

Войтович Х.О., Війчук Т.І., Галь Ю.М.

Методичні вказівки (рекомендації) для самостійної роботи студентів
з навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння»

Дрогобич

2025

Вступ

Диференціальні рівняння є важливим розділом вищої математики, що знаходить широке застосування в природничих і технічних науках. Вони дозволяють описувати різноманітні фізичні, біологічні, економічні та інші процеси за допомогою математичних моделей.

Дані **методичні вказівки** розроблені з метою допомоги студентам у **самостійному вивченні** дисципліни «Диференціальні рівняння». У них подані **основні теоретичні відомості, розбір типових прикладів і завдання для самостійного розв'язування**, що відповідають змісту робочої програми курсу.

Методичні рекомендації містять:

- ключові поняття і методи розв'язування диференціальних рівнянь різних типів;
- комплекс завдань для закріплення матеріалу та розвитку навичок розв'язування диференціальних рівнянь;
- рекомендації щодо самостійного виконання завдань, візрці типової самостійної та контрольної робіт.

Рекомендовано використовувати дані методичні вказівки у поєднанні з лекційними матеріалами, навчальними посібниками та консультаціями викладача.

1. Диференціальні рівняння першого порядку. Диференціальні рівняння з відокремленими змінними.

Диференціальне рівняння першого порядку – це рівняння вигляду

$$F(x, y, y') = 0, \quad (1)$$

де $y' = \frac{dy}{dx}$ — перша похідна шуканої функції $y(x)$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння – це функція

$$y = \varphi(x, C),$$

яка містить довільну сталу C і задовольняє рівняння (1).

Диференціальне рівняння з відокремленими змінними – це рівняння, яке можна записати у формі

$$f(y) dy = g(x) dx,$$

де функції $f(y)$ та $g(x)$ залежать лише від своїх змінних.

Метод відокремлення змінних — це один із найпростіших і найпоширеніших методів розв'язування звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Він застосовується до рівнянь, які можна подати у вигляді добутку функцій лише від y і лише від x .

Загальна форма такого рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{f(y)}.$$

Мета методу — «відокремити» змінні: переписати рівняння так, щоб всі y і dy були з одного боку, а всі x і dx — з іншого:

$$f(y) dy = g(x) dx.$$

Після цього обидві частини інтегруються:

$$\int f(y) dy = \int g(x) dx.$$

У результаті отримаємо загальний розв'язок рівняння у вигляді:

$$F(y) = G(x) + C,$$

де C — довільна стала інтегрування.

У разі наявності початкових умов $y(x_0) = y_0$, можна знайти конкретне значення C і отримати частинний розв'язок.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y + \ln y}.$$

Розв'язок

Крок 1: Перетворення рівняння до вигляду з відокремленими змінними

$$(y + \ln y) dy = x^2 dx.$$

Крок 2: Інтегрування обох частин.

$$\int (y + \ln y) dy = \int x^2 dx.$$

Обчислимо інтеграли:

$$\int y dy + \int \ln y dy = \int x^2 dx.$$

Перший інтеграл:

$$\int y dy = \frac{y^2}{2}.$$

Другий інтеграл вирішується за методом інтегрування частинами, беручи $u = \ln y$, $dv = dy$:

$$\int \ln y \, dy = y \ln y - y.$$

Інтеграл у правій частині:

$$\int x^2 \, dx = \frac{x^3}{3}.$$

Крок 3: Запис загального розв'язку.

$$\frac{y^2}{2} + y \ln y - y = \frac{x^3}{3} + C.$$

Це загальний розв'язок даного диференціального рівняння.

Завдання для самостійного опрацювання

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y + \ln y}, 2. \frac{dy}{dx} = \frac{x^3}{y^2 + 1}, 3. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}, 4. \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x - y},$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + x}{y^2 + 1}, 6. \frac{dy}{dx} = \frac{x \ln y}{y \ln x}, 7. \frac{dy}{dx} = \frac{\sin y}{x}, 8. \frac{dy}{dx} = \frac{xe^x}{y + x},$$

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{y \operatorname{tg} x}{x}, 10. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 + 1}{xy}, 11. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y(1 + x)}, 12. \frac{dy}{dx} = \frac{x + e^y}{y + e^x},$$

$$13. \frac{dy}{dx} = \frac{y \ln(x + y)}{x}, 14. \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y^3}{xy}, 15. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy + 1}, 16. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2},$$

$$17. \frac{dy}{dx} = \frac{x^4 + y^4}{xy^2}, 18. \frac{dy}{dx} = \frac{x + \cos y}{y + \sin x}, 19. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 e^x}{x^3 + y}, 20. \frac{dy}{dx} = \frac{x^5 + y^5}{xy + 1},$$

$$21. \frac{dy}{dx} = \frac{\tan x}{y + e^y}, 22. \frac{dy}{dx} = \frac{x + ye^y}{x - ye^x}, 23. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 e^y}{y^2 + xe^x}, 24. \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + y \ln y}{y^2 + x},$$

$$25. \frac{dy}{dx} = \frac{x \sin y}{y \cos x}, 26. \frac{dy}{dx} = \frac{xy}{x^2 + y^2 + 1}, 27. \frac{dy}{dx} = \frac{x + \ln(y + x)}{y + \ln(x + y)},$$

$$28. \frac{dy}{dx} = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}, 29. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 \cos y}{y^2 + \sin x}, 30. \frac{dy}{dx} = \frac{xe^y + ye^x}{xy + e^x e^y}.$$

2. Однорідні диференціальні рівняння і звідні до них

Однорідне диференціальне рівняння першого порядку — це рівняння виду

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right),$$

тобто права частина є однорідною функцією нульового степеня.

Однорідна функція — функція $f(x, y)$, яка задовольняє умову:

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),$$

де k — степінь однорідності. Для диференціальних рівнянь розглядають $k = 0$.

Метод підстановки $y = ux$ (або $u = \frac{y}{x}$) — основний метод розв'язування однорідного рівняння. Після підстановки рівняння зводиться до такого, що має відокремлені змінні:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow y = ux, \quad dy = u dx + x du.$$

Отримуємо рівняння з відокремленими змінними для $u(x)$.

Рівняння, зведене до однорідного — рівняння вигляду:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{mx + ny + d}\right),$$

яке можна звести до однорідного шляхом лінійної заміни змінних:

$$x = X + x_0, \quad y = Y + y_0,$$

де (x_0, y_0) — точка, що обертає чисельник і знаменник у виразі в нулі.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{x}.$$

Розв'язок

$$\frac{x + y}{x} = 1 + \frac{y}{x} \Rightarrow \text{функція залежить лише від } \frac{y}{x}, \text{ тому рівняння однорідне.}$$

Крок 2. Підстановка:

$$y = ux \Rightarrow \frac{dy}{dx} = u + x \frac{du}{dx}.$$

Крок 3. Підставимо у вихідне рівняння:

$$u + x \frac{du}{dx} = 1 + u.$$

Крок 4. Скоротимо однакові частини:

$$x \frac{du}{dx} = 1.$$

Крок 5. Розділимо змінні та проінтегруємо:

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int du = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow u = \ln|x| + C.$$

Крок 6. Повертаємося до змінної y :

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x(\ln|x| + C).$$

Відповідь:

$$y = x(\ln|x| + C).$$

Завдання для самостійного опрацювання

$$1. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad 2. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \quad 3. \frac{dy}{dx} = \frac{x-y}{x} \quad 4. \frac{dy}{dx} = \frac{x+2y}{x},$$

$$5. \frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{x-y} \quad 6. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \quad 7. \frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{x+y} \quad 8. \frac{dy}{dx} = \frac{3x+4y}{x+2y},$$

$$9. \frac{dy}{dx} = \frac{2x-y}{x+y} \quad 10. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+xy}{x^2} \quad 11. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x^2} \quad 12. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{y},$$

$$13. \frac{dy}{dx} = \frac{4x+y}{2x+y} \quad 14. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x+2y} \quad 15. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y+1}{x} \quad 16. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y-2}{x}$$

$$17. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2-x^2}{2xy} \quad 18. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{xy} \quad 19. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} \quad 20. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$21. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2 + xy}{xy} \quad 22. \frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y + 3}{x + y + 1} \quad 23. \frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{x - y + 2} \quad 24. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x + y}$$

$$25. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy + 1} \quad 26. \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{xy} \quad 27. \frac{dy}{dx} = \frac{2x + 3y}{4x + y} \quad 28. \frac{dy}{dx} = \frac{x + 5y}{2x + y}$$

$$29. \frac{dy}{dx} = \frac{3x - y}{x + y} \quad 30. \frac{dy}{dx} = \frac{x + y}{\sqrt{xy}}.$$

3. Нелінійні диференціальні рівняння першого порядку

Нелінійне диференціальне рівняння першого порядку — це рівняння, яке не має лінійної форми відносно y або y' і не може бути зведене до вигляду:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x).$$

Класифікація та приклади:

Рівняння Бернуллі:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n, \quad n \neq 0, 1.$$

Рівняння Ріккати:

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y^2 + b(x)y + c(x).$$

Однорідне рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Рівняння Клеро (тип Лагранжа):

$$y = x \frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right).$$

Підходи до розв'язання нелінійних рівнянь:

Однорідні	Підстановка $y = ux$, розділення змінних
Бернуллі	Підстановка $z = y^{1-n}$, зведення до лінійного

Ріккати	Підстановка через частинний розв'язок
Клеро / Лагранжа	Параметризація $p=y'$, система
Інші випадки	Аналіз на інтегрувальний множник, чисельне інтегрування, підстановка змінних

Приклад (Рівняння Бернуллі)

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2.$$

Розв'язання

Підстановка: $z = y^{-1}$, тоді $\frac{dz}{dx} = -y^{-2} \frac{dy}{dx}$.

Маємо:

$$\frac{dz}{dx} = -y^{-2}(y^2 - y) = -(1 - y^{-1}) = z - 1$$

Отже,

$$\frac{dz}{dx} = z - 1 \Rightarrow \frac{dz}{z - 1} = dx \Rightarrow \ln|z - 1| = x + C$$

Повертаємось до змінної y :

$$\ln \left| \frac{1}{y} - 1 \right| = x + C.$$

Приклад (Рівняння Рікати)

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - y + 1.$$

Розв'язання

Це рівняння не має загального розв'язку в елементарних функціях. Припустимо, що нам відомий частинний розв'язок $y_1 = 1$.

Підстановка: $y = y_1 + \frac{1}{u}$, тоді рівняння зводиться до лінійного відносно u .

Після обчислень отримаємо рівняння:

$$\frac{du}{dx} + (2y_1 - 1)u = -1 \Rightarrow \frac{du}{dx} + u = -1.$$

Інтегруємо:

$$\mu(x) = e^{\int 1 dx} = e^x, \quad e^x u = -e^x + C \Rightarrow u = -1 + Ce^{-x}$$

Отже,

$$y = 1 + \frac{1}{-1 + Ce^{-x}}.$$

Приклад (Однорідне рівняння)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x}.$$

Розв'язання

Підстановка: $y = ux \Rightarrow dy = udx + xdu$

$$u + x \frac{du}{dx} = 1 + u \Rightarrow x \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \Rightarrow u = \ln|x| + C$$

Повертаємось до змінної y :

$$\frac{y}{x} = \ln|x| + C \Rightarrow y = x(\ln|x| + C).$$

Приклад (Рівняння Клеро (Лагранжа))

$$y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2.$$

Розв'язання

Позначимо $p = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y = xp + p^2$

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{dx}{dp} = -\frac{f'(p)}{p} = -\frac{2p}{p} = -2 \Rightarrow x = -2p + C$$

Підставимо в рівняння для у:

$$y = xp + p^2 = (-2p + C)p + p^2 = -2p^2 + Cp + p^2 = -p^2 + Cp$$

Отже, параметричний розв'язок:

$$x = -2p + C, y = -p^2 + Cp.$$

Завдання для самостійного опрацювання

Рівняння Бернуллі

$$1. \frac{dy}{dx} + y = y^2 \quad 2. \frac{dy}{dx} + y = x^2 y^2 \quad 3. \frac{dy}{dx} + 2y = y^3 \quad 4. \frac{dy}{dx} + y = x y^n,$$

$$5. \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x} y^2 \quad 6. \frac{dy}{dx} + y = x \sqrt{y} \quad 7. \frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y}.$$

Рівняння Ріккати

$$8. \frac{dy}{dx} = y^2 - y + 1 \quad 9. \frac{dy}{dx} = y^2 + x^2 \quad 10. \frac{dy}{dx} = y^2 - x^2 \quad 11. \frac{dy}{dx} = y^3 + y^2,$$

$$12. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + y \quad 13. \frac{dy}{dx} = x^2 y^2 + y \quad 14. \frac{dy}{dx} = x^2 y^2.$$

Однорідні рівняння

$$15. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \quad 16. \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x} \quad 17. \frac{dy}{dx} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \quad 18. \frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy},$$

$$19. \frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \quad 20. \frac{dy}{dx} = \frac{y^2 - x^2}{2xy} \quad 21. \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+y}.$$

Інші нелінійні рівняння

$$22. \frac{dy}{dx} = y(1-y) \quad 23. \frac{dy}{dx} = y^2 \cos x \quad 24. \frac{dy}{dx} = y^2 \tan x \quad 25. \frac{dy}{dx} = y(\ln y + x)$$

$$26. \frac{dy}{dx} = y^2 \ln x \quad 27. \frac{dy}{dx} = x\sqrt{y} \quad 28. \frac{dy}{dx} = y \sin x \quad 29. \frac{dy}{dx} = e^y + y^2,$$

$$30. \frac{dy}{dx} = x^2 + y^2.$$

4. Рівняння в повних диференціалах і звідні до них

Рівняння в повних диференціалах — це рівняння виду:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

яке є повним диференціалом деякої функції $F(x, y)$, тобто:

$$dF(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy = 0.$$

Критерій повноти:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

за умови, що M і N мають неперервні частинні похідні в області розгляду.

Розв'язком рівняння є функція:

$$F(x, y) = C, \quad \text{де } C - \text{ стала.}$$

Рівняння, зведені до повного диференціального вигляду це рівняння виду:

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$$

яке не є повним, але може бути зведене до повного множенням на інтегрувальний множник $\mu(x, y)$, такий що:

$$\mu(x, y) M(x, y) dx + \mu(x, y) N(x, y) dy$$

є повним диференціалом.

Інтегрувальний множник може залежати тільки від x , тільки від y або від обох змінних. Він підбирається методом підбору або спеціальних ознак. Розв'язок такого рівняння також записується у вигляді:

$$F(x, y) = C.$$

Приклад. Розв'язати рівняння

$$(2xy + y^2) dx + (x^2 + 2xy) dy = 0.$$

Розв'язок

$$M(x, y) = 2xy + y^2, \quad N(x, y) = x^2 + 2xy.$$

Обчислимо частинні похідні:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2x + 2y, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2x + 2y.$$

Оскільки $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$, рівняння — повне.

Шукаємо $F(x, y)$ таке, що:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M = 2xy + y^2$$

Інтегруємо за x :

$$F(x, y) = \int (2xy + y^2) dx = x^2 y + xy^2 + h(y)$$

Знайдемо похідну F за y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = x^2 + 2xy + h'(y)$$

Прирівнюємо до $N(x, y)$:

$$x^2 + 2xy + h'(y) = x^2 + 2xy \Rightarrow h'(y) = 0 \Rightarrow h(y) = C$$

Отже, розв'язок:

$$F(x, y) = x^2 y + xy^2 = C.$$

Завдання для самостійного опрацювання

1. $y dx + x dy = 0$
2. $(2xy + y^2) dx + (x^2 + 2xy) dy = 0$
3. $x dx + y dy = 0$
4. $(x^2 + y^2) dx + 2xy dy = 0$
5. $(2x + y) dx + x dy = 0$
6. $y^2 dx + 2xy dy = 0$
7. $(x + y) dx + (x - y) dy = 0$
8. $x^2y dx + xy^2 dy = 0$
9. $y \cos x dx + x \cos y dy = 0$
10. $ye^x dx + xe^y dy = 0$
11. $\sin y dx - x \cos y dy = 0$
12. $y dx + (x + \ln y) dy = 0$
13. $x^2 dx + y^2 dy = 0$
14. $2xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$
15. $(3x^2 + y) dx + x dy = 0$
16. $y dx - x dy = 0$
17. $x \ln y dx + y \ln x dy = 0$
18. $(x + y) dx + (x + y) dy = 0$
19. $\cos(x + y) dx + \cos(x + y) dy = 0$
20. $x dx + \tan y dy = 0$
21. $e^x dx + e^y dy = 0$
22. $\ln x dx + \ln y dy = 0$
23. $x^2y dx + xy^2 dy = 0$
24. $y dx + (x + y) dy = 0$
25. $(x + y)^2 dx + (x - y)^2 dy = 0$
26. $y^3 dx + 3xy^2 dy = 0$
27. $x^2 dx + xy dy = 0$
28. $x \sin y dx + y \sin x dy = 0$
29. $xy dx + (x^2 + y^2) dy = 0$
30. $y \cos x dx - x \cos y dy = 0$

5. Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку

Диференціальні рівняння другого порядку, які допускають пониження порядку — це рівняння виду:

$$y'' = f(x, y, y')$$

яке можна звести до рівняння першого порядку шляхом відповідної підстановки або за рахунок відсутності залежності від однієї із змінних x , y або y' .

Найпоширеніші випадки пониження порядку:

- Рівняння не містить явно y $\Rightarrow$ підстановка: $p = y'$
- Рівняння не містить явно x $\Rightarrow$ підстановка: $p = y', \frac{dp}{dy} = \frac{y''}{y'}$
- Рівняння не містить явно y' $\Rightarrow$ інтегрування напряду

Основні методи пониження порядку:

- Підстановка $p = y'$: якщо рівняння не містить y , тоді $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$ — отримуємо рівняння для $p(x)$.
- Підстановка $p = y'$ і $\frac{dp}{dy} = \frac{y''}{y'}$: застосовується, якщо рівняння не містить x .
- Інтегрування: якщо $y'' = f(x)$ або $y'' = f(y)$ — можна відразу проінтегрувати по x або y .
- Зведення до рівняння в повних диференціалах: іноді рівняння допускає перетворення у повне диференціальне рівняння першого порядку.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$y'' = 2y'.$$

Розв'язок:

Позначимо $p = y' \Rightarrow y'' = p'$.

Підставимо:

$$p' = 2p \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 2p \Rightarrow \frac{dp}{p} = 2dx \Rightarrow \int \frac{1}{p} dp = \int 2dx \Rightarrow \ln |p| = 2x + C_1 \Rightarrow p = y' = Ce^{2x}$$

Тепер інтегруємо ще раз:

$$y = \int Ce^{2x} dx = \frac{C}{2} e^{2x} + C_2$$

Відповідь:

$$y = \frac{C_1}{2} e^{2x} + C_2.$$

Завдання для самостійного опрацювання

1. $y'' = y'$ 2. $y'' = \sin x$ 3. $y'' = y$ 4. $y'' = (y')^2$,

5. $y'' = e^x$ 6. $y'' = \cos y$ 7. $y'' = \frac{1}{y'}$ 8. $y'' = x^2$,

9. $y'' = y^3$ 10. $y'' = \frac{dy}{dx}$ 11. $y'' = \tan y'$ 12. $y'' = \ln x$,

13. $y'' = y'^2 + y'$ 14. $y'' = \sqrt{y'}$ 15. $y'' = y^2$ 16. $y'' = \frac{1}{x}$,

17. $y'' = \frac{1}{x^2}$ 18. $y'' = y' + 1$ 19. $y'' = \frac{x}{y'}$ 20. $y'' = x + y$,

21. $y'' = y^2 \cos x$ 22. $y'' = xy'$ 23. $y'' = x^3$ 24. $y'' = \frac{1}{\sqrt{y'}}$,

$$25. y'' = \frac{1}{1 + (y')^2} \quad 26. y'' = y'^3 + x \quad 27. y'' = e^{y'} \quad 28. y'' = xy,$$

$$29. y'' = \frac{y'}{x} \quad 30. y'' = y' \ln y'.$$

6. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку називається рівняння вигляду:

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

де $a_2(x) \neq 0$ на області визначення.

Якщо коефіцієнти a_2, a_1, a_0 — сталі, то рівняння має вигляд:

$$y'' + py' + qy = 0.$$

Загальний розв'язок такого рівняння залежить від коренів характеристичного рівняння:

$$r^2 + pr + q = 0.$$

Якщо дискримінант $D > 0$, то розв'язок:

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}.$$

Якщо $D = 0$, то розв'язок:

$$y = (C_1 + C_2 x) e^{rx}.$$

Якщо $D < 0$, то розв'язок:

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$

де $r = \alpha \pm i\beta$.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$y'' - 3y' + 2y = 0.$$

Розв'язок.

Складемо характеристичне рівняння:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \Rightarrow (r - 1)(r - 2) = 0 \Rightarrow r_1 = 1, r_2 = 2.$$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}.$$

Завдання для самостійного опрацювання

Розв'яжіть наступні лінійні однорідні рівняння другого порядку:

1. $y'' + 4y = 0$ 2. $y'' - y = 0$ 3. $y'' + y' + y = 0$,
4. $y'' - 2y' + y = 0$ 5. $y'' + 2y' + 2y = 0$ 6. $y'' + 9y = 0$,
7. $y'' - 5y' + 6y = 0$ 8. $y'' - 4y = 0$ 9. $y'' + 2y' + y = 0$,
10. $y'' + y = 0$ 11. $y'' - y' - 6y = 0$ 12. $y'' + y' - 12y = 0$,
13. $y'' - 6y' + 9y = 0$ 14. $y'' + 3y' + 2y = 0$ 15. $y'' + 10y' + 25y = 0$,
16. $y'' - 6y = 0$ 17. $y'' + 5y = 0$ 18. $y'' - 2y' + 2y = 0$,
19. $y'' + y' + 1 = 0$ 20. $y'' + 4y' + 3y = 0$ 21. $y'' - y' + y = 0$,
22. $y'' + 2y = 0$ 23. $y'' + 6y' + 9y = 0$ 24. $y'' + 7y = 0$,
25. $y'' - 7y' + 12y = 0$ 26. $y'' - 4y' + 3y = 0$ 27. $y'' + 3y' + y = 0$,
28. $y'' - 2y = 0$ 29. $y'' + y' = 0$ 30. $y'' - 3y' + 2y = 0$.

7. Лінійні однорідні диференціальні рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Лінійне однорідне диференціальне рівняння n-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0,$$

де $a_0, a_1, \dots, a_n$ — сталі, $a_n \neq 0$.

Характеристичне рівняння:

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \dots + a_1 r + a_0 = 0$$

Загальний розв'язок залежить від виду коренів характеристичного рівняння:

- Дійсні різні корені r_i : $y = C_1 e^{r_1 x} + \dots + C_n e^{r_n x}$.
- Дійсний кратний корінь r кратності k : $y = (C_1 + C_2 x + \dots + C_k x^{k-1}) e^{rx}$
- Комплексні корені $\alpha \pm i\beta$: $y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$.

Приклад. Розв'язати рівняння:

$$y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$$

Характеристичне рівняння:

$$r^3 - 6r^2 + 11r - 6 = 0$$

Знаходимо корені: $r_1 = 1, r_2 = 2, r_3 = 3$

Загальний розв'язок:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{3x}.$$

Завдання для самостійного опрацювання

1. $y^{(3)} + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ 2. $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$ 3. $y^{(3)} - y'' - y' + y = 0$

4. $y^{(3)} + y = 0$ 5. $y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$ 6. $y^{(3)} + 4y'' + 5y' + 2y = 0$,
7. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ 8. $y^{(4)} + y = 0$ 9. $y^{(4)} + 3y'' + 2y = 0$,
10. $y^{(3)} - 4y'' + 4y' = 0$ 11. $y^{(3)} + 3y'' + 3y' + y = 0$ 12. $y^{(3)} - 6y' + 9y = 0$,
13. $y^{(4)} - 4y^{(3)} + 6y'' - 4y' + y = 0$ 14. $y^{(4)} + 5y'' + 6y = 0$ 15. $y^{(3)} + y'' + y' + y = 0$
16. $y^{(3)} - 7y'' + 16y' - 12y = 0$ 17. $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$ 18. $y^{(3)} - 3y'' - 3y' + y = 0$
19. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$ 20. $y^{(3)} + 2y'' + 3y' + 4y = 0$ 21. $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$
22. $y^{(3)} - y'' + y' - y = 0$ 23. $y^{(3)} + y'' - y' + y = 0$ 24. $y^{(4)} + 3y^{(3)} + 3y'' + y = 0$
25. $y^{(3)} - y = 0$ 26. $y^{(3)} - y' = 0$ 27. $y^{(4)} + y' + y = 0$,
28. $y^{(4)} + 4y^{(2)} + 4y = 0$ 29. $y^{(4)} - 2y'' + y = 0$ 30. $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$

8. Системи диференціальних рівнянь

Система диференціальних рівнянь — це сукупність декількох диференціальних рівнянь, у яких шуканими є кілька функцій. Типова форма системи першого порядку:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y, t) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y, t) \end{cases}$$

Лінійна однорідна система має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_{11}x + a_{12}y \\ \frac{dy}{dt} = a_{21}x + a_{22}y \end{cases}$$

Для її розв'язання використовують метод введення матриці коефіцієнтів:

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = A\mathbf{X}, \quad \text{де } \mathbf{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Типи розв'язків залежно від спектру матриці A :

1. Різні дійсні власні значення

Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2$ — дійсні і прості, то розв'язок має вигляд:

$$\mathbf{X}(t) = C_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}$$

2. Кратні власні значення

Якщо λ — кратний корінь характеристичного рівняння:

Якщо знайдено стільки лінійно незалежних власних векторів, скільки кратність, то форма як у попередньому випадку.

Інакше з'являється розв'язок із множником t :

$$\mathbf{X}(t) = (C_1 \mathbf{v} + C_2 \tilde{\mathbf{v}} t) e^{\lambda t},$$

де $\tilde{\mathbf{v}}$ — узагальнений власний вектор.

3. Комплексно спряжені власні значення

Якщо $\lambda = \alpha \pm i\beta$, то розв'язок має вигляд:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\alpha t} (C_1 \Re(\mathbf{v}) \cos \beta t + C_2 \Im(\mathbf{v}) \sin \beta t).$$

Приклад. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y \\ \frac{dy}{dt} = -4x + 3y \end{cases}.$$

Розв'язання

Матриця коефіцієнтів:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знаходимо власні значення з характеристичного рівняння:

$$\det(A - \lambda I) = (3 - \lambda)^2 + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = 3 \pm 4i.$$

Розв'язок:

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} (C_1 \cos 4t + C_2 \sin 4t) \\ y(t) = e^{3t} (-C_1 \sin 4t + C_2 \cos 4t) \end{cases}.$$

Завдання для самостійного опрацювання

1. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x' = 3x + 4y \\ y' = -4x + 3y \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x' = 4x + y \\ y' = -x + 2y \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x' = -x + 3y \\ y' = -3x - y \end{cases}$

7. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = 3x + 4y \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x' = 5x - y \\ y' = x + y \end{cases}$,

10. $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x - y \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -x + y \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x \end{cases}$

13. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 2x + y \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \end{cases}$ 15. $\begin{cases} x' = 0 \\ y' = x \end{cases}$

16. $\begin{cases} x' = -2x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ 17. $\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y \end{cases}$ 18. $\begin{cases} x' = 3x + 5y \\ y' = -5x + 3y \end{cases}$

19. $\begin{cases} x' = y \\ y' = y \end{cases}$ 20. $\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x' = 2x \\ y' = -2y \end{cases}$

22. $\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$ 23. $\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -2x - y \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x' = y \\ y' = -x - y \end{cases}$

25. $\begin{cases} x' = 3x - y \\ y' = x + 3y \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x' = -x \\ y' = x \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x' = y \\ y' = 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x' = 2x + 3y \\ y' = -3x + 2y \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x' = x + y \\ y' = x - y \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x' = -x + y \\ y' = -x + y \end{cases}$

Однорідні лінійні системи зі сталими коефіцієнтами: Самостійна робота

Завдання №1.

Розв'яжіть систему:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Пояснення: знайдіть характеристичне рівняння, визначте тип власних значень, знайдіть власні вектори та запишіть загальний розв'язок.

Завдання №2.

Розв'яжіть систему:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Порада: обробіть випадок комплексних власних значень.

Завдання №3

Розв'яжіть систему:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Порада: система має кратне власне значення, знайдіть узагальнений власний вектор.

Контрольні запитання

1. Що таке власне значення матриці? Яким чином воно впливає на структуру розв'язку?

2. Яка форма розв'язку відповідає комплексним власним значенням?
3. У чому особливість побудови розв'язку при кратному власному значенні?

Диференціальні рівняння з відокремленими змінними: Контрольна робота

Контрольна робота складається з трьох частин:

Частина А — Теоретичне питання

Частина В — Розв'язання типового рівняння

Частина С — Задача підвищеної складності

Частина А. Теорія

У чому полягає метод відокремлення змінних? Які його обмеження?

Частина В. Типове рівняння

Розв'яжіть:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y + \ln y}.$$

Частина С. Завдання підвищеної складності

Розв'яжіть:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{xy}$$

та прокоментуйте, чи можна застосувати метод відокремлення змінних. Якщо так — наведіть повне розв'язання.

Рекомендована література

1. **Гольдштейн М. І., Снегур А. І.**
Курс диференціальних рівнянь: навчальний посібник. — Київ: КНУ, 2018.
(Систематизоване подання теорії та прикладів з елементами комп'ютерної реалізації)
2. **Огородник І. М.**
Диференціальні рівняння: підручник. — Львів: Видавництво ЛНУ імені Івана Франка, 2021.
(Класичні та чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь)
3. **Глушков В. М.**
Вступ до теорії диференціальних рівнянь. — Київ: Наукова думка, 2009.
4. **Митник О. М., Деркач О. В.**
Диференціальні рівняння: збірник задач. — Харків: ХНУ ім. В. Н. Каразіна, 2015.
(Завдання до всіх основних тем, включно з системами)
5. **Бойко В. І., Сергієнко І. В.**
Математичний аналіз. Частина II. Диференціальні рівняння. — Київ: Вища школа, 2000.
6. **Boyce W. E., DiPrima R. C.**
Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems. — Wiley, 10th ed., 2012.
(Найвідоміший сучасний англomовний підручник із великою кількістю прикладів)
7. **Tenenbaum M., Pollard H.**
Ordinary Differential Equations. — Dover Publications, 1985.
(Класична книга з багатьма поясненнями та прикладами)
8. **Zill D. G.**
A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. — Cengage Learning, 11th ed., 2018.
(Багато прикладних задач, у тому числі системи)
9. **Arnold V. I.**
Ordinary Differential Equations. — Springer-Verlag, 1992.
(Формалізований і глибокий підхід до теорії ОДР)
10. **Hirsch M. W., Smale S., Devaney R. L.**
Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. — Academic Press, 3rd ed., 2012.
(Поглиблений курс із теорії та динамічних систем)

Список використаних джерел

1. Задоянчук І.В. Диференціальні рівняння: навч. посіб. / І.В. Задоянчук. – К.: Вища школа, 2005. – 284 с.
2. Самойленко А.М. Диференціальні рівняння: підручник / А.М. Самойленко, В.Я. Заболотний. – К.: Либідь, 2001. – 512 с.
3. Бойко А.І. Теорія диференціальних рівнянь: конспект лекцій / А.І. Бойко. – Львів: Вид-во ЛНУ ім. І. Франка, 2010. – 136 с.
4. Coddington E.A. An Introduction to Ordinary Differential Equations / E.A. Coddington. – New York: Dover Publications, 1989. – 320 p.
5. Boyce W.E., DiPrima R.C. Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems / W.E. Boyce, R.C. DiPrima. – 10th ed. – Hoboken, NJ: Wiley, 2012. – 800 p.
6. Zill D.G. Differential Equations with Boundary-Value Problems / D.G. Zill, M.R. Cullen. – 9th ed. – Boston: Cengage Learning, 2012. – 664 p.
7. Коваленко І.М. Збірник задач з диференціальних рівнянь / І.М. Коваленко. – Харків: ХНУ ім. В.Н. Каразіна, 2017. – 160 с.
8. Tenenbaum M., Pollard H. Ordinary Differential Equations / M. Tenenbaum, H. Pollard. – New York: Dover Publications, 1985. – 832 p.