^{37} ;

в) 31^{11} чи 17^{14} ;

г) 6^{56} чи 7^{46} ;

д) 112^{10} чи 111^{11} .

2. Довести, що

а) $7^6 > (8/7)^{80}$;

б) $7^{17} > 6^{18}$;

в) $(6/7)^{18} > 7$.

Розділ II. ДОВЕДЕННЯ НЕРІВНОСТЕЙ НА ФАКУЛЬТАТИВНИХ ЗАНЯТТЯХ

2.1. Використання окремих методів доведення нерівностей у старшій школі

Крім традиційних для елементарної математики завдань з пошуку коренів рівнянь та їх систем різних типів, часто виникає необхідність оцінити і порівняти певні величини. Це може бути як числовий вираз, так і вираз, зі змінними. За допомогою нерівностей формулюється безліч завдань науково-практичного характеру та виражається досить значна частина результатів математичних досліджень.

Задачі з нерівностями можна поділити на два типи:

- *розв'язок нерівності*, тобто пошук умов, при яких дана нерівність стає істинним виразом;
- *доведення нерівності*, тобто отримання результату істинності висловлювання при дотриманні конкретних, наперед заданих умов.

У шкільному курсі математики учні переважно знайомляться зі способами розв'язування нерівностей та їх систем, а тему доведення нерівностей проходять дуже поверхнево. Хоча задачі на доведення нерівностей можна розв'язувати різними способами. А це привертає увагу учня не лише до найбільш очевидних способів вирішення задачі, але й до методів, що можна використати при розв'язку і інших задач, які в свою чергу в деяких випадках можуть бути єдиними.

Переважно вчителі при вивченні теми «Нерівності» не надають особливого значення створенню навичок формувати індуктивні і дедуктивні висновки. Однак саме здатність доводити твердження допомагає більш глибоко зрозуміти матеріал, що вивчається, підвищує здатність учнів до навчання і вчить їх мислити логічно і послідовно.

Слід зазначити, що не існує універсального алгоритму доведення нерівностей. Це, здається, пояснює труднощі, з якими стикаються вчителі і учні при виконанні відповідних завдань. Методи, що використовуються в цьому випадку, такі ж різні, як і нерівності.

На вивчення матеріалу з доведення нерівностей відводиться дуже мало часу. При розв'язуванні задач з підручника з алгебри, трапляються лише приклади, що приводять до оцінки різниці двох частин нерівності, яка в результаті виявиться квадратом певного виразу або ж числом. В учнів відповідно формуються потрібні для доведення вміння і навички, але також з'являється думка, що доводити нерівності можна лише таким способом. І якщо вчитель не розглядатиме складніших задач на доведення, то й учні не будуть вміти доводити нерівності іншими методами.

Тому потрібно на уроках чи факультативних заняттях вчитися доводити нерівності різними методами.

Серед основних способів доведення нерівностей, з якими зустрічаються на уроках математики, хочеться виділити:

1. *метод доведення за означенням* (використання понять «більше» чи «менше»);
2. *метод мажорування* (посилення чи послаблення нерівності);
3. *синтетичний метод* (використання очевидних або раніше доведених нерівностей);
4. *Доведення нерівностей за допомогою похідної*;
5. *метод доведення від супротивного*;
6. *метод математичної індукції*.

2.2. Використання класичних нерівностей

2.2.1. Нерівність Коші

Середнє арифметичне кількох невід'ємних чисел не менше за їх середнє геометричне.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ – деякі невід'ємні числа, тоді

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$$

Цю нерівність ще називають нерівністю Коші. [19]

Приклад 1. Довести нерівність $(a + \frac{1}{b})(b + \frac{1}{a}) \geq 4$, де a і b – додатні числа.

Доведення. До додатніх чисел a і $\frac{1}{b}$ застосуємо нерівність Коші.

Отримаємо

$$\frac{a + \frac{1}{b}}{2} \geq \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Аналогічно

$$\frac{b + \frac{1}{a}}{2} \geq \sqrt{\frac{b}{a}}$$

У цих нерівностях ліві і праві частини додатні, крім того, вони однакового змісту, тому перемножимо відповідні частини цих нерівностей, матимемо:

$$\frac{1}{4} \left(a + \frac{1}{b} \right) \left(b + \frac{1}{a} \right) \geq 1,$$

звідси

$$\left(a + \frac{1}{b} \right) \left(b + \frac{1}{a} \right) \geq 4$$

Приклад 2. Довести нерівність $(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$,

де a, b, c, d – додатні числа. [7]

Доведення. Застосовуючи нерівність Коші, матимемо:

$$1/4(a + b + c + d) \geq \sqrt[4]{1/abcd}.$$

Аналогічно

$$\frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq \sqrt[4]{abcd}.$$

Перемножуючи відповідні частини цих нерівностей, дістанемо нерівність, яку треба було довести.

$$\frac{1}{16} (a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 1, \text{ або}$$

$$(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16.$$

Приклад 3. Довести нерівність

$$a^2 \left(\frac{1}{b^2} + c^4 \right) + b^2 \left(\frac{1}{c^2} + a^4 \right) + c^2 \left(\frac{1}{a^2} + b^4 \right) \geq 6abc, \text{ де } a, b, c \text{ довільні,}$$

відмінні від нуля числа.

Доведення. Застосовуючи нерівність Коші, дістанемо:

$$\begin{aligned} & a^2 \left(\frac{1}{b^2} + c^4 \right) + b^2 \left(\frac{1}{c^2} + a^4 \right) + c^2 \left(\frac{1}{a^2} + b^4 \right) = \\ &= \frac{6 \left(\frac{a^2}{b^2} + a^2 c^4 + \frac{b^2}{c^2} + b^2 a^4 + \frac{c^2}{a^2} + a^2 b^4 \right)}{6} = \\ &= 6 \sqrt[6]{\left(\frac{a^2}{b^2} \cdot a^2 c^4 \cdot \frac{b^2}{c^2} \cdot b^2 a^4 \cdot \frac{c^2}{a^2} \cdot a^2 b^4 \right)} = \\ &= 6 \sqrt[6]{a^6 b^6 c^6} = 6|abc| \geq 6abc. \end{aligned}$$

Приклад 4. Довести нерівність $\sqrt{4a+7} + \sqrt{4b+7} + \sqrt{4c+7} < 16$, де a, b, c – додатні числа, причому $a + b + c = 2$. [11]

Доведення. До неоднакових додатних чисел $(4a + 7)$ і 1 застосуємо нерівність Коші. Отримаємо:

$$\sqrt{4a+7} \cdot 1 < ((4a+7)+1)/2, \text{ тобто } \sqrt{4a+7} < 2a+4,$$

Аналогічно $\sqrt{4b+7} < 2b+4$, і $\sqrt{4c+7} < 2c+4$.

Далі почленно додамо три останні нерівності. Отримаємо:

$$\sqrt{4a+7} + \sqrt{4b+7} + \sqrt{4c+7} < 2(a+b+c)+12.$$

Але згідно умови $a+b+c=2$, тому

$$\sqrt{4a+7} + \sqrt{4b+7} + \sqrt{4c+7} < 2 \cdot 2 + 12 = 16.$$

Що і потрібно було довести.

Приклад 5. Довести нерівність $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ac$, де a, b, c – довільні числа.

Доведення. Застосовуємо нерівність Коші. Маємо:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &= (a^2 + b^2)/2 + (b^2 + c^2)/2 + (c^2 + a^2)/2 \geq \\ &\geq \sqrt{a^2 b^2} + \sqrt{b^2 c^2} + \sqrt{a^2 c^2} = |ab| + |bc| + |ca| \geq ab + bc + ca. \end{aligned}$$

Наведемо приклади нерівностей, які доводяться за допомогою нерівності Коші:

1. $(ab+bc+ca)^2 \geq 3abc(a+b+c)$, де a, b, c – довільні числа.
2. $a/(b+c) + b/(c+a) + c/(a+b) \geq abc/(a+b)(b+c)(a+c)$, де a, b, c – додатні.
3. $1/a + 1/b + 1/c \geq 1/\sqrt{bc} + 1/\sqrt{ac} + 1/\sqrt{ba}$, де a, b, c – додатні числа.
4. $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2$, де a, b, c – довільні числа.
5. $(a+1)(b+4)(a+c)(b+c) \geq 32abc$, де a, b, c – додатні числа.
6. $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca$.
7. $a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geq 6abc$.
8. $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geq 9abc$, якщо $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$.
9. $(a^4+b^4+c^4) \geq abc(a+b+c)$.
10. $(x^2+y^2+z^2) \geq (x+y+z)^2$, при $x, y, z \geq 0$.
11. $xy+yz+zx \geq x\sqrt{xy} + y\sqrt{xz} + z\sqrt{yz}$, при $x, y, z \geq 0$.
12. $xy/z + yz/x + zx/y \geq x+y+z$, при $x, y, z \geq 0$.

2.2.2. Нерівність Буняковського

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + \dots a_n^2) (b_1^2 + b_2^2 + \dots b_n^2)$$

де a, b , – будь-які дійсні числа.

Якщо числа a_k і b_k пропорційні, то дана нерівність стає рівністю, тобто тоді, коли існують такі числа λ і β , що

$$\lambda a_k + \beta b_k = 0 \quad [18]$$

Приклад 1. Довести нерівність

$$(x_1 + x_2)(1/x_1 + 1/x_2) \geq 4, \text{ де } x_1 > 0, x_2 > 0 \quad [1]$$

Доведення. Використаємо нерівність Буняковського, позначивши

$$a_1 = \sqrt{x_1}, a_2 = \sqrt{x_2},$$

$$b_1 = \sqrt{1/x_1}, b_2 = \sqrt{1/x_2},$$

тоді

$$\begin{aligned} (x_1 + x_2) (1/x_1 + 1/x_2) &\geq \left(\sqrt{x_1} \sqrt{1/x_1} + \sqrt{x_2} \sqrt{1/x_2} \right)^2 = \\ &= \left(\sqrt{x_1/x_1} + \sqrt{x_2/x_2} \right)^2 = (1 + 1)^2 = 4. \end{aligned}$$

Отже $(x_1 + x_2) (1/x_1 + 1/x_2) \geq 4$.

Приклад 2. Довести нерівність

$$(x_1 + x_2 + x_3)(1/x_1 + 1/x_2 + 1/x_3) \geq 9,$$

де $x_1 > 0, x_2 > 0, x_3 > 0$.

Доведення. Використаємо нерівність Буняковського, позначивши

$$a_1 = \sqrt{x_1}, a_2 = \sqrt{x_2}, a_3 = \sqrt{x_3},$$

$$b_1 = \sqrt{1/x_1}, b_2 = \sqrt{1/x_2}, b_3 = \sqrt{1/x_3},$$

тоді

$$(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) \geq \left(\sqrt{x_1} \sqrt{\frac{1}{x_1}} + \sqrt{x_2} \sqrt{\frac{1}{x_2}} + \sqrt{x_3} \sqrt{\frac{1}{x_3}} \right)^2 =$$

$$= (1 + 1 + 1)^2 = 9.$$

Отже : $(x_1 + x_2 + x_3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \right) \geq 9$.

Приклад 3. Довести, що для довільних додатних чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$ виконується нерівність

$$(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2$$

Доведення. Використаємо нерівність Буняковського, позначивши

$$a_1 = \sqrt{x_1^3}, a_2 = \sqrt{x_2^3}, \dots, a_n = \sqrt{x_n^3},$$

$$b_1 = \sqrt{\frac{1}{x_1}}, b_2 = \sqrt{\frac{1}{x_2}}, \dots, b_n = \sqrt{\frac{1}{x_n}},$$

тоді

$$(x_1^3 + x_2^3 + \dots + x_n^3) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \geq$$

$$\geq \left(\sqrt{x_1^3} \sqrt{\frac{1}{x_1}} + \sqrt{x_2^3} \sqrt{\frac{1}{x_2}} + \dots + \sqrt{x_n^3} \sqrt{\frac{1}{x_n}} \right)^2 =$$

$$= \left(\sqrt{x_1^2} + \sqrt{x_2^2} + \dots + \sqrt{x_n^2} \right)^2 \geq (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^2.$$

Приклад 4. Довести нерівність

$$\sqrt{5a+1} + \sqrt{5b+1} + \sqrt{5c+1} < 5,$$

якщо $a + b + c = 1$, a, b, c – додатні числа.

Доведення. Використаємо нерівність Буняковського, позначивши

$$a_1 = \sqrt{5a+1}, a_2 = \sqrt{5b+1}, a_3 = \sqrt{5c+1},$$

$$b_1 = b_2 = b_3 = 1.$$

$$\sqrt{(\sqrt{5a+1} + \sqrt{5b+1} + \sqrt{5c+1})^2} \leq \sqrt{(5a+1+5b+1+5c+1)(1+1+1)} =$$

$$= \sqrt{3(5(a+b+c)+3)} = \sqrt{24}.$$

Отже , $\sqrt{5a+1} + \sqrt{5b+1} + \sqrt{5c+1} < 5$.

Наведемо приклади нерівностей, які доводяться за допомогою нерівності Буняковського.

Довести нерівності:

$$1) 2\sqrt{x-1} + 3\sqrt{x-1} + 4\sqrt{x-1} + 5\sqrt{x-1} \geq 35, \text{ якщо } x = 7.$$

$$2) (a_1 + a_2)(1/a_1 + 1/a_2) > 3.$$

$$3) (b_1 + b_2 + b_3 + b_4)(1/b_1 + 1/b_2 + 1/b_3 + 1/b_4) \geq 16.$$

$$4) \sqrt{4x-1} + \sqrt{4y-1} + \sqrt{4z-1} \leq 2, x + y + z = 1.$$

$$5) 3\sqrt{b+1} + 4\sqrt{c+1} \leq 10, b + c = 2.$$

$$6) (x_1 + x_2 + \dots + x_n)(1/x_1 + 1/x_2 + \dots + 1/x_n) \geq n^2.$$

$$7) \sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} \leq 5, \text{ якщо } a + b = 1, a > 0, b > 0.$$

2.2.3. Нерівність Бернуллі

Нерівністю Бернуллі називається наступна нерівність:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na,$$

де $n \in \mathbb{N}$, $a+1 > 0$ [23].

Приклад 1. Довести нерівність:

$$(1 + 1/n)^n < (1 + 1/(n-1))^{n-1}$$

Доведення. Поділимо $(1 + 1/n)^n$ на $(1 + 1/(n-1))^{n-1}$

Одержимо

$$\begin{aligned} (1 + 1/(n-1))^{n-1} / (1 + 1/n)^n &= ((1 + 1/(n-1)) / (1 + 1/n))^{n-1} = (n/(n-1) / (1 + 1/n))^{n-1} = \\ &= (n^2 / ((n-1)(n-1)))^{n-1} = (n^2 / (n^2 - 1))^{n-1} = (n^2 - 1 + 1 / (n^2 - 1))^{n-1} = (1 + 1/(n^2 - 1))^{n-1} \end{aligned}$$

Згідно нерівності Бернуллі

$$(1 + 1/(n^2 - 1))^{n-1} > 1 + (n-1)/(n^2 - 1) > 1.$$

Отже, $(1 + 1/n)^n < (1 + 1/(n-1))^{n-1}$.

Приклад 2. Довести, що $(1 + 1/n)^{n+1} < (1 + 1/(n+1))^{n+2}$

Доведення. Згідно нерівності Бернуллі

$$\begin{aligned} (1 + 1/(n+1))^{n+2} &= (1 + 1/(n+1))^{n+1} (1 + 1/(n+1)) \geq (1 + (n+1)/(n+1)) (1 + 1/(n+1)) \\ &= 2(1 + 1/(n+1)) = 2 + 2/(n+1) > 2; \end{aligned}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{1 + \frac{1}{n}} \geq \frac{2}{1 + \frac{1}{n}} < 2$$

Приклад 3. Доведіть нерівність $(1 + 1/n)^{n+1} > (1 + 1/(n+1))^{n+2}$, де $n \in \mathbb{N}$ [3]

Доведення. Розглянемо відношення лівої частини нерівності до правої.

$$\begin{aligned} (1 + 1/n)^{n+1} / (1 + 1/(n+1))^{n+2} &= ((1 + 1/n) / (1 + 1/(n+1)))^{n+1} (n+1)/(n+2) = \\ &= (1 + 1/(n^2 + 2n))^{n+1} (n+1)/(n+2). \end{aligned}$$

Застосовуючи нерівність Бернуллі, матимемо

$$(1 + 1/(n^2 + 2n))^{n+1} \geq 1 + (n+1)/(n^2 + 2n) = (n^2 + 3n + 1)/(n^2 + 2n),$$

тоді

$$(1+1/n)^{n+1}/(1+1/(n+1))^{n+2} \geq (n^2 + 3n + 1)/(n^2 + 2n) \cdot (n+1)/(n+2),$$

звідки, після спрощень дістанемо:

$$(1+1/n)^{n+1}/(1+1/(n+1))^{n+2} \geq 1 + 1/(n^3+4n^2+4n) > 1,$$

таким чином $(1+1/n)^{n+1} > (1+1/(n+1))^{n+2}$

Що і треба було довести.

Приклад 4. Довести, що

$$(1+1/n)^n \geq (1+1/(n-1))^{n+1}$$

Доведення. Поділимо вираз, що стоїть у лівій частині на вираз, що стоїть у правій частині. Одержимо

$$\begin{aligned} (1 + 1/n)^n / (1 + 1/(n-1))^{n+1} &= (1 + 1/n)^n / ((1 + 1/(n-1))^n (1 + 1/(n-1))) = \\ &= ((n+1)/n)^n / ((n/(n-1))^n (n/(n-1))) = ((n+1)/n) / (n/(n-1)) = \\ &= ((n+1)(n-1)/n^2)^n (n-1)/n = ((n^2-1)/n^2)^n (n-1)/n = \\ &= (1 - 1/n^2)^n (n-1)/n = (1 + (-1/n^2))^n (n-1)/n. \end{aligned}$$

Згідно нерівності Бернуллі $(1 + (-1/n^2))^n > 1 - n/n^2 = (n-1)/n$.

Отже ,

$$\begin{aligned} (1+1/n)^n / (1+1/(n-1))^{n+1} &\geq ((n-1)/n) ((n-1)/n) = (n-1)^2/n^2 = \\ &= (n^2 - 2n + 1)/n^2 = 1 + (1 - 2n)/n^2 \end{aligned}$$

Звідси $(1+1/n)^n \geq (1+1/(n-1))^{n+1}$.

2.3. Доведення нерівностей за допомогою похідної

Курс середньої школи поставив перед математиками, методистами та вчителями важкі і різноманітні задачі. Таким чином виникла проблема створення такого типу завдань, в яких зміст відноситься до різних частин шкільного курсу, і для яких метод математичного аналізу є ефективним інструментом.

Звичайно, такі завдання зустрічались в методичній літературі, до прикладу, довести тотожні рівності і нерівності, але можливості апарату математичного аналізу далеко не вичерпані в цій сфері, і тому далі наводимо приклади задач, для розв'язку яких зручно використовувати похідну.

Давайте зосередимося на завданнях, близьких до завдань на дослідження функцій шкільної програми.

Ці завдання такі ж, як і стандартні, інше лише формулювання, і тому їх вирішення не лише розширює сферу застосування похідної, але й сприяє загальному інтелектуальному розвитку учнів, оскільки здатність перекласти завдання з однієї мови на іншу, або ж переформулювати її в інших термінах є дуже важливим показником.

Розглянемо, як можна використовувати похідну для доведення нерівностей. Суть цього методу полягає в наступному: для доведення нерівностей типу

$$f(x) > g(x)$$

потрібно показати, що на певному проміжку $x \in [a; b]$ із області визначення функцій f та g виконується:

$$f(x) - g(x) > 0.$$

Тобто, розв'язування задач на доведення нерівностей замінюється вирішенням стандартних задач на дослідження функцій. [23]

Приклад 1. Довести нерівність

$$\ln(x) > 2(x-1)/(x+1), \text{ для } x > 1$$

Доведення.

Розглянемо на проміжку $(1; +\infty)$ функцію

$$f(x) = \ln x - 2(x-1)/(x+1)$$

Очевидно, що для будь-якої точки всередині проміжку

$$f'(x) = 1/x - 4/(x+1)^2 = (x-1)^2/(x(x+1))^2 > 0.$$

Отже, на проміжку $(1; +\infty)$ функція f зростає. З факту неперервності функції f випливає, що найменше значення вона набуває в точці $x = 1$

Відповідно, $\min f(x) = f(1) = 0$; $f(x) > 0$ при $x > 1$; $x \in (1; +\infty)$.

Приклад 2. Довести, що для будь-якого $x > 0$ справджується:

$$\ln(1+x) > 2x/(x+2)$$

Доведення.

Розглянемо функцію $f(x) = \ln(1+x) - 2x/(x+2)$ на проміжку $(0; +\infty)$

Зрозуміло, що у будь якій внутрішній точці даного проміжку

$$f'(x) = x^2/((x-1)(x+2)^2) > 0$$

тому, функція f зростає на проміжку $(0; +\infty)$.

Оскільки функція f неперервна, то найменшого значення вона набуває в лівому кінці даного проміжку, тобто при $x = 0$. Інакше кажучи, для довільного $x > 0$ виконується нерівність

$$f(x) \geq f(0) = 0,$$

що і потрібно було довести.

Приклад 3. Довести, що $\sin x + \operatorname{tg} x > 2x$, при $x \in (0; \pi/2)$

Доведення.

Розглянемо $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x - 2x > \cos^2 x + 1/\cos^2 x - 2$

Оскільки $\cos^2 x + 1/\cos^2 x > 2$, то $f'(x) > 0$, і $\min f(x) = f(0) = 0$ $x \in (0; \pi/2)$.

Звідси $f(x) > 0$ при $x \in (0; \pi/2)$.

Приклад 4. Довести нерівність

$$x^2 - 1 > \alpha (x - 1), \text{ при } \alpha \geq 2, x > 1.$$

Доведення. Розглянемо на проміжку $(1; \infty)$, при $\alpha > 2$ функцію

$$f(x) = x^2 - 1 - \alpha(x-1)$$

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1} - \alpha = \alpha(x^{\alpha-1} - 1) > 0, \text{ при } x \in (1; \infty).$$

Отже, $\min f(x) = f(1) = 0$ і $f(x) > 0$ при $x > 1, \alpha > 2, x \in (1; \infty)$

Приклад 5. Довести, що при будь-якому $x > 0$ виконується нерівність

$$e^x \geq 1 + x + x^2/2$$

Доведення. Задамо функцію f наступною формулою

$$f(x) = e^x - 1 - x - x^2/2,$$

тоді

$$f'(x) = e^x - 1 - x$$

перейдемо до дослідження функції

$$g(x) = e^x - 1 - x$$

Поскільки на проміжку $(0; \infty)$,

$$g'(x) = e^x - 1 > 0,$$

то функція g зростає на цьому проміжку, і тому $f(x) > f(0) = 0$, що і потрібно було довести.

2.4. Метод мажорування

Слово «мажор» (major) у перекладі з латинської означає «більший». Суть методу можна пояснити так. Нехай потрібно довести, що має місце нерівність $a < b$. Прямо це довести не вдається, але можна довести, що $a < c$. Відомо також, що $b > c$, тоді з транзитивності нерівностей випливає, що $a < b$.

Часто потрібні міркування проводяться і в іншому напрямі. Нехай, наприклад, потрібно довести, що $a < b$. Спочатку доводять, що $b > c$ і встановлюють, що $c > a$. Тоді, знову за транзитивною властивістю, $a < b$.

Цей метод іноді називають ще методом *підсилення нерівності*.

Приклад 1. Довести, що $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n + 1} < 1$, де $n \in \mathbb{N}$.

Доведення. Розглянемо такі числові нерівності, правильність яких очевидна:

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2}; \frac{1}{5} < \frac{1}{4}; \frac{1}{9} < \frac{1}{8}; \dots; \frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2^n}.$$

Замінивши кожний доданок у лівій частині вихідної нерівності більшим, матимемо:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n + 1} < \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n}.$$

Але в правій частині одержаної нерівності записано суму членів геометричної прогресії зі знаменником $\frac{1}{2}$.

Ця сума дорівнює:

$$S_n = \frac{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}.$$

Очевидно, що $S_n < 1$.

Отже,

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2^n + 1} < 1, \text{ де } n \in \mathbb{N}.$$

що й потрібно було довести.

Приклад 2. Довести, що $\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}$, де $n \in \mathbb{N}, n > 1$.

Доведення. Скористаємось очевидною нерівністю

$$\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{k}}, \text{ де } n > k \text{ і } k \text{ та } n \text{ — натуральні.}$$

Замінімо кожний доданок суми, що стоїть у правій частині нерівності, на менший, що дорівнює $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Тоді

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ раз}}$$

Але

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}}_{n \text{ раз}} = n \frac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Отже,

$$\sqrt{n} < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Приклад 3. Довести, що

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20}}} + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots + \sqrt{12}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < 15.$$

де в кожному доданку лівої частини по n радикалів.

Доведення

Оцінімо зверху перший доданок лівої частини нерівності. Зауважимо, що

$$\sqrt{20} < \sqrt{20 + 5} = \sqrt{25} = 5,$$

тоді $20 + \sqrt{20} < 25$;

$$\sqrt{20 + \sqrt{20}} < 5;$$

$$20 + \sqrt{20 + \sqrt{20}} < 25.$$

Продовжуючи обмеження далі, матимемо

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20}}} < 5$$

Аналогічно, оцінюючи останні два доданки, дістанемо

$$\sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots + \sqrt{12}}} < 4$$

$$\sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < 6$$

Додавши ліві і праві частини останніх трьох нерівностей, маємо вихідну нерівність

$$\sqrt{20 + \sqrt{20 + \dots + \sqrt{20}}} + \sqrt{12 + \sqrt{12 + \dots + \sqrt{12}}} + \sqrt{30 + \sqrt{30 + \dots + \sqrt{30}}} < 15$$

Приклад 4. Довести, не користуючись таблицями, що

$$\log_3 7 > \log_7 27 .$$

Доведення

Виконаємо спочатку тотожні перетворення, використовуючи властивості логарифмів,

$$\log_3 7 > \log_7 3^3;$$

$$\log_3 7 > 3/\log_3 7$$

$$(\log_3 7)^2 > 3 ;$$

$$\log_3 7 > \sqrt{3};$$

$$3^{\sqrt{3}} < 7.$$

Підберемо таке число c , що $3^{\sqrt{3}} < c < 7$. Знайдемо c виду 3^r , де $r = \sqrt{3}$ з надлишком. Як відомо, $1,7 < \sqrt{3} < 1,8$, тому нехай $r = 1,8 = \frac{9}{5}$.

Але $3^{\frac{9}{5}} > 7$, оскільки $3^9 = 19\,683$, $7^5 = 16\,807$, тому r повинно бути меншим

від 1,8.

Нехай $r = 1,75 = \frac{7}{4}$; $\sqrt{3} < \frac{7}{4}$, а тому $3^{\sqrt{3}} < 3^{\frac{7}{4}}$. З іншого боку, $3^{\frac{7}{4}} < 7$,

оскільки $3^7 = 2187 < 2401 = 7^4$, отже, $\sqrt{3} < 7$, а тому $\log_3 7 > \log_7 27$.

Завдання для самостійного розв'язування:

1. Довести, що для будь-яких a, b і c справедлива нерівність

$$a^4 + b^4 + c^4 \geq a^2bc + b^2ac + c^2ab.$$

2. Довести, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується нерівність:

$$\text{а) } \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2}; \quad \text{б) } \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots + \frac{1}{(2n+1)^2} < \frac{1}{4}.$$

3. Довести, що:

$$\text{а) } 1 < \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{17} < 2;$$

$$\text{б) } \sqrt{6 + \sqrt{6 + \dots + \sqrt{6}}} + \sqrt[3]{6 + \sqrt[3]{6 + \dots + \sqrt[3]{6}}} < 5,$$

де в кожному доданку зліва n радикалів.

4. Для всіх натуральних значень n довести, що

$$\sqrt{n^2 - 1^2} + \sqrt{n^2 - 2^2} + \dots + \sqrt{n^2 - (n-1)^2} < n^2 \sqrt{2}.$$

5. Не користуючись таблицями, довести, що $\cos 136^\circ < \tan 151^\circ$.

2.5. Доведення нерівностей методом від супротивного

Щоб доводити нерівності цим способом, потрібно заперечити початкове твердження, тобто знак $>$ ($\geq$, $<$, $\leq$) у нерівності замінюється на $\leq$ (відповідно $<$, $\geq$, $>$). Після цього обґрунтовують неможливість такого співвідношення [23].

Приклад 1. Доведіть, що для довільних $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$, $d \geq 0$ виконується:

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geq \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

Доведення. Припустимо, що виконується нерівність

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} < \sqrt{ab} + \sqrt{cd}$$

Піднісши обидві частини нерівності до квадрату, отримаємо

$$\begin{aligned} (a+c)(b+d) &< ab + 2\sqrt{abcd} + cd \\ ab + ad + bc + cd &< ab + 2\sqrt{abcd} + cd \\ ad + bc &< 2\sqrt{abcd} \\ \frac{ad + bc}{2} &< \sqrt{(ad) \cdot (bc)} \end{aligned}$$

А це суперечить нерівності Коші. Отже, наше припущення невірне, а початкова нерівність – вірна.

Приклад 2. Довести, що для довільних $a \geq 0$, $b \geq 0$, $c \geq 0$ виконується нерівність

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Доведення. Припустимо, що виконується нерівність

$$\frac{a+b+c}{3} > \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}.$$

Піднісши обидві частини нерівності до квадрату, отримаємо

$$(a+b+c)^2 > 3(a^2+b^2+c^2)$$

Після розкриття дужок і перенесення доданків вправо отримаємо

$$2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2bc < 0$$

$$(a^2 - 2ab + b^2) + (a^2 - 2ac + c^2) + (c^2 - 2bc + b^2) < 0$$

$$(a - b)^2 + (a - c)^2 + (c - b)^2 < 0.$$

Це неможливо, тому початкова нерівність вірна.

Приклад 3. Довести, що для довільних $a > 0$, $b > 0$, $a \neq b$ число $\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) + \sqrt{b}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right)$ є додатним.

Доведення. Припустимо, що дане число не є додатним. Тоді

$$\sqrt{a}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - 1\right) + \sqrt{b}\left(\sqrt{\frac{b}{a}} - 1\right) \leq 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} - \sqrt{a} + \frac{b}{\sqrt{a}} - \sqrt{b} \leq 0$$

$$\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

Підсилимо обидві частини нерівності, піднісши їх до квадрату

$$\left(\frac{a}{\sqrt{b}} + \frac{b}{\sqrt{a}}\right)^2 \leq (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2$$

$$\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{a} \leq a + b$$

$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 \leq 0$$

$$a^2(a - b) - b^2(a - b) \leq 0$$

$$(a - b)^2(a + b) \leq 0$$

Отримане співвідношення не виконується при жодних значеннях змінних,

що задовольняють умову задачі. Отже, наше припущення невірне, а початкова нерівність – вірна.

Приклад 4. Довести, що для довільного $x \in R$ виконується нерівність $(x - 6)(x - 9)(x^2 - 5x + 4) + x^2 + 73 \geq 10x$.

Доведення. Припустимо, що $(x - 6)(x - 9)(x^2 - 5x + 4) + x^2 + 73 < 10x$.

Тоді $(x - 6)(x - 9)(x^2 - 5x + 4) + x^2 + 73 - 10x < 0$

$$(x-6)(x-9)(x-1)(x-4) + x^2 + 73 - 10x < 0$$

$$(x^2 - 10x + 9)(x^2 - 10x + 24) + x^2 - 10x + 73 < 0$$

Введемо заміну $t = x^2 - 10x + 9$.

Тоді

$$t(t+15) + t + 64 < 0$$

$$(t+8)^2 < 0$$

Отримане співвідношення неможливе, а отже, наше припущення невірне, а початкова нерівність – вірна.

2.6. Метод математичної індукції

Метод математичної індукції ґрунтується на принципі математичної індукції, який формулюється наступним чином:

істинність твердження $A(n)$ для довільного натурального n справджується, якщо воно істинне для $n = 1$, і з того, що $A(n)$ істинне для $n = k$, де k – будь-яке натуральне число, випливає, що воно істинне для наступного числа $n = k + 1$.

Доведення методом математичної індукції передбачає 3 етапи:

1. Спочатку показуємо істинність твердження $A(1)$.
2. Далі припускаємо, що $A(k)$ – істинне, і базуючись на цьому доводимо істинність твердження $A(k + 1)$, тобто доводимо справедливість теореми $A(k) \Rightarrow A(k + 1)$.
3. Дані міркування дозволяють зробити висновок, що твердження A є істинним для будь-якого натурального n [23].

Приклад 1. Довести, що $2^n > 2n + 1$, де $n \in N$, $n > 3$.

Доведення

1. Перевіримо правильність нерівності, якщо $n = 3$:

$$2^3 > 2 \cdot 3 + 1.$$

2. Припустимо, що дана нерівність правильна, якщо $n = k$, $k > 3$, тобто

$$2^k > 2k + 1.$$

3. Доведемо, що вихідна нерівність правильна, якщо $n = k + 1$, тобто

$$2^{k+1} > 2(k + 1) + 1.$$

Справді,

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > (2k + 1) \cdot 2 = 4k + 2 = (2k + 3) + (2k - 1).$$

Отже, $2^{k+1} > (2k + 3) + (2k - 1)$.

Але коли $n > 3$, $2k - 1 > 0$, то

$$2^{k+1} > (2k + 3) + (2k - 1) > 2k + 3 = 2(k + 1) + 1.$$

Отже, за методом математичної індукції можна стверджувати, що

нерівність $2^n > 2n + 1$ правильна для будь-якого натурального $n \geq 3$.

Приклад 2. Довести, що $2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$, де $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Доведення.

1. Перевіримо правильність нерівності для $n = 2$. У лівій частині маємо

$$2! \cdot 4! = 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 48,$$

а в правій

$$((2+1)!)^2 = (3!)^2 = 6^2 = 36.$$

Оскільки $48 > 36$, то для $n = 2$ нерівність справджується.

2. Припустимо, що дана нерівність правильна, якщо $n = k$, тобто

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! > ((k+1)!)^k.$$

3. Доведемо, що вихідна нерівність правильна і для $n = k + 1$, тобто

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! \cdot (2(k+1))! > ((k+2)!)^{k+1}.$$

Справді,

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! \cdot (2(k+1))! > ((k+1)!)^k \cdot (2(k+1))!,$$

оскільки згідно припущення

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! > ((k+1)!)^k.$$

Але

$$\begin{aligned} (2(k+1))! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k \cdot (k+1) \cdot (k+2) \cdot \dots \cdot (2(k+1)) = \\ &= (k+1)!(k+2)(k+3) \cdot \dots \cdot (2(k+1)). \end{aligned}$$

Тоді

$$\begin{aligned} ((k+1)!)^k \cdot (2(k+1))! &= ((k+1)!)^{k+1} (k+2)(k+3) \cdot \dots \cdot (2(k+1)) > \\ &> ((k+1)!)^{k+1} \cdot (k+2)(k+2) \cdot \dots \cdot (k+2) = \\ &= ((k+1)!)^{k+1} (k+2)^{k+1} = ((k+2)!)^{k+1} \end{aligned}$$

Отже,

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2k)! \cdot (2(k+1))! > ((k+2)!)^{k+1}.$$

За методом математичної індукції нерівність

$$2! \cdot 4! \cdot \dots \cdot (2n)! > ((n+1)!)^n$$

правильна для всіх $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

Приклад 3. Нехай a, b, c — сторони прямокутного трикутника з гіпотенузою c . Довести, що $a^n + b^n < c^n$, якщо $n \geq 2$.

Доведення

1. Якщо $n = 2$, маємо $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Піфагора).

2. Припустимо, що дана нерівність правильна, якщо $n = k$, тобто $a^k + b^k \leq c^k$.

3. Доведемо, що вихідна нерівність правильна, якщо $n = k + 1$, тобто $a^{k+1} + b^{k+1} \leq c^{k+1}$.

Справді, $a^{k+1} + b^{k+1} = a^k a + b^k b < a^k c + b^k c = c(a^k + b^k) \leq c^k c = c^{k+1}$.

Отже,

$$a^{k+1} + b^{k+1} \leq c^{k+1}$$

За методом математичної індукції $a^n + b^n \leq c^n$, якщо $n \geq 2$.

Завдання для самостійного розв'язування:

1. Довести, що $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n \leq \frac{a^n + b^n}{2}$, коли $a \geq 0, b \geq 0$.

2. Для довільного натурального значення n довести, що

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

3. Довести, що $3^n - n^3 > 3$, де $n \in \mathbb{N}, n > 3$.

4. Довести, що $n! > \frac{n}{e}$, де $e = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k$.

5. Довести, що для будь-якого натурального числа n має місце нерівність $|\sin nx| \leq n |\sin x|$.

6. Довести, що для будь-якого дійсного числа $\alpha \geq -1$ і будь-якого натурального числа n правильна нерівність:

$$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha.$$

ВИСНОВКИ

Проблема навчання учнів доведенню нерівностей — одна з актуальних у процесі навчання математики.

Аналіз науково-методичної та педагогічної літератури, осмислення досвіду вчителів і наші дослідження дають нам підстави зробити такі висновки відносно даної проблеми.

Скромне місце, яке займає тема "Нерівності" у програмі середньої школи, далеко не відповідає тій ролі, яку відіграють нерівності навіть у межах шкільного курсу математики та тому значенню, яке вони мають у розвитку мислення учнів.

Доведення нерівностей з одного боку сприяє свідомому засвоєнню учнями ряду важливих питань курсу математики, а з другого, має велике значення для розвитку логічних міркувань, аналізу, синтезу, узагальнення.

В учнів виробляється звичка досліджувати кожну формулу, аналізувати її зміст, при цьому вони вчаться мислити конкретно, визначаючи справедливість формули у певних умовах і несправедливість її в інших умовах, привчає їх не обмежуватись тим, що здається на перший погляд очевидним.

У програму шкільної математики увійшла мінімальна кількість нерівностей на доведення.

Тому ознайомити учнів з деякими іншими прийомами міркування і доведення нерівностей, менш широко застосовуваними, але важливими для розвитку математичного мислення учнів, розширення їх кругозору можна на факультативних заняттях.

Крім цього, рекомендуємо проводити інтегровані уроки „алгебра + геометрія” та „геометрія + алгебра”, на яких є можливість ефективно реалізувати внутрішньопредметні зв’язки, що дозволить виробити в учнів цілісну систему знань, яку пізніше можна перенести і на суміжні дисципліни.

Крім найбільш вживаних способів доведення нерівностей, з якими учні зустрічаються при вивченні математики їх потрібно ознайомити і з іншими

прийомами, зокрема:

- синтетичний метод (використання нерівностей Коші, Буняковського, Бернуллі);
- метод мажорування (посилення чи послаблення нерівностей);
- використання властивості квадратного тричлена;
- метод доведення з використанням похідної;
- доведення нерівностей методом від супротивного;
- метод математичної індукції.

Ці прийоми доведення нерівностей сприяють активізації пізнавальної діяльності учнів, розвитку їх логічного мислення і прийомам творчої діяльності.

У роботі узагальнено і систематизовано способи доведення нерівностей, відібрано методи доведення, які доцільно додатково розглянути на факультативних заняттях.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бантова М. А. Методика викладання математики. К.: Генеза, 2008. 335 с.
2. Бевз Г.П. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосв. навч. закладів / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз. – К.: Видавничий дім «Освіта», 2017. – 272 с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики: Навч. посібник. 3-тє вид., перероб. і допов. К.: Вища шк., 1989. 367с.
4. Бикова Т.З. З досвіду роботи з числовими нерівностями.// Математика – 2002 – №36 – с. 2-4.
5. Бібік Н.М. Компетентнісна освіта – від теорії до практики / І.Г. Єрмаков, О.В. Овчарук. – К.: Плеяда, 2005. – 120 с.
6. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. – К.: Либідь, 1993.
7. Збірник тестових завдань з математики для абітурієнтів / В.І.Беспальчук, А.В.Прус, І.А.Сверчевська та ін.; Під. ред. В.В.Михайленка. – Житомир: ЖДТУ, 2005.
8. Зимова І. В. Формування елементарної математичної компетентності / Л.І. Зайцева. – К.: МП «Око», 2005. – 215 с.
9. Іржавцева В.П. Систематизація та узагальнення знань учнів у процесі вивчення математики / В.П. Іржавцева, Л.Я. Федченко. – К., 1998. – 205 с
10. Істер О.С. Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосв. навч. закладів / О.С. Істер. – Київ: Генеза, 2017. – 264 с.
11. Капіносов А. Алгебра: збірник задач і вправ для 9 класу / А. Капіносов. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 222 с.
12. Капіносов А.М. Основи технології навчання. Проектуємо урок математики / А.М. Капіносов. – Х.: Вид. група «Основа», 2006. – 140 с.
13. Кушнір І. Нерівності / І. Кушнір. – Київ: АСТАРТА, 1996. – 541 с.
14. Лях Л. Є. Нерівності. Нестандартна форма перевірки знань / Л. Є. Лях. // Математика в школах України. – 2009. – №25. – С. 72–78.

15. Математика. Навчальна програма. Профільний рівень – Електронний ресурс. Режим доступу: <https://mon.gov.ua/static-objects/mon/sites/1/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf>
16. Мерзляк А.Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосв. навч. закладів / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2017. – 272 с.
17. Неліна О. Є. Систематизація та узагальнення знань і вмінь учнів з алгебри як засіб активізації їх пізнавальної діяльності : автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук: спец.13.00.02 / О.Є. Неліна. Харків, 2000. 298 с.
18. Орач Б. Методи доведення нерівностей // Математика. №19(319). Травень 2005. С.11-15.
19. Перехейда, О. М. Доведення нерівностей / О. М. Перехейда, Р.П.Ушаков. – Харків : Основа, 2003. – 96 с.
20. Сазонова О.П. Доведення нерівностей з використанням скалярного добутку векторів. // Математика – 2003 – №14 – с. 23-24
21. Самойленко Л. В. Доведення нерівностей. Система вправ для проведення факультативних занять у 9-му класі / Л. В. Самойленко. // Математика в школах України. – 2009. – №30. – С. 28–29.
22. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К. : «Зодіак-ЕКО», 2006. 582 с.
23. Собкович Р., Кульчицька Н. Основні методи доведення нерівностей: Навчальний посібник. Івано-Франківськ, 2014 – 100с.
24. Токар Н.Г., Вельдберхт Д.О. Внутрішньопредметні зв'язки.// Математика – 2003 – № 25-26 – с. 13-14.