

Міністерство освіти і науки України
Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка
Кафедра математики та економіки

«До захисту допускаю»

завідувач кафедри математики та економіки,

кандидат пед. наук, доцент

_____ Тарас ВІЙЧУК

« » 2024 р.

МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ РІВНЯНЬ В
ШКІЛЬНОМУ КУРСІ МАТЕМАТИКИ

Спеціальність 014 «Середня освіта (Математика)»

Магістерська робота
на здобуття кваліфікації – вчитель математики, викладач закладу фахової
передвищої, вищої освіти, вчитель інформатики.

Автор роботи: Качмар Ірина Зіновіївна_____

підпис

Науковий керівник: кандидат фізико-математичних наук,
доцент Хаць Руслан Васильович_____

підпис

Дрогобич, 2024

Захист магістерської роботи

Методи розв'язування систем рівнянь в шкільному курсі математики

Оцінка за стобальною шкалою: _____

Оцінка за національною чотирибальною шкалою: _____

Коротка мотивація захисту:

_____	Голова ЕК _____	_____
Дата	підпис	прізвище, ім'я

Секретар ЕК _____	_____
підпис	прізвище, ім'я

Анотація

Качмар І.З. *Методи розв'язування систем рівнянь в шкільному курсі математики.* – Рукопис. – 60 с.

В магістерській роботі систематизовано методи розв'язування систем рівнянь в шкільному курсі математики. Підібрано диференційовану систему вправ та подано приклади розв'язування систем рівнянь різного рівня складності.

Annotation

Kachmar I.Z. *Methods of solving systems of equations in the school mathematics course.* – Manuscript. – 60 p.

The master's work systematizes the methods of solving systems of equations in the school mathematics course. A differentiated system of exercises is selected and examples of solving systems of equations of different levels of complexity are given.

Зміст

Анотація.....	3
Вступ.....	5
1. Рівносильні рівняння і системи рівнянь.....	7
2. Алгебраїчні системи рівнянь.....	9
2.1. Системи лінійних рівнянь.....	10
2.2. Системи цілих раціональних рівнянь.....	18
2.3. Однорідні системи рівнянь.....	21
2.4. Симетричні системи рівнянь.....	25
2.5. Системи дробово-раціональних рівнянь.....	27
2.6. Системи ірраціональних рівнянь.....	30
3. Системи трансцендентних рівнянь.....	35
3.1. Системи тригонометричних рівнянь.....	35
3.2. Системи показникових рівнянь.....	41
3.3. Системи логарифмічних рівнянь.....	46
4. Системи рівнянь з параметрами і модулями.....	50
Висновки.....	58
Список використаних джерел.....	59

Вступ

Актуальність теми. Розв'язування систем рівнянь є тим розділом шкільного курсу математики, що викликає чи не найбільші труднощі в учнів. У шкільних підручниках багато типів систем узагалі не розглядаються, а інші розкидані по всьому курсу. Деякі приклади потребують від учнів знань, умінь та навичок аналізувати теоретичний матеріал та раціонально обирати правильний метод розв'язування, застосування спеціальних алгоритмів та прийомів.

Дана проблематика займає важливе місце в математичній підготовці учнів, з цієї теми є багато завдань на зовнішньому незалежному оцінюванні (національному мультипредметному тесті), зокрема, пропонуються для розв'язання системи лінійних, алгебраїчних раціональних та ірраціональних рівнянь, системи показникових, логарифмічних, тригонометричних рівнянь та системи рівнянь з параметрами і модулями. Тому дослідження проблеми знань, умінь і навичок з цієї тематики є актуальним і йому присвячено багато робіт [1-19].

Мета і задачі дослідження. *Мета* магістерської роботи полягає в розробці методики розв'язування систем рівнянь різних типів та складності в шкільному курсі математики.

Об'єктом дослідження є системи алгебраїчних та трансцендентних рівнянь.

Предметом дослідження є методи і способи розв'язування систем рівнянь в шкільному курсі математики.

Задачі дослідження: систематизувати методи розв'язування систем лінійних рівнянь, алгебраїчних раціональних, дробово-раціональних та ірраціональних рівнянь, систем трансцендентних рівнянь (логарифмічних, показникових, тригонометричних) та комбінованих систем рівнянь в шкільному курсі математики; підібрати диференційовану систему вправ на розв'язування систем рівнянь різних типів в шкільному курсі математики.

Практичне значення отриманих результатів. Результати магістерської роботи мають теоретичний характер. Вони можуть бути

рекомендовані для використання у системі доуніверситетської підготовки молоді, школах, ліцеях та гімназіях, для підготовки випускників до зовнішнього незалежного оцінювання і абітурієнтів до вступу у заклади вищої освіти.

Апробація результатів магістерської роботи. Результати досліджень викладено у доповіді на XI-й міжнародній науково-практичній конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій ([20]).

Структура і обсяг роботи. Магістерська робота складається з анотації, вступу, 4 розділів, розбитих на підрозділи, висновків та списку використаних джерел, який налічує 20 найменувань. Повний обсяг магістерської роботи становить 60 сторінок.

1. Рівносильні рівняння і системи рівнянь

Рівняння з двома змінними x та y записується у вигляді

$$P(x; y) = Q(x; y), \quad (1)$$

де $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ – вирази із змінними $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$. Кожна упорядкована пара чисел $(x_0; y_0)$ така, що $P(x_0; y_0) = Q(x_0; y_0)$, називається *розв'язком рівняння*. Для того щоб розв'язати рівняння, необхідно й достатньо знайти множину всіх його розв'язків або довести, що воно не має розв'язків ([1, 4, 7, 9, 19]). Якщо множина розв'язків складається з n упорядкованих пар: $\{(x_1; y_1), (x_2; y_2), \dots, (x_n; y_n)\}$, то кажуть, що рівняння має n розв'язків. Якщо множина розв'язків порожня, то рівняння розв'язків не має. Наприклад, рівняння $(x-1)^2 + y^2 = 0$ має єдиний розв'язок $(1; 0)$, рівняння $x^2 + y^2 = -2$ розв'язків не має, а рівняння $(x^2 + y^2)((x-1)^2 + y^2) = 0$ має два розв'язки $(0; 0)$ і $(1; 0)$.

Нехай D_1 – область визначення функції $P(x; y)$, а D_2 – область визначення функції $Q(x; y)$. Тоді $D = D_1 \cap D_2$ – *область допустимих значень рівняння (1)*.

Нехай задано два рівняння

$$P_1(x; y) = Q_1(x; y), \quad P_2(x; y) = Q_2(x; y). \quad (2)$$

Ці рівняння називаються *рівносильними (еквівалентними)*, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків.

Правильні такі твердження ([7-16]):

- 1) рівняння (1) рівносильне рівнянню $P(x; y) - Q(x; y) = 0$;
- 2) рівняння (1) і рівняння $P(x; y) + R(x; y) = Q(x; y) + R(x; y)$ рівносильні, де $R(x; y)$ – будь-яка функція змінних x і y , область визначення якої належить множині D ;
- 3) рівняння (1) і рівняння $\alpha P(x; y) = \alpha Q(x; y)$ рівносильні для будь-якого $\alpha \neq 0$.

Якщо потрібно знайти всі упорядковані пари чисел $(x_0; y_0)$, кожна з яких є розв'язком будь-якого з рівнянь (2), то кажуть, що задано *систему двох рівнянь з двома невідомими*:

$$\begin{cases} P_1(x; y) = Q_1(x; y), \\ P_2(x; y) = Q_2(x; y). \end{cases} \quad (3)$$

Розв'язати систему – це означає знайти множину всіх її розв'язків або довести, що вона не має розв'язків.

Нехай D_1 – область допустимих значень першого рівняння системи (3), а D_2 – другого рівняння. Тоді $D = D_1 \cap D_2$ – *область допустимих значень системи*. Якщо $D = \emptyset$, то система (3) не має розв'язків. Наприклад, такою є система

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{3-y} = 5, \\ \sqrt{1-x} + \sqrt{y-5} = 2, \end{cases}$$

де $D_1 = \{x \geq 2, y \leq 3\}$, $D_2 = \{x \leq 1, y \geq 5\}$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$.

Системи рівнянь, що не мають розв'язків, називаються *несумісними*. Кажуть, що задано ([5, 8, 14]) *сукупність рівнянь*

$$\begin{cases} P_1(x; y) = Q_1(x; y), \\ P_2(x; y) = Q_2(x; y), \end{cases}$$

якщо потрібно знайти всі упорядковані пари чисел $(x_0; y_0)$, кожна з яких є розв'язком хоча б одного рівняння. Кожна така пара називається *розв'язком сукупності*. Розв'язати сукупність рівнянь – це означає знайти множину всіх таких пар. Кажуть, що задано ([5, 8, 12, 15]) *сукупність систем рівнянь*

$$\begin{cases} \begin{cases} P_1(x; y) = 0, \\ Q_1(x; y) = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} P_2(x; y) = 0, \\ Q_2(x; y) = 0, \end{cases} \end{cases}$$

якщо потрібно знайти усі упорядковані пари чисел $(x_1; y_1)$, кожна з яких є розв'язком хоча б однієї із систем. Кожна пара $(x_1; y_1)$ називається *розв'язком сукупності систем*. Знайти множину всіх таких пар означає

розв'язати сукупність систем. Дві системи рівнянь

$$\begin{cases} P(x; y) = 0, \\ Q(x; y) = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} R(x; y) = 0, \\ S(x; y) = 0, \end{cases}$$

називаються *рівносильними (еквівалентними)*, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Правильні такі твердження (див. [12-16]):

1) якщо змінити порядок рівнянь у системі, то отримаємо систему, яка рівносильна даній;

2) якщо хоча б одне з рівнянь системи замінити на рівносильне (еквівалентне), то одержимо систему, рівносильну (еквівалентну) даній;

3) для будь-яких $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$

$$\begin{cases} P(x; y) = 0, \\ Q(x; y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha P(x; y) + \beta Q(x; y) = 0, \\ Q(x; y) = 0; \end{cases}$$

4) системи є рівносильними:

$$\begin{cases} x = R(y), \\ Q(x; y) = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = R(y), \\ Q(R(y), y) = 0; \end{cases}$$

5) якщо одне з рівнянь системи рівносильне сукупності рівнянь

$$P(x; y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(x; y) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ P_n(x; y) = 0, \end{cases}$$

то система рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases} P(x; y) = 0, \\ Q(x; y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} P_1(x; y) = 0, \\ Q(x; y) = 0, \end{cases} \\ \dots\dots\dots \\ \begin{cases} P_n(x; y) = 0, \\ Q(x; y) = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Аналогічні означення можна навести для рівнянь і систем рівнянь з більшою кількістю невідомих.

2. Алгебраїчні системи рівнянь

Якщо $P_i(x; y)$ і $Q_i(x; y)$, $i = 1; 2$, – алгебраїчні функції, то система (3)

називається *алгебраїчною системою рівнянь*. До алгебраїчних функцій відносяться цілі раціональні функції (многочлени), дробово-раціональні та ірраціональні функції. Серед алгебраїчних систем рівнянь можна виділити такі види ([1-19]):

а) *системи лінійних рівнянь*:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2, \end{cases}$$

де $P_i(x; y)$ і $Q_i(x; y)$ – лінійні функції двох змінних;

б) *системи цілих раціональних рівнянь*, наприклад:

$$\begin{cases} x + y - x^2 = 0, \\ 3y - x - y^2 = 0; \end{cases}$$

в) *однорідні системи рівнянь*, в яких хоча б одне з рівнянь є однорідним, тобто всі члени рівняння мають однаковий сумарний степінь:

$$\begin{cases} a x^2 + b x y + c y^2 = 0, \\ Q(x; y) = 0; \end{cases}$$

г) *симетричні системи рівнянь*, де $P_i(x; y)$ і $Q_i(x; y)$ – симетричні многочлени, тобто $P_i(x; y) = P_i(y; x)$ і $Q_i(x; y) = Q_i(y; x)$;

д) *системи дробово-раціональних рівнянь*, наприклад:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} - \left(\frac{y-x}{x} \right)^2 = 1, \\ 2y^2 - x^2 = 1; \end{cases}$$

е) *системи ірраціональних рівнянь*, наприклад:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + 4y} - 2y + x = 0, \\ x\sqrt[3]{x^2 - y^2} - 2x - 1 = 0. \end{cases}$$

2.1. Системи лінійних рівнянь

Якщо $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ – лінійні функції двох змінних, тобто

$$P(x; y) = a_1 x + b_1 y - c_1, \quad Q(x; y) = a_2 x + b_2 y - c_2,$$

то система (3) називається *лінійною системою двох алгебраїчних рівнянь*. Її

можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases} \quad (4)$$

Основними способами розв'язування таких систем є *спосіб підстановки, спосіб алгебраїчних перетворень, графічний спосіб та загальний спосіб послідовного виключення змінних (метод Гауса)*.

1. Спосіб підстановки. Нехай хоча б одне з чисел a_1 або a_2 відмінне від нуля. Припустимо, що $a_1 \neq 0$. Тоді з першого рівняння знаходимо ([3-7]):

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Підставимо вираз для x у друге рівняння системи:

$$\begin{cases} x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}, \\ \frac{a_2}{a_1} (c_1 - b_1 y) + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

Друге рівняння цієї системи можна записати у вигляді:
 $(a_1 b_2 - a_2 b_1) y = c_2 a_1 - a_2 c_1$. Тоді

$$y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad x = \frac{c_2 b_1 - c_1 b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}. \quad (5)$$

Формули (5) визначають розв'язок системи (4), якщо $\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$.

Розглянемо випадок, коли $\Delta=0$. Якщо при цьому хоча б один з виразів $\Delta_1 = c_2 a_1 - c_1 a_2$ або $\Delta_2 = c_2 b_1 - c_1 b_2$ відмінний від нуля, система розв'язків не має. Дослідимо випадок, коли $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$, що еквівалентне

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2}{c_1} = t$. Тоді система (4) набуде вигляду:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ t a_1 x + t b_1 y = t c_1 \end{cases} \Leftrightarrow a_1 x + b_1 y = c_1.$$

У цьому випадку система має нескінченну множину розв'язків, які

визначаються за формулами: $x = \frac{c_1 - b_1 y}{a_1}$, $y \in \mathbb{R}$.

Приклад 1 ([11]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 3y = 16, \\ x + 2y = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. З другого рівняння системи подамо x через y :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 16, \\ x = 1 - 2y. \end{cases}$$

Дана система буде рівносильна системі:

$$\begin{cases} 2(1 - 2y) - 3y = 16, \\ x = 1 - 2y. \end{cases}$$

Після тотожних перетворень ця система запишеться так:

$$\begin{cases} 2 - 7y = 16, \\ x = 1 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2, \\ x = 1 - 2y. \end{cases}$$

Підставимо в друге рівняння замість y значення -2 , дістанемо рівносильну систему:

$$\begin{cases} y = -2, \\ x = 5. \end{cases}$$

Отже, вихідна система має єдиний розв'язок $(5; -2)$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(5; -2)\}$.

Приклад 2 ([13]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 5x + 5y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Для цієї системи $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta = 0$. Тому вона має нескінченну множину розв'язків. Щоб їх знайти, поділимо друге рівняння на 5, дістанемо систему:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ x + y = 1, \end{cases}$$

яка рівносильна одному рівнянню $x + y = 1 \Rightarrow y = 1 - x$. Нехай $x = C$, де

$c \in \mathbb{R}$. Тоді $y = 1 - c$. Отже, розв'язком системи є пари чисел $(c; 1 - c)$, де $c \in \mathbb{R}$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(c; 1 - c) : c \in \mathbb{R}\}$.

Приклад 3 ([3]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 2y = 2, \\ 2x + 4y = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Для цієї системи $\Delta = 0$, а $\Delta_1 = -8$, $\Delta_2 = 4$. Отже, дана система розв'язків не має.

Відповідь: розв'язків немає.

2. Спосіб алгебраїчних перетворень. Цей спосіб ґрунтується на твердженні про рівносильність систем ([9-13]).

Приклад 4 ([15]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Помноживши перше рівняння на 5, отримаємо систему:

$$\begin{cases} 5x + 5y = 30, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$$

Додавши перше і друге рівняння системи, одержимо рівносильну систему:

$$\begin{cases} 8x = 32, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$$

Розділимо перше рівняння на 8:

$$\begin{cases} x = 4, \\ 3x - 5y = 2. \end{cases}$$

Помножимо перше на -3 і додамо до другого:

$$\begin{cases} x = 4, \\ -5y = -10. \end{cases}$$

Звідси випливає, що вихідна система має єдиний розв'язок $(4; 2)$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(4; 2)\}$.

3. Графічний спосіб. Для розв'язання системи двох лінійних рівнянь з

двома невідомими графічним способом будують графіки обох рівнянь системи. Тоді координати точок перетину є розв'язками цієї системи.

Графічний спосіб є корисним для знаходження кількості розв'язків системи, а саме скільки існує точок перетину графіків, стільки й розв'язків має система. Проте цей спосіб незручний при обчисленні координат точок, оскільки значення координат можна отримати наближено.

Розглянемо загальну схему дослідження кількості розв'язків системи лінійних рівнянь (4):

1) Якщо $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ то система (4) має єдиний розв'язок (графіки рівнянь перетинаються);

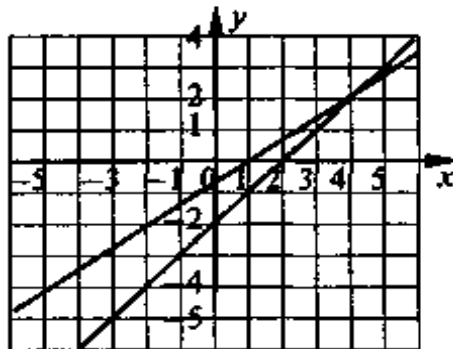
2) Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, то система (4) не має розв'язків (графіки рівнянь паралельні);

3) Якщо $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, то система (4) має безліч розв'язків, а розв'язком цієї системи є будь-який розв'язок кожного з рівнянь (графіки рівнянь збігаються).

Приклад 5 ([16]). Розв'язати систему рівнянь графічним способом

$$\begin{cases} x - y = 2, \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Побудуємо графік кожного з рівнянь системи:



З малюнка видно, що графіки обох рівнянь перетинаються в одній точці (4;2), яка і буде шуканим розв'язком даної системи.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(4; 2)\}$.

Приклад 6 ([18]). Скільки розв'язків має система рівнянь

$$\begin{cases} x + y = 5, \\ x + 3y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Позаяк $1 = \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2} = \frac{1}{3}$ і $\frac{c_1}{c_2} = 1$, то система має єдиний розв'язок $(5; 0)$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(5; 0)\}$.

4. Спосіб послідовного виключення змінних (метод Гауса). Тепер розглянемо загальний спосіб розв'язування систем лінійних рівнянь.

Приклад 7 ([19]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ 3x - 8y + 10z = 25, \\ -4x + 3y - z = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Перетворимо її в рівносильну систему так, щоб у першому рівнянні змінна x стояла з коефіцієнтом одиниця, а в інші рівняння зовсім не входила. Для цього поділимо почленно перше рівняння вихідної системи на коефіцієнт при x , тобто на 2. Дістанемо перше рівняння системи нової системи

$$x - 2y + 2z = 5.$$

Додаючи почленно це рівняння, помножене на -3 , до другого рівняння вихідної системи і це саме рівняння, помножене на 4, до третього рівняння вихідної системи, дістанемо рівносильну вихідній систему, в якій змінна x буде виключена з другого і третього рівнянь:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ 2y - 4z = -10, \\ 5y - 7z = -19. \end{cases}$$

Друге і третє рівняння останньої системи містять лише змінні y і z . Ділячи почленно друге рівняння на 2, дістанемо рівняння $y - 2z = -5$ з

коефіцієнтом одиниця при змінній y . Додаючи почленно це рівняння, помножене на -5 , до третього рівняння рівносильної системи, дістанемо $3z = 6$. У результаті ми отримали систему

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ y - 2z = -5, \\ 3z = 6. \end{cases}$$

Поділивши останнє рівняння на 3, приходимо, нарешті, до системи

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ y - 2z = -5, \\ z = 2, \end{cases} \quad (6)$$

в якій коефіцієнти по діагоналі дорівнюють одиниці, а коефіцієнти вліво від діагоналі дорівнюють нулю (їх ми не записуємо). Така система легко розв'язується: $z = 2$, $y = -5 + 2z = -1$, $x = 5 + 2y - 2z = -1$.

Відповідь: $\{x; y; z\} = \{(-1; -1; 2)\}$.

Система вигляду (6) називається *трикутною*. Розв'язування систем лінійних рівнянь зведенням до трикутної форми називається *методом послідовного виключення змінних (метод Гауса)*.

Виконавши такі самі перетворення з довільною системою m лінійних рівнянь з n невідомими, можна або побачити, що вона зовсім не має розв'язків, або звести її до рівносильної трикутної системи.

Приклад 8 ([7]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x - 4y + 4z = 10, \\ -3x + 8y - 10z = -25. \end{cases}$$

Розв'язання. Повторюючи міркування з прикладу 7, одержимо систему

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5, \\ y - 2z = -5. \end{cases}$$

Загальний розв'язок отримаємо, вважаючи z довільним: $y = -5 + 2z$, $x = 5 + 2(y - z) = 5 + 2(-5 + z) = -5 + 2z$.

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \{(2z - 5; 2z - 5; z) : z \in \mathbb{R}\}$.

Такий результат можна отримати також у випадку, коли рівнянь стільки ж чи навіть більше, ніж змінних (див. приклад 9).

У процесі розв'язування систем лінійних рівнянь методом Гауса можуть траплятися такі особливості: 1) можуть з'явитися рівняння виду $0 = 0$. Їх просто викреслюють із системи рівнянь; 2) іноді, щоб отримати на діагоналі коефіцієнт 1, доводиться змінювати порядок розміщення змінних (див. приклад 9); 3) можна отримати рівняння виду $0 = b$, де $b \neq 0$. Це означає, що система взагалі не має розв'язків.

Приклад 9 ([1]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} -x - y + z + 2t = -1, \\ -2x - 2y + z + 2t = -4, \\ x + y - 2z - 3t = -3, \\ 3x + 3y + z = 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система рівносильна наступній

$$\begin{cases} -x - y + z + 2t = -1, \\ z + 2t = 2, \\ z + t = 4, \\ 4z + 6t = 12. \end{cases}$$

Поставивши z на друге місце, продовжимо викладки:

$$\begin{cases} -x + z + 2t - y = -1, \\ z + 2t = 2, \\ z + t = 4, \\ 4z + 6t = 12, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z + 2t - y = -1, \\ z + 2t = 2, \\ t = -2, \\ 2t = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + z + 2t - y = -1, \\ z + 2t = 2, \\ t = -2. \end{cases}$$

Четверте рівняння виду $0 = 0$ не записане. Загальний розв'язок розглядуваної системи дістанемо, вважаючи y довільним: $t = -2$, $z = 2 - 2t = 6$, $x = 1 + z + 2t - y = 3 - y$.

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \{(3 - y; y; 6; -2) : y \in \mathbb{R}\}$.

Приклад 10 ([4]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} -x + y - z = 0, \\ -2x - y + 3z = 7, \\ -3x - 3y + 7z = -2. \end{cases}$$

Розв'язання. Виключимо змінну x з другого і третього рівнянь системи. Отримаємо рівносильну систему:

$$\begin{cases} -x + y - z = 0, \\ -3y + 5z = 7, \\ -6y + 10z = -2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - z = 0, \\ -3y + 5z = 7, \\ 0 \cdot z = 16. \end{cases}$$

Останнє рівняння рівносильне рівнянню $0 = 16$, тобто суперечливе. Тому вихідна система не має розв'язків.

Відповідь: система не має розв'язків.

Підсумуємо викладене: система лінійних рівнянь може: 1) зовсім не мати розв'язків; 2) мати єдиний розв'язок; 3) мати безліч розв'язків. В останньому випадку значення деяких змінних залишаються зовсім довільними, а за ними однозначно обчислюються значення решти змінних.

Зазначимо, що при кількості рівнянь, що дорівнює кількості змінних, можливі всі три випадки. Проте, взагалі кажучи, має місце другий випадок. Якщо кількість рівнянь менша від кількості змінних, то другий випадок неможливий і, взагалі кажучи, має місце третій випадок. Якщо кількість рівнянь більша від кількості змінних, можливі всі три випадки. Проте, взагалі кажучи, має місце перший випадок.

2.2. Системи цілих раціональних рівнянь

Нехай дано систему цілих раціональних рівнянь. Основними способами розв'язування таких систем є: спосіб підстановки, спосіб алгебраїчних перетворень, спосіб введення нових змінних, а також комбінації зазначених способів.

Якщо деяке рівняння системи легко розв'язати відносно одного з невідомих, зручно застосувати *спосіб підстановки*.

Приклад 1 ([10]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x+2y=1, \\ 2x^2-3xy+y^2=6. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система рівносильна системі:

$$\begin{cases} x=1-2y, \\ 2(1-2y)^2-3(1-2y)y+y^2=6. \end{cases}$$

Після тотожних перетворень дістанемо:

$$\begin{cases} x=1-2y, \\ 15y^2-11y-4=0. \end{cases}$$

Друге рівняння системи має два корені: $y_1=1$ і $y_2=-\frac{4}{15}$. Тоді остання

система, а отже і вихідна, має розв'язок: $x_1=-1$, $y_1=1$ і $x_2=\frac{23}{15}$, $y_2=-\frac{4}{15}$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{(-1; 1), \left(\frac{23}{15}; -\frac{4}{15}\right)\right\}$.

Іноді доводиться робити підстановку не тільки замість одного невідомого, але і замість цілого виразу, що залежить від кількох змінних. Рівносильність систем при цьому зберігається.

Приклад 2 ([18]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y-x=5, \\ zx=(z-4)y+30, \\ 2zx=(2z-4)y. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система рівносильна такій:

$$\begin{cases} y-x=5, \\ z(y-x)-4y+30=0, \\ 2z(y-x)-4y=0. \end{cases}$$

Замінюючи в другому і третьому рівняннях $y-x$ на 5, одержимо систему:

$$\begin{cases} y-x=5, \\ 5z-4y+30=0, \\ 10z-4y=0, \end{cases}$$

яка рівносильна вихідній. З третього рівняння маємо $z=\frac{2y}{5}$. Підставляючи

цей вираз замість y у друге рівняння системи, дістанемо рівняння: $-2y + 30 = 0$, звідки $y = 15$. Підставляючи $y = 15$ у перше рівняння системи й у вираз для z , знаходимо $x = 10$, $z = 6$.

Відповідь: $\{(x; y; z)\} = \{(10; 15; 6)\}$.

Спосіб алгебраїчних перетворень дає змогу одержати систему, рівносильну даній. Нова система міститиме рівняння відносно тільки однієї із змінних або рівняння, яке легко розв'язується відносно однієї із змінних. Після цього можна застосувати спосіб підстановки.

Приклад 3 ([10]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 - 12x + 4y = -11, \\ 4x^2 + 2y^2 - 16x - 8y = -18. \end{cases}$$

Розв'язання. Помноживши перше рівняння системи на 2 і додавши до другого рівняння, отримаємо рівносильну систему:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ 4x^2 + 2y^2 - 16x - 8y = -18. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння на -4 і додамо до другого:

$$\begin{cases} x^2 - 4x + 4 = 0, \\ y^2 - 4y + 1 = 0. \end{cases}$$

Перше рівняння має корені: $x_1 = x_2 = 2$. Друге має корені: $y_1 = 2 + \sqrt{3}$, $y_2 = 2 - \sqrt{3}$. Отже, вихідна система має розв'язки: $x_1 = 2$, $y_1 = 2 + \sqrt{3}$ і $y_2 = 2 - \sqrt{3}$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(2; 2 + \sqrt{3}), (2; 2 - \sqrt{3})\}$.

Розглянемо приклад системи, під час розв'язування якої доводиться застосовувати і спосіб перетворень, і спосіб підстановки.

Приклад 4 ([16]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 - 4y^2 - 1,5x + y = 0, \\ 3x^2 - 6y^2 - 2x + 2y = 0,5. \end{cases}$$

Розв'язання. Замінімо перше рівняння сумою першого, помноженого

на 3, і другого, помноженого на -2 . Дістанемо таку систему, рівносильну вихідній:

$$\begin{cases} 0,5x + y = 1, \\ 3x^2 - 6y^2 - 2x + 2y = 0,5. \end{cases}$$

Застосовуючи спосіб підстановки, маємо:

$$\begin{cases} y = 1 - 0,5x, \\ x^2 + 2x - 3 = 0. \end{cases}$$

Корені другого рівняння: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$. Розв'язком системи буде $x_1 = 1$, $y_1 = 0,5$ і $x_2 = -3$, $y_2 = 2,5$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(1; 0,5), (-3; 2,5)\}$.

Наступний приклад дає змогу переконатися, що вдале **введення нових змінних** значно полегшує розв'язання системи.

Приклад 5 ([8]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ x^3 y^3 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $a = x^3$, $b = y^3$. Тоді

$$\begin{cases} ab = -8, \\ a + b = 7. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи: $a_1 = -1$, $b_1 = 8$ і $a_2 = 8$, $b_2 = -1$. Тоді розв'язком вихідної системи буде: $x_1 = -1$, $y_1 = 2$ і $x_2 = 2$, $y_2 = -1$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-1; 2), (2; -1)\}$.

2.3. Однорідні системи рівнянь

Розглянемо застосування способів підстановки й алгебраїчних перетворень у випадку, коли хоча б одне з двох рівнянь з двома невідомими є однорідним рівнянням другого степеня: $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$.

Нехай дано однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 = 0, \\ P(x; y) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

де $P(x; y)$ – многочлен двох змінних x і y . Вважаємо, що $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

Якщо $c=0$, перше рівняння системи матиме вигляд: $ax^2 + bxy = 0$ або $x(ax + by) = 0$. Тоді вихідна система рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{cases} x=0, \\ P(x; y)=0; \\ x=-\frac{b}{a}y, \\ P(x; y)=0. \end{cases} \right.$$

Якщо $b=0$, то $ax^2 + cy^2 = 0$ і дана система рівносильна такій:

$$\begin{cases} ax^2 + cy^2 = 0, \\ P(x; y) = 0. \end{cases}$$

Якщо $a \cdot c < 0$, то перше рівняння цієї системи можна записати так:

$(\sqrt{|a|}x - \sqrt{|c|}y)(\sqrt{|a|}x + \sqrt{|c|}y) = 0$. Отже, вихідна система рівносильна такій сукупності ([11-16]):

$$\left[\begin{cases} (\sqrt{|a|}x - \sqrt{|c|}y) = 0, \\ P(x; y) = 0; \\ (\sqrt{|a|}x + \sqrt{|c|}y) = 0, \\ P(x; y) = 0. \end{cases} \right.$$

Розв'язуючи систему (6), необхідно розглядати два випадки. Перший, якщо $y \neq 0$. Тоді систему (6) можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} a\left(\frac{x}{y}\right)^2 + b\left(\frac{x}{y}\right) + c = 0, \\ P(x; y) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Якщо позначимо $\frac{x}{y} = t$, то з першого рівняння дістанемо квадратне рівняння

$$at^2 + bt + c = 0. \quad (8)$$

У випадку $D < 0$ система (7) розв'язків не має. Якщо $D > 0$ і t_1, t_2 корені рівняння (8), то система (7) еквівалентна сукупності ([11-16]):

$$\left[\begin{cases} \frac{x}{y} = t_1, \\ P(x; y) = 0; \end{cases} \quad \left[\begin{cases} \frac{x}{y} = t_2, \\ P(x; y) = 0. \end{cases} \right. \quad (9)$$

Якщо $D=0$, $t_1=t_2$, то системи, що входять у сукупність, збігаються. Якщо $y=0$, то вихідна система еквівалентна такій:

$$\begin{cases} y = 0, \\ ax^2 = 0, \\ P(x; y) = 0. \end{cases}$$

Приклад 1 ([10]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 + xy - 3y^2 = 3, \\ x^2 + xy - 2y^2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. 1. Нехай $y \neq 0$. Позначимо $\frac{x}{y} = t$. З другого рівняння системи отримаємо квадратне рівняння $t^2 + t - 2 = 0$, корені якого $t_1 = 1$, $t_2 = -2$. Тоді вихідна система рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{cases} \frac{x}{y} = 1, \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = 3; \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{cases} x = y, \\ 0 \neq 3; \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} \frac{x}{y} = -2, \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = 3, \end{cases} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{cases} x = -2y, \\ y^2 = 1. \end{cases} \right.]$$

Очевидно, що перша система сукупності розв'язків не має. Розв'язком другої будуть пари чисел $(-2; 1)$ і $(2; -1)$.

2. Нехай $y = 0$. Тоді вихідна система рівносильна системі:

$$\begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \\ 2x^2 + xy - 3y^2 = 3, \end{cases}$$

яка розв'язків не має.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-2; 1), (2; -1)\}$.

Приклад 2 ([6]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x^2 - xy = 0, \\ x^3 + y^3 = 9. \end{cases}$$

Розв'язання: Дана система рівносильна такій сукупності систем:

$$\left[\begin{cases} x=0, \\ y^3=9; \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y=\sqrt[3]{9}, \\ x=0; \end{cases} \right]$$
$$\left[\begin{cases} y=2x, \\ 9x^3=9. \end{cases} \right] \Leftrightarrow \left[\begin{cases} y=2, \\ x=1. \end{cases} \right]$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(0; \sqrt[3]{9}), (1; 2)\}$.

Приклад 3 ([19]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 7x^2 - 8xy + 7y^2 = 43. \end{cases}$$

Розв'язання. Замінімо друге рівняння системи різницею першого, помножимо на 43, і другого, помноженого на 29. У результаті перетворень отримаємо систему, рівносильну вихідній:

$$\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29, \\ 6x^2 - 13xy + 6y^2 = 0. \end{cases}$$

Друге рівняння отриманої системи є однорідним. Нехай $y \neq 0$. Позначимо

$t = \frac{x}{y}$. Після заміни друге рівняння матиме вигляд: $6t^2 - 13t + 6 = 0$. Його

корені $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = \frac{2}{3}$. Розглядувана система рівносильна сукупності систем:

$$\left[\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{3}{2}, \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2}y, \\ y^2 = 4; \end{cases} \right. \\ \left[\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2}{3}, \\ 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 29; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y, \\ y^2 = 9. \end{cases} \right.$$

Розв'язком отриманої сукупності є пари чисел (3;2), (-3;-2), (2;3), (-2;-3).

Якщо ж $y = 0$, то відповідна рівносильна система розв'язків не має.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(3; 2), (-3; -2), (2; 3), (-2; -3)\}$.

2.4. Симетричні системи рівнянь

Многочлен $P(x; y)$ називається *симетричним*, якщо $P(x; y) = P(y; x)$.

Приклади симетричних многочленів: $x^3 + y^3$, $x^2y + xy^2$. Система рівнянь з двома невідомими

$$\begin{cases} P(x; y) = 0, \\ Q(x; y) = 0 \end{cases}$$

називається *симетричною*, якщо обидва многочлени $P(x; y)$ і $Q(x; y)$ є симетричними. Для розв'язування таких систем використовують спосіб введення нових змінних за допомогою ([5-10]) рівностей: $x + y = u$, $xy = v$. Кожний симетричний многочлен може бути поданий як многочлен від нових змінних u і v . Наприклад, $x + xy + y = u + v$, $x^2y + xy^2 = xy(x + y) = uv$, $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = u^3 - 3uv$. Многочлен від нових змінних частіше має степінь, нижчий від степеня вихідного рівняння, а система рівнянь відносно нових змінних розв'язується простіше, ніж вихідна. Розв'язавши систему відносно u і v , можна потім знайти розв'язок $(x; y)$.

Приклад 1 ([11]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x + y + xy = 5, \\ x^2 + y^2 + xy = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Введемо нові невідомі $u = x + y$, $v = xy$. Тоді $x + y + xy = u + v$, $x^2 + y^2 + xy = (x + y)^2 - xy = u^2 - v$. Після заміни отримаємо систему відносно нових змінних:

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^2 - v = 7. \end{cases}$$

Застосуємо спосіб алгебраїчних перетворень:

$$\begin{cases} u + v = 5, \\ u^2 + u - 12 = 0. \end{cases}$$

Система буде мати розв'язки: (3;2), (-4;9). Таким чином, вихідна система рівносильна сукупності двох систем:

$$\left[\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \\ x + y = -4, \\ xy = 9. \end{cases} \right.$$

Розв'язком першої будуть пари чисел (1;2), (2;1). Друга система розв'язку не має.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(1; 2), (2; 1)\}$.

Приклад 2 ([10]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17, \\ x + y = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $x + y = u$, $xy = v$. Тоді

$$\begin{aligned} x^4 + y^4 &= (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = ((x + y)^2 - 2xy)^2 - 2x^2y^2 = \\ &= (x + y)^4 - 4(x + y)^2xy + 2x^2y^2 = u^4 - 4u^2v + 2v^2. \end{aligned}$$

Після заміни системи має вигляд:

$$\begin{cases} u^4 - 4u^2v + 2v^2 = 17, \\ u = 3. \end{cases}$$

Її розв'язком будуть пари чисел (3;2) і (3;16). Вихідна система рівносильна сукупності систем:

$$\left[\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = 2; \\ x + y = 3, \\ xy = 16. \end{cases} \right.$$

Перша система має розв'язок $(1;2)$, $(2;1)$, друга система розв'язків не має.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(1;2), (2;1)\}$.

Приклад 3 ([10]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (x-y)(x^2+y^2)=5, \\ (x+y)(x^2-y^2)=9. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь у вигляді

$$\begin{cases} x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 = 5, \\ x^3 + x^2y - xy^2 - y^3 = 9. \end{cases}$$

Додамо і віднімемо перше та друге рівняння системи:

$$\begin{cases} 2x^3 - 2y^3 = 14, \\ -2x^2y + 2xy^2 = -4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 7, \\ xy(x-y) = 2, \end{cases}$$
$$\begin{cases} (x-y)((x-y)^2 + 3xy) = 7, \\ xy(x-y) = 2. \end{cases}$$

Нехай $x-y=u$, $xy=v$. Тоді

$$\begin{cases} u(u^2 + 3v) = 7, \\ uv = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(u^2 + 3\frac{2}{u}\right) = 7, \\ v = \frac{2}{u}, \end{cases}$$

або після спрощення, $u^3 = 1$, $u = 1$ і $v = 2$. Тоді

$$\begin{cases} x-y=1, \\ xy=2, \end{cases}$$

звідки знаходимо, що система має розв'язок $(-1;-2)$, $(2;1)$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-1;-2), (2;1)\}$.

2.5. Системи дробово-раціональних рівнянь

Розглянемо систему виду

$$\begin{cases} P_1(x; y) = Q_1(x; y), \\ P_2(x; y) = Q_2(x; y), \end{cases}$$

де $P_i(x; y)$ і $Q_i(x; y)$, $i=1,2$, – раціональні дробы, тобто частки многочленів від

змінних x і y . Такі системи називатимемо *системами дробово-раціональних рівнянь*.

Розв'язування таких систем починають з визначення області допустимих значень (ОДЗ) змінних, що входять у рівняння. Далі, рівняння системи треба помножити на такий многочлен, щоб у результаті утворилася система рівнянь одного з раніше розглянутих типів. Отримана в такий спосіб система не рівносильна вихідній. Тому, після того як знайдені всі розв'язки цієї системи, слід відкинути ті з них, що не входять в ОДЗ. Ті, що залишилися, будуть множиною розв'язків вихідної дробово-раціональної системи рівнянь ([10-19]).

Приклад 1 ([8]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6}, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $x \neq 0$, $y \neq 0$. Помножимо перше рівняння системи на $6xy$, у результаті чого дістанемо симетричну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 6(x + y) - 5xy = 0, \\ x + y = 5. \end{cases}$$

Розв'язком отриманої системи будуть такі пари чисел $(2;3)$ і $(3;2)$. Обидва розв'язки входять в ОДЗ. Отже, вихідна система має два розв'язки.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(2;3), (3;2)\}$.

Приклад 2 ([10]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{10}{3}, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $x \neq 0$, $y \neq 0$, $x \neq -y$. Помножимо перше з рівнянь системи на $3(x + y)$, а друге рівняння на $4xy$. Отримаємо таку симетричну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3(x^2 + y^2) = 10(x + y), \\ 4(x + y) - 3xy = 0. \end{cases}$$

Розв'язуємо її, вводячи нові змінні $u = x + y$, $v = xy$. Дістанемо систему рівносильну останній системі:

$$\begin{cases} 3u^2 - 10u - 6v = 0, \\ 4u - 3v = 0. \end{cases}$$

Щоб розв'язати цю систему, застосовуємо спосіб підстановки:

$$\begin{cases} 3v = 4u, \\ 3u^2 - 18u = 0. \end{cases}$$

Розв'язком останньої системи будуть пари чисел $(0;0)$ і $(6;8)$. Повернемося до змінних x і y . Система

$$\begin{cases} x + y = 0, \\ xy = 0. \end{cases}$$

має єдиний розв'язок $(0;0)$, що не входить у знайдену ОДЗ і не є розв'язком вихідної системи. Розв'язком системи

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ xy = 8. \end{cases}$$

є пари чисел $(2;4)$ і $(4;2)$, які задовольняють і вихідну систему.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(2; 4), (4; 2)\}$.

Приклад 3 ([1]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} -\frac{4}{x+y-1} + \frac{5}{2x-y+3} = \frac{5}{2}, \\ -\frac{3}{x+y-1} - \frac{1}{2x-y+3} = \frac{7}{5}. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $x + y \neq 1$, $2x - y \neq -3$. Позначимо

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y-1} = u, \\ \frac{1}{2x-y+3} = v. \end{cases}$$

Тоді отримаємо рівносильну систему рівнянь:

$$\begin{cases} 4u - 5v = -\frac{5}{2}, \\ 3u + v = -\frac{7}{5}. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -\frac{1}{2}, \\ v = \frac{1}{10}. \end{cases}$$

Отже,

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y-1} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{1}{2x-y+3} = \frac{1}{10}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = -1, \\ 2x-y = 7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = -3. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(2; -3)\}$.

2.6. Системи ірраціональних рівнянь

У цьому параграфі розглянемо системи рівнянь, що містять ірраціональні функції від невідомих. Розв'язування таких систем рівнянь необхідно починати з визначення ОДЗ рівнянь. Цю область знаходять з умов існування радикалів, що входять у рівняння системи. Після знаходження всіх розв'язків системи необхідно відкинути ті з них, які не увійшли в ОДЗ.

Часто під час розв'язування систем ірраціональних рівнянь важко стежити за рівносильністю перетворень, бо в результаті деяких (зведення обох частин рівняння в парний степінь) кожна нова система є наслідком попередньої. Тоді всі розв'язки вихідної системи знаходяться серед розв'язків останньої, тобто втрат розв'язків не відбувається, але можуть з'явитися сторонні розв'язки, у тому числі ті, що входять в ОДЗ. Відбір розв'язків вихідної системи здійснюється безпосередньою підстановкою в неї усіх розв'язків останньої системи. У цих випадках перевірка є обов'язковим елементом розв'язування системи.

Приклад 1 ([8]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x+y-1} = 1, \\ \sqrt{x-y+2} = 2y-2. \end{cases}$$

Розв'язання. Знайдемо ОДЗ:

$$\begin{cases} x + y - 1 \geq 0, \\ x - y + 2 \geq 0, \\ 2y - 2 \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 - x, \\ y \leq x + 2, \\ y \geq 1. \end{cases}$$

Піднесемо обидві частини кожного з рівнянь системи до квадрата, одержимо систему:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 1, \\ x - y + 2 = 4y^2 - 8y + 4. \end{cases}$$

Щоб розв'язати цю систему, застосуємо спосіб підстановки. Отримаємо квадратне рівняння: $2y^2 - 3y = 0$, корені якого $y_1 = 0$, $y_2 = \frac{3}{2}$. Отже, система має два розв'язки: $(2; 0)$ і $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$, кожний з яких входить в ОДЗ.

Безпосередня перевірка показує, що єдиним розв'язком буде пара чисел $(\frac{1}{2}; \frac{3}{2})$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{ \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2} \right) \right\}$.

Приклад 2 ([2]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 - xy} + \sqrt{xy - y^2} = 3(x - y), \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо

$$\begin{cases} \sqrt{x(x - y)} + \sqrt{y(x - y)} = 3(x - y), \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} \sqrt{x - y}(\sqrt{x} + \sqrt{y} - 3\sqrt{x - y}) = 0, \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases}$$

Остання система рівносильна сукупності:

$$\left[\begin{cases} x - y = 0, \\ x^2 - y^2 = 41, \\ \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{x - y}, \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases} \right.$$

Перша система розв'язків не має, у другій піднесемо обидві частини першого рівняння до квадрата. Після перетворень одержимо систему:

$$\begin{cases} 8x - 2\sqrt{xy} - 10y = 0, \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases}$$

Перше рівняння цієї системи є однорідним. Очевидно, що якщо $x = 0$, то дана система не має розв'язків. Нехай $x \neq 0$. Тоді поділимо перше рівняння на x і

позначимо $\sqrt{\frac{y}{x}} = z$, $z \geq 0$. В результаті отримаємо квадратне рівняння

відносно z : $5z^2 + z - 4 = 0$, корені якого $z_1 = \frac{4}{5}$, $z_2 = -1$. Останній корінь є стороннім. Тому

$$\begin{cases} y = \frac{16}{25}x, \\ x^2 - y^2 = 41. \end{cases}$$

Легко бачити, що пари чисел $\left(\frac{25}{3}; \frac{16}{3}\right)$, $\left(-\frac{25}{3}; -\frac{16}{3}\right)$ є розв'язками цієї системи.

Безпосередня перевірка показує, що другий розв'язок для вихідної системи є стороннім.

$$\text{Відповідь: } \{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{25}{3}; \frac{16}{3}\right)\right\}.$$

Часто знаходження ОДЗ є досить складною самостійною задачею. У цьому випадку вибір розв'язків здійснюється тільки безпосередньою перевіркою.

Приклад 3 ([9]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x + \sqrt{y}} - \sqrt{x - \sqrt{y}} = 1, \\ \sqrt{x^2 - y} + \sqrt{x^2 + y} = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Піднесемо обидві частини кожного з рівнянь системи до квадрата, потім, після відокремлення радикала і повторного піднесення до квадрата, отримаємо систему:

$$\begin{cases} x - y = \frac{1}{4}, \\ x^2 - y^2 = \frac{1}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \frac{1}{4}, \\ x + y = 1. \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему способом алгебраїчних перетворень, знайдемо єдиний розв'язок $\left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)$, який і буде розв'язком вихідної системи.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{5}{8}; \frac{3}{8}\right)\right\}.$

Іноді вдала заміна деякого радикала новою змінною дає змогу зводити систему ірраціональних рівнянь до системи раціональних рівнянь, що були розглянуті раніше.

Приклад 4 ([4]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1, \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + 2y = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $y \geq 0$. Позначимо x^3 через u і $\sqrt{y}$ через v , причому $v \geq 0$. Тоді дану систему можна переписати у вигляді:

$$\begin{cases} u - v = 1, \\ 5u^2 - 8uv + 2v^2 = 2. \end{cases}$$

Застосувавши до цієї системи спосіб підстановки, дістанемо для змінної v таке рівняння: $v^2 - 2v - 3 = 0$. Це рівняння має два корені: $v_1 = -1$ і $v_2 = 3$. З огляду на область значень для v , матимемо систему, рівносильну вихідній:

$$\begin{cases} x^3 = 4, \\ \sqrt{y} = 3. \end{cases}$$

Ця система має єдиний розв'язок: $x = \sqrt[3]{4}$, $y = 9$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{\left(\sqrt[3]{4}; 9\right)\right\}.$

Приклад 5 ([15]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt{2x+y+2} = 7, \\ 3x + 2y = 23. \end{cases}$$

Розв'язання. Уведемо нові змінні: $t = \sqrt{x+y}$, $z = \sqrt{2x+y+2}$, $t \geq 0$, $z \geq 0$.

Тоді $t^2 + z^2 = 3x + 2y + 2$. Відносно цих невідомих дістане таку систему:

$$\begin{cases} t + z = 7, \\ t^2 + z^2 - 2 = 23, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 - z, \\ z^2 + (7 - z)^2 = 25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 7 - z, \\ z^2 - 7z + 12 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 4, \\ z = 3, \\ t = 3, \\ z = 4. \end{cases}$$

Повернемося до змінних x, y :

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} = 4, \\ \sqrt{2x+y+2} = 3, \\ \sqrt{x+y} = 3, \\ \sqrt{2x+y+2} = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 16, \\ 2x+y = 7, \\ x+y = 9, \\ 2x+y = 14. \end{cases}$$

Розв'язком останньої сукупності є пари чисел $(-9; 25)$ і $(5; 4)$. Перевірка показує, що обидва ці розв'язки задовольняють вихідну систему.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-9; 25), (5; 4)\}$.

Приклад 6 ([16]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sqrt{x+y} + \sqrt[3]{x-y} = 6, \\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2} = 8. \end{cases}$$

Зробимо заміну: $u = \sqrt{x+y}$, $v = \sqrt[3]{x-y}$. Зауважимо, що $u \geq 0$, $v \geq 0$. У нових змінних дана система набирає вигляду:

$$\begin{cases} u + v = 6, \\ uv = 8. \end{cases}$$

Останню систему розв'язуємо підстановкою $v = 6 - u$. Після підстановки і перетворень друге рівняння рівносильної системи набуде вигляду $u^2 - 6u + 8 = 0$. Його коренями є числа 4 і 2. Отже, рівносильна система має два розв'язки: $(4; 2)$ і $(2; 4)$. Підставляючи значення $u = 4$ і $v = 2$, матимемо:

$$\begin{cases} 4 = \sqrt{x+y}, \\ 2 = \sqrt[3]{x-y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 = x+y, \\ 8 = x-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12, \\ y = 4. \end{cases}$$

Підставляючи також значення $u = 2$ і $v = 4$, отримаємо:

$$\begin{cases} 2 = \sqrt{x+y}, \\ 4 = \sqrt[3]{x-y}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = x+y, \\ 64 = x-y, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 34, \\ y = -30. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(12; 4), (34; -30)\}$.

3. Системи трансцендентних рівнянь

В цьому розділі буде систематизовано методи розв'язування систем трансцендентних рівнянь, зокрема, систем логарифмічних, показникових та тригонометричних рівнянь. Крім цього, буде підібрано диференційовану систему вправ на розв'язування таких типів систем рівнянь в шкільному курсі математики.

3.1. Системи тригонометричних рівнянь

Розглянемо системи, у яких хоча б одне з рівнянь є тригонометричним. Основні способи розв'язування таких систем ті самі, що і систем алгебраїчних рівнянь. Зокрема, це спосіб підстановки, спосіб алгебраїчних перетворень та спосіб введення нових змінних.

Приклад 1 ([16]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5(\sin 2x + \sin 2y) = 2(1 + \cos^2(x - y)), \\ x + y = \frac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо підстановку $y = -x + \pi/6$ і перетворимо ліву частину першого рівняння:

$$5\left(\sin 2x + \sin\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right)\right) = 10\sin\frac{\pi}{6}\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 5\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Звідси перше рівняння системи рівносильне рівнянню:

$$5\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 + 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$

Тому дана система рівносильна системі:

$$\begin{cases} 5\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 + 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right), \\ y = \frac{\pi}{6} - x. \end{cases}$$

Перше рівняння цієї системи є квадратне рівняння відносно $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$:

$$2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - 5\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) + 2 = 0.$$

Знаходимо корені цього квадратного рівняння:

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2 \text{ або } \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}.$$

Оскільки рівняння $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 2$ розв'язків не має, то залишається знайти

розв'язки рівняння $\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$:

$$2x - \frac{\pi}{6} = 2\pi n \pm \frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

звідки $x = \pi n \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}$, $n \in \mathbb{Z}$. Отже, система має безліч розв'язків:

$$x = \pi n \pm \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{\pi}{6} - x = \frac{\pi}{12} \mp \frac{\pi}{6} - \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{ \left(\frac{\pi}{12} \pm \frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{12} \mp \frac{\pi}{6} - \pi n \right), \quad n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Приклад 2 ([15]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \cos 4x + \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi. \end{cases}$$

Розв'язання. З другого рівняння знаходимо $x = y + 2\pi$ і підставляємо в перше рівняння. З урахуванням періодичності тригонометричних функцій, дістанемо систему, рівносильну вихідній:

$$\begin{cases} \cos 4y + \sin 2x = -2, \\ x = y + 2\pi. \end{cases}$$

Перше рівняння цієї системи може бути перетворене до квадратного рівняння відносно $\sin 2y$:

$$\begin{cases} 1 - 2\sin^2 2y + \sin 2y + 2 = 0; \\ 2\sin^2 2y - \sin 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2y = -1, \\ \sin 2y = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Перше рівняння має розв'язок: $y = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, а друге розв'язків не має.

Знаходимо відповідні значення x : $x = \frac{7\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{ \left(\frac{7\pi}{4} + \pi k; -\frac{\pi}{4} + \pi k \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$.

Приклад 3 ([4]). Розв'язати систему

$$\begin{cases} 1 + 2\cos 2x = 0, \\ \sqrt{6}\cos y + 4\sin x = 2\sqrt{3}(2 - \cos^2 y). \end{cases}$$

Розв'язання. Дану систему можна перетворити до вигляду:

$$\begin{cases} 3 - 4\sin^2 x = 0, \\ \sqrt{6}\cos y + 4\sin x = 2\sqrt{3}(2 - \cos^2 y). \end{cases}$$

Нехай $\sin x = u$, $\cos y = v$, $|u| \leq 1$, $|v| \leq 1$. Тоді

$$\begin{cases} 3 - 4u^2 = 0, \\ \sqrt{6}v + 4u - 2\sqrt{3}(2 - v^2) = 0. \end{cases}$$

Розв'язком першого рівняння цієї системи будуть числа: $u_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ і $u_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. У

результаті підстановки u_1 у друге рівняння системи, після перетворень

дістанемо: $v^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}v - 1 = 0$. Це рівняння має корені: $v_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$ і $v_2 = -\sqrt{2}$.

Другий корінь треба відкинути як сторонній, тому що він не задовольняє

умову $|v| \leq 1$. Отже тільки пара чисел $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ буде розв'язком рівносильної

системи. Підставивши в друге рівняння цієї системи значення u_2 , одержимо

$v^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}v - 3 = 0$, звідки $v_3 = \sqrt{2}$, $v_4 = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Для цих значень також не

виконується умова $|v| \leq 1$, і їх необхідно відкинути. Тому вихідна система

еквівалентна такій:

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \\ y = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \end{cases} \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{ \left((-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k; \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi n \right), \quad n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Приклад 4 ([10]). Розв'язати систему

$$\begin{cases} \sin x - \frac{1}{\sin x} = \sin y, \\ \cos x - \frac{1}{\cos x} = \cos y. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} \sin x \neq 0, \\ \cos x \neq 0. \end{cases}$ Піднесемо ліві і праві частини рівнянь

системи до квадрата:

$$\begin{cases} \sin^2 x + \frac{1}{\sin^2 x} - 2 = \sin^2 y, \\ \cos^2 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 2 = \cos^2 y. \end{cases}$$

Додавши перше і друге рівняння, отримаємо $\sin^2 2x = 1$, $\sin 2x = \pm 1$, звідки

$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Підставивши це значення x у друге рівняння

даної системи, знайдемо $\cos y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$. Звідси, $y = \frac{\pi}{4}(2k+5)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{ \left(\frac{\pi}{4}(2n+1); \frac{\pi}{4}(2k+5) \right), \quad n, k \in \mathbb{Z} \right\}.$

Приклад 5 ([19]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y, \\ \cos 2y + \sqrt{3} \cos 2x = -1. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система має зміст тільки в тому випадку, коли визначені функції $\operatorname{tg} x$ і $\operatorname{tg} y$, тобто виконуються умови: $\cos x \neq 0$ і $\cos y \neq 0$.

Поділимо перше рівняння системи на $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y$, вважаючи, що воно не дорівнює нулю. Одержимо $\operatorname{tg}(y-x) = 1$. Звідси $y-x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Виразимо y через x і підставимо в друге рівняння системи:

$$\cos\left(2x + \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + \sqrt{3} \cos 2x = -1, \quad -\sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x = -1, \quad \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}.$$

Розв'язки останнього рівняння: $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi m, \quad x_2 = \frac{7\pi}{12} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$. Тоді

$y_1 = \frac{\pi}{2} + \pi(m+k), \quad y_2 = \frac{5\pi}{6} + \pi(m+k), \quad k, m \in \mathbb{Z}$. Розв'язок y_1 не входить в

область допустимих значень змінної y . Отже, розв'язком системи є

$$x = \frac{7\pi}{12} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad y = \frac{5\pi}{6} + \pi(m+k), \quad k, m \in \mathbb{Z}.$$

Розглянемо тепер випадок, коли $1 + \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = 0$. Тоді $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = 0$, а отже, і $1 + \operatorname{tg}^2 x = 0$. Останнє рівняння розв'язків не має. Отже пара чисел $(x; y)$ є остаточною розв'язком системи.

$$\textbf{Відповідь: } \{(x; y)\} = \left\{ \left(\frac{7\pi}{12} + \pi m; \frac{5\pi}{6} + \pi(m+k) \right), \quad k, m \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Розв'язуючи складніші тригонометричні системи, часто буває складно вибрати вдалий спосіб розв'язування. Загальні рекомендації тут, як правило, дати не можна. Можна лише порадити намагатися виконувати такі перетворення рівнянь системи, що приводять до появи функцій одного аргументу або хоча б не збільшують кількість функцій з різними аргументами. Далі розглянемо приклади систем, розв'язування яких потребує застосування нестандартних методів.

Приклад 6 ([18]). Розв'язати систему

$$\begin{cases} \sqrt{2} \cos x = 1 + \cos y, \\ \sqrt{2} \sin x = \sin y. \end{cases}$$

Розв'язання. Піднесемо ліві і праві частини рівнянь системи до квадрата, а потім додамо їх. Після очевидних перетворень, отримаємо:

$$\begin{cases} \cos y = 0, \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Проте при такому способі розв'язування могли з'явитися сторонні розв'язки, оскільки було виконано операцію піднесення до квадрата. Отже, необхідно зробити відбір коренів. З другого рівняння системи видно, що знаки $\sin x$ і $\sin y$ повинні збігатися. Отож,

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad y_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad y_2 = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{ \left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right); \left(-\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi n \right), k, n \in \mathbb{Z} \right\}.$

Слід зазначити, що в даному випадку використання основної тригонометричної тотожності дозволило зменшити число невідомих.

Приклад 7 ([9]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2\cos(3x + y) = \sin(x - y), \\ 2\sin(x + y) = \cos(3x - y). \end{cases}$$

Розв'язання. У другому рівнянні ліву і праву частину поміняємо місцями і перемножимо відповідні частини рівнянь. У результаті матимемо рівняння: $2\cos(3x + y)\cos(3x - y) = 2\sin(x + y)\sin(x - y)$. У цьому рівнянні замінимо добутки тригонометричних функцій сумами за відомими формулами: $\cos 6x + \cos 2y = \cos 2y - \cos 2x$, $\cos 6x + \cos 2x = 0 \Rightarrow 2\cos 4x \cos 2x = 0$.

Останнє рівняння має розв'язки: $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $k \in \mathbb{Z}$, $x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Підставимо x_1 у вихідну систему:

$$\begin{cases} 2\cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi k}{4} + y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} - y\right), \\ 2\sin\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} + y\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{8} + \frac{3\pi k}{4} - y\right). \end{cases}$$

Застосувавши формули зведення, перше рівняння цієї системи запишемо у вигляді: $\cos\left(\frac{3\pi}{8} + y - \frac{\pi k}{4}\right) = 0$, звідки $y = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4} + \pi n$, $k, n \in \mathbb{Z}$. Підставляючи це значення y в друге рівняння останньої системи, переконуємося, що воно не виконується. Отже, ця система несумісна. Підставимо x_2 у вихідну систему:

$$\begin{cases} 2 \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}n + y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n - y\right), \\ 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}n + y\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}n - y\right). \end{cases}$$

Застосовуючи формули зведення для першого рівняння, отримаємо рівняння:

$$2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi n}{2} - y\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - y\right),$$

розв'язком якого є $y = \frac{\pi}{4} - \arctg 2 + \frac{\pi n}{2} - \pi m$, $n, m \in \mathbb{Z}$. Легко бачити, що воно задовольняє і друге рівняння системи.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2} - \arctg 2 - \pi m\right), \quad m, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

3.2. Системи показникових рівнянь

Будемо розглядати системи, у яких одне або обидва рівняння є показниковими. Основні способи розв'язування таких систем: спосіб підстановки, введення нових змінних, логарифмування одного або обох рівнянь. Проілюструємо на прикладах застосування зазначених способів.

Спосіб підстановки, як і в раніше розглянутих системах, зручно застосовувати, коли одне з невідомих легко виражається через інше.

Приклад 1 ([19]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 4^x - 7 \cdot 2^{x-0.5y} = 2^{3-y}, \\ y - x = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. З другого рівняння знайдемо $y = x + 3$. Підставивши в перше, дістанемо: $4^x - 7 \cdot 2^{0.5x-1.5} = 2^{-x}$. Після перетворень це рівняння можна записати у вигляді: $2^{3x} - 7 \cdot 2^{1.5x-1.5} - 1 = 0$. Нехай $z = 2^{1.5x-1.5}$, $z > 0$. Тоді $8z^2 - 7z - 1 = 0$. Звідси маємо $z = 1$ або $1.5x - 1.5 = 0$. Отже, $x = 1$, і $y = 4$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(1; 4)\}.$

Часто буває зручно зробити підстановку не одного невідомого, а виразу, що містить обидва невідомі.

Приклад 2 ([6]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} (x+y) \cdot 2^{y-2x} = 6,25, \\ (x+y)^{\frac{1}{2x-y}} = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. З властивостей показникової функції випливає, що ОДЗ:

$$\begin{cases} x+y > 0, \\ x+y \neq 1, \\ 2x-y \neq 0. \end{cases}$$

Виразивши з першого рівняння $x+y$, отримаємо: $x+y = 6,25 \cdot 2^{2x-y}$.

Підставляємо цей вираз у друге рівняння:

$$(6,25 \cdot 2^{2x-y})^{\frac{1}{2x-y}} = 5 \Rightarrow (6,25)^{\frac{1}{2x-y}} = 2,5 \Rightarrow (2,5)^{\frac{2}{2x-y}} = 2,5.$$

Звідси $\frac{2}{2x-y} = 1 \Rightarrow 2x-y = 2$. Підставимо останній вираз у рівняння для визначення x . У результаті матимемо систему:

$$\begin{cases} 2x-y = 2, \\ x+y = 25, \end{cases}$$

розв'язок якої: $x=9$, $y=16$. Цей розв'язок задовольняє ОДЗ і, отже, є розв'язком вихідної системи.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(9; 16)\}$.

Розглянемо використання способу введення нових змінних для розв'язування систем показникових рівнянь.

Приклад 3 ([8]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689. \end{cases}$$

Розв'язання. Нехай $z = 5^{\sqrt[3]{x}}$; $t = 2^{\sqrt{y}}$; $z > 0$, $t > 0$. Тоді отримаємо симетричну систему:

$$\begin{cases} zt = 200, \\ z^2 + t^2 = 689, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} zt = 200, \\ (z+t)^2 = 1089, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} zt = 200, \\ z+t = 33. \end{cases}$$

Її розв'язки: $z_1 = 8$; $t_1 = 25$; $z_2 = 25$; $t_2 = 8$. Тоді

$$\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} = 8, \\ 2^{\sqrt{y}} = 25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = \log_5 8, \\ \sqrt{y} = \log_2 25, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 27 \log_5^3 2, \\ y = 4 \log_2^2 5, \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} = 25, \\ 2^{\sqrt{y}} = 8, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt[3]{x} = 2, \\ \sqrt{y} = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8, \\ y = 9. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(8; 9), (27 \log_5^3 2; 4 \log_2^2 5)\}$.

Для розв'язання систем показникових рівнянь іноді ефективно застосувати логарифмування одного або обох рівнянь системи.

Приклад 4 ([9]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Після логарифмування обох рівнянь системи за основою 2, одержимо:

$$\begin{cases} x + y \log_2 3 = \log_2 6, \\ x \log_2 3 + 2y = \log_2 12. \end{cases}$$

Ця система є системою лінійних алгебраїчних рівнянь і може бути розв'язана способом підстановки:

$$\begin{cases} x = -y \log_2 3 + \log_2 6, \\ (\log_2 6 - y \log_2 3) \log_2 3 + 2y = 1 + \log_2 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 6 - y \log_2 3, \\ y(2 - \log_2^2 3) = 1 + \log_2 6 - \log_2 6 \cdot \log_2 3. \end{cases}$$

Використовуючи властивості логарифма, остаточно знаходимо:

$$\begin{cases} x = \log_2 6 - \log_2 3, \\ y(2 - \log_2^2 3) = 2 - \log_2^2 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 6 - y \log_2 3, \\ y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 6 - \log_2 3, \\ y = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(1; 1)\}$.

Іноді для розв'язання системи показникових рівнянь доводиться застосовувати комбінацію різних способів.

Приклад 5 ([11]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \\ x^2 + 5y^2 = 6xy. \end{cases}$$

Розв'язання. Легко переконатися, що $x=0$ і $y=0$ не є розв'язками системи, а її друге рівняння є однорідним. Позначимо $\frac{x}{y} = t$. Нова невідома t

задовольняє квадратне рівняння: $t^2 - 6t + 5 = 0$, корені якого $t_1 = 1$; $t_2 = 5$.

Отже, вихідна система еквівалентна сукупності систем:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 1, \\ 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y, \\ 2^{\frac{2y}{3}} + 2^{\frac{y}{3}} = 6, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \frac{x}{y} = 5, \\ 2^{\frac{x+y}{3}} + 2^{\frac{x+y}{6}} = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5y, \\ 2^{2y} + 2^y = 6. \end{cases}$$

Другі рівняння в цих системах можуть бути зведені до квадратних рівнянь, введенням нових змінних. Розв'язавши ці рівняння, знаходимо:

$$\begin{cases} x = y, \\ 2^{\frac{y}{3}} = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3, \\ y = 3, \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 5y, \\ 2^y = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(3; 3), (5; 1)\}$.

Часто зустрічаються системи, у які входять рівняння виду $u(x; y)^{v(x; y)} = 1$. Розв'язуючи такі системи, варто пам'ятати, що розв'язками останнього рівняння є ті розв'язки рівняння $v(x; y) = 0$, при яких $u(x; y) \neq 0$, ті розв'язки рівняння $u(x; y) = 1$, при яких $v(x; y)$ визначена, і ті розв'язки рівняння $u(x; y) = -1$, при яких $v(x; y)$ визначена і парна.

Приклад 6 ([4]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язання. Очевидно, що $x \neq 0$ і $y \neq 0$. Тоді

$$\begin{cases} 5x^2 - 51x + 10 = 0, \\ xy = 15. \end{cases}$$

Розв'язки цієї системи: $(10; 1,5)$, $(0,2; 75)$. Нехай $y = 1$. Тоді з другого рівняння маємо $x = 15$. Якщо $y = -1$, то з другого рівняння отримаємо також $x = -15$. Підставимо в перше рівняння $(-1)^{1890} = 1$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(-15; -1), (15; 1), (10; 1,5), (0,2; 75)\}$.

Приклад 7 ([11]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} x^{y^2-7y+10} = 1, \\ x + y = 8. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases} y^2 - 7y + 10 = 0, \\ x + y = 8, \\ x \neq 0, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 1, \\ x + y = 8, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = -1, \\ x + y = 8, \\ y^2 - 7y + 10 - \text{парне число.} \end{cases}$$

Їх розв'язками будуть такі пари чисел: $(6; 2)$, $(3; 5)$, $(1; 7)$, $(-1; 9)$.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(6; 2), (3; 5), (1; 7), (-1; 9)\}$.

Приклад 8 ([19]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} y^x = 1,5 + y^{-x}, \\ y^{2,5+x} = 64, \end{cases} \quad (y > 0).$$

Розв'язання. Перше рівняння системи є квадратним відносно $z = y^x$, $z > 0$: $z^2 - 1,5z - 1 = 0$. Його розв'язок, з урахуванням обмежень, $z = 2$. Тоді систему можна записати так:

$$\begin{cases} y^x = 2, \\ y^{2,5} \cdot y^x = 64, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^x = 2, \\ y^{2,5} = 32, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^x = 2, \\ y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x = 2, \\ y = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = 4. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{\left(\frac{1}{2}; 4\right)\right\}.$

Приклад 9 ([7]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x + \cos y} = 3, \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Зробимо заміну змінних. Позначимо $u = 9^{\cos y}$, $v = 81^{\operatorname{tg} x}$.

Після цього дана система набере вигляду:

$$\begin{cases} uv = 3, \\ u - v = 2. \end{cases}$$

Зауважимо, що $u > 0$ і $v > 0$. Останню систему розв'язуємо за допомогою підстановки $u = v + 2$. Після перетворень перше рівняння системи набирає вигляду: $v^2 + 2v - 3 = 0$. Його коренями будуть числа 1 і -3 . Отже, остання система має два розв'язки: $(3; 1)$ і $(-1; -3)$. Враховуючи, що $u > 0$ і $v > 0$, відкидаємо розв'язок $(-1; -3)$. Залишається підставити знайдені значення u і v у формули: $3 = 9^{\cos y}$, $1 = 81^{\operatorname{tg} x}$, і розв'язати знайдені рівняння:

$$81^{\operatorname{tg} x} = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$9^{\cos y} = 3 \Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 2\pi m \pm \frac{\pi}{3}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \left\{\left(\pi n; 2\pi m \pm \frac{\pi}{3}\right), \quad m, n \in \mathbb{Z}\right\}.$

3.3. Системи логарифмічних рівнянь

У цьому підрозділі розглянемо розв'язування систем, що містять логарифмічні функції від невідомих. Якщо одне з рівнянь системи є рівністю логарифмів з однаковими основами, то це рівняння можна замінити простішим за допомогою операції потенціювання. Ця операція ґрунтується на тому, що логарифмічне рівняння $\log_a f(x; y) = \log_a g(x; y)$ рівносильне системі ([1-5]):

$$\begin{cases} f(x; y) > 0, \\ g(x; y) > 0, \\ f(x; y) = g(x; y). \end{cases}$$

Приклад 1 ([1]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y - 20 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $D = \{x > 0, y > 0\}$. На цій множині вихідна система рівносильна такій системі

$$\begin{cases} \log_4 xy = \log_4 36, \\ x + y - 20 = 0, \end{cases}$$

яка, у свою чергу, рівносильна симетричній системі

$$\begin{cases} xy = 36, \\ x + y = 20. \end{cases}$$

Розв'язком останньої будуть пари чисел $(18; 2)$, $(2; 18)$. Обидва розв'язки належать множині D , а отже, є розв'язками вихідної системи.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(18; 2), (2; 18)\}$.

Часто буває корисно використати основну логарифмічну тотожність.

Приклад 2 ([3]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Дана система визначена на множині чисел, для яких $x + y > 0$ і $x - y > 0$. На цій множині правильні такі перетворення:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 10(x+y) = 50, \\ \lg((x-y)(x+y)) = \lg 20, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5, \\ (x-y)(x+y) = 20, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x+y = 5, \\ x-y = 4, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4,5, \\ y = 0,5. \end{cases} \end{aligned}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(4,5; 0,5)\}$.

Приклад 3 ([4]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ 2^{-\log_2 x} + 5^{\log_5 \frac{1}{y}} = \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $D = \{x > 0, y > 0\}$. Після використання основної логарифмічної тотожності в другому рівнянні системи вона запишеться у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} = 12, \\ \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{xy} = 12, \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+y)(x^2 - xy + y^2)}{xy} = 12, \\ \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}(x^2 - xy + y^2) = 12, \\ 3(x+y) = xy, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 36, \\ 3(x+y) - xy = 0. \end{cases}$$

Отримана симетрична система має три розв'язки: $(6;6)$, $\left(\frac{-3+3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3-3\sqrt{5}}{2}\right)$,

і $\left(\frac{-3-3\sqrt{5}}{2}; \frac{-3+3\sqrt{5}}{2}\right)$, але останні два розв'язки не входять в ОДЗ.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(6;6)\}$.

Якщо невідоме знаходиться в основі логарифма, то часто рівняння можна замінити алгебраїчними, якщо скористатися означенням логарифма.

Приклад 4 ([5]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_x(3x + 2y) = 2, \\ \log_y(2x + 3y) = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $D = \{x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1\}$. На зазначеній множині вихідна система рівносильна системі:

$$\begin{cases} 3x + 2y = x^2, \\ 2x + 3y = y^2. \end{cases}$$

Віднявши від першого рівняння друге, одержимо систему:

$$\begin{cases} x - y = x^2 - y^2, \\ 3x + 2y = x^2, \end{cases}$$

яка рівносильна сукупності систем:

$$\begin{cases} x - y = 0, \\ 3x + 2y = x^2, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ 3x + 2y = x^2. \end{cases}$$

Розв'язками першої системи будуть пари чисел $(0;0)$, $(5;5)$, а другої: $(-1;2)$ і $(2;-1)$. Проте тільки пара чисел $(5;5)$ належить множині D . Інші розв'язки до ОДЗ не входять, і їх треба відкинути як сторонні.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(5;5)\}$.

Для розв'язування деяких систем логарифмічних рівнянь можна ефективно застосовувати формулу переходу до нової основи.

Приклад 5 ([3]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y = 4, \\ \log_4 x + \log_2 y = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Для даної системи ОДЗ: $D = \{x > 0, y > 0\}$. Нехай $\log_2 x = a$, $\log_2 y = b$. Тоді, використовуючи формулу переходу до нової основи, вихідну систему можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} 2a + b = 8, \\ a + 2b = 10. \end{cases}$$

Отримана лінійна система має розв'язок $(2;4)$. Повертаючись до змінних x , y , отримаємо:

$$\begin{cases} \log_2 x = 2, \\ \log_2 y = 4, \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 4, \\ y = 16. \end{cases}$$

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(4;16)\}$.

Приклад 6 ([2]). Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $D = \{x > 0, y > 0, x \neq 1, y \neq 1\}$. Розглянемо перше рівняння системи. На множині D правильна рівність: $\log_x y = \frac{1}{\log_y x}$. Нехай $z = \log_x y$, причому $z \neq 0$. Тоді перше рівняння можна представити у

вигляді: $z + 1/z = 2$, або $z^2 - 2z + 1 = 0$. Звідси $z = 1$. Отже, $\log_x y = 1$, звідки випливає рівність $x = y$. Тоді на множині D вихідна система буде рівносильна такій:

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 - y = 20. \end{cases}$$

Розв'язками останньої будуть пари чисел $(5;5)$ і $(-4;-4)$. Другий розв'язок не входить в область допустимих значень і його слід відкинути.

Відповідь: $\{(x; y)\} = \{(5;5)\}$.

Якщо в процесі розв'язування систем рівнянь, що містять логарифмічні функції, не було визначено ОДЗ змінних або в ході розв'язування не всі перетворення були рівносильними, то необхідно виконати перевірку. Перевірку здійснюють підстановкою знайдених розв'язків у вихідну систему, і вона є обов'язковим елементом розв'язування системи рівнянь.

4. Системи рівнянь з параметрами і модулями

Приклад 1 ([12]). При якому значенні параметра a система

$$\begin{cases} ax + 4y = 19, \\ 16x + ay = 38, \end{cases}$$

має безліч розв'язків?

Розв'язання. Якщо $\frac{a}{16} = \frac{4}{a} = \frac{19}{38}$, то система має безліч розв'язків.

Розв'яжемо рівняння $\frac{a}{16} = \frac{4}{a}$. Звідси $a = \pm 8$. З умови $\frac{4}{a} = \frac{19}{38}$ маємо $a = 8$.

Відповідь: $a = 8$.

Приклад 2 ([5]). При яких значеннях параметра b система

$$\begin{cases} 3x + 2by = 1, \\ (3b - 1)x - by = 1, \end{cases}$$

не має розв'язків?

Розв'язання. Система не має розв'язків, якщо $\frac{3}{3b-1} = \frac{2b}{-b} \neq 1$. Розв'яжемо рівняння

$$\frac{3}{3b-1} = -\frac{2b}{b}, \begin{cases} -6b+2=3, \\ b \neq 0, \\ b \neq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Звідси $b = -\frac{1}{6}$. Перевіримо умову $\frac{3}{3b-1} \neq 1$. Підставимо в останній вираз значення $b = -\frac{1}{6}$, отримаємо суперечність $-2 \neq 1$. Якщо $b = 0$, то система

$$\begin{cases} 3x-1=0, \\ -x-1=0, \end{cases} \text{ немає розв'язків.}$$

Відповідь: $b \in \left\{-\frac{1}{6}; 0\right\}$.

Приклад 3 ([4]). При яких значеннях параметра n система рівнянь

$$\begin{cases} nx + (3n-8)y = 3n, \\ 2x + (n-2)y = n+1, \end{cases}$$

має розв'язки $x < 0$ і $y > 0$?

Розв'язання. Дана система має розв'язки, якщо

$$\frac{n}{2} \neq \frac{3n-8}{n-2},$$

тобто $n^2 - 8n + 16 \neq 0$, $n \neq 4$. Розв'язуючи систему рівнянь, матимемо

$$x = \frac{-n+8}{(n-4)^2}, \quad y = \frac{n(n-5)}{(n-4)^2}.$$

За умовою задачі $x < 0$, $y > 0$. Тому

$$\begin{cases} \frac{-n+8}{(n-4)^2} < 0, \\ \frac{n(n-5)}{(n-4)^2} > 0. \end{cases}$$

Оскільки $(n-4)^2 > 0$, то остання система рівносильна такій системі:

$$\begin{cases} -n+8 < 0, \\ n(n-5) > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n > 8, \\ \begin{cases} n < 0, \\ n > 5, \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow n > 8.$$

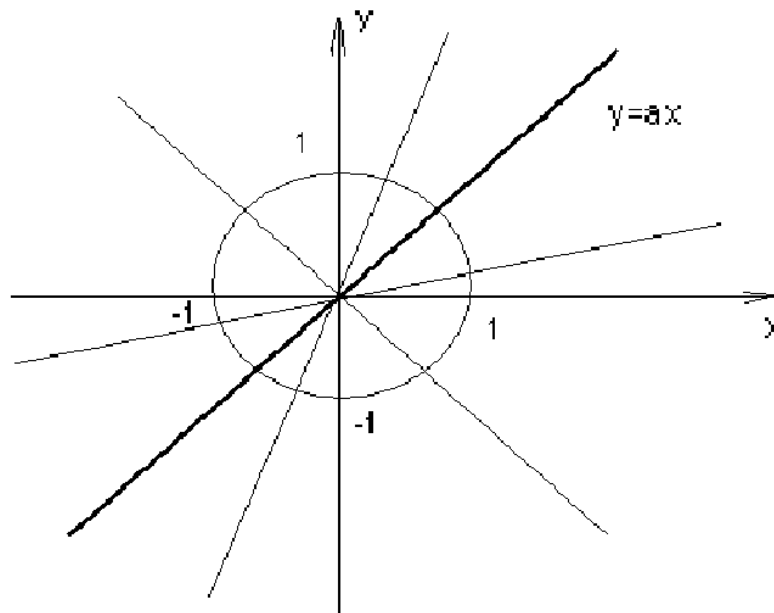
Відповідь: $n \in (8; +\infty)$.

Приклад 4 ([17]). Визначити кількість розв'язків системи в залежності від усіх значень параметра a :

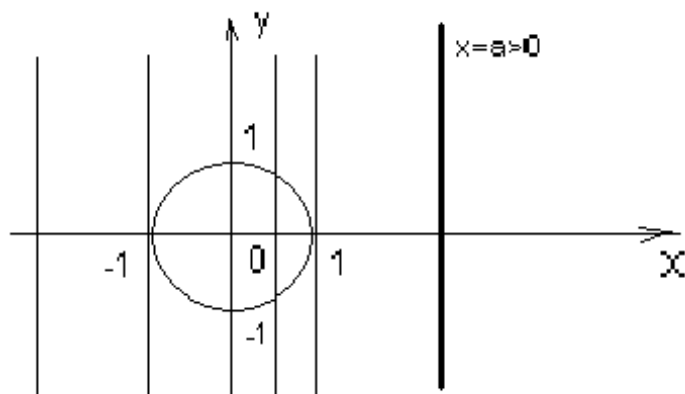
$$\text{а) } \begin{cases} y = ax, \\ x^2 + y^2 = 1; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x = a, \\ x^2 - 1 = -y^2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} x^2 + y^2 = -2ax, \\ y = 0; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} x^2 + (y - \sqrt{a^2 - 2})^2 = -1 + a^2, \\ y = 0. \end{cases}$$

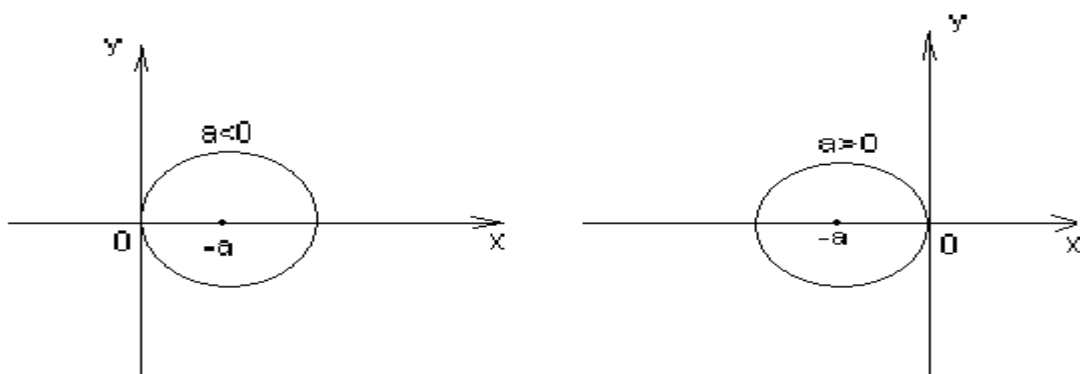
Розв'язання. а) $x^2 + y^2 = 1$ – коло радіуса $R=1$ з центром в точці $O(0;0)$, а $y = ax$ – пряма, яка проходить через початок координат $O(0;0)$ і обертається навколо нього при зміні параметра a . Отже, маємо два розв'язки при $a \in \mathbb{R}$.



б) $x^2 + y^2 = 1$ – коло з центром в точці $O(0;0)$ і радіуса $R=1$, а $x = a$ – пряма, паралельна осі OY . Отже, для $a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ система розв'язків немає; для $a = \pm 1$, вона має один розв'язок; а для $a \in (-1, 1)$ два розв'язки.



в) $x^2 + y^2 + 2ax = 0 \Leftrightarrow (x+a)^2 + y^2 = a^2$ – коло з центром в точці $(-a; 0)$ радіуса $R=|a|$, яке переміщується вздовж осі OX , а $y=0$ – пряма. Отже, для $a=0$ маємо точку в початку координат; для $a \neq 0$ маємо два розв'язки.

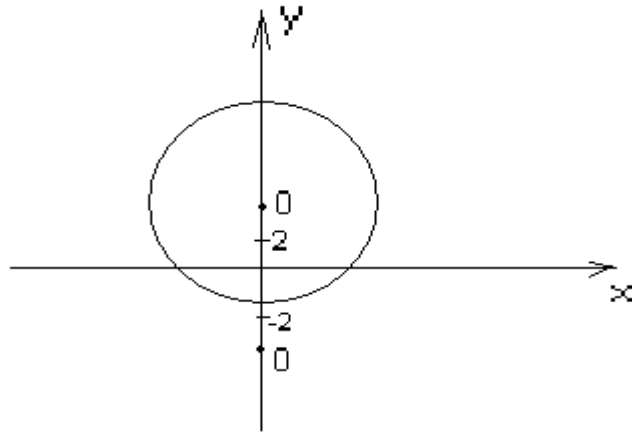


г) 1 спосіб: $x^2 + (y - \sqrt{a^2 - 2})^2 = a^2 - 1$ за умови $a^2 - 2 \geq 0$ є колом з центром в точці $(0; \sqrt{a^2 - 2})$ на осі OY і радіусом $R = \sqrt{a^2 - 1}$. Відстань від початку координат до центра кола менша за радіус кола: $\sqrt{a^2 - 2} < \sqrt{a^2 - 1}$. Таким чином, для $a \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$ система розв'язків немає, а для $a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$ має два розв'язки.

2 спосіб: Зауважимо, що при $y=0$ перше рівняння приймає вигляд

$$x^2 + a^2 - 2 = a^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \geq 2, \\ x^2 = 1, \end{cases}$$

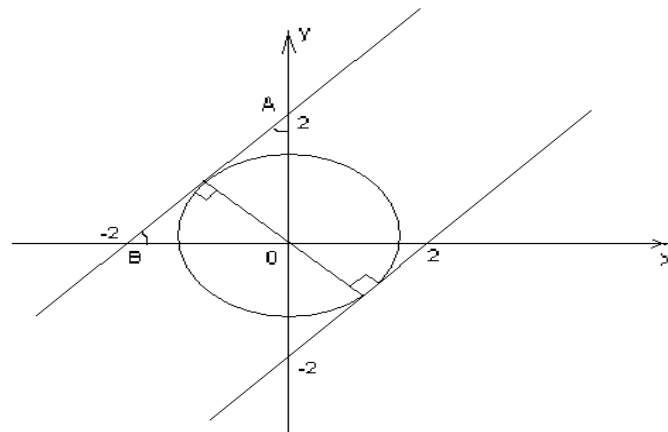
тобто для всіх $|a| \geq \sqrt{2}$ маємо дві точки перетину кола з віссю OX при $x = \pm 1$.



Приклад 5 ([13]). Знайти усі значення параметра r , для кожного з яких система рівнянь

$$\begin{cases} |x - y| = 2, \\ x^2 + y^2 = r^2, \end{cases}$$

має два розв'язки?



Розв'язання. Рівняння $|x - y| = 2$ визначає на координатній площині $ХОУ$ дві прямі $y = x \pm 2$, які є паралельними. Рівняння $x^2 + y^2 = r^2$ є рівнянням кола радіуса $R = |r|$ з центром в точці $O(0;0)$. Отже, дана система рівнянь має два розв'язки тоді й тільки тоді, коли коло дотикається до вказаних прямих. З малюнка видно, що трикутник $\triangle AOB$ є рівнобедреним, бо $\angle A = \angle B = 45^\circ$. Тоді його висота $OK = R = OA \cdot \sin \angle A = 2 \sin 45^\circ = \sqrt{2}$ і $|r| = \sqrt{2} \Rightarrow r = \pm \sqrt{2}$.

Відповідь: $r = \pm \sqrt{2}$.

Приклад 6 ([19]). Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких рівняння $|x-1|+|x-3|=a$ має більше двох розв'язків?

Розв'язання. Розв'яжемо графічно систему рівнянь

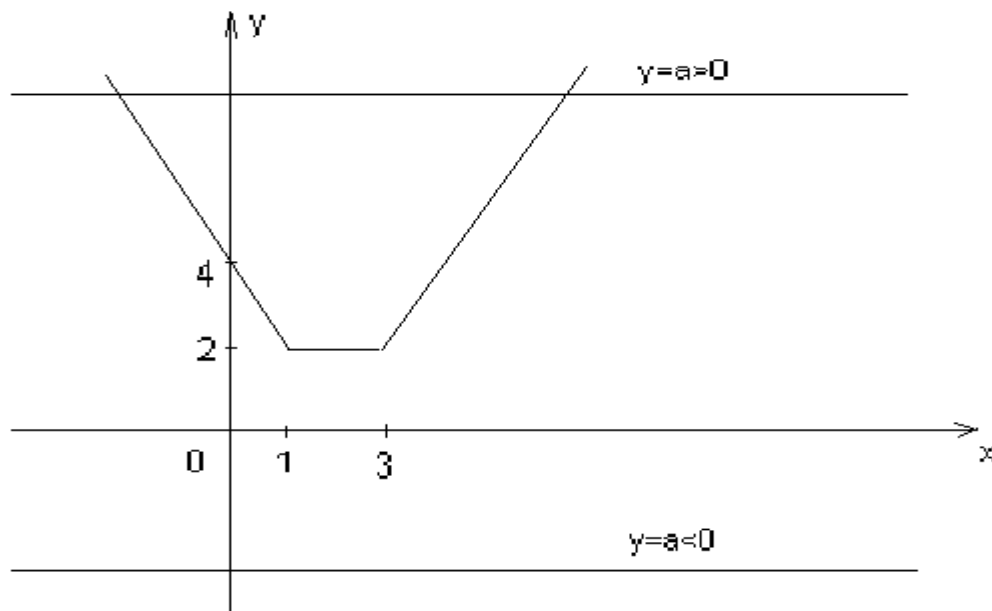
$$\begin{cases} y = |x-1| + |x-3|, \\ y = a. \end{cases}$$

Побудуємо графіки обох рівнянь системи (див. малюнок нижче). Маємо

$$y = |x-1| + |x-3| \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \leq 1, \\ y = -2x + 4, \end{cases} \begin{cases} 1 \leq x \leq 3, \\ y = 2, \end{cases} \begin{cases} x \geq 3, \\ y = 2x - 4. \end{cases}$$

Відповідь: для $a > 2$ рівняння має два розв'язки, для $a < 2$ рівняння розв'язків немає, а для $a = 2$ одержимо $x \in [1; 3]$ і маємо нескінченну кількість розв'язків.

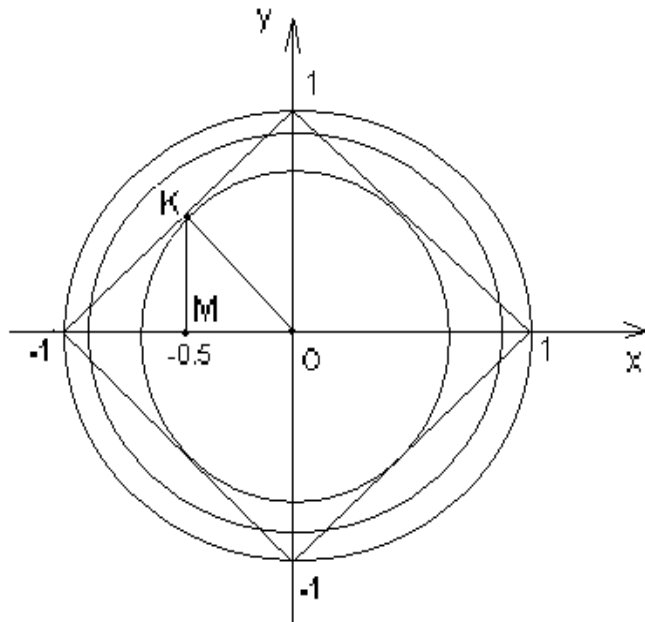


Приклад 7 ([14]). Знайдіть кількість розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} |x| = 1 - |y|, \\ x^2 - a = -y^2, \end{cases}$$

в залежності від параметра a ?

Розв'язання. З геометричних міркувань, для того щоб знайти кількість розв'язків системи рівнянь, необхідно відшукати кількість точок перетину кривих, які визначають рівняння системи для кожного фіксованого значення параметра a . Графіком першого рівняння $|x| + |y| = 1$ є квадрат. Друге рівняння $x^2 + y^2 = a$ – це множина кіл радіуса $\sqrt{a}$, $a > 0$, з центром в початку координат. Якщо $a = 0$, то коло вироджується в точку. Якщо $a > 1$, то розв'язків немає;



якщо $a = 1$, то маємо 4 розв'язки;

якщо $\frac{1}{2} < a < 1$, то 8 розв'язків. З

малюнка видно, що $\triangle AOB$ – прямокутний трикутник, бо

$AO = OB = 1$, $AB = \sqrt{2}$ і

$KO = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Крім того,

трикутник $\triangle KMO$ –

прямокутний і рівнобедрений,

оскільки $MO = KM = x$. Тоді

$x^2 + x^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$, $2x^2 = \frac{1}{2}$ і $x = \pm \frac{1}{2}$. Звідси $MO = KM = \frac{1}{2}$. Отже, при $a = \frac{1}{2}$ є 4

розв'язки. При $a < \frac{1}{2}$ система розв'язків немає.

Відповідь: якщо $a < \frac{1}{2}$ і $a > 1$, то система не має розв'язків; якщо

$a \in \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$, то система має 4 розв'язки; якщо $\frac{1}{2} < a < 1$, то система має 8 розв'язків.

Приклад 8 ([15]). При яких значеннях a система

$$\begin{cases} \cos x + \sin y = 2a^2, \\ \cos x \sin y = a^2(a^2 - 4), \end{cases}$$

має розв'язки?

Розв'язання. Розв'яжемо дану систему, використовуючи обернену

теорему Вієта. Тоді, $\cos x$ та $\sin y$ будуть розв'язками квадратного рівняння

$$t^2 - 2a^2t + a^2(a^2 - 4) = 0. \text{ Маємо}$$

$$\begin{cases} \cos x + \sin y = 2a^2, \\ \cos x \sin y = a^2(a^2 - 4), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = a^2 + 2a, \\ \sin y = a^2 - 2a, \\ \cos x = a^2 - 2a, \\ \sin y = a^2 + 2a. \end{cases}$$

Оскільки $\cos x \in [-1; 1]$ та $\sin y \in [-1; 1]$, то система має розв'язки при всіх значеннях параметра a , для яких

$$\begin{aligned} \begin{cases} |a^2 + 2a| \leq 1, \\ |a^2 - 2a| \leq 1, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a \leq 1, \\ a^2 + 2a \geq -1, \\ a^2 - 2a \leq 1, \\ a^2 - 2a \geq -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 2a - 1 \leq 0, \\ a^2 - 2a - 1 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} -1 - \sqrt{2} \leq a \leq -1 + \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2} \end{cases} &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{2} \leq a \leq 1 + \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Відповідь: $a \in [1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}]$.

Висновки

В магістерській роботі систематизовано методи розв'язування систем рівнянь в шкільному курсі математики. Розглянуто основні способи розв'язування систем рівнянь та проаналізовано типові труднощі, які виникають при їх розв'язуванні. Зокрема, розглянуто системи алгебраїчних рівнянь, дано класифікацію таких систем і розглянуто питання їх еквівалентності. Наведено основні методи і способи розв'язування систем лінійних рівнянь, однорідних і симетричних систем рівнянь, систем алгебраїчних раціональних та ірраціональних рівнянь. Крім того, розглянуто методичні особливості вивчення систем трансцендентних рівнянь: тригонометричних, показникових, логарифмічних рівнянь, та систем рівнянь з параметрами і модулями. При цьому, підібрано рівневу диференційовану систему вправ, подано приклади розв'язування систем рівнянь різної складності.

Отже, при розв'язуванні кожної конкретної системи рівнянь необхідно спочатку аналізувати рівняння, що входять до неї, і вже потім вибирати відповідний метод розв'язання.

Результати магістерської роботи можуть бути рекомендовані для використання у системі доуніверситетської підготовки молоді, школах, ліцеях та гімназіях, для підготовки випускників до зовнішнього незалежного оцінювання і абітурієнтів до вступу у заклади вищої освіти.

Дана магістерська робота буде корисною для вчителів математики, а також для всіх охочих самостійно підвищити свою математичну культуру.

Список використаних джерел

1. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Конкурсні задачі з математики. – К.: Вища школа, 2001. – 264 с.
2. Гайштут О.Г., Литвиненко Г.М. Розв'язання алгебраїчних задач. – К.: Радянська школа, 1991. – 240 с.
3. Гальперіна А.Р., Михеєва О.Я. Математика. Типові тестові завдання: навчальний посібник. – Х. : Факт, 2008. – 128 с.
4. Горделадзе Ш.Г., Кухарчук М.М., Яремчик Ф.П. Збірник конкурсних задач з математики. – К.: Вища школа, 1988. – 328 с.
5. Завало Т.С. Практикум з розв'язування задач: алгебра. – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1975. – 196 с.
6. Захарійченко Ю.О., Школьний О.В. Математика: збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. – К.: Генеза, 2008. – 104 с.
7. Каплан Я.Л. Математика: навчальний посібник для підготовки до конкурсних екзаменів до вузів. – К.: Вища школа, 1971. – 504 с.
8. Ковальчук В.Ф., Корнієць С.Д., Лавренюк В.І., Мартиненко В.С., Шарова Л.І. Математика: навчальний посібник. – К.: МСП «Козаки», 1996. – 185 с.
9. Лейфура В.М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язування: навчально-методичний посібник. – Львів, 1999. – 126 с.
10. Ломонос Л.М., Муранова Н.П., Муранов О.С., Рилов А.В. Вибрані питання математики. Системи алгебраїчних раціональних рівнянь вищих степенів: навчально-методичний посібник. – К.: НАУ, 2011. – 96 с.
11. Приймаков О.Г., Манявко О.І. Цікаві розділи математики 8-11 класів: навчальний посібник. – К.: Скорпіон, 2001. – 104 с.
12. Роганін О.М. Збірник тренувальних вправ з математики. – Харків: Весна, 2008. – 96 с.
13. Сарана О.А., Ясінський В.В. Конкурсні задачі підвищеної складності з математики: навчальний посібник. – К.: НТУУ “КПІ”, 2005. – 260 с.
14. Слєпкань З.І. Методика навчання математики. – К.: Вища школа, 2006. – 136 с.

15. Сканаві М.І. Збірник задач з математики для вступників до ВТУЗІВ. – К.: Вища школа, 1996. – 445 с.
16. Ушаков Р.П. Повторювальний курс математики: посібник для учнів середніх закладів освіти. – К. : Техніка, 1999. –504 с.
17. Ципкін О.Г. Довідник з математики для середніх навчальних закладів. – К.: Вища школа. Головне видавництво, 1988. – 414 с.
18. Шарова Л.І. Рівняння і нерівності. – К.: Вища школа, 1981. – 280 с.
19. Шмаков І.П., Андрощук Л.В. Математика. Раціональні функції: навчально-методичний посібник. – К.: Видавництво НАУ, 2001. – 103 с.
20. Качмар І.З. Методи розв’язування систем рівнянь в шкільному курсі математики // “Актуальні проблеми сучасної науки”: матеріали XI-ї міжнародної науково-практичної конференції студентів та викладачів факультету фізики, математики, економіки та інноваційних технологій. – Дрогобич, 2024. – 318-319.