

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Факультет фізики, математики, економіки та інноваційних технологій
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат педагогічних наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК «__» _____ 2024 р.

Методичні підходи до розв’язування
рівнянь і нерівностей з модулем

Спеціальність: 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота

на здобуття кваліфікації «Вчитель математики, викладач закладу
фахової передвищої, вищої освіти, вчитель інформатики»

Автор роботи – **Карпінець Лілія Миколаївна** _____

(підпис)

Науковий керівник – кандидат фізико-математичних наук,

доцент **Комарницька Леся Іванівна** _____

(підпис)

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

Методичні підходи до розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____	Голова ЕК	_____	_____
дата		підпис	власне ім'я та прізвище
	Секретар ЕК	_____	_____
		підпис	власне ім'я та прізвище

Анотація. Карпинець Лілія. Методичні підходи до розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем

У даній магістерській роботі досліджено та систематизовано методичні підходи до розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем. У першому розділі роботи розглянуто теоретичні аспекти. Детально аналізується поняття модуля, його властивості. Другий та третій розділ присвячено аналізу існуючих методичних підходів до розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем. Проведено порівняльний аналіз різних методик, включаючи графічні методи, аналітичні підходи та методи з використанням чисельних методів. У четвертому розділі запропоновано використання цих підходів до різних типів завдань та рекомендації щодо розв'язування таких рівнянь і нерівностей з модулем. Описані методи інтегруються у навчальний процес та базуються на поєднанні теоретичних знань і практичних вправ. Наведено приклади задач та їх розв'язання, які ілюструють ефективність запропонованих методик.

Abstract. Karpinets Liliia. Methodological Approaches to Solving Equations and Inequalities with Absolute Value

In this master's thesis, methodological approaches to solving equations and inequalities with absolute value have been studied and systematized. The first chapter focuses on theoretical aspects, analyzing the concept of absolute value and its properties in detail. The second and third chapters are dedicated to examining existing methodological approaches to solving equations and inequalities with absolute value. A comparative analysis of various methods is conducted, including graphical methods, analytical approaches, and numerical techniques. The fourth chapter proposes applying these approaches to different types of problems and provides recommendations for solving such equations and inequalities. The described methods are integrated into the educational process and are based on a combination of theoretical knowledge and practical exercises. Examples of problems and their solutions are provided to illustrate the effectiveness of the proposed methodologies.

ЗМІСТ

ВСТУП	5
РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ	7
1.1 Основні поняття модуля числа та його властивості.....	7
1.2 Класифікація рівнянь і нерівностей з модулем.....	9
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З МОДУЛЕМ	12
2.1 Аналітичний метод.....	12
2.2 Геометричний метод	13
2.3 Графічний метод.....	14
2.4 Метод інтервалів	17
2.5 Використання спеціальних співвідношень.....	20
РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З МОДУЛЕМ	22
3.1 За означенням	22
3.2 Метод інтервалів	23
3.3 Графічний метод.....	25
3.4 За геометричним змістом	26
3.5 Використання спеціальних співвідношень.....	28
РОЗДІЛ 4. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ	30
4.1 Розв'язування завдань різної складності.....	30
4.2 Розв'язування систем рівнянь і нерівностей з модулем	34
4.3 Рівняння і нерівності з параметрами, що містять знак модуля	39
ВИСНОВКИ.....	46
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	49
ДОДАТКИ.....	51

ВСТУП

Рівняння та нерівності з модулем є важливими складовими як шкільної, так і вищої математики. Їх вивчення сприяє формуванню в учнів та студентів навичок логічного мислення, аналітичного підходу та здатності вирішувати складні математичні задачі. Проте наявні підручники та навчальні матеріали часто не пропонують достатньо систематизованих підходів до вирішення таких задач, що ускладнює навчання. Порівняння існуючих методів показує, що більшість підходів зосереджені на базових розв'язках рівнянь і нерівностей з модулем, не розкриваючи можливості комбінованих методів або застосування сучасних технологій.

Значення даного дослідження полягає у вдосконаленні методичних підходів до вирішення рівнянь та нерівностей з модулем шляхом порівняння різних методів, які можуть бути впроваджені у навчальний процес. Це дозволить учням краще засвоювати матеріал і застосовувати знання на практиці.

Основною **метою** магістерської роботи є визначення та оптимізація методів розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем. Це передбачає дослідження існуючих підходів, їх адаптацію до сучасних потреб навчання та використання методичних прийомів для різних типів завдань.

Завдання дослідження:

1. Проаналізувати існуючі методи розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем.
2. Розробити комбінований підхід, що об'єднує всі запропоновані методи.
3. Показати можливості застосування інформаційних технологій для автоматизації процесів розв'язування рівнянь і нерівностей.

Об'єкт роботи – процес розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем у шкільній та вищій математиці.

Предмет – методичні підходи до розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем, їх вплив на навчальний процес та вдосконалення методик викладання.

Для досягнення поставленої мети були використані такі методи дослідження: аналіз літератури, порівняння різних підходів до вирішення рівнянь і нерівностей, математичне моделювання, використання досвіду експериментальної роботи в школі та використання графічного калькулятора Desmos для візуалізації обчислень.

Практичне значення отриманих результатів полягає у розробці методичних рекомендацій для вчителів та викладачів щодо використання підходів до розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем. Результати дослідження були представлені на міжнародній науково-практичній студентсько-викладацькій конференції «Актуальні проблеми сучасної науки» у Дрогобицькому державному педагогічному університеті імені Івана Франка. [5]

РОЗДІЛ 1. ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ

1.1 Основні поняття модуля числа та його властивості

Прийнято вважати, що термін «модуль» ввів Р. Котс, учень І. Ньютона. Г. В. Лейбніц також використовував це поняття, називаючи його модулем і позначаючи як $\text{mod } x$.

Загальноприйняте позначення абсолютної величини було введено Карлом Вейерштрассом у 1841 році. У 1903 році Х. А. Лоренц використав таке ж позначення для довжини вектора. Поняття модуля для комплексних чисел вперше було введено О. Л. Коші та Ж. Р. Арганом на початку XIX століття.

Поняття модуля використовується в різних галузях математики й іноді називається по-різному, наприклад, абсолютна величина або норма. Обидва поняття є узагальненням поняття абсолютної величини дійсних і комплексних чисел.

Вивчення поняття модуля у шкільному курсі математики допомагає учням розвивати логічне, алгоритмічне та наочно-образне мислення. [10]

Абсолютна величина або модуль дійсного числа a – це невід’ємне значення цього числа без врахування його знаку. Зазвичай, модуль числа a позначають так: $|a|$ і читають «модуль числа a » або «абсолютна величина числа a ».

З даного означення випливає, що:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{при } a > 0, \\ 0, & \text{при } a = 0, \\ -a, & \text{при } a < 0. \end{cases}$$

Наприклад:

.

Геометричний зміст модуля числа досить очевидний: кожне дійсне число можна розглядати як координату певної точки на числовій прямій. Щоб обчислити модуль числа, потрібно визначити відстань від початку координат до цієї точки, виміряну в одиничних відрізках. Модуль числа позначається так само, як і довжина відповідного відрізка.

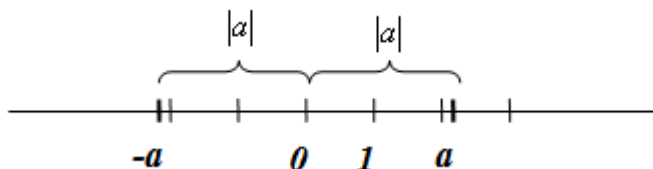


Рис. 1.1

$|a|$ – це відстань на числовій прямій від точки a до 0 (Рис. 1.1).

$|a - b|$ – це відстань між точками a і b числової прямої.

Тобто, модулем числа також називають відстань від початку відріку до точки, що зображує це число на координатній прямій. [9]

Використовуючи означення модуля та його геометричний зміст, можна обґрунтувати його основні властивості:

1. $|a| \geq 0$.
2. $|a| \geq a$.
3. $|-a| = |a|$.
4. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$.

Формулу для знаходження модуля добутку можна узагальнити для випадку декількох множників:

$$|a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n| = |a_1| \cdot |a_2| \cdot \dots \cdot |a_n|$$

або $|a^n| = |a|^n$.

5. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, при $b \neq 0$.
6. $|a^{2k}| = |a|^{2k} = a^{2k}$.

$$7. |a| = \sqrt{a^2}.$$

$$8. |a + b| \leq |a| + |b|.$$

Знання означення модуля числа та його властивостей дозволяє спрощувати вирази, розв'язувати рівняння, нерівності, будувати графіки і т.д.

1.2 Класифікація рівнянь і нерівностей з модулем

Рівняння, яке містить невідоме під знаком модуля, називається рівнянням з модулем. Згідно з цим визначенням з двох рівнянь $x - 2 = |-5|$ і $|x + 3| = 4$ рівнянням з модулем є лише друге. Теж визначення можна дати і для нерівностей з модулем.

Рівняння та нерівності з модулем належать до одних із найцікавіших, але й складних тем шкільної математики. Однак у підручниках з алгебри та математики, зазвичай, розглядаються лише окремі приклади таких рівнянь. Найчастіше їх можна зустріти в наступних розділах:

- лінійні рівняння та нерівності;
- квадратні рівняння та нерівності;
- раціональні рівняння та нерівності;
- ірраціональні рівняння та нерівності
- тригонометричні рівняння та нерівності;
- показникові та логарифмічні рівняння та нерівності;
- системи рівнянь та нерівностей.

Згідно з навчальною програмою, учні 6 класу вивчають найпростіші рівняння з модулем. Це рівняння, в яких модуль застосовується до невідомої величини.

Наприклад

$$7 - 4|x| = 3$$

$$-4|x| = 3 - 7$$

$$-4|x| = -4$$

$$|x| = 1$$

Звідси $x = 1$ або $x = -1$. [4]

Відносно підмодульного виразу рівняння з модулем можна класифікувати так:

- Найпростіші рівняння;
- Рівняння виду $|f(x)| = g(x)$, де $f(x), g(x)$ – деякі функції;
- Рівняння, що містять два та більше модулів;
- Рівняння виду $|f(x)| = |g(x)|$;
- Рівняння виду модуль в модулі.

Що стосується нерівностей з модулем, то їх можна класифікувати наступним чином:

- Найпростіші нерівності;
- Нерівності з одним модулем, зовні якого є змінна;
- Нерівності з двома та більше модулями;
- Нерівності виду $|f(x)| > |g(x)|$ ($|f(x)| \geq |g(x)|$) або $|f(x)| < |g(x)|$ ($|f(x)| \leq |g(x)|$);
- Нерівності виду модуль в модулі.

Для того, щоб якісно, швидко та правильно розв'язувати такі рівняння та нерівності, окрім знань означення та властивостей модуля, також необхідно володіти методами розв'язання таких прикладів. Основними методами, які здебільшого використовують, є: метод інтервалів та графічний метод. Однак існує ще декілька методів для розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем, а саме:

- за означенням;
- за геометричним змістом;

- з використанням спеціальних співвідношень.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ РІВНЯНЬ З МОДУЛЕМ

2.1 Аналітичний метод

У більшості випадків єдиний можливий метод розв'язування – це розкривати модуль за означенням. Приклади розв'язання цим способом найпростіших рівнянь та рівнянь виду $|f(x)| = b$, де $f(x)$ – деяка функція, $b \in \mathbb{R}$, розглядались у попередньому розділі.

Суть даного методу полягає в тому, що потрібно вивести аргумент з-під знака модуля, спираючись на означення модуля. Можемо записати так:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Розглянемо приклад 2.1:

Проаналізуємо два випадки:

1) Якщо , то одержимо рівняння

$$x = 1$$

2) Якщо , то одержимо

$$-3x + 1 = x + 1$$

$$-3x - x = 1 - 1$$

$$-4x = 0$$

$$x = 0$$

Звідси одержимо, що рівняння має два корені, а саме $x = 1$ та $x = 0$.

Узагалі, рівняння виду $|f(x)| = g(x)$ рівносильне сукупності двох систем:

$$\begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) = g(x), \\ f(x) < 0, \\ -f(x) = g(x). \end{cases}$$

Наприклад, розв'язання рівняння $|x - 1| = 4x + 3$ можна записати так:

$$\begin{cases} x - 1 \geq 0, \\ x - 1 = 4x + 3, \\ x - 1 < 0, \\ -x + 1 = 4x + 3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 1, \\ x = -\frac{4}{3}, \\ x < 1, \\ x = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Звідси $x = -\frac{2}{5}$. [6]

2.2 Геометричний метод

Коли використовується геометричний зміст модуля, його знак розкривається непрямо, тобто немає потреби використовувати означення модуля безпосередньо. Використання цього методу часто допомагає учням уникнути складних і громіздких розв'язків. [8]

Приклад 2.2.

$$|8 - 4x| = 6$$

З геометричної точки зору $|8 - 4x|$ – це відстань від точки 0 до точки $8 - 4x$. Згідно з умовою рівняння, значення дорівнює 6, але відстань у 6 одиниць можна відкласти від точки 0 в обидва боки: праворуч, отримуючи число 6, і ліворуч, отримуючи число -6. (рис. 2.1).

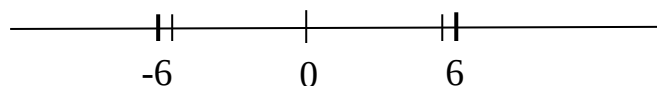


Рис. 2.1

Отже, рівність $|8 - 4x| = 6$ виконується лише за умови, коли:

$$8 - 4x = 6 \quad \text{або} \quad 8 - 4x = -6$$

$$-4x = -2 \quad \text{або} \quad -4x = -14$$

$$x = 0,5 \quad \text{або} \quad x = 3,5 .$$

Слід зазначити, що геометричний зміст модуля застосовується лише для певного типу рівнянь. Алгоритм розв'язання рівнянь з модулем із використанням їх геометричного змісту виглядає так:

1. $|f(x)| = a \leftrightarrow f(x) = a \text{ або } f(x) = -a .$
2. $|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow f(x) = g(x) \text{ або } f(x) = -g(x) .$

2.3 Графічний метод

Цей метод розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем полягає у зображенні графіків виразів та аналізі положення цього графіка відносно горизонтальних прямих, які відображають праву частину рівняння або нерівності.

На початковому етапі освоєння методу учні можуть мати складнощі з побудовою графіка функції з модулем та його інтерпретацією. Наприклад, розуміння того, як виглядає графік вигляду

$$y = |ax + b| + |cx + d| ,$$

особливо при наявності додаткових функцій або виразів, може бути складним завданням. Також важливо відзначити, що графічний метод може бути

обмеженим у випадках, коли точний результат потрібно знати безпосередньо, а не лише на основі візуальної оцінки. В таких ситуаціях учням може бути важко встановити точний розв'язок задачі.

Для успішного оволодіння цим методом учням необхідно мати знання про побудову графіків функцій, отримані в попередніх класах, а також вміти виконувати їхні найпростіші перетворення.

Крім того, знати особливості побудови графіків функції, що містять знак модуля. Розглянемо два випадки побудови таких графіків:

1. Побудова графіка функції $y = f(|x|)$.

Скориставшись означенням модуля, записуємо:

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(-x), & \text{якщо } x < 0, \\ f(x), & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

Звідси, учні повинні зробити висновок, що графік функції $y = f(|x|)$ при $x \geq 0$ збігається з графіком $y = f(x)$, а при $x < 0$ – з графіком функції $y = f(-x)$.

У цьому зв'язку зазначимо, що графік функції $y = f(|x|)$ будують так: частину графіка функції $y = f(x)$, яка лежить праворуч від осі Oy (і на самій осі), залишають без змін, і саме цю частину відображають симетрично відносно осі Oy .

Варто згадати, що дана функція є парною. Тому вісь ординат є віссю симетрії її графіка.

Показуємо, наприклад, побудову графіка функції $y = (|x| - 2)^2$ за допомогою графіка функції $y = (x - 2)^2$ та за допомогою графічного калькулятора Desmos (Рис. 2.2).

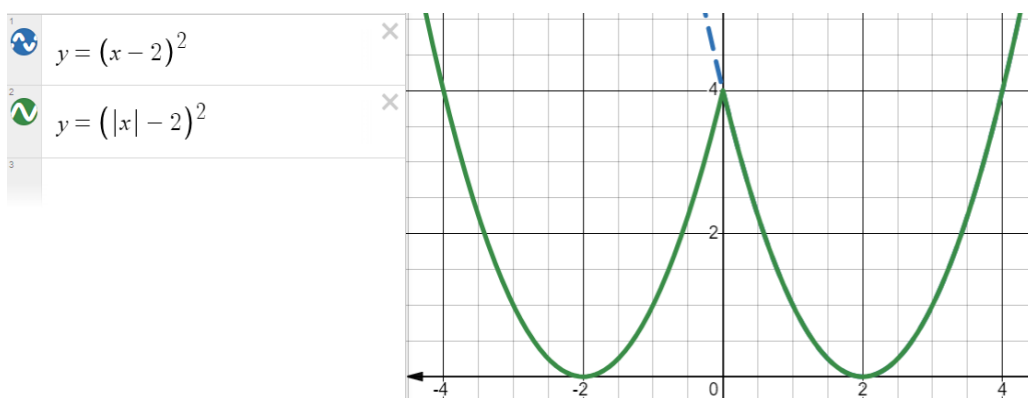


Рис. 2.2

2. Побудова графіка функції $y = |f(x)|$.

Для функції $y = |f(x)|$ можна записати так:

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{якщо } f(x) \geq 0, \\ -f(x), & \text{якщо } f(x) < 0. \end{cases}$$

Звідси випливає, що графік функції $y = |f(x)|$ при всіх x , для яких $f(x) \geq 0$, збігається з графіком функції $y = f(x)$, а при всіх x , для яких $f(x) < 0$, – з графіком функції $y = -f(x)$.

Оскільки графіки функцій $y = f(x)$ і $y = -f(x)$ симетричні відносно осі абсцис, то шуканий графік функції $y = |f(x)|$ можна отримати, не вдаючись до складного алгоритму, а саме:

- ту частину графіка функції $y = f(x)$, усі точки якої мають невід'ємні ординати, залишити без змін;
- побудувати фігуру, симетричну відносно осі Ox , тій частині графіка функції $y = f(x)$, точки якої мають від'ємні ординати.

Об'єднання двох частин буде шуканим графіком функції. [7]

Показуємо побудову графіка функції $y = |(x-1)^2 - 2|$ за допомогою графіка функції $y = (x-1)^2 - 2$ (Рис. 2.3).

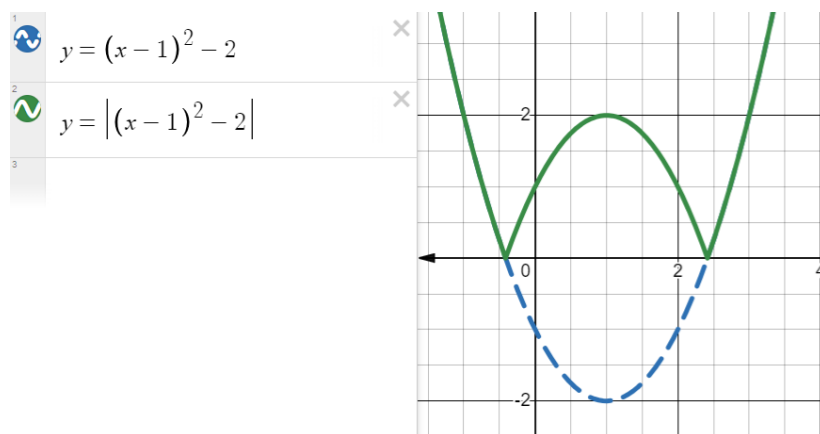


Рис. 2.3

Розглянемо приклад 2.3:

$$|x^2 - 4| + |2 - x| = 0.$$

Отже, розглядаючи дане рівняння, ми бачимо дві функції, які потрібно побудувати, а саме

1) $y = |x^2 - 4|$;

2) $y = |2 - x|$.

Користуючись найпростішими перетвореннями графіків функції (наведені у додатку А) та правилами побудови графіків функції з модулем, побудуємо ці графіки (Рис. 2.4) та (Рис. 2.5):

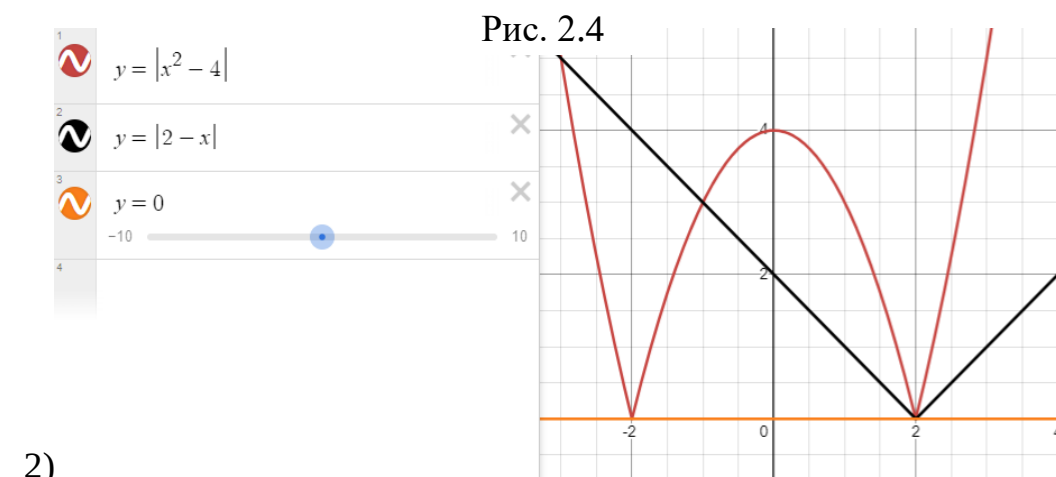
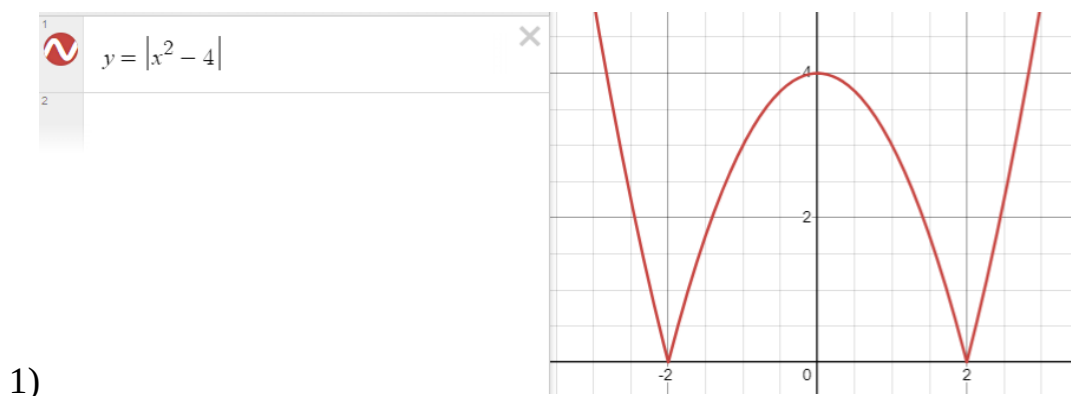


Рис. 2.4

Рис. 2.5

Таким чином ми бачимо, що функції, при $y = 0$, перетинаються лише в одній точці, значить рівняння має лише один розв'язок, а саме $x = 2$.

2.4 Метод інтервалів

Метод інтервалів – це підхід до розв'язання рівнянь та нерівностей з модулем, який базується на поділі числової прямої на інтервали та подальшому розкритті модуля в межах цих інтервалів.

Зазвичай цей підхід використовується для розв'язання рівнянь, що містять два та більше модулів, тобто для рівнянь типу $|f(x)| + |g(x)| + \dots = h(x)$.

Алгоритм методу інтервалів:

1. Знайти і нанести на числову пряму область, в якій вираз, рівняння або нерівність мають допустимі значення.
2. Прирівняти до нуля підмодульні вирази і знайти відповідні значення змінної. Нанести на числову пряму нулі підмодульних виразів і розбити область допустимих значень на систему інтервалів.
3. Дослідити знаки підмодульних виразів на кожному інтервалі.
4. Спростити вираз (розв'язати рівняння, нерівність) на кожному інтервалі.
5. Записати остаточний розв'язок рівняння чи нерівності як об'єднання множин розв'язків на кожному інтервалі.

Під час опанування методу учні можуть стикатися з труднощами у розумінні концепції інтервалів і правильним їх розташуванням на числовій прямій. Важливо відзначити, що цей підхід передбачає певний рівень абстрактного мислення учнів.

Приклад 2.4.

$$|x - 1| - 2|x - 2| + 3|x - 3| = 4$$

1. Область допустимих значень: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Нулі підмодульних виразів: $x = 1; x = 2; x = 3$. Вони розбивають ОДЗ на чотири проміжки.
3. Знаки підмодульних виразів показані на рисунку 2.6.

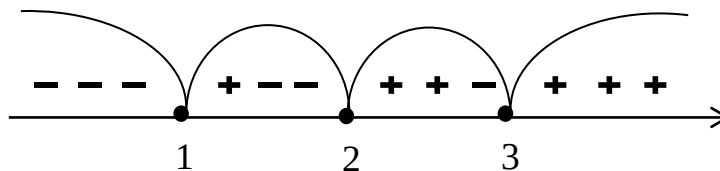


Рис. 2.6

4. Знаходимо розв'язки заданого рівняння в кожному з інтервалів.

Інтервал I : $x \in (-\infty; 1)$.

Враховуючи знаки підмодульних виразів на цьому інтервалі, одержимо таке рівняння:

$$-x + 1 + 2x - 4 - 3x + 9 = 4;$$

$$-2x = -2;$$

$$x = 1.$$

У розглянутий інтервал одержане значення не входить, отже на цьому інтервалі коренів немає.

Інтервал II: $x \in [1; 2)$.

На цьому інтервалі одержимо рівняння:

$$x - 1 + 2x - 4 - 3x + 9 = 4;$$

$$4 = 4.$$

Таким чином, на даному інтервалі коренями є всі $x \in [1; 2)$.

Інтервал III: $x \in [2; 3)$.

Враховуючи знаки, одержимо рівняння:

$$x - 1 - 2x + 4 - 3x + 9 = 4;$$

$$-4x = -8;$$

$$x = 2.$$

Одержане значення входить в даний інтервал, тому $x = 2$ є коренем рівняння.

Інтервал IV: $x \in [3; +\infty)$.

Враховуючи знаки підмодульних виразів на цьому інтервалі, одержимо таке рівняння:

$$x - 1 - 2x + 4 + 3x - 9 = 4;$$

$$x = 5.$$

Одержане значення входить в даний інтервал, тому $x = 5$ також є коренем рівняння.

5. Об'єднавши всі розв'язки, які ми отримали на кожному інтервалі, отримаємо ось такий розв'язок даного рівняння: $x \in [1; 2] \cup \{5\}$.

2.5 Використання спеціальних співвідношень

Доречно зводити до квадрату обидві сторони рівняння, якщо обидві частини рівняння знаходяться під знаком модуля та коефіцієнти при x у лівій та правій частинах рівняння за модулем рівні. Проте, якщо ці коефіцієнти виявляться різними, то рівняння теж можна піднести до квадрату і отримати квадратне рівняння. [1]

Цю властивість можна записати у вигляді такого співвідношення:

$$|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) = g^2(x).$$

Це співвідношення належить до переліку спеціальних співвідношень (наведено у додатку Б), які використовують для розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем.

Приклад 2.5.

$$x(x - 1) = 0;$$

$$x = 0; \quad \text{або} \quad x - 1 = 0;$$

$$x = 0; \quad \text{або} \quad x = 1.$$

Отже, коренями рівняння є $x = 0$ та $x = 1$.

Розглянемо ще один приклад 2.6.

$$|x - 5| + |2x + 5| = 3x.$$

Для того, щоб розв'язати це рівняння, використаємо наступне спеціальне співвідношення: $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$

Якщо позначити $x - 5 = u$ і $2x + 5 = v$, то $|u| + |v| = u + v$ і задане рівняння має вигляд $|u| + |v| = u + v$, але ця рівність може виконуватись тоді і тільки тоді, коли числа u і v – обидва невід'ємні. За співвідношенням таке рівняння рівносильне системі $\begin{cases} u \geq 0, \\ v \geq 0. \end{cases}$

$$\text{Отже, } \begin{cases} x - 5 \geq 0, \\ 2x + 5 \geq 0. \end{cases} \text{ Звідси } \begin{cases} x \geq 5, \\ x \geq -\frac{5}{2}. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, ми отримаємо, що розв'язком рівняння є $x \in [5; +\infty)$.

Слід зазначити, що це рівняння можна розв'язати й іншим способом, проте таке розв'язання буде значно складнішим і масивнішим.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИЧНІ ПІДХОДИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕРІВНОСТЕЙ З МОДУЛЕМ

Для розв'язування нерівностей з модулем застосовуються переважно ті ж самі підходи, що й при розв'язуванні рівнянь. Основна мета – усунути модуль і перетворити нерівність на таку, що не містить модуля і може бути розв'язана відповідним методом.

3.1 За означенням

Для розв'язування нерівностей за означенням, або аналітичним методом, як його ще називають, учням можна узагальнити означення та отримати таку сукупність:

$$|f(x)| \vee g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ f(x) \vee g(x); \\ f(x) < 0, \\ -f(x) \vee g(x). \end{cases} \text{ , де знак "}\vee\text{" означає будь-який із можливих}$$

знаків нерівності, тобто ">", "<", "≥" або "≤".

Приклад 3.1.

Запишемо через сукупність:

$$\begin{cases} 4x \geq -5, \\ 4x - 3x > -1 - 5; \\ 4x < -5, \\ -4x - 3x > -1 + 5. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{5}{4}, \\ x > -6; \\ x < -\frac{5}{4}, \\ x < -\frac{4}{7}. \end{cases}$$

$$\{x \in [-5/4; +\infty), \neg x \in (-\infty; -5/4)\}$$

І об'єднавши ці розв'язки ми отримаємо, що $x \in (-\infty; +\infty)$ або $x \in \mathbb{R}$.

3.2 Метод інтервалів

Даним методом найчастіше розв'язують нерівності з модулем, які мають такий вигляд: $|f(x)| + |g(x)| + \dots + |z(x)| \vee h(x)$, де знак " $\vee$ " означає будь-який із можливих знаків нерівності, тобто ">", "<", " $\geq$ " або " $\leq$ ". Проте, також цим методом нерідко розв'язують і дробово-раціональні нерівності.

Пригадаємо алгоритм розв'язування нерівностей з модулем цим методом:

1. Знайти і нанести на числову пряму область, в якій вираз, рівняння або нерівність мають допустимі значення.
2. Прирівняти до нуля підмодульні вирази і знайти відповідні значення змінної. Нанести на числову пряму нулі підмодульних виразів і розбити область допустимих значень на систему інтервалів.
3. Дослідити знаки підмодульних виразів на кожному інтервалі.
4. Спростити вираз (розв'язати рівняння, нерівність) на кожному інтервалі.
5. Записати остаточний розв'язок рівняння чи нерівності як об'єднання множин розв'язків на кожному інтервалі.

Приклад 3.2.

$$\frac{|x-2|}{|x-1|-1} \geq 1$$

1. Область допустимих значень: $|x-1|-1 \neq 0$; $|x-1| \neq 1$, тобто $x-1 \neq \pm 1$. Звідси маємо, що $x \neq 2$ або $x \neq 0$.
2. Нулі підмодульних виразів: $x = 2$ ($x = 2$ – не входить до ОДЗ) та $x = 1$.
3. Знаки підмодульних виразів показані на рисунку 3.1.

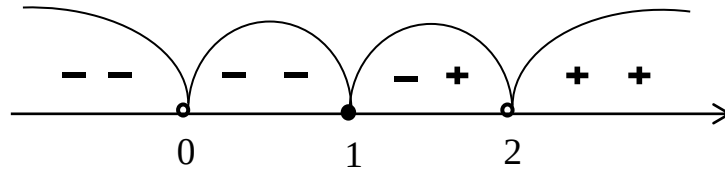


Рис. 3.1

4. Знаходимо розв'язки заданого рівняння в кожному з інтервалів. Оскільки знаки підмодульних виразів є однаковими на інтервалах I та II, зручно для розв'язання об'єднати ці інтервали.

Інтервал I та II: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; 1]$.

Враховуючи знаки підмодульних виразів на цих інтервалах, одержимо таку нерівність:

$$\frac{-(x-2)}{-(x-1)-1} \geq 1; \rightarrow \frac{-(x-2)}{-x+1-1} \geq 1;$$

$$\frac{-(x-2)}{-x} \geq 1; \rightarrow \frac{x-2}{x} - 1 \geq 0;$$

$$\frac{x-2-x}{x} \geq 0; \rightarrow -\frac{2}{x} \geq 0;$$

Звідси, на розглянутих інтервалах коренями є $x \in (-\infty; 0)$.

Інтервал III: $x \in [1; 2)$.

На цьому інтервалі одержимо нерівність:

$$\frac{-(x-2)}{x-1-1} \geq 1;$$

$$-1 \geq 1.$$

Таким чином, на даному інтервалі коренів немає, адже при будь-якому значенні x з III інтервалу остання нерівність перетворюється на хибну нерівність $(-1 \geq 1)$.

Інтервал IV: $x \in (2; +\infty)$.

Враховуючи знаки на цьому інтервалі одержимо:

$$\frac{x-2}{x-1-1} \geq 1;$$

$$\frac{x-2}{x-2} \geq 1;$$

$$1 \geq 1.$$

Як бачимо, при будь-якому значенні x з IV інтервала нерівність перетворюється на правильну нерівність $(1 \geq 1)$.

Отже, розв'язком на даному інтервалі є $x \in (2; +\infty)$.

5. Об'єднавши всі корені, які ми отримали на кожному інтервалі, отримаємо ось такий розв'язок початкової нерівності:

$$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty).$$

3.3 Графічний метод

Суть цього методу така ж, як для розв'язування рівнянь з модулем, так і для розв'язування нерівностей з модулем. Тобто, будемо графік функції, та шукаємо точки перетину, які відповідають умові завдання.

Даний спосіб краще підійде для розв'язування нерівностей, які містять велику кількість виразів під знаками модулів, адже розв'язування іншими способами буде громіздке та ускладнене.

Приклад 3.3.

$$|x+3| - |x+2| + 2|x| - |x-2| + |x-3| \geq 6$$

Графік лівої частини нерівності являтиме собою неперервну ламану лінію, яку нескладно побудувати, враховуючи два проміжки $(-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$ та значення $f(x)$ в окремих точках $x = -3; -2; 0; 2; 3$.

Складемо таблицю:

x	$(-\infty; -3]$	-3	-2	0	2	3	$[3; +\infty)$
$y=f(x)$	$y=-x$	6	6	2	6	6	$y=x$

За допомогою таблиці побудуємо графік функції (Рис. 3.2):

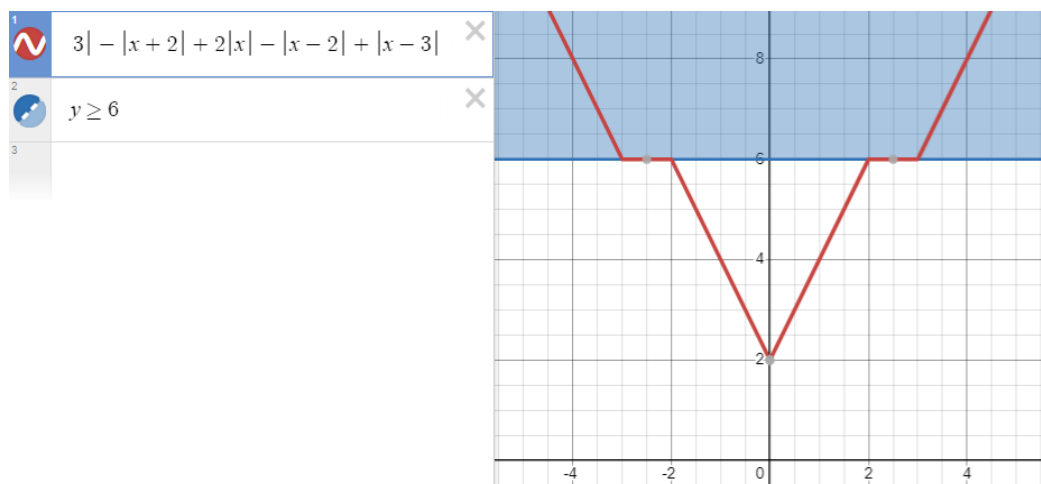


Рис. 3.2

Таким чином ми бачимо, що розв'язком даної нерівності з модулем є $x \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$.

3.4 За геометричним змістом

Розв'язування нерівностей з модулем, застосовуючи геометричний зміст модуля, можна розглядати на прикладі нерівностей такого типу $|f(x)| \mathbf{v} a$, де знак " $\mathbf{v}$ " означає будь-який із можливих знаків нерівності, тобто ">", "<", " $\geq$ " або " $\leq$ ". Для цього розглянемо три різні випадки.

1. Якщо $a > 0$, то:

а. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a$;

б. $|f(x)| > a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < -a, \\ f(x) > a; \end{cases}$

в. $|f(x)| \leq a \Leftrightarrow -a \leq f(x) \leq a$;

г. $|f(x)| \geq a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq -a, \\ f(x) \geq a. \end{cases}$

Розглянемо декілька прикладів, які розкривають цей метод.

Приклад 3.4.

Для розв'язування використаємо випадок, який описує пункт б:

$$\begin{cases} 3^x - 2 < -1 \\ 3^x - 2 > 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^x < 1 \\ 3^x > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < 0 \\ x > 1. \end{cases}$$

Отже, розв'язок цієї нерівності: $x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty)$.

Приклад 3.5.

$$|x + 1| + |x - 1| \leq 2$$

Для розв'язування використаємо випадок, який описує пункт в:

$$-2 \leq x + 1 + x - 1 \leq 2;$$

$$-1 \leq x \leq 1.$$

Отримаємо, що $x \in [-1; 1]$.

2. Якщо $a < 0$, то:

а. $|f(x)| < a$ – не має розв'язків;

б. $|f(x)| > a$ – є нескінченна множина розв'язків, $x \in \mathbf{R}$;

в. $|f(x)| \leq a$ – не має розв'язків;

г. $|f(x)| \geq a$ – розв'язком є будь-яке дійсне число.

Приклад 3.6.

$$|x + 4|$$

Використаємо випадок, який описує пункт г:

Модуль цієї нерівності завжди буде більший або рівний 0, тому ця нерівність справедлива для всі точок з множини області допустимих значень, а саме $x \neq -4$. Таким чином, $x \in (-\infty; 4) \cup (4; +\infty)$.

3. Якщо $a = 0$, то:

а. $|f(x)| < 0$ – не має розв'язків;

б. $|f(x)| > 0 \leftrightarrow f(x) \neq 0$;

в. $|f(x)| \leq 0 \leftrightarrow f(x) = 0$;

г. $|f(x)| \geq 0 \leftrightarrow x \in \mathbf{R}$.

Приклад 3.7.

$$|x^2 - 4| \geq 0$$

Використовуючи геометричний зміст модуля маємо, що нерівність виконується для всіх x , оскільки модуль будь-якого числа завжди більше або дорівнює нулю, незалежно від того, чи вираз всередині модуля є додатним або від'ємним.

3.5 Використання спеціальних співвідношень

Для розв'язування нерівностей даного виду $|f(x)| \vee |g(x)|$ учні можуть використовувати спеціальні співвідношення (див. додаток Б).

Розглянемо приклад 3.8.

$$|x^2 - 1| \leq |x^2 - 2x - 3|$$

Для розв'язання цієї нерівності використаємо дане співвідношення:

$$|f(x)| \leq |g(x)| \Leftrightarrow f^2(x) \leq g^2(x) \Leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \leq 0$$

$$(x^2 - 1)^2 - (x^2 - 2x - 3)^2 \leq 0$$

Розпишемо, як різницю квадратів:

$$((x^2 - 1) - (x^2 - 2x - 3))(x^2 - 1 + x^2 - 2x - 3) \leq 0$$

$$(2x + 2)(2x^2 - 2x - 4) \leq 0$$

Цю нерівність розв'яжемо методом інтервалів і отримаємо (Рис. 3.3):

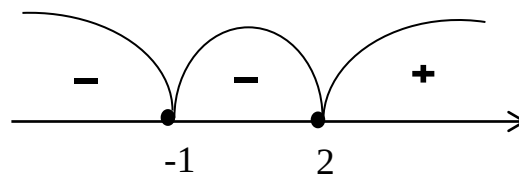


Рис. 3.3

Отже, $x \in (-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$.

РОЗДІЛ 4. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ

4.1 Розв'язування завдань різної складності

У попередніх розділах розглянули основні методи розв'язування рівнянь і нерівностей, які містять знак модуля. Проте варто пам'ятати, що в багатьох випадках для розв'язання задач знадобиться використовувати не один з цих підходів, а їх сукупність. Це особливо актуально, коли учні стикаються з рівняннями з модулями змішаного типу. Розглянемо приклади.

Приклад 4.1.

$$|x - |4 - x|| = 4$$

Під час розв'язування рівнянь, де модулі містяться всередині інших модулів, один із способів розв'язання це спершу усунути внутрішні модулі, а вже потім позбутися зовнішніх. [2]

Розкриємо внутрішній модуль за означенням:

$$\begin{cases} 4 - x \geq 0 \\ |x - 4 + x| = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x \geq -4 \\ |2x - 4| = 4 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 4 - x < 0 \\ |x + 4 - x| = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x < -4 \\ |4| = 4 \end{cases}$$

Розв'яжемо ці дві системи окремо:

$$\text{а. } \begin{cases} -x \geq -4 \\ |2x - 4| = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ |x - 2| = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x - 2 = 2 \\ x - 2 = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x = 4 \\ x = 0 \end{cases}$$

Маємо, що $x = 0, x = 4$.

$$\text{б. } \begin{cases} -x < -4 \\ |4| = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x > 4 \\ |4| = 4 \end{cases}$$

Маємо, що $x > 4$.

Об'єднавши ці два розв'язки, отримаємо $x \in [4; +\infty) \cup \{0\}$.

Для того, щоб розв'язати таке рівняння, ми два рази використовували означення.

Приклад 4.2.

$$|x - 3| - 2 = |2x - 4|$$

Розкриємо зовнішні модулі за допомогою методу інтервалів:

1. ОДЗ: $x \in (-\infty; +\infty)$.
2. Нулі підмодульних виразів: $x = 2, x = 3$.
3. Знаки підмодульних виразів зображені на рисунку 4.1.

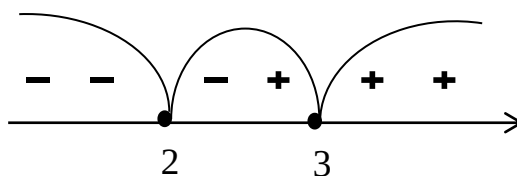


Рис. 4.1

4. Розв'яжемо рівняння на кожному інтервалі:

Інтервал I: $x \in (-\infty; 2)$.

$$|-x + 3 - 2| = 4 - 2x$$

$$|-x + 1| = 4 - 2x$$

Розкриємо модуль за допомогою означення

$$\begin{cases} -x + 1 \geq 0 \\ -x + 1 = 4 - 2x \\ -x + 1 < 0 \\ x - 1 = 4 - 2x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 3 \\ x > 1 \\ 3x = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 3 \\ x > 1 \\ x = \frac{5}{3} \end{cases}$$

Проте, розв'язок $x = 3$ не входить в інтервал. Отже, на I інтервалі розв'язком є $x = \frac{5}{3}$.

Інтервал II: $x \in [2; 3]$.

$$|-x + 3 - 2| = 2x - 4$$

$$|-x + 1| = 2x - 4$$

$$\begin{cases} -x+1 \geq 0 \\ -x+1 = 2x-4 \\ -x+1 < 0 \\ x-1 = 2x-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = \frac{5}{3} \\ x > 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Розв'язок $x = \frac{5}{3}$ не входить у цей інтервал. Отже, розв'язком є $x = 3$.

Інтервал III: $x \in (3; +\infty)$.

$$|x-3-2| = 2x-4$$

$$|x-5| = 2x-4$$

$$\begin{cases} x-5 \geq 0 \\ x-5 = 2x-4 \\ x-5 < 0 \\ -x+5 = 2x-4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 5 \\ x = -1 \\ x < 5 \\ x = 3 \end{cases}$$

Обидва розв'язки не входять в III інтервал. Тому на даному інтервалі розв'язків немає.

5. Врахувавши всі інтервали, отримаємо, що розв'язком початкового

рівняння є $x = \frac{5}{3}$ та $x = 3$.

У цьому прикладі спочатку використовувався метод інтервалів, а потім аналітичний.

Приклад 4.3.

$$(x-1)^2 - 7|x-1| - 18 = 0$$

У зв'язку з тим, що $(x-1)^2 = |x-1|^2$, то можна ввести заміну:

$$|x-1| = t, t \geq 0.$$

Отримаємо таке рівняння:

$$t^2 - 7t - 18 = 0$$

$$\begin{cases} t_1 + t_2 = 7 \\ t_1 \cdot t_2 = -18 \end{cases}$$

Звідси маємо, що $t_1 = -2$, $t_2 = 9$.

Проте корінь $t_1 = -2$ не відповідає умові $t \geq 0$, тому $t_2 = 9$ є єдиним коренем.

Переходимо до заміни:

$$|x - 1| = 9$$

$$\begin{cases} x - 1 = 9 \\ x - 1 = -9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -8 \end{cases}$$

Отже, розв'язками рівняння є $x = -8$ та $x = 10$.

Приклад 4.4.

$$|\sin x| + |\cos x| \geq 1$$

У цій нерівності необхідно розглянути чотири випадки, оскільки модулі можуть приймати різні значення залежно від знаків синуса і косинуса.

Випадок 1: $\sin x \geq 0, \cos x \geq 0$.

$$\sin x + \cos x \geq 1$$

Ця нерівність для таких функцій у першій чверті одиничного кола. Тому використаємо тотожність:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Тоді нерівність матиме вигляд:

$$\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq 1;$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\text{Отже, } \left(x + \frac{\pi}{4}\right) \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right].$$

$$\text{Звідси } x \in \left[0 + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right], k \in \mathbb{Z}.$$

Випадок 2: $\sin x \geq 0, \cos x \leq 0$.

$$\sin x - \cos x \geq 1$$

Для цього випадку x знаходиться у другій чверті. Розв'язуємо цю нерівність аналогічним чином і отримуємо:

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k \right]$$

Випадок 3: $\sin x \leq 0, \cos x \geq 0$.

$$-\sin x + \cos x \geq 1$$

Цього разу x знаходиться у четвертій чверті. Розв'язуючи нерівність, отримуємо:

$$x \in \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k \right].$$

Випадок 4: $\sin x \leq 0, \cos x \leq 0$.

$$-\sin x - \cos x \geq 1$$

Ця нерівність виконується у третій чверті, де обидві функції від'ємні, але нерівність неможлива, оскільки $-\sin x - \cos x$ завжди менше за 1.

Отже, об'єднавши всі розв'язки, отримаємо:

$$x \in [0 + 2\pi k; \pi + 2\pi k] \cup \left[\frac{3\pi}{2} + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k \right].$$

4.2 Розв'язування систем рівнянь і нерівностей з модулем

Слід зауважити, що при розв'язуванні систем, які містять раціональні рівняння або нерівності з модулем, застосовуються ті ж самі поняття, методи та підходи, що й у випадку звичайних раціональних рівнянь або нерівностей.

При розв'язуванні систем рівнянь (нерівностей), що містять знак абсолютної величини, учням важливо враховувати три основні моменти:

1. Розуміння визначення модуля та вміння розв'язувати рівняння та нерівності з ним.
2. Усвідомлення того, що термін «система рівнянь» відповідає логічному сполучнику «і», тоді як «сукупність» відповідає сполучнику «або». Це означає, що розв'язок системи – це набір значень змінних, які належать множині допустимих значень і задовольняють усі рівняння системи одночасно, а сукупність рівнянь означає об'єднання їх розв'язків.
3. Методи розв'язування систем раціональних рівнянь.

Пригадаємо, що основними методами розв'язування систем раціональних рівнянь з двома або більше змінними є: метод підстановки, метод алгебраїчного додавання, метод введення нових змінних та графічний.

Алгоритм розв'язання системи двох рівнянь (нерівностей) з модулем можна записати так:

1. Знайти в рівняннях усі вирази, що містяться під знаком модуля.
2. Розглянути всі можливі комбінації випадків, коли кожен із цих виразів приймає невід'ємні та від'ємні значення.
3. Для кожного можливого випадку «розкрити» модулі, використовуючи визначення модуля.
4. Розв'язати всі отримані системи.
5. Для кожного випадку відібрати ті розв'язки системи, які йому відповідають.

Проте, він може бути вірним не для всіх завдань. Розглянемо декілька прикладів.

Приклад 4.5.

$$\begin{cases} 2|x| + y = 3, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$$

Розглянемо два випадки: $x \geq 0$ та $x < 0$.

Випадок 1.

Якщо $x \geq 0$, то $|x| = x$ і система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} 2x + y = 3, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом підстановки. Із першого рівняння отримаємо, що $y = 3 - 2x$. Підставимо в друге та отримаємо:

$$x - 2(3 - 2x) = -1;$$

$$x - 6 + 4x = -1;$$

$$x = 1.$$

$$\text{Тоді } y = 3 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Випадок 2.

Якщо $x < 0$, то $|x| = -x$ і система буде мати вигляд:

$$\begin{cases} -2x + y = 3, \\ x - 2y = -1. \end{cases}$$

Розв'яжемо тим самим методом: $y = 3 + 2x$, тоді:

$$x - 2(3 + 2x) = -1;$$

$$x = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{Тоді } y = -\frac{1}{3}.$$

Отже, як відповідь запишемо дві пари розв'язків, а саме $(1; 1)$ та $\left(-\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Приклад 4.6.

$$\begin{cases} 2^{|x-2|} + 4 > 20, \\ 3^{|x-1|+1} > 81. \end{cases}$$

Розглянемо дві нерівності окремо:

$$2^{|x-3|} + 4 > 20,$$

$$2^{|x-3|} > 2^4,$$

$$|x - 3| > 4$$

$$\begin{cases} x - 3 < -4 \\ x - 3 > 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x > 7 \end{cases}$$

Маємо, що $x \in (-\infty; -1) \cup (7; +\infty)$.

$$3^{|x-1|+1} > 3^4,$$

$$|x - 1| + 1 > 4$$

$$|x - 1| > 3$$

$$\begin{cases} x - 1 < -3 \\ x - 1 > 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -2 \\ x > 4 \end{cases}$$

Звідси $x \in (-\infty; -2) \cup (4; +\infty)$.

Знайшовши спільні розв'язки двох нерівностей, одержимо

$$x \in (-\infty; -2) \cup (7; +\infty).$$

Приклад 4.7.

$$\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y = 5 + |x - 1|. \end{cases}$$

$$\begin{cases} |x - 1| + |y - 5| = 1, \\ y - 5 = |x - 1|. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |x - 1| + ||x - 1|| = 1, \\ y - 5 = |x - 1|. \end{cases}$$

Оскільки $||x - 1| = |x - 1|$, то отримаємо систему

$$\begin{cases} 2|x - 1| = 1, \\ y - 5 = |x - 1|, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} |x - 1| = \frac{1}{2}, \\ y - 5 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 1 = \pm \frac{1}{2}, \\ y = \frac{11}{2}, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}, \\ x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{11}{2}. \end{cases}$$

$$\left(\frac{3}{2}; \frac{11}{2}\right) \text{ та } \left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}\right)$$

Звідси маємо розв'язки

Приклад 4.8.

$$\begin{cases} |x - 2| \leq 3, \\ |x + 1| > 2. \end{cases}$$

Розв'яжемо кожну нерівність окремо за допомогою геометричного змісту:

$$|x - 2| \leq 3$$

$$-3 \leq x - 2 \leq 3$$

$$-1 \leq x \leq 5$$

Звідси $x \in [-1; 5]$.

$$|x + 1| > 2$$

$$\begin{cases} x + 1 < -2, \\ x + 1 > 2. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -3, \\ x > 1. \end{cases}$$

Маємо, що $x \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

Знайшовши спільні розв'язки двох нерівностей, одержимо $x \in (1; 5]$.

Приклад 4.9.

$$\begin{cases} 4x + |y| = 5, \\ 2|x + 1| - 3|y| = 2. \end{cases}$$

Цю систему можемо розв'язати методом додавання, помноживши перше рівняння на 3, отримаємо

$$\begin{cases} 12x + 3|y| = 15, \\ 2|x + 1| - 3|y| = 2. \end{cases}$$

$$12x + 2|x + 1| = 17$$

Розглянемо два випадки:

$$1. \ x + 1 \geq 0, x \geq -1.$$

$$12x + 2(x + 1) = 17$$

$$14x = 15$$

$$x = \frac{15}{14}$$

Корінь задовольняє умову. Тоді з першого рівняння початкової системи знайдемо y : $|y| = 5 - 4 \cdot \frac{15}{14} = \frac{5}{7}$, тоді $y = \pm \frac{5}{7}$.

$$2. \ x + 1 < 0, x < -1.$$

$$12x - 2(x + 1) = 17$$

$$10x = 19$$

$$x = \frac{19}{10}$$

Корінь не відповідає умові.

Отже, розв'язками даної нерівності є дві пари чисел: $\left(\frac{15}{14}; \frac{5}{7}\right)$ та $\left(\frac{15}{14}; -\frac{5}{7}\right)$.

4.3 Рівняння і нерівності з параметрами, що містять знак модуля

Рівняння з параметрами, в яких невідоме міститься під знаком модуля, розв'язуються аналогічно до відповідних рівнянь з числовими коефіцієнтами.

Зокрема, у випадку, коли в рівнянні присутній один модуль, можна скористатися одним з наступних методів:

1. Метод розкриття модуля.
2. Метод інтервалів.
3. Графічний метод.

Розглянемо приклади розв'язування рівнянь, що містять один, два або більше модулів. [3]

Приклад 4.10.

Розв'язати рівняння: $|x - 1| + a|x + 3| = 5$

Розв'яжемо це рівняння методом інтервалів. Нулі: $x = -3, x = 1$ (Рис. 4.2).

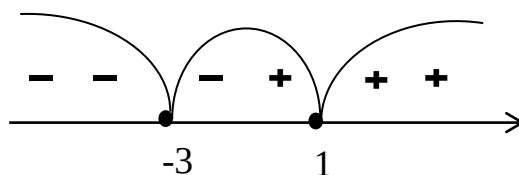


Рис. 4.2

I. Якщо $a > 0$, то рівняння буде рівносильне таким системам:

$$1) \quad \begin{cases} a > 0, \\ x < -3, \\ -x + 1 - ax - 3a = 5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ x < -3, \\ -(1 + a)x = 4 + 3a; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ x < -3, \\ x = -\frac{4 + 3a}{1 + a}; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ -\frac{4 + 3a}{1 + a} < -3, \\ x = -\frac{4 + 3a}{1 + a}; \end{cases} \rightarrow a > 0, x$$

$$2) \quad \begin{cases} a > 0, \\ -3 \leq x \leq 1, \\ -x + 1 + ax + 3a = 5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ -3 \leq x \leq 1, \\ (a - 1)x = 4 - 3a; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ -3 \leq x \leq 1, \\ x = \frac{4 - 3a}{a - 1}; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ -3 \leq \frac{4 - 3a}{a - 1} \leq 1, \\ x = \frac{4 - 3a}{a - 1}; \end{cases} \rightarrow a \geq \frac{5}{4},$$

3)

II. Якщо $a < 0$, то отримаємо:

$$1) \begin{cases} a < 0, \\ x < -3, \\ -x + 1 + ax + 3a = 5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ x < -3, \\ (a-1)x = 4-3a; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ x < -3, \\ x = \frac{4-3a}{a-1}; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ \frac{4-3a}{a-1} < -3, \\ x = \frac{4-3a}{a-1}; \end{cases} \rightarrow a < 0, x = \frac{4-3a}{a-1};$$

$$2) \begin{cases} a < 0, \\ -3 \leq x \leq 1, \\ -x + 1 - ax - 3a = 5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ -3 \leq x \leq 1, \\ -(1-a)x = 4+3a; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ -3 \leq x \leq 1, \\ x = -\frac{4+3a}{1+a}; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ -3 \leq -\frac{4+3a}{1+a} \leq 1, \\ x = -\frac{4+3a}{1+a}; \end{cases} \rightarrow a \leq -\frac{1}{2}, x = -\frac{4+3a}{1+a};$$

$$3) \{ \blacksquare(a < 0, @x \geq 1, @-x-1-ax-3a=5;) \} \rightarrow \{ \blacksquare(a < 0, @x \geq 1, @-(a+1)x=6+3a;) \}$$

III. Якщо $a = 0$ то рівняння матиме вигляд:

$$|x-1| = 5$$

$$\begin{cases} x-1=5, \\ x-1=-5; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=6, \\ x=-4. \end{cases}$$

Розглянувши всі можливі варіанти, можна зробити висновки, що:

$$a > \frac{5}{4}, \text{ то } x = \frac{4-3a}{a-1};$$

$$a = 0, x = -4, x = 6;$$

$$a < \frac{5}{4}, x = -\frac{4+3a}{a+1}.$$

Приклад 4.11.

При яких значеннях a рівняння $x|x-2a|-1-a=0$ має один розв'язок?

Розглянемо два випадки залежно від знаку виразу $x-2a$:

Випадок 1: $x-2a \geq 0, x \geq 2a$.

$$x^2 - 2ax - 1 - a = 0$$

$$D_1 = a^2 + a + 1$$

Для того, щоб рівняння мало один розв'язок, необхідно, щоб $D_1 = 0$.

$$a^2 + a + 1 = 0$$

Це рівняння не має дійсних коренів, оскільки D_1 від'ємний.

Випадок 2: $x - 2a < 0, x < 2a$.

$$x^2 - 2ax + 1 + a = 0$$

$$D_2 = a^2 + a + 1$$

Якщо $D_2 \geq 0$ то рівняння має два розв'язки

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - a - 1}, \quad x_2 = a - \sqrt{a^2 - a - 1}.$$

$$D_2 \geq 0, \text{ якщо } a \leq \frac{1 - \sqrt{5}}{2}, \quad a \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \text{ причому } D_2 = 0 \text{ при } a = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Вияснимо, при яких значеннях a знайдені корені задовольняють умову $x < 2a$. Розв'яжемо нерівність:

$$x_1 < 2a;$$

$$a + \sqrt{a^2 - a - 1} < 2a;$$

$$\sqrt{a^2 - a - 1} < a;$$

$$\text{ОДЗ: } a \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

$$[(a \geq 0, \sqrt{a^2 - a - 1} < a)] \vee [(a < 0, \sqrt{a^2 - a - 1} < a)] \rightarrow [(a \geq 0, a^2 - a - 1 < a^2)] \vee [(a < 0, a^2 - a - 1 < a^2)]$$

Знайдемо перетин з ОДЗ і отримаємо, що при $a \geq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$,

$$x_1 = a + \sqrt{a^2 - a - 1} \text{ належить проміжку } x < 2a.$$

Перевіримо корінь x_2 на виконання умов:

$$x_2 < 2a;$$

$$a - \sqrt{a^2 - a - 1} < 2a;$$

$$\sqrt{a^2 - a - 1} > -a;$$

$$\text{ОДЗ: } a \in \left(-\infty; \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right).$$

$$\begin{cases} -a \geq 0, \\ \sqrt{a^2 - a - 1} > -a, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a \geq 0, \\ a^2 - a - 1 > a^2, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a \leq 0, \\ a < -1, \end{cases} \rightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty).$$

$$\begin{cases} -a < 0, \\ \sqrt{a^2 - a - 1} > -a; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a < 0, \\ a^2 - a - 1 > a^2; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ a \in \mathbb{R}; \end{cases}$$

При

Як бачимо, рівняння має один розв'язок при $a > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ та $a < -1$.

Що стосується нерівностей, які містять невідоме під знаком модуля, то під час їх розв'язування необхідно розбити область допустимих значень на інтервали, де вираз під модулем має сталий знак. На кожному з цих інтервалів слід розв'язати нерівність, а потім об'єднати отримані результати в загальну множину розв'язків цієї нерівності. Також розглянемо декілька прикладів.

Приклад 4.12.

$$|x + a| \leq x.$$

Розкривши модуль $|x + a|$, маємо дві системи:

$$\begin{aligned} 1) & \begin{cases} x + a < 0, \\ -x - a \leq x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < -a, \\ x \geq -\frac{a}{2}. \end{cases} \\ 2) & \begin{cases} x + a \geq 0, \\ x + a \leq x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -a, \\ -a \geq 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq -a, \\ a \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Об'єднавши результати отримаємо, що:

- Якщо $a > 0$, нерівність не має розв'язків тому, що умови $x \geq -a$ і $x < -a$ суперечать одна одній.
- Якщо $a \leq 0$, нерівність виконується для $x \geq -a$.

Отже, $a \leq 0, x \in [-a; +\infty), \{$

$$a > 0, x \in \emptyset.$$

Приклад 4.13.

$$|x + 2a| + |x - a| < 3x$$

Розв'яжемо нерівність за допомогою методу інтервалів. Область визначення нерівності – це множина дійсних чисел. Нулі: $x = -2a, x = a$ (Рис. 4.3).

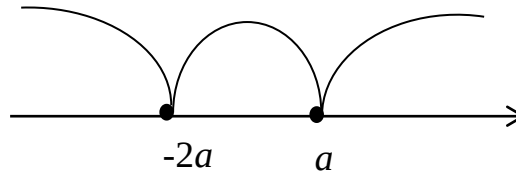


Рис. 4.3

I. Якщо $a > 0$, то дане рівняння буде рівносильне таким системам:

$$1) \begin{cases} a > 0, \\ x < -2a, \\ -x - 2a - x + a < 3x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ x < -2a, \\ x > -\frac{a}{5}; \end{cases} \quad \text{Система розв'язку не має.}$$

$$2) \begin{cases} a > 0, \\ -2a \leq x < a, \\ x + 2a - x + a < 3x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ -2a \leq x < a, \\ x > a; \end{cases} \quad \text{Система розв'язку не має.}$$

$$3) \begin{cases} a > 0, \\ x \geq a, \\ x + 2a + x - a < 3x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a > 0, \\ x \geq a, \\ x > a; \end{cases} \rightarrow a > 0, x > a.$$

II. Якщо $a < 0$ то отримаємо:

$$1) \begin{cases} a < 0, \\ x < -2a, \\ -x - 2a - x + a < 3x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ x < -2a, \\ x > -\frac{a}{5}; \end{cases} \rightarrow a < 0, -\frac{a}{5} < x < -2a.$$

$$2) \begin{cases} a < 0, \\ -2a \leq x < a, \\ x + 2a - x + a < 3x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ -2a \leq x < a, \\ x > a; \end{cases} \quad \text{Система розв'язку не має.}$$

$$3) \begin{cases} a < 0, \\ x \geq a, \\ x + 2a + x - a < 3x; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ x \geq a, \\ x > a; \end{cases} \rightarrow a < 0, x > a.$$

III. Якщо $a = 0$ то рівняння буде мати вигляд:

$$|x| + |x| < 3x;$$

$$\left[\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x - 3x < 0, \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ x > 0, \end{cases} \rightarrow x > 0. \right.$$

$$\left. \begin{cases} x < 0, \\ -2x - 3x < 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x > 0; \end{cases} \right]$$

Отже, об'єднавши результати отримаємо, що:

$$a > 0, x \in (a; +\infty),$$

$$a = 0, x \in \emptyset,$$

$$a < 0, x \in \left(-2a; -\frac{a}{5}\right] \cup (a; +\infty).$$

ВИСНОВКИ

У результаті проведеного дослідження на тему "Методичні підходи до розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем" були досягнуті важливі наукові та практичні результати, що сприяють підвищенню ефективності викладання та засвоєння цієї складної математичної теми в шкільних та вищих навчальних закладах. У роботі було розроблено та апробовано нові методичні підходи до розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем, що базуються на комбінованому використанні аналітичного, графічного та експериментального методів. Проведено апробацію результатів на науковій конференції, що підтверджує практичне значення дослідження.

У першому розділі дослідження було проаналізовано основні поняття модуля числа та його властивості. На основі історичного розвитку цього поняття були розглянуті основні етапи становлення його як математичної операції та їх застосування в різних галузях математики. Виявлено, що модуль є важливим інструментом для вирішення рівнянь і нерівностей у шкільному та вищому курсах математики. Особлива увага приділялася класифікації рівнянь та нерівностей з модулем, що дозволяє систематизувати підходи до їх розв'язування.

Таким чином, перший розділ заклав основу для подальшого дослідження різноманітних методичних підходів, продемонстрував значущість знань про модуль та його властивості для розв'язування широкого класу рівнянь і нерівностей.

Другий розділ присвячено аналізу існуючих методів розв'язування рівнянь та нерівностей з модулем, зокрема аналітичного, графічного та методу інтервалів. Вивчено їхні особливості та ефективність у вирішенні різних типів рівнянь. Аналітичний метод виявився найпоширенішим для розв'язування

простих рівнянь, однак при більш складних прикладах, зокрема тих, що містять кілька модулів, графічний та метод інтервалів показали значну перевагу в спрощенні розрахунків.

Третій розділ зосереджений на розробці методичних підходів до розв'язування нерівностей з модулем. Були досліджені різні види нерівностей, зокрема найпростіші нерівності, нерівності з одним модулем, а також нерівності, що містять кілька модулів. Вивчення методів розв'язування нерівностей показує, що застосування цих підходів значно полегшує процес розв'язування.

На основі досліджених методів було запропоновано рекомендації для використання їх у навчальному процесі. Зокрема, було запропоновано більш активно застосовувати графічний метод на практичних заняттях для візуалізації розв'язків нерівностей з модулем, що значно покращує розуміння учнями геометричної інтерпретації модулів.

У четвертому розділі було запропоновано нову комбіновану методику, що поєднує ці підходи. Її використання дозволяє більш ефективно розв'язувати складні рівняння та нерівності, а також надає учням та студентам гнучкість у виборі методів залежно від типу задачі.

За результатами проведеного дослідження можна надати такі рекомендації для впровадження в навчальний процес:

1. Використовувати комбінований підхід до розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем, що поєднує аналітичний, графічний та інтервальний методи залежно від типу задачі.
2. Застосовувати програмне забезпечення, зокрема Desmos та інші інструменти для автоматизації обчислень та візуалізації результатів.

3. Більш активно впроваджувати комбінацію методів у шкільній та вищій математиці, особливо для складних рівнянь та нерівностей, що містять кілька модулів.

4. Організовувати додаткові семінари та конференції для вчителів і викладачів для ознайомлення з різними методичними підходами до розв'язування рівнянь з модулем.

Проведене дослідження дає підстави для висновку, що комбіноване використання аналітичного, графічного та інтервального методів є найбільш ефективним для розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем. Пропонується продовжити дослідження у напрямку вдосконалення інформаційних технологій для автоматизації обчислень, а також розробки навчальних посібників, що допоможуть учням краще засвоювати цю тему.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

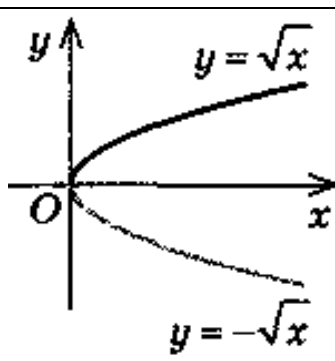
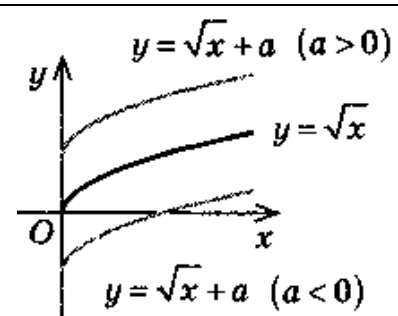
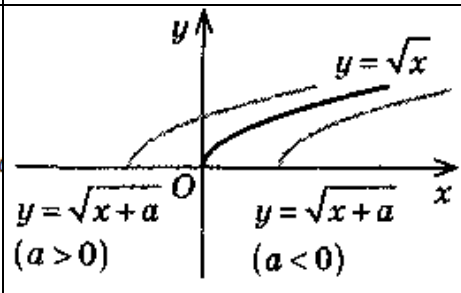
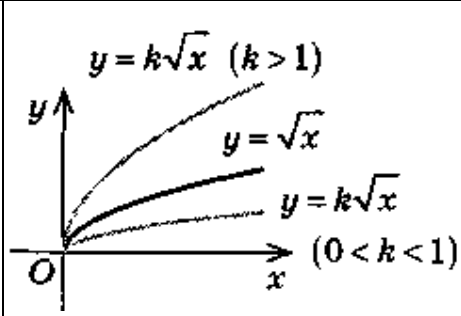
1. Апостолова Г.В. Хитромудрий модуль. – К.: ФАКТ, 2006. – 256 с.: іл.
2. Апостолова Г.В. Я сам!. Навчальний посібник з алгебри для тих, хто у сьомому класі та старше, з опорними схемами, відповідями та порадами. – К: ФАКТ, 2000. – 204 с. – укр. мовою.
3. Добош У.П., Комарницька Л.І. Рівняння і нерівності з параметрами: Методичний посібник / – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ, 2007. – 86 с.
4. Істер О.С. Математика: Підруч. для 6 кл. закл. загал. серед. освіти. – Частина 2. – К.: Генеза, 2023. – 208 с.
5. Карпінець Л.М., Комарницька Л.І. Методичні підходи до розв'язування рівнянь і нерівностей з модулем. Актуальні проблеми сучасної науки: Збірник XI Міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій / За ред. Юрія Матуріна, Ігоря Столярчука. – Дрогобич: Редакційно-видавничий відділ ДДПУ імені Івана Франка, 2024. – С. 279-281.
6. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 8 кл. з поглиб. вивч. матем. закл. загал. серед. освіти. – 2-ге вид., перероб. / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2021. – 383 с.: іл.
7. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів/ А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонський, М.С. Якір – Х.: Гімназія, 2017. – 272 с.: іл.
8. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: Дворівневий підруч. Для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів. – 3-тє вид., виправ. і доп. – Х.: Світ дитинства, 2007. – 448 с.
9. Прус А.В. Модуль у рівняннях та нерівностях: Навчально-методичний посібник. – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2010. – 32 с.

10. Черних Л.О., Бурда А.Г. Про поняття модуля в курсі вищої математики та в шкільному курсі математики. Збірник наукових праць. Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики. 2012 р. Т.1, № 10. С. 303-308.

URL:<https://elibrary.kdpu.edu.ua/bitstream/123456789/10144/1/%D0%A7%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B8%D1%85%20..%D1%81.303-308.pdf>

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

Найпростіші перетворення графіків функцій			
з/п	Формула залежності	Приклад	Перетворення
	$y = -f(x)$		Симетрія відносно осі Ox
	$y = f(x) +$		Паралельне перенесення вздовж осі Oy на a одиниць (якщо $a > 0$, то вгору, якщо $a < 0$, то вниз)
	$y = f(x) +$		Паралельне перенесення вздовж осі Ox на a одиниць (якщо $a > 0$ — вліво, якщо $a < 0$ — вправо)
	$y = kf(x)$ ($k > 0$)		$y = -f(x)$, якщо $k > 1$ то графік розтягнуто відносно осі Ox , і стиснуто,

			0 ↩ ЯКЩО
--	--	--	--------------------------------

ДОДАТОК Б

Спеціальні співвідношення:

1. $|f(x)| = f(x) \leftrightarrow f(x) \geq 0.$
2. $|f(x)| = -f(x) \leftrightarrow f(x) \leq 0.$
3. $|f(x)| = |g(x)| \leftrightarrow f^2(x) = g^2(x).$
4. $|f(x)| \vee |g(x)| \leftrightarrow f^2(x) \vee g^2(x) \leftrightarrow (f(x) - g(x))(f(x) + g(x)) \vee 0$

де знак " $\vee$ " означає будь-який із можливих знаків нерівності, тобто ">", "<", " $\geq$ " або " $\leq$ ".

5. $|f(x)| + |g(x)| = f(x) + g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0, \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$
6. $|f(x)| + |g(x)| = -f(x) - g(x) \leftrightarrow \begin{cases} f(x) \leq 0, \\ g(x) \leq 0. \end{cases}$
7. $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) + g(x)| \leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \geq 0.$
8. $|f(x)| + |g(x)| = |f(x) - g(x)| \leftrightarrow f(x) \cdot g(x) \leq 0.$
9. $|x - a| + |x - b| = b - a \leftrightarrow a \leq x \leq b, \text{ де } a < b.$