
Подвійні і потрійні інтеграли

Кратні інтеграли є аналогом інтегралів Рімана по проміжку (тобто, інтегралів Рімана першого роду) і мають подібні застосування та властивості, які формулюються і доводяться за аналогією, якщо E – область або замкнена область та в деяких інших випадках. У загальному випадку ці інтеграли розглядаються по довільній множині $E \subset \mathbb{R}^2$, вимірній за Жорданом, і можуть мати деякі специфічні властивості, залежні від властивостей множини E . Це призводить до зміни деяких побудов.

1. Міра Жордана на $\mathbb{R}$. Ми розглядали інтеграл Рімана по проміжку. Можна розглядати інтеграл Рімана і по інших множинах. Для цього потрібне поняття міри Жордана. Елементарною фігурою в $\mathbb{R}$ будемо називати таку множину $q \subset \mathbb{R}$, яка є об'єднанням скінченного числа проміжків, які не мають спільних внутрішніх точок (тобто таких, які не належать кінцям відрізків). Мірою $\mu(q)$ елементарної фігури $q \subset \mathbb{R}$ називається сума довжин проміжків, об'єднанням яких вона є. Порожню множину вважаємо елементарною фігурою з мірою $\mu(\emptyset) = 0$. Кожну елементарну фігуру можна багатьма способами подати у вигляді об'єднання скінченної кількості проміжків, які не мають спільних внутрішніх точок, але її міра не залежить від такого подання. Нехай $E \subset \mathbb{R}$ – довільна обмежена множина, тобто така множина, яка належить деякому скінченному проміжку,

$$m^*(E) = \inf \{ \mu(q) : q \supset E \}, \quad m_*(E) = \sup \{ \mu(q) : q \subset E \},$$

де $\inf$ і $\sup$ беруться по всіх елементарних фігурах q , які відповідно містять E або містяться в E . Числа $m^*(E)$ і $m_*(E)$ називають, відповідно, **зовнішньою** та **внутрішньою мірами Жордана** множини $E \subset \mathbb{R}$. При цьому, $m_*(E) \leq m^*(E)$ для кожної обмеженої множини $E \subset \mathbb{R}$. Множина $E \subset \mathbb{R}$ називається **вимірною за Жорданом**, якщо вона є обмеженою і

Подвійні і потрійні інтеграли

$m^*(E) = m_*(E)$. При цьому, число $m(E) = m^*(E)$ називається **мірою Жордана** вимірної за Жорданом множини E . Найпростіші властивості множин, вимірних за Жорданом, містяться в наступних прикладах.

Приклад 1. Об'єднання двох елементарних фігур є елементарною фігурою.

Приклад 2. Перетин двох елементарних фігур є елементарною фігурою.

Приклад 3. Різниця двох елементарних фігур є елементарною фігурою.

Приклад 4. Кожна множина $E \subset \mathbb{R}$, яка складається з однієї точки, є вимірною множиною за Жорданом і $m(E) = 0$, бо $m_*(E) = 0$ і $m^*(E) = 0$.

Приклад 5. Кожна множина $E \subset \mathbb{R}$, яка складається зі скінченної кількості точок, є вимірною множиною за Жорданом і $m(E) = 0$, бо $m_*(E) = 0$ і $m^*(E) = 0$.

Приклад 6. Множина $E = [0; 1] \cap \mathbb{Q}$, тобто множина всіх раціональних чисел з проміжку $[0; 1]$, є невимірною множиною за Жорданом, бо $m_*(E) = 0$ і $m^*(E) = 1$.

Приклад 7. Кожний замкнений проміжок $[a; b] \subset \mathbb{R}$ є вимірною множиною за Жорданом, бо $m_*(E) = b - a$ і $m^*(E) = b - a$.

Приклад 8. Кожний скінченний відкритий проміжок $(a; b) \subset \mathbb{R}$ є вимірною множиною за Жорданом, бо $m_*(E) = b - a$ і $m^*(E) = b - a$.

Приклад 9. Кожний скінченний напіввідкритий проміжок $(a; b] \subset \mathbb{R}$ є вимірною множиною за Жорданом, бо $m_*(E) = b - a$ і $m^*(E) = b - a$.

Подвійні і потрійні інтеграли

Приклад 10. Множина $[0; +\infty) \subset \mathbb{R}$ є невимірною множиною за Жорданом, бо вона є необмеженою.

Приклад 11. Нехай $E = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ – така зліченна множина точок $x_k \in [0; 1]$, що послідовність (x_k) має скінченну кількість граничних точок. Тоді множина E є вимірною за Жорданом і $m(E) = 0$. Справді, бо $m_*(E) = 0$ і $m^*(E) = 0$.

Приклад 12. Нехай $S = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ – така зліченна множина точок $x_k \in [0; 1]$, що $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$. Тоді множина $E = [0; 1] \setminus S$ є вимірною за Жорданом і $m(E) = 1$, бо $m_*(E) = 1$ і $m^*(E) = 1$.

Приклад 13. Множина $E \subset \mathbb{R}$ має нульову жорданову міру тоді і тільки тоді, коли для кожного $\varepsilon > 0$ існує така скінченна кількість проміжків $(a_k; b_k)$, що $E \subset \bigcup_k (a_k; b_k)$ і $\sum_k (b_k - a_k) < \varepsilon$.

Множина $E \subset \mathbb{R}$ називається **множиною нульової лебегової міри**, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує така скінченна або зліченна кількість проміжків $(a_k; b_k)$, що $E \subset \bigcup_k (a_k; b_k)$ і $\sum_k (b_k - a_k) < \varepsilon$.

Приклад 14. Кожна множина $E \subset \mathbb{R}$, яка має нульову жорданову міру, має і нульову лебегову міру.

Приклад 15. Якщо множина $E \subset \mathbb{R}$ є обмеженою, замкненою і має нульову лебегову міру, то вона має і нульову жорданову міру. Справді, за таких умов множина E є компактом. Тому її відкрите покриття $(a_k; b_k)$ має скінченне підпокриття.

Приклад 16. Множина $\mathbb{Q}$ всіх раціональних чисел має нульову лебегову міру, але не є вимірною за Жорданом. (Бо не є замкненою).

2. Міра Жордана на $\mathbb{R}^2$ і на $\mathbb{R}^3$. Квадровні та кубовні множини. **Елементарною фігурою** в $\mathbb{R}^2$ будемо називати таку множину $q \subset \mathbb{R}^2$, яка є об'єднанням скінченного числа прямокутників, які не мають спільних внутрішніх точок. Мірою $\mu(q)$ елементарної фігури $q \subset \mathbb{R}^2$ називається сума площ прямокутників, об'єднанням яких вона є.

Подвійні і потрійні інтеграли

Порожню множину вважаємо елементарною фігурою з мірою $\mu(\emptyset) = 0$. Кожну елементарну фігуру можна багатьма способами подати у вигляді об'єднання скінченної кількості прямокутників, які не мають спільних внутрішніх точок, але її міра не залежить від такого подання. Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ – довільна обмежена множина,

$$m^*(E) = \inf \{ \mu(q) : q \supset E \}, \quad m_*(E) = \sup \{ \mu(q) : q \subset E \},$$

де $\inf$ і $\sup$ беруться за всіма елементарними фігурами q , які відповідно містять E або містяться в E . Числа $m^*(E)$ і $m_*(E)$ називають, відповідно, **зовнішньою та внутрішньою мірами Жордана** множини $E \subset \mathbb{R}^2$. Множина $E \subset \mathbb{R}^2$ називається **вимірною за Жорданом** або **квадрованою** фігурою, якщо вона є обмеженою і $m^*(E) = m_*(E)$. При цьому число $m(E) = m^*(E)$ називається **мірою Жордана** (плоскою мірою Жордана, мірою Жордана в $\mathbb{R}^2$) вимірної за Жорданом множини $E \subset \mathbb{R}^2$ або її площею. Для позначення міри Жордана в $\mathbb{R}^2$ множини $E \subset \mathbb{R}^2$ використовуються також символи $m_2(E)$, $P(E)$ та P_E . Аналоги тверджень, сформульованих в прикладах 1-16 попереднього пункту, залишаються справедливими і для міри Жордана в $\mathbb{R}^2$. Деякі з них подамо у вигляді теореми.

Теорема 1. Для того щоб множина $E \subset \mathbb{R}$ була вимірною за Жорданом, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою і для кожного $\varepsilon > 0$ існували такі дві вимірні за Жорданом множини E_1 і E_2 , що $E_1 \subset E \subset E_2$ і $m(E_2) - m(E_1) < \varepsilon$.

Теорема 2. Для того щоб множина $E \subset \mathbb{R}^2$ була вимірною за Жорданом, необхідно і достатньо, щоб її межа ∂E мала нульову Жорданову міру, тобто, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ знайшлась елементарна фігура E_1 така, що $\partial E \subset E_1$ і $m(E_1) < \varepsilon$.

Теорема 3. Якщо вимірними за Жорданом є множини E_1 та E_2 , то вимірними також є множини $E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2$, $E_1 \setminus E_2$ і при цьому:
а) якщо $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, то $m(E_1 \cup E_2) = m(E_1) + m(E_2)$; б) якщо $E_2 \subset E_1$, то $m(E_1 \setminus E_2) = m(E_1) - m(E_2)$ і $m(E_2) \leq m(E_1)$.

Подвійні і потрійні інтеграли

Теорема 4. *Елементарна фігура E є вимірною за Жорданом і міра Жордана збігається з її площею.*

Теорема 5. *Для кожної обмеженої множини E*

$$m^*(E) = \inf \{ \mu(\bar{\Delta}_k) : \bar{\Delta}_k \supset E \} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\bar{\Delta}_k), \quad (2.1)$$

$$m_*(E) = \sup \{ \mu(\underline{\Delta}_k) : \underline{\Delta}_k \subset E \} = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu(\underline{\Delta}_k), \quad (2.2)$$

де $\underline{\Delta}_k$ і $\bar{\Delta}_k$ – елементарні фігури, що є об'єднанням квадратів з сторонами довжиною 10^{-k} , які є паралельними осям координат і відповідно містяться в E або мають з E принаймні одну спільну точку.

Таким чином, рівності (1) і (2) можна прийняти за означення верхньої та нижньої міри Жордана. З них випливає також наступне твердження.

Теорема 6. *Якщо для кожного $\delta > 0$ множину E можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості вимірних за Жорданом множин E_k , діаметр кожної з яких є меншим за δ , то множина є вимірною за Жорданом.*

Приклад 1. *Якщо $E = \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, то*

$$\partial E = \{(x; y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(x; y) : x = 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

$$\cup \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1, y = 0\} \cup \{(x; y) : 0 \leq x \leq 1, y = 1\},$$

$$m_2(E) = 1 \text{ і } m_2(\partial E) = 0.$$

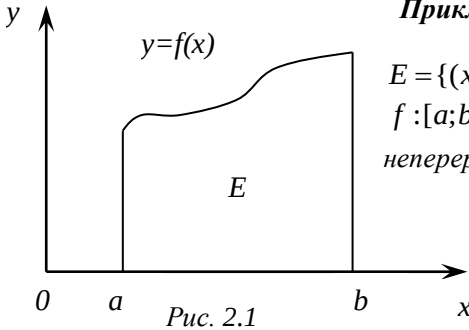
Приклад 2. *Нехай E – це множина тих точок квадрата $\{(x; y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, які мають раціональні координати. Тоді $m_*(E) = 0$ і $m^*(E) = 1$. Тому така множина E не є вимірною за Жорданом.*

Приклад 3. *Множина*

$E = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x; 0) : 1 \leq x \leq 2\}$ є вимірною за Жорданом, але її не можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості таких множин E_k , що діаметр кожної з них є меншим за 1 і $m(E_k) > 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Подвійні і потрійні інтеграли

Приклад 4. Якщо E – обмежена область або обмежена замкнена область, то для кожного $\delta > 0$ множини E можна подати у вигляді скінченної кількості таких множин E_k , що діаметр кожної з них є меншим за δ і $m(E_k) > 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.



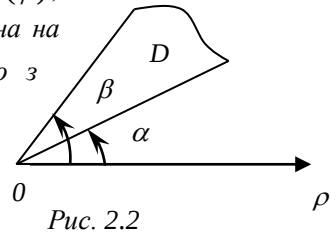
Приклад 5. Криволінійна трапеція

$E = \{(x; y) : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$, де $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, невід'ємна і неперервна на проміжку $[a; b]$, є квадровною фігурою і

$$m_2(E) = \int_a^b f(x) dx \text{ – її площа.}$$

Приклад 6. Криволінійний сектор E , який обмежений променями, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $\rho = \rho(\varphi)$, де $\rho : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, неперервна і невід'ємна на $[a; b]$, $0 < \alpha - \beta < 2\pi$, є квадровною фігурою з

$$\text{площею } m_2(D) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2 d\varphi.$$



Приклад 7. Якщо $\gamma = (\gamma_1; \gamma_2) : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$ –

спрямлюваний шлях, то його носій $[\gamma]$ має двовірну жорданову міру рівну нулеві. Справді, нехай L – довжина γ . Розіб'ємо шлях γ на n частин так, щоб довжина кожної частини була меншою за L/n . Кожну з цих n частин можна помістити у квадрат зі стороною $2L/n$. Тоді $[\gamma]$ міститься в об'єднанні цих квадратів і це об'єднання має площу $\frac{4L^2}{n^2}(n+1)$. Звідси випливає потрібне.

Приклад 8. Якщо Γ – крива, задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, і функція f є неперервною на $[a; b]$, то Γ є вимірною за Жорданом і її площа дорівнює нулеві

Подвійні і потрійні інтеграли

Подібно визначається міра Жордана в $\mathbb{R}^3$. **Елементарною фігурою** в $\mathbb{R}^3$ будемо називати таку множину $q \subset \mathbb{R}^3$, яка є об'єднанням скінченного числа багатогранників, які не мають спільних внутрішніх точок. **Мірою** $\mu(q)$ **елементарної фігури** $q \subset \mathbb{R}^3$ називається сума об'ємів багатогранників, об'єднанням яких вона є. Порожню множину вважаємо елементарною фігурою з мірою $\mu(\emptyset) = 0$. Кожну елементарну фігуру можна багатьма способами подати у вигляді об'єднання скінченної кількості багатогранників, які не мають спільних внутрішніх точок, але її міра не залежить від такого подання. Нехай $E \subset \mathbb{R}^3$ – довільна обмежена множина,

$$m^*(E) = \inf \{ \mu(q) : q \supset E \}, \quad m_*(E) = \sup \{ \mu(q) : q \subset E \},$$

де $\inf$ і $\sup$ беруться за всіма елементарними фігурами q , які відповідно містять E або містяться в E . Множина $E \subset \mathbb{R}^3$ називається **вимірною за Жорданом** або **кубовним тілом**, якщо вона є обмеженою і $m^*(E) = m_*(E)$. При цьому число $m(E) = m^*(E)$ називається **мірою Жордана** (просторовою мірою Жордана, трьохвимірною мірою Жордана) вимірної за Жорданом множини $E \subset \mathbb{R}^3$ або її **об'ємом**. Для позначення трьохвимірної міри множини $E \subset \mathbb{R}^3$ використовуються також символи $m_3(E)$, $V(E)$ та V_E . Аналоги тверджень, сформульованих в прикладах 1-16 пункту 1 залишаються справедливими і для міри Жордана в $\mathbb{R}^3$. Це ж стосується теорем 1-6.

Приклад 6. Якщо $E = \{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$, то $\partial E = \{(x; y; z) : x = 0, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x; y; z) : x = 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, y = 0, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, y = 1, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0\} \cup \{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 1\}$, $m_3(E) = 1$ і $m_3(\partial E) = 0$.

Приклад 7. Якщо $E = \{(x; y; z) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, z = 0\}$, то і $m_3(E) = 0$.

Приклад 8. Якщо $E \subset \mathbb{R}^2$ – замкнена обмежена множина і $f : E \rightarrow \mathbb{R}^3$ – функція, неперервна на E , то множина

Подвійні і потрійні інтеграли

$\partial T = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 : (x; y) \in E, \quad z = f(x; y)\}$ є вимірною за Жорданом і $m_3(\partial T) = 0$.

3. Означення подвійного інтегралу. Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ – квадровна множина і $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція. Подамо множину E у вигляді об'єднання ν квадровних множин E_k , $k \in \overline{0; \nu-1}$, з площами $\Delta P_k = m(E_k)$ і діаметрами $\lambda(k)$ так, що множини E_k не мають спільних внутрішніх точок. Сукупність $\tau = \{E_k : k \in \overline{0; \nu-1}\}$ таких множин E_k називатимемо розбиттям множини $E \subset \mathbb{R}^2$. Нехай $\lambda_\tau = \max \{\lambda(k) : k \in \overline{0; \nu-1}\}$. Число λ_τ називається діаметром розбиття. Візьмемо в кожній з множин E_k довільну точку $(\xi_k; \eta_k)$ і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta P_k. \quad (3.1)$$

Ця сума σ називається *інтегральною сумою* функції f на множині E . Сума σ залежить від множини E , функції f , розбиття $\tau = \{E_k : k \in \overline{0; \nu-1}\}$ та множини $(\xi; \eta) := \{(\xi_k; \eta_k) : k \in \overline{0; \nu-1}\}$: $\sigma = \sigma_f(\tau) = \sigma_f(\tau; (\xi; \eta)) = \sigma_f(\tau; (\xi; \eta); E)$.

Подвійним інтегралом функції f по множині E або двовірним інтегралом Рімана функції f по множині E називається границя

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma. \quad (3.2)$$

Для позначення подвійного інтегралу використовуються також символи

$$\int_E f dP, \quad \int_E |f| dx dy.$$

Якщо границя (3.2) існує і є скінченною, то функція f називається *інтегрованою за Ріманом по множині E* . У протилежному випадку f називається *неінтегрованою за Ріманом по множині E* .

При цьому, число I називається *границею інтегральних сум σ* , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для кожного розбиття τ множини E , для якого $\lambda_\tau < \delta$, за будь-якого вибору множини

Подвійні і потрійні інтеграли

$\{(\xi_k; \eta_k) : k \in \overline{0; n-1}\}$ виконується $|\sigma - I| < \varepsilon$. Границі інтегральних сум мають звичайні властивості.

Означення границі інтегральних сум можна дати і на мові послідовностей. Число I називається *границею інтегральних сум* σ , якщо для кожної послідовності $\tau_\nu = \{E_k : k \in \overline{0; \nu-1}\}$ розбиттів множини E , послідовність λ_{τ_ν} діаметрів яких є збіжною до нуля, за будь-якого вибору точок $\{(\xi_k(\nu); \eta_k(\nu)) : k \in \overline{0; \nu-1}\} \in E_k$ виконується

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\nu-1} f(\xi_k(\nu); \eta_k(\nu)) \Delta P_k = I.$$

4. Знаходження площі плоскої області за допомогою подвійного інтегралу.

Теорема 1. Якщо $E \subset \mathbb{R}^2$ – квадровна множина з площею $P(E)$, то

$$P(E) = \iint_E dx dy.$$

Доведення. Візьмемо в означенні подвійного інтегралу $f \equiv 1$. Тоді

$$\iint_E dx dy = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta P_k = P_E. \blacktriangleright$$

За допомогою подвійного інтегралу знаходять також багато фізичних величин: статичні моменти, моменти інерції та інші. Наприклад, маса плоскої області E з густиною $\rho(x; y)$ знаходиться за формулою

$$m = \iint_E \rho(x; y) dx dy.$$

5. Обмеженість інтегровної функції.

Теорема 1. Якщо вимірنا множина $E \subset \mathbb{R}^2$ є такою, що для кожного $\delta > 0$ знайдеться таке розбиття $\tau = \{E_k : k \in \overline{0; \nu-1}\}$, що $\lambda_\tau < \delta$ і $m(E_k) > 0$ для всіх $k \in \overline{0; \nu-1}$ і функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою на E , то вона є обмеженою на E .

Приклад 1. Множина

$E = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x; 0) : 1 \leq x \leq 2\}$ не задовольняє умови теореми 1.

Подвійні і потрійні інтеграли

Наслідок 1. Якщо вимірنا множина $E \subset \mathbb{R}^2$ є областю і функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровною на E , то ця функція f є обмеженою на E .

Наслідок 2. Якщо вимірна множина $E \subset \mathbb{R}^2$ є замкненою областю і функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровною на E , то ця функція f є обмеженою на E .

Теорема 2. Якщо $m(E)=0$ і функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, визначена на множині $E \subset \mathbb{R}^2$, тобто $D(f)=E$, то вона є інтегровною на E і

$$\iint_E f(x; y) dx dy = 0.$$

Доведення. Справді, $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta P_k = 0$, бо $\Delta P_k = 0$. ►

Теорема 3. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$, то існує така множина $\hat{E} \subset E$ нульової міри, що функція f є обмеженою на множині $E \setminus \hat{E}$.

Приклад 2. Якщо $E = \{(x; y): x^2 + y^2 = 1\}$, то $m(E)=0$, функція

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & (x; y) \neq (1; 0), \\ 1, & (x; y) = (1; 0), \end{cases}$$

є необмеженою на E , проте вона є інтегрованою на E і $\iint_E f(x; y) dx dy = 0$. Таким чином, для деяких множин $E \subset \mathbb{R}^2$ інтегрованими за Ріманом на E можуть бути і деякі необмежені функції.

6. Суми Дарбу. Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ – квадровна множина. Подамо E у вигляді об'єднання $\vee$ квадровних множин E_k з площами ΔP_k і діаметрами λ_k так, що множини E_k не мають спільних внутрішніх точок. Нехай

Подвійні і потрійні інтеграли

$$M_k = M_k(f; \tau) = \sup\{f(x; y) : (x; y) \in E_k\},$$

$$m_k = m_k(f; \tau) = \inf\{f(x; y) : (x; y) \in E_k\},$$

Суми $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_f(\tau) = \sum_{k=0}^{\nu-1} M_k \Delta P_k$ та $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_f(\tau) = \sum_{k=0}^{\nu-1} m_k \Delta P_k$ називаються

відповідно верхньою і нижньою сумами Дарбу Розбиття

$\tilde{\tau} = \{\tilde{E}_k : k \in \overline{0; \tilde{\nu}-1}\}$ множини $E \subset \mathbb{R}^2$ називається продовження розбиття

$\tau = \{E_k : k \in \overline{0; n-1}\}$, якщо для кожного $k \in \overline{0; \nu-1}$ множина E_k є об'єднанням деяких множин $\tilde{E}_{kj} \in \tilde{\tau} : E_k = \bigcup_{j \in \overline{0; l_k}} \tilde{E}_{kj}$. Отже,

$$E = \bigcup_{k \in \overline{0; \nu-1}} E_k = \bigcup_{k \in \overline{0; \nu-1}} \bigcup_{j \in \overline{0; l_k}} \tilde{E}_{kj},$$

$$m(E_k) = \sum_{j \in \overline{0; l_k}} m(\tilde{E}_{kj}), \quad m(E) = \sum_{k \in \overline{0; \nu-1}} m(E_k) = \sum_{k \in \overline{0; \nu-1}} \sum_{j \in \overline{0; l_k}} m(\tilde{E}_{kj}).$$

функції f на множині E .

Теорема 1. $\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}$ для кожного розбиття τ .

Доведення. Оскільки $m_k \leq f(\xi_k; \eta_k) \leq M_k$, то

$$\sum_{k=0}^{\nu-1} m_k \Delta P_k \leq \sum_{k=0}^{\nu-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta P_k \leq \sum_{k=0}^{\nu-1} M_k \Delta P_k. \blacktriangleright$$

Теорема 2. Якщо розбиття $\tilde{\tau} = \{\tilde{E}_k : k \in \overline{0; \tilde{\nu}-1}\}$ є продовженням розбиття $\tau = \{E_k : k \in \overline{0; \nu-1}\}$, то

$$\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{\sigma}_f(\tilde{\tau}) \leq \sigma_f(\tau; \xi) \leq \bar{\sigma}_f(\tilde{\tau}) \leq \bar{\sigma}_f(\tau).$$

Доведення. Теорему досить довести для випадку, коли одна з множин E_k є об'єднанням деяких множин $\tilde{E}_k$. Нехай, наприклад, $E_{\nu-1} = \tilde{E}_s \cup \tilde{E}_p$. Тоді $\tilde{M}_s m(\tilde{E}_s) + \tilde{M}_p m(\tilde{E}_p) \leq M_{\nu-1} m(E_{\nu-1})$ і

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_f(\tilde{\tau}) &= \sum_{k=0}^{s-1} \tilde{M}_k m(\tilde{E}_k) + \tilde{M}_s m(\tilde{E}_s) \\ &+ \sum_{k=s+1}^{p-1} \tilde{M}_k m(\tilde{E}_k) + \tilde{M}_p m(\tilde{E}_p) + \sum_{k=p+1}^{\tilde{v}-1} \tilde{M}_k m(\tilde{E}_k) \leq \sum_{k=0}^{v-1} M_k m(\tilde{E}_k) = \bar{\sigma}(\tau)\end{aligned}$$

і, отже, остання з нерівностей теореми доведена, а інші – отримуються подібно. ►

Теорема 3. $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \bar{\sigma}_f(\tau_1)$ для будь-яких розбиттів τ і τ_1 множини E .

Доведення. Справді, нехай $\tilde{\tau}$ – таке розбиття, що є продовженням розбиттів τ і τ_1 . Тоді за теоремою 2 $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{\sigma}_f(\tilde{\tau}) \leq \bar{\sigma}_f(\tau_1)$, тобто $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \bar{\sigma}_f(\tau_1)$. ►

Теорема 4. $\underline{\sigma}_f(\tau) = \inf_{(\xi; \eta)} \sigma_f(\tau; (\xi; \eta))$ і $\bar{\sigma}_f(\tau) = \sup_{(\xi; \eta)} \sigma_f(\tau; (\xi; \eta))$ для будь-якого розбиття τ , де $\inf$ і $\sup$ беруться за всіма можливим множинами $(\xi; \eta) = \{(\xi_k; \eta_k) : k \in \overline{0; v-1}\}$, які входять в означення інтегральної суми.

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned}\inf_{(\xi; \eta)} \sigma_f(\tau, \xi) &= \inf_{(\xi; \eta)} \left\{ \sum_{k=0}^{v-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta P_k \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{v-1} \inf_{(\xi_k; \eta_k)} \{ f(\xi_k; \eta_k) \} \Delta P_k = \sum_{k=0}^{v-1} m_k \Delta P_k = \underline{\sigma}_f(\tau)\end{aligned}$$

і перша з рівностей теореми доведена, а друга доводиться аналогічно. ►

7. Основний критерій інтегровності функції. Інтегровність неперервної функції. Числа $\underline{I} = \sup_{\tau} \underline{\sigma}_f(\tau)$ та $\bar{I} = \inf_{\tau} \bar{\sigma}_f(\tau)$ називаються відповідно нижнім і верхнім інтегралами Дарбу функції f по множині E . З означення випливає, що $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$ для кожного розбиття τ .

Подвійні і потрійні інтеграли

Теорема 1. Для того щоб обмежена на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$ функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на E , необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} (\bar{\sigma} - \underline{\sigma}) = 0. \quad (2.1)$$

Доведення. Нехай f є інтегрованою і

$$I = \iint_E f(x; y) dx dy.$$

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$, що $I - \varepsilon < \sigma_f(\tau; (\xi; \eta)) < I + \varepsilon$ для будь-якого розбиття τ , для якого $\lambda_\tau < \delta$, і будь-якого вибору множини $(\xi; \eta)$ точок $(\xi_k; \eta_k)$, $k \in \overline{0; \nu-1}$. Звідси та з теореми 4 попереднього пункту отримуємо, що $I - \varepsilon < \underline{\sigma}_f(\tau) \leq \bar{\sigma}_f(\tau) \leq I + \varepsilon$, тобто (1) виконується. Доведемо достатність. З означення інтегралів Дарбу маємо $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$, звідки $0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \bar{\sigma}_f(\tau) - \underline{\sigma}_f(\tau)$. Оскільки $\bar{I}$ і $\underline{I}$ не залежать від τ , то отримуємо $\bar{I} = \underline{I}$. Але $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq I \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$, $I := \bar{I} = \underline{I}$. Тому $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \underline{\sigma}_f(\tau) = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \bar{\sigma}_f(\tau) = I$. Крім цього, $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \sigma_f(\tau; (\xi; \eta)) \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$ для кожного розбиття τ і кожного вибору точок $(\xi_k; \eta_k) \in E_k$. Тому

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_f(\tau; (\xi; \eta)) = I. \quad (2.2)$$

і теорема доведена. ►

Зауваження 1. Рівність (1) слід розуміти так. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для кожного розбиття τ , для якого $\lambda_\tau < \delta$ виконується $|\bar{\sigma} - \underline{\sigma}| < \varepsilon$.

Наслідок 1. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$, то

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \bar{\sigma}_f = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \underline{\sigma}_f = \bar{I} = \underline{I}.$$

Подвійні і потрійні інтеграли

Наслідок 2. Для того щоб обмежена на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$ функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на E , необхідно і

достатньо, щоб $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\nu-1} \omega_k \Delta P_k = 0$, де

$$\omega_k = \sup \left\{ \left| f(\xi; \eta) - f(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) \right| : (\xi; \eta) \in E_k, (\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) \in E_k \right\}.$$

Доведення. Справді, $\omega_k = M_k - m_k$. ►

Теорема 2. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на обмеженій замкненій вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$, то вона є інтегрованою на E .

Доведення. За теоремою Вейєрштрасса існують точки $(\xi_k; \eta_k) \in E_k$ і $(\tilde{\xi}_k; \tilde{\eta}_k) \in E_k$, для яких $f(\tilde{\xi}_k; \tilde{\eta}_k) = M_k$, $f(\xi_k; \eta_k) = m_k$. За теоремою Кантора функція f є рівномірно неперервною на E , тобто,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \tau, \lambda_\tau < \delta) : \left| f(\xi_k; \eta_k) - f(\tilde{\xi}_k; \tilde{\eta}_k) \right| < \varepsilon.$$

Тому

$$0 \leq \bar{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{k=0}^{\nu-1} (f(\tilde{\xi}_k; \tilde{\eta}_k) - f(\xi_k; \eta_k)) \Delta P_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{\nu-1} \Delta P_k = P\varepsilon,$$

якщо $\lambda_\tau < \delta$. Звідси та з попередньої теореми випливає потрібний висновок. ►

Наслідок 3. Добуток двох обмежених інтегровних на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$ функцій $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ і $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ є функція інтегровна на E .

Доведення. Справді, нехай

$$M_{f,E} = \sup \{ |f(x; y)| : (x; y) \in E \}, \quad M_{g,E} = \sup \{ |g(x; y)| : (x; y) \in E \}.$$

Оскільки

$$\begin{aligned} f \cdot g(\xi; \eta) - f \cdot g(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) &= f(\xi; \eta) \cdot g(\xi; \eta) - f(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) \cdot g(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) \\ &= f(\xi; \eta) \cdot g(\xi; \eta) - f(\xi; \eta) \cdot g(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) + f(\xi; \eta) \cdot g(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) - f(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) \cdot g(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) \\ &= f(\xi; \eta)(g(\xi; \eta) - g(\tilde{\xi}; \tilde{\eta})) + g(\tilde{\xi}; \tilde{\eta})(f(\xi; \eta) - f(\tilde{\xi}; \tilde{\eta})), \end{aligned}$$

то

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\omega(\tau; fg) \leq M_{g,E} \sup \left\{ \left| f(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) - f(\xi; \eta) \right| : (\xi; \eta) \in E, (\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) \in E \right\} \\ + M_{f,E} \sup \left\{ \left| g(\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) - g(\xi; \eta) \right| : (\xi; \eta) \in E, (\tilde{\xi}; \tilde{\eta}) \in E \right\},$$

і твердження теореми 5 випливає з наслідку 4. ►

8. Інші критерії інтегрованості.

Теорема 1. Нехай Q_0 – деяка множина нульової жорданової міри, $\tau = \{E_k : k \in \overline{0; \nu-1}\}$ – деяке розбиття вимірної множини $E \subset \mathbb{R}^2$, τ_0 – сукупність тих множин $E_i \subset \tau$, які мають непорожній перетин з Q_0 . Тоді

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0, E_k \subset \tau_0}^{\nu-1} m(E_k) = 0. \quad (8.1)$$

Крім цього, якщо функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою на множині E та існує скінченна границя

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0, E_k \not\subset \tau_0}^{\nu-1} f(\xi(k))m(E_k) = I_0, \quad (8.2)$$

то функція f є інтегрованою на E і $\int_E f(x)dx = I_0$.

Теорема 2 (Дарбу). Для того щоб обмежена функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на множині $E \subset \mathbb{R}^2$, необхідно і достатньо, щоб $\bar{I} = \underline{I}$.

Теорема 3 (Рімана). Для того щоб обмежена функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$ знайшлось таке розбиття τ множини E , що $\bar{\sigma}_f(\tau) - \underline{\sigma}_f(\tau) < \varepsilon$.

Теорема 4 (Лебега). Для того щоб обмежена функція $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на квадровній замкненій множині $E \subset \mathbb{R}^2$, необхідно і достатньо, щоб множина тих точок $(x; y) \in E$, в яких вона не є неперервною за множиною E , мала нульову лебегову міру.

Подвійні і потрійні інтеграли

9. Найпростіші властивості подвійного інтегралу.

Теорема 1. Нехай $E \subset \mathbb{R}^2$ – квадратна множина. Тоді:

1°. (адитивність інтеграла)

$$\iint_E (f_1(x; y) + f_2(x; y)) dx dy = \iint_E f_1(x; y) dx dy + \iint_E f_2(x; y) dx dy ,$$

якщо останні існують;

2°. (однорідність інтеграла)

$$\iint_E c f(x; y) dx dy = c \iint_E f(x; y) dx dy$$

для будь-якої сталої c , якщо останній інтеграл існує.

3°. (лінійність інтеграла)

$$\iint_E (c_1 f_1(x; y) + c_2 f_2(x; y)) dx dy = c_1 \iint_E f_1(x; y) dx dy + c_2 \iint_E f_2(x; y) dx dy$$

для будь-яких сталих c_1, c_2 , якщо останні два інтеграли існують;

4°. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на E , то і функція $|f|$ є інтегрованою на E і

$$\left| \iint_E f(x; y) dx dy \right| \leq \iint_E |f(x; y)| dx dy ;$$

5°. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою на E , то

$$\iint_E f(x; y) dx dy \geq 0 ;$$

6°. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на E , $M_f = \sup\{f(x; y): (x; y) \in E\}$ і $m_f = \inf\{f(x; y): (x; y) \in E\}$, то

$$m_f P_E \leq \iint_E f(x; y) dx dy \leq M_f P_E ;$$

7°. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на E і E є замкненою обмеженою областю, то знайдеться така точка $(\bar{x}; \bar{y}) \in E$

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\iint_E f(x; y) dx dy = f(\bar{x}; \bar{y}) P_E.$$

Доведення цієї теореми таке ж як її аналогу для одновимірного випадку. Обмежимося доведенням властивості 6°. Оскільки

$$\sum_{k=0}^{v-1} \Delta P_k = P(E), \quad \sum_{k=0}^{v-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta P_k \leq \sum_{k=0}^{v-1} M_f \Delta P_k = M_f P(E),$$

$$\sum_{k=0}^{v-1} f(\xi_k; \eta_k) \Delta P_k \geq \sum_{k=0}^{v-1} m_f \Delta P_k = m_f P(E),$$

то $m_f P(E) \leq \sigma \leq M_f P(E)$ і ми приходимо до потрібного висновку. ►

Зауваження 1. Число $\bar{f} = \frac{\iint_E f(x; y) dx dy}{P(E)}$ називається середнім

значенням функції f на множині E . З теореми 1 випливає, що для неперервної функції f знайдеться така точка $(\bar{x}; \bar{y}) \in E$, що $\bar{f} = f(\bar{x}; \bar{y})$.

Крім цього, якщо E є відкритою множиною, то

$$\lim_{\delta \rightarrow 0+} \frac{\iint_{U((\bar{x}; \bar{y}); \delta)} f(x; y) dx dy}{\pi \delta^2} = f(\bar{x}; \bar{y})$$

для кожної точки $(\bar{x}; \bar{y}) \in E$.

Теорема 2. Якщо $\tilde{E}$ і $\hat{E}$ – вимірні множини, які не мають спільних внутрішніх точок, $E = \tilde{E} \cup \hat{E}$, функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою на множині E і інтегрованою на кожній з множин $\tilde{E}$ і $\hat{E}$, то вона є інтегрованою і на множині E , і має місце (1).

Приклад 1. Розглянемо функцію

$$f(x; y) = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & (x; y) \in \tilde{E} \\ 1, & (x; y) \in \hat{E}, \end{cases}$$

де $\tilde{E} = \{(x; y): x^2 + y^2 = 1\} \setminus \{(1; 0)\}$, $\hat{E} = \{(x; y): x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(1; 0)\}$.

Ця функція f є інтегрованою на множині $\tilde{E}$, оскільки $P_{\tilde{E}} = 0$. Ця ж функція є інтегрованою на $\hat{E}$, бо вона є сталою на $\hat{E}$. Але f не є

Подвійні і потрійні інтеграли

інтегрованою на множині $E = \tilde{E} \cup \hat{E}$, бо не є обмеженою, а E є замкнутою областю.

10. Зведення подвійного інтегралу до повторного у випадку прямокутної множини інтегрування.

Теорема 1 (Фубіні). Нехай $E = \{(x; y) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ – прямокутник зі сторонами, паралельними осям координат і $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ – функція неперервна на E . Тоді

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x; y) dy \right) dx, \quad (10.1)$$

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x; y) dx \right) dy. \quad (10.2)$$

Доведення. Нехай $\{x_k : k \in \overline{0; \nu}\}$ і $\{y_j : j \in \overline{0; \nu}\}$ такі точки, що $a = x_0 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_\nu = b$ і $c = y_0 < \dots < y_j < y_{j+1} < \dots < y_\nu = d$. Проведемо прямі $x = x_k$ і $y = y_j$. Вони розіб'ють прямокутник E на ν^2 замкнених прямокутників $E_{kj}, k \in \overline{0; \nu-1}, j \in \overline{0; \nu-1}$. Нехай $M_{kj} = \sup\{f(x; y) : (x; y) \in E_{kj}\}$, $m_{kj} = \inf\{f(x; y) : (x; y) \in E_{kj}\}$. За теоремою Вейєрштрасса існують точки $(\xi_{k,j}^*; \eta_{k,j}^*) \in E_{kj}$ і $(\bar{\xi}_{k,j}; \bar{\eta}_{k,j}) \in E_{kj}$ такі, що $f(\xi_{k,j}^*; \eta_{k,j}^*) = M_{kj}$, $f(\bar{\xi}_{k,j}; \bar{\eta}_{k,j}) = m_{kj}$. Візьмемо довільну точку $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Тоді

$$m_{kj} \Delta y_j \leq \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_k; y) dy \leq M_{kj} \Delta y_j, \quad \Delta y_j = y_{j+1} - y_j.$$

Тому

$$\sum_{j=0}^{\nu-1} m_{kj} \Delta y_j \leq \sum_{j=0}^{\nu-1} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(\xi_k; y) dy \leq \sum_{j=0}^{\nu-1} M_{kj} \Delta y_j,$$

Подвійні і потрійні інтеграли

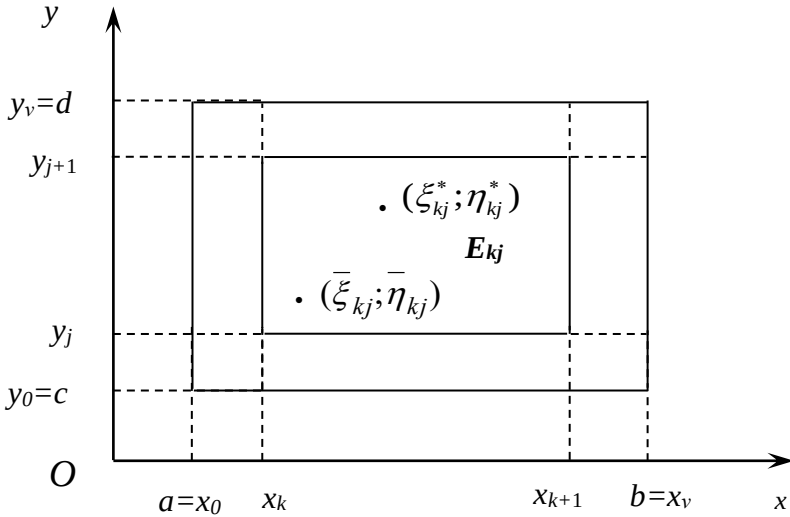


Рис. 10.1.

$$\sum_{j=0}^{v-1} m_{kj} \Delta y_j \leq \int_c^d f(\xi_k; y) dy \leq \sum_{j=0}^{v-1} M_{kj} \Delta y_j$$

,

$$\sum_{j=0}^{v-1} m_{kj} \Delta y_j \leq F(\xi_k) \leq \sum_{j=0}^{v-1} M_{kj} \Delta y_j ,$$

де

$$F(x) = \int_c^d f(x; y) dy .$$

Звідси, позначивши $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, отримуємо

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=0}^{v-1} \sum_{j=0}^{v-1} m_{kj} \Delta y_j \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{v-1} F(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{v-1} \sum_{j=0}^{v-1} M_{kj} \Delta y_j \Delta x_k = \bar{\sigma} .$$

Але

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \underline{\sigma} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{\sigma} = \iint_E f(x; y) dx dy .$$

Таким чином,

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{v-1} F(\xi_k) \Delta x_k = \iint_E f(x; y) dx dy ,$$

тобто

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\int_a^b F(x) dx = \iint_E f(x; y) dx dy,$$

звідки випливає (10.1), а (10.2) доводиться аналогічно. ►

Інтеграли, які стоять у правих частинах рівностей (10.1) і (10.2) називаються повторними.

Приклад 1. Нехай $D = \{(x; y): 3 \leq x \leq 4, 1 \leq y \leq 2\}$. Тоді

$$\begin{aligned} \iint_D \frac{dx dy}{(x+y)^2} &= \int_1^2 dy \int_3^4 \frac{dx}{(x+y)^2} = \int_1^2 \left(-\frac{1}{x+y} \Big|_3^4 \right) dy \\ &= \int_1^2 \left(\frac{1}{y+3} - \frac{1}{y+4} \right) dy = \ln \frac{25}{24}. \end{aligned}$$

Приклад 2. Знайдемо площу області E , обмеженої кривими $y = x^2$ і $y = 4$. В даному випадку

$$P(E) = \iint_E dx dy = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 dy = \int_{-2}^2 (4 - x^2) dx = 16 - \frac{16}{3} = \frac{32}{3}.$$

11. Зведення подвійного інтегралу до повторного у випадку криволінійної області.

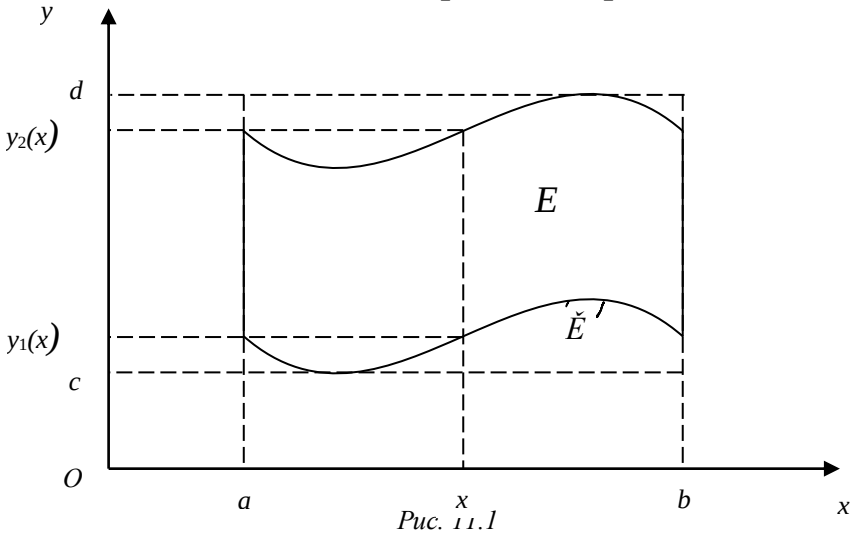
Теорема 1. Нехай функції $y_1: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $y_2: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними на $[a; b]$ і $y_1(x) \leq y_2(x)$ для всіх $x \in [a; b]$. Нехай, крім цього, функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на криволінійній трапеції $E = \{(x; y): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$. Тоді

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy. \quad (11.1)$$

Доведення. Нехай $c = \min\{y_1(x): x \in [a; b]\}$,
 $d = \max\{y_2(x): x \in [a; b]\}$, $\Delta = \{(x; y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$.

$$F(x; y) = \begin{cases} f(x; y), & (x; y) \in E, \\ 0, & (x; y) \notin E. \end{cases}$$

Подвійні і потрійні інтеграли



Тоді, (тут $\Delta = E \cup \tilde{E}$)

$$\begin{aligned} \iint_E f(x; y) dx dy &= \iint_{\Delta} F(x; y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x; y) dy \\ &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x; y) dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x; y) dy, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести. ►

Теорема 2. Нехай функції $x_1: [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ і $x_2: [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ неперервними на проміжку $[c; d]$ і $x_1(y) \leq x_2(y)$ для всіх $y \in [c; d]$. Нехай, крім цього, функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на криволінійній трапеції $E = \{(x; y): c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$. Тоді

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x; y) dx. \quad (11.2)$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню теореми 1. ►

Приклад 1. Нехай E – область, обмежена параболою $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$. Тоді за формулою (11.2)

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\begin{aligned}\iint_E (x^2 + y) dx dy &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y) dx = \int_0^1 \left(\frac{x^3}{3} + yx \right) \Big|_{y^2}^{\sqrt{y}} dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{4}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} y^6 - y^3 \right) dy = \frac{33}{140}.\end{aligned}$$

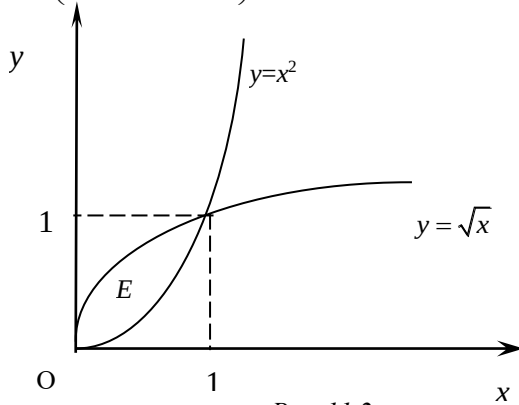


Рис. 11.2

Цю ж задачу можна розв'язати за формулою (11.1):

$$\begin{aligned}\iint_E (x^2 + y) dx dy &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2 + y) dy = \int_0^1 \left(yx^2 + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^{5/2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2} x^4 \right) dx = \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = \frac{33}{140}\end{aligned}$$

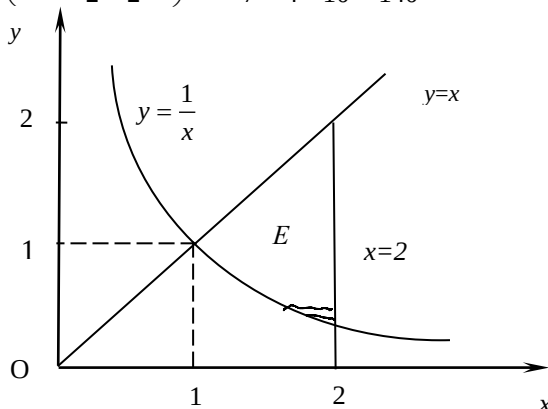


Рис. 11.3

Подвійні і потрійні інтеграли

Приклад 2. Нехай E – область, обмежена прямими $x=2$, $y=x$ і гіперболою $y=1/x$ (Рис. 11.3). Тоді

$$\iint_E \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 x^2 dx \int_{1/x}^x \frac{dy}{y^2} = \int_1^2 x^2 \left(-\frac{1}{y} \Big|_{1/x}^x \right) dx = \int_1^2 (x^2 - x) dx = \frac{9}{4}.$$

Приклад 3. Нехай E – область, яка обмежена віссю абсцис і аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_E y dx dy &= \int_0^{2\pi a} dx \int_0^{y_1(x)} y dy = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi a} y_1^2(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a(1 - \cos t))^2 d(a(t - \sin t)) = \frac{a^3}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5}{2} \pi a^3. \end{aligned}$$

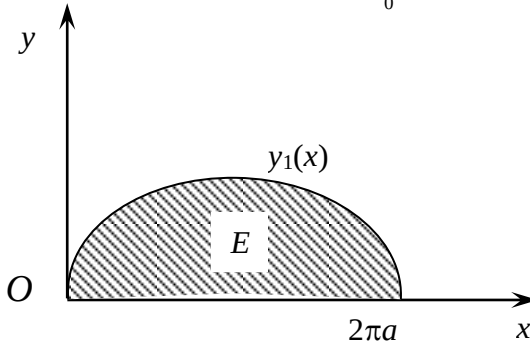


Рис. 11.4

12. Заміна змінних у подвійному інтегралі. В подвійному інтегралі часто використовують заміну

$$\begin{cases} x = \psi_1(u, v), \\ y = \psi_2(u, v). \end{cases}$$

Теорема 1. Нехай E_1 і G_1 – дві відкриті множини в $\mathbb{R}^2$ і функція $\psi = (\psi_1; \psi_2): G_1 \rightarrow E_1$ задовольняє такі умови: 1) функції ψ_1 і ψ_2 мають в G_1 неперервні частинні похідні першого порядку по обох змінних; 2)

Подвійні і потрійні інтеграли

функція ψ є взаємно однозначним відображенням G_1 на E_1 ; 3) визначник (Якобіан)

$$\det \Psi'(u; v) = I(u; v) = \frac{\partial(\psi_1; \psi_2)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (12.1)$$

не дорівнює нулеві в E_1 . Тоді, якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на квадратовій множині E , $\bar{E} \subset E_1$, і $G = \Psi^{-1}(E)$ (рис. 12.1), то

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \iint_G f(\psi_1(u; v); \psi_2(u; v)) |I(u; v)| du dv. \quad (12.2)$$

Доведення. Доведемо теорему у випадку, коли f є неперервною і $\Psi = A$ – лінійна функція, $\psi_1 = a_{11}u + a_{12}v$, $\psi_2 = a_{21}u + a_{22}v$. У даному

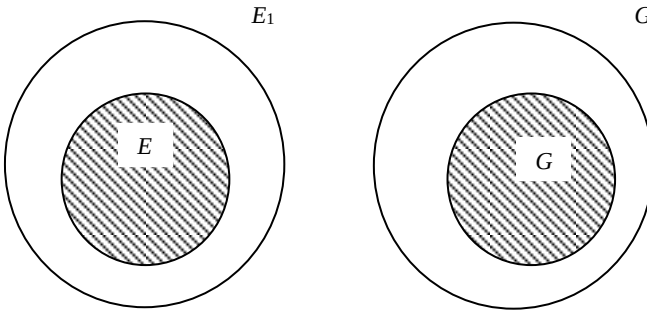


Рис. 12.1

випадку

$$I(u; v) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A, \quad A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \Psi'(u; v) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Розіб'ємо $\mathbb{R}^2$ на квадрати зі сторонами, паралельними осям координат, довжиною h . Нехай Δ_k , де $k \in \overline{0, p-1}$ – ті квадрати, які належать G . Візьмемо в кожному такому квадраті Δ_k довільну точку $(\xi_k; \eta_k)$ і розглянемо суму

$$\sigma_0 = \sum_{k=0}^{p-1} f(\psi_1(\xi_k; \eta_k); \psi_2(\xi_k; \eta_k)) |I(\xi_k; \eta_k)| h^2.$$

Подвійні і потрійні інтеграли

Тоді сума σ_0 відрізняється від деякої інтегральної суми для інтегралу з правої частини (2) на доданок, який прямує до нуля, коли $h \rightarrow 0$. Тому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_0 = \iint_G f(\psi_1(u; v); \psi_2(u; v)) |I(u; v)| du dv.$$

З іншого боку, з аналітичної геометрії відомо, що лінійне відображення ψ переводить квадрати Δ_k у паралелограми з площами $|I(u; v)| h^2$. Тому сума σ_0 відрізняється від деякої інтегральної суми для інтегралу, який стоїть в лівій частини (2) на доданок, який прямує до нуля, коли $h \rightarrow 0$. Отже,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_0 = \iint_E f(x; y) dx dy$$

і в цьому випадку теорема 1 доведена.

Зауваження 1. Можна переконатись, що теорема 1 залишається справедливою, якщо в ній умови 2) і 3) замінити відповідно умовами: 2') існують множини D і D_1 нульової міри такі, що функція ψ є взаємно однозначним відображенням $G_1 \setminus D_1$ на $E_1 \setminus D$; 3') визначник $I(u; v)$ не дорівнює нулеві на $G_1 \setminus D_1$.

 Разом з цим, можна переконатись, що вимога взаємно однозначності в теоремі 1 є істотною. Наприклад, якщо

$$\psi(u; v) = (e^u \cos v; e^u \sin v), \quad E = \{(x; y) : 1 \leq x^2 + y^2 \leq e^2\},$$

$$\psi^{-1}(E) = \{(u; v) : u \in [0; 1], v \in [-2\pi; 2\pi]\}, \quad f \equiv 1, \text{ то}$$

$$\iint_D dx dy = \pi(e^2 - 1),$$

$$\iint_{\psi^{-1}(\Delta_k)} |I(u; v)| du dv = \int_{-2\pi}^{2\pi} dv \int_0^1 e^{2u} du = 2\pi(e^2 - 1).$$

 Бачимо, що формула заміни змінних в подвійному інтегралі відрізняється від одномірного випадку тим, що у формулі присутній $|I(u; v)|$, а не $I(u; v)$.

Зауважимо, що $|I(u; v)| du dv$ часто називають *елементом площі в криволінійній системі координат*, а $dx dy$ — *елементом площі в декартовій системі координат*.

Подвійні і потрійні інтеграли

13. Перехід до полярної системи координат. У подвійному інтегралі найчастіше здійснюють заміну

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad (13.1)$$

тобто, переходять до полярної системи координат. В даному випадку

$$\begin{cases} \psi_1 = \rho \cos \varphi, \\ \psi_2 = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Тоді

$$\frac{\partial x}{\partial \rho} = \cos \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \rho} = \sin \varphi, \quad \frac{\partial x}{\partial \varphi} = -\rho \sin \varphi, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \rho \cos \varphi,$$

$$I(\varphi; \rho) = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi \end{vmatrix} = -\rho.$$

Отже, за виконання відповідних умов

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \iint_G f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho. \quad (13.2)$$

Це і є формула переходу до полярної системи координат. При цьому $\rho d\varphi d\rho$ – називають елементом площі в полярній системі координат.

На полярні координати можна дивитися з обох боків. По-перше, можна вважати, що є дві площини (рис.13.1). В одній з них є декартова система координат $(x; y)$, а в іншій – $(\varphi; \rho)$ (при такому трактуванні ρ може бути і від'ємним). Тоді система (1) задає відображення $\psi = (\psi_1; \psi_2) = (\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. За такого відображення пряма $\varphi = \alpha$ переходить в промінь $y = x \operatorname{tg} \alpha$, пряма $\varphi = \beta$ в промінь $y = x \operatorname{tg} \beta$, крива a_1 в криву b_1 , крива a_2 в криву b_2 , область G в область E .

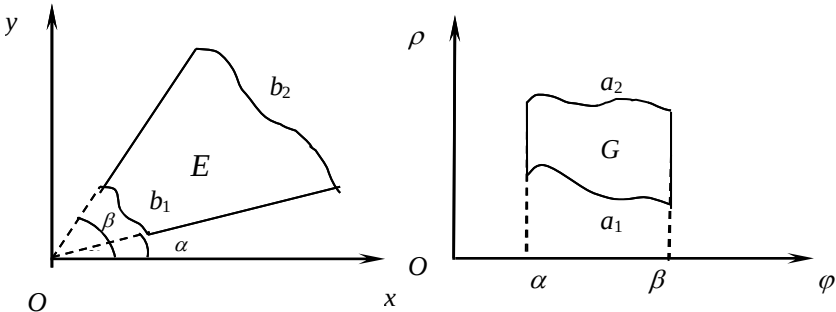


Рис. 13.1

Подвійні і потрійні інтеграли

По-друге, на полярні координати можна дивитися як на *криволінійні координати* $(\varphi; \rho)$. Власне, виберемо вісь OX за полярну вісь (рис. 13.2). Тоді кожна точка $(x; y)$ має полярні координати $(\varphi; \rho)$, які пов'язані формулою (1). При цьому $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ – відстань від точки O до точки $(x; y)$, а φ – кут, утворений полярною віссю і променем з початком в точці O , який проходить через точку $(x; y)$. При такому трактуванні полярних координат $\rho \geq 0$. Рівняння $\rho = \rho_0$ – це рівняння кола в полярній системі координат, а $\varphi = \varphi_0$ – рівняння променя (рис. 13.3).

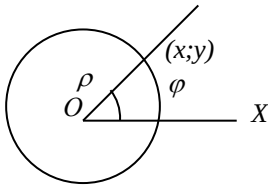


Рис. 13.2

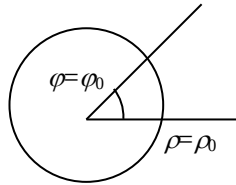


Рис. 13.3

Зі сказаного вище випливає, що якщо E – це криволінійний сектор, обмежений променями $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ і кривими $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$, де $\alpha \leq \beta$, $\rho = \rho_1(\varphi)$ і $\rho = \rho_2(\varphi)$ – функції, неперервні на проміжку $[\alpha; \beta]$ і $\rho_1(\varphi) \leq \rho_2(\varphi)$ для всіх $\varphi \in [\alpha; \beta]$, то

$$\iint_E f(x; y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) \rho d\rho \right) d\varphi.$$

Приклад 1. Нехай E – область, обмежена віссю OX і півколами $y = \sqrt{9 - x^2}$, $y = \sqrt{16 - x^2}$ (рис. 13.4).

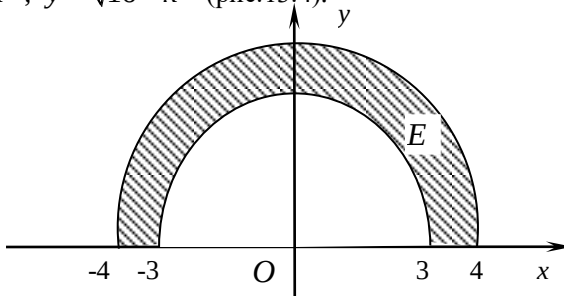


Рис. 13.4

Подвійні і потрійні інтеграли

Тоді

$$\begin{aligned} \iint_E \left(\sqrt{25 - x^2 - y^2} \right)^3 dx dy &= \iint_G \left(25 - \rho^2 \right)^{3/2} \rho d\rho d\varphi \\ &= \int_0^\pi d\varphi \int_3^4 (25 - \rho^2)^{3/2} \rho d\rho = \frac{781}{5} \int_0^\pi d\varphi = \frac{781}{5} \pi \end{aligned}$$

Приклад 2. Нехай $E = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 6y, y \leq x, y \geq x/2, x \geq 0\}$ (рис.13.5). Тоді

$$\begin{aligned} \iint_E dx dy &= \iint_G \rho d\rho d\varphi = \int_{\arctg(1/2)}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{6\sin\varphi} \rho d\rho = 18 \int_{\arctg(1/2)}^{\pi/4} \sin^2 \varphi d\varphi \\ &= 9 \left(-\arctg \frac{1}{2} - \frac{1}{10} + \frac{\pi}{4} \right). \end{aligned}$$

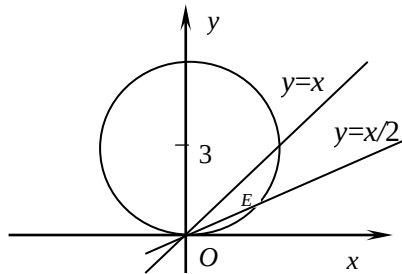


Рис. 13.5

Приклад 3. Нехай E – область, обмежена гіперболами $xy = 1$ і $xy = 2$ та параболлами $y^2 = x$ і $y^2 = 2x$ (рис.13.6).

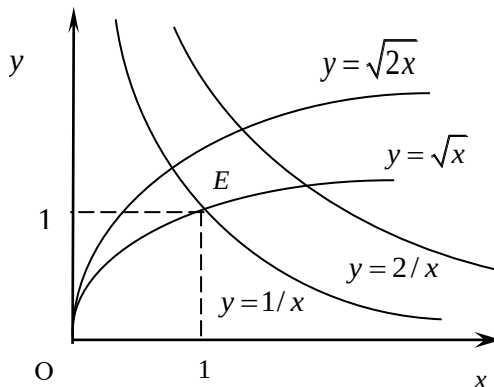


Рис. 13.6

Подвійні і потрійні інтеграли

Нехай $x = u^{\frac{4}{3}}v^{-\frac{1}{3}}$, $y = u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$. Тоді квадрат $\{(u;v): 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 2\}$ переходить в E і

$$I(u;v) = \begin{vmatrix} \frac{4}{3}u^{\frac{1}{3}}v^{-\frac{1}{3}} & -\frac{1}{3}u^{\frac{4}{3}}v^{-\frac{4}{3}} \\ \frac{2}{3}u^{-\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}u^{\frac{2}{3}}v^{-\frac{2}{3}} \end{vmatrix} = \frac{2}{3} \frac{u}{v}$$

Тому

$$\iint_E dx dy = \frac{2}{3} \int_1^2 u du \int_1^2 \frac{dv}{v} = \ln 2.$$

14. Знаходження об'єму циліндричного тіла за допомогою подвійного інтегралу. Нехай $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – невід'ємна неперервна функція в замкненій області E_{xy} (рис. 14.1), а $T = \{(x; y; z): 0 \leq z \leq f(x; y), (x; y) \in E_{xy}\}$ – циліндричне тіло, обмежене зверху графіком функції f , знизу областю E_{xy} , а з боків – циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ .

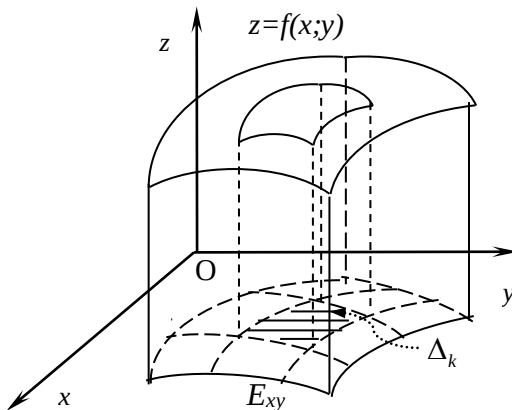


Рис. 14.1

Теорема 1. Якщо область E_{xy} є квадратною фігурою, а функція $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною в області E_{xy} , то циліндричне тіло T є кубовою фігурою і його об'єм знаходиться за формулою

Подвійні і потрійні інтеграли

$$V_T = \iint_{E_{xy}} f(x; y) dx dy. \quad (14.1)$$

Доведення. Покриємо $\mathbb{R}^2$ квадратами Δ_k зі сторонами h , паралельними осям координат. На кожному квадраті Δ_k , який лежить в E_{xy} , побудуємо прямий прямокутний паралелепіпед з висотою $m_k = \min\{f(x; y) : (x; y) \in \Delta_k\}$, а на кожному прямокутнику Δ_k , який має принаймні одну спільну точку з E_{xy} побудуємо прямий прямокутний паралелепіпед з висотою $M_k = \max\{f(x; y) : (x; y) \in \Delta_k\}$. Тоді суми об'ємів відповідних вхідних і вихідних паралелепіпедів рівні відповідно

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=0}^{v-1} m_k h^2, \quad \bar{\sigma} = \sum_{k=0}^{v-1} M_k h^2.$$

Оскільки f – є неперервною функцією, то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \underline{\sigma} = \lim_{h \rightarrow 0} \bar{\sigma} = \iint_{E_{xy}} f(x; y) dx dy.$$

Звідси випливає, що T є кубовною фігурою і справедлива формула (1).

Приклад 1. Знайдемо об'єм тіла T , обмеженого поверхнями $z = 1 - x^2 - y^2$, $z = -2$. Проекцією T на площину XOY є круг $E_{xy} = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq 3\}$ (Рис. 14.2).

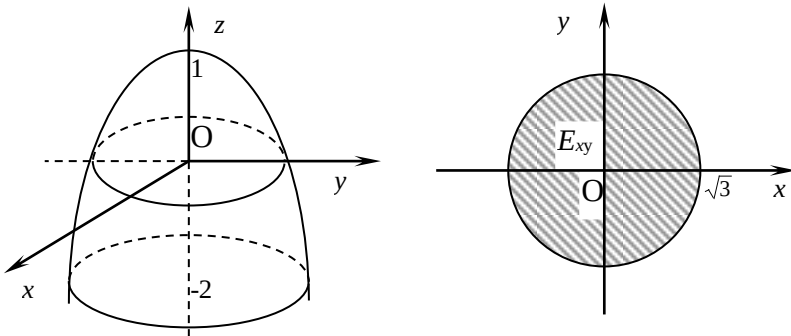


Рис. 14.2.

Тому

Подвійні і потрійні інтеграли

$$V = \iint_{E_{xy}} (1 - x^2 - y^2) dx dy + \iint_{E_{xy}} 2 dx dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} (3 - \rho^2) \rho d\varphi d\rho = -2\pi \frac{(3 - \rho^2)^2}{4} \bigg|_0^{\sqrt{3}} = \frac{9}{2} \pi.$$

Приклад 2 (Об'єм тіла Вівіані). Знайдемо об'єм V тіла,

вирізаного циліндром $x^2 + y^2 = Rx$

із сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (Рис.

14.3). Маємо

$$V = 4 \iint_P \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dx dy,$$

де P – півкруг у першому квадранті площини XOY , обмежений лініями $x=0$ і $x^2 + y^2 = Rx$. Тобто,

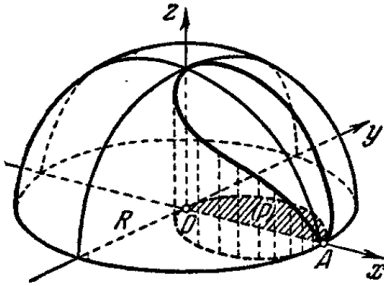


Рис. 14.3

$$V = 4 \int_0^R dx \int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy.$$

Обчислимо останній інтеграл

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{Rx-x^2}} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} dy &= \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \frac{y}{\sqrt{R^2 - x^2}} + \\ &+ \frac{y}{2} \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{Rx-x^2}} = \frac{R^2 - x^2}{2} \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} + \\ &+ \frac{1}{2} \sqrt{R(R-x)} \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Тоді, інтегруючи за частинами, знайдемо

$$\frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} dx = \frac{\pi R^3}{12} - \frac{\sqrt{R}}{12} \int_0^R \frac{3R^2 x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{5}{2}}}{R+x} dx.$$

Далі, застосувавши підстановку $x = Rt^2$, обчислимо останній доданок:

$$\frac{\sqrt{R}}{12} \cdot 2R^2 \cdot \sqrt{R} \cdot \left(\frac{32}{15} - \frac{\pi}{12} \right) = \left(\frac{16}{45} - \frac{\pi}{12} \right) R^3.$$

Отже,

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\frac{1}{2} \int_0^R (R^2 - x^2) \arcsin \sqrt{\frac{x}{R+x}} dx = \left(\frac{\pi}{6} - \frac{16}{45} \right) R^3.$$

Також проінтегруємо другий доданок

$$\frac{1}{2} \int_0^R \sqrt{R(R-x)} \sqrt{x} dx = \frac{2}{15} R^3.$$

Таким чином, отримуємо

$$V = 4 \left(\frac{\pi}{6} - \frac{2}{9} \right) R^3 = \frac{2}{3} \pi R^3 - \frac{8}{9} R^3.$$

Зауваження 1. Варто зауважити, що оскільки об'єм сфери $\frac{2}{3} \pi R^3$,

то об'єм частини кулі без тіла Вівіані становить $\frac{8}{9} R^3$, тобто виражається через R і не містить трансцендентного числа π .

15. Знаходження площі поверхні за допомогою подвійного інтегралу.

Нехай $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ визначена в деякій квадровній області E_{xy} . Графік функції f — це деяка поверхня Δ . Для знаходження площі Δ подамо область E_{xy} у вигляді об'єднання квадрованих множин E_k , $k \in \overline{0; \nu-1}$, з площами ΔP_k , які мають діаметри λ_k і не мають спільних внутрішніх точок. В кожній множині E_k візьмемо довільну точку $(\xi_k; \eta_k)$ (рис. 15.2). Тоді точка $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$, де $\zeta_k = f(\xi_k; \eta_k)$ належить Δ . В точці $(\xi_k; \eta_k)$ до поверхні Δ проведемо дотичну площину. Вона має рівняння

$$z - \zeta_k = f'_x(\xi_k; \eta_k)(x - \xi_k) + f'_y(\xi_k; \eta_k)(y - \eta_k).$$

Подвійні і потрійні інтеграли

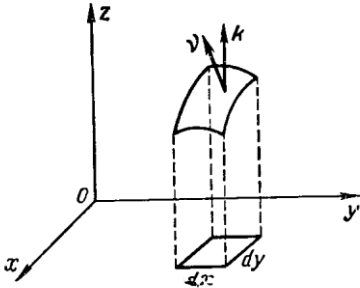


Рис. 15.1

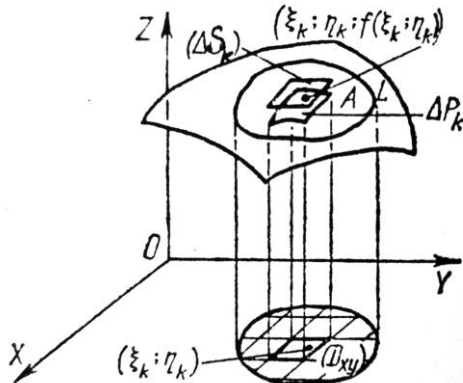


Рис. 15.2

Нехай γ_k – гострий кут, утворений дотичною площиною з площиною XOY , це також кут між одиничним вектором осі OZ вектором дотичної до поверхні (рис. 15.1). Тоді

$$\cos \gamma_k = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k; \eta_k) + f_y'^2(\xi_k; \eta_k)}}.$$

Проведемо з кожної точки межі множини E_k прямі. Вони виріжуть на дотичній площині область, площа якої

$$\Delta S_k = \frac{\Delta P_k}{\cos \gamma_k}.$$

За площу поверхні Δ приймають границю

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{v-1} \Delta S_k.$$

Теорема 1. Якщо функція $f: E_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на квадратній замкненій множині E_{xy} разом зі своїми частинними похідними першого порядку, то площа її графіка знаходиться за формулою

$$S = \iint_{E_{xy}} \sqrt{1 + f_x'^2(x; y) + f_y'^2(x; y)} dx dy. \quad (15.1)$$

Доведення. Справді,

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\sum_{k=0}^{v-1} \Delta S_k = \sum_{k=0}^{v-1} \sqrt{1 + f_x'^2(\xi_k; \eta_k) + f_y'^2(\xi_k; \eta_k)} \Delta P_k,$$

а остання сума є інтегральною сумою для інтегралу (1). ►



Якщо функція f задана неявно системою

$$\begin{cases} x = \eta_1(u; v), \\ y = \eta_2(u; v), \\ z = \eta_3(u; v), (u; v) \in E_{uv}, \end{cases}$$

то формула для знаходження площі поверхні приймає вигляд

$$S = \iint_{E_{uv}} \sqrt{EG - F^2} du dv \quad (15.2)$$

де $E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2$, $F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v'$ і $G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2$. При цьому,

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

де

$$A = \frac{\partial(y; z)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \frac{\partial(z; x)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \frac{\partial(x; y)}{\partial(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Приклад 1. Знайдемо площу сфери $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Тоді $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. Тому (беремо знак "+", що відповідає верхній півсфері)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}, \quad \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}.$$

Тому (рис 15.3)

$$S = 2 \iint_{D_{xy}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy = 2R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R (R^2 - \rho^2)^{-1/2} \rho d\rho = 4\pi R^2.$$

Подвійні і потрійні інтеграли

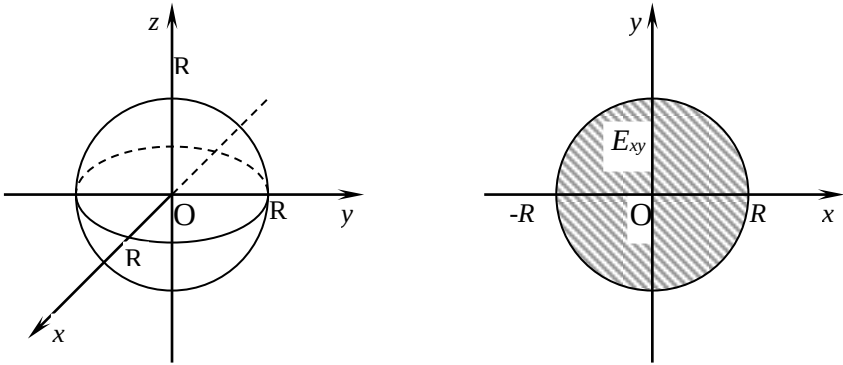


Рис. 15.3

Приклад 2. Знайдемо площу частини циліндра $x^2 + y^2 = R^2$, яка вирізана циліндром $x^2 + z^2 = R^2$.

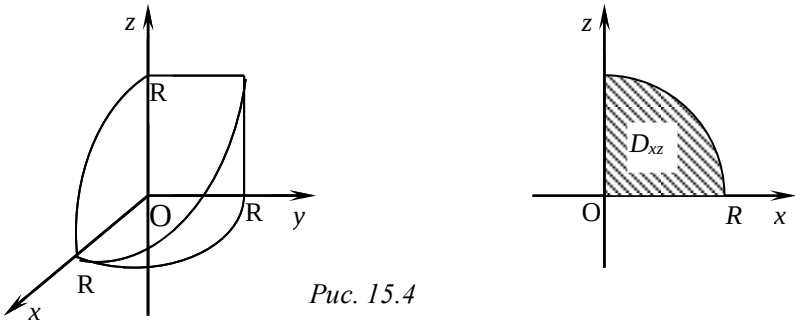


Рис. 15.4

Восьма частина цієї поверхні зображена на рисунку 15.4 заштрихована. Для цієї частини

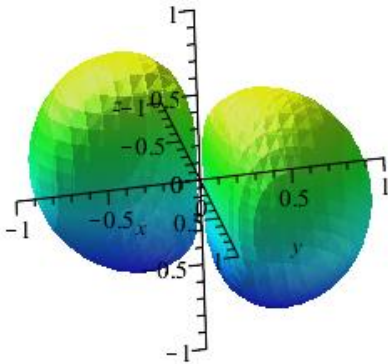
$$y = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad \frac{\partial y}{\partial z} = 0.$$

Тому

$$S = 8 \iint_{D_{xz}} \sqrt{1 + y_x'^2 + y_z'^2} dz dx = 8 \iint_{D_{xz}} \frac{R dz dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 8R \int_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} \int_0^{\sqrt{R^2 - x^2}} dz = 8R^2.$$

Приклад 3. Знайдемо площу поверхні $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 2xy$ (рис. 15.5). Для цього знайдемо параметричне рівняння цієї поверхні. Нехай

Подвійні і потрійні інтеграли



$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases}$$

Тоді $r = \sin \theta \sqrt{\sin 2\varphi}$ і система

Рис. 15.5

$$\begin{cases} x = \sin^2 \theta \sqrt{\sin 2\varphi} \cos \varphi \\ y = \sin^2 \theta \sqrt{\sin 2\varphi} \sin \varphi \\ z = \frac{1}{2} \sin 2\theta \sqrt{\sin 2\varphi}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq \pi/2. \end{cases}$$

є параметризацією половини поверхні. Тоді

$$EG - F^2 = \sin^4 \theta.$$

Тому

$$S = 2 \int_0^{\pi} \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\varphi d\theta = \frac{\pi^2}{2}.$$



Зауваження 1. На відміну від довжини шляху, площу, навіть циліндра, не можна знайти як границю площ вписаних в нього многогранників. На це вказує приклад приведений Шварцом.

Приклад Шварца. Нехай маємо прямий круговий циліндр з висотою H і радіусом основи R . Поділимо циліндр площинами, паралельними основі на m рівних. Кожне коло поділимо на n рівних частин так, щоб точки ділення вищого кола лежали над серединами дуг, на які поділено нижче коло. З'єднаємо точки, поставлені на колах відрізками. Отримаємо $2mn$

трикутників з основами $2R \sin \frac{\pi}{n}$ і висотами $\sqrt{R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + (H/m)^2}$.

(рис. 15.6)

Подвійні і потрійні інтеграли

Ці трикутники утворюють вписаний в циліндр многогранник з площею

$$S_{mn} = 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{R^2 m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2 + H^2}$$

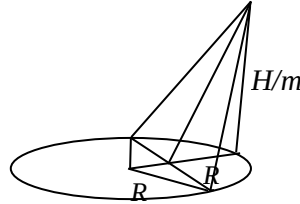
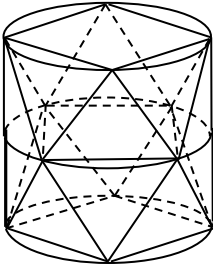
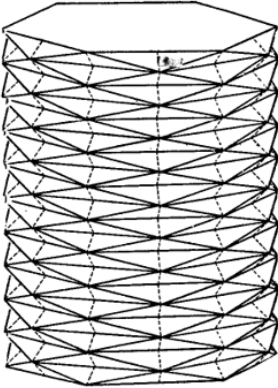


Рис. 15.6



Проте $\lim_{\substack{m \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} S_{mn}$ не існує.

16. Поняття про невластні (невластиві) подвійні інтеграли.

Вичерпуванням множини $E \subset \mathbb{R}^2$ — називається така послідовність (G_k) вимірних множин $G_k \subset E$, що $G_k \subset G_{k+1}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$. Множину

$E \subset \mathbb{R}^2$ можна вичерпувати багатьма способами.

Приклад 1. Послідовність кругів $G_k = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq k^2\}$ є вичерпування множини $E = \mathbb{R}^2$. Це ж можна сказати і про послідовність квадратів $G_k = \{(x; y) : |x| \leq k, |y| \leq k\}$. (Рис.16.1, 16.2)

Приклад 2. Послідовність замкнених кругів $G_k = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq (1 - 1/k)^2\}$ є вичерпування множини $E = \{(x; y) : x^2 + y^2 < 1\}$. (Рис. 16.3)

Подвійні і потрійні інтеграли

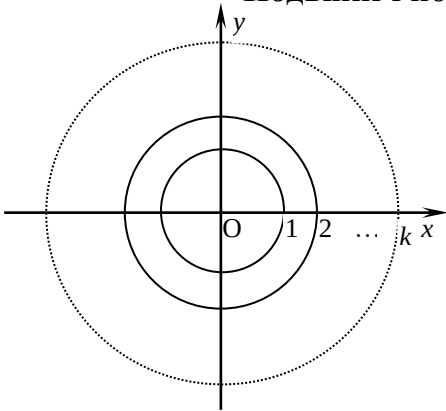


Рис.16.1

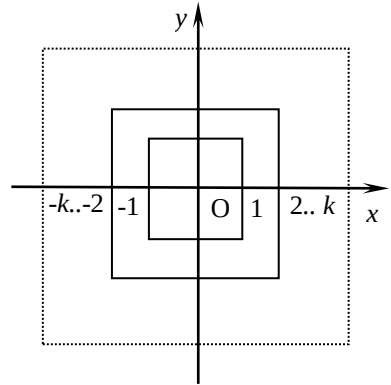


Рис. 16.2

Приклад 3. Послідовність півкругів (рис.16.4)
 $G_k = \{(x; y) : x^2 + y^2 \leq k^2, x \geq 0\}$ є вичерпування множини
 $E = \bar{\mathbb{R}}_+^2 = \{(x; y) : x \geq 0\}$. Це ж можна сказати про послідовність
 прямокутників $G_k = \{(x; y) : |x| \leq k, |y| \leq k, x \geq 0\}$.

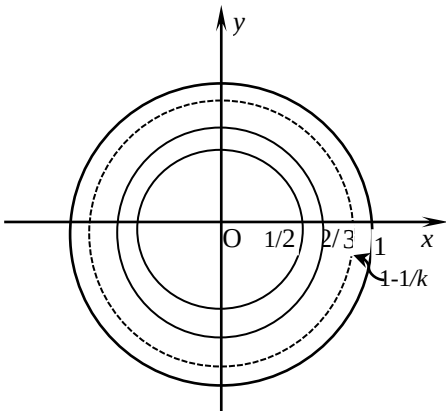


Рис. 16.3

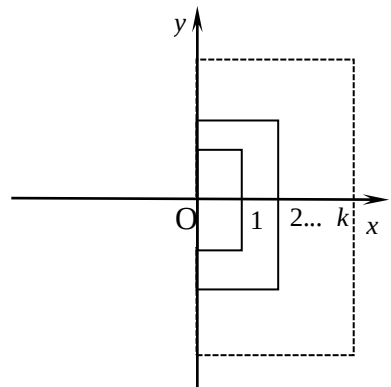


Рис. 16.4

Приклад 4. Послідовність прямокутників (самостійно зробити
 рисунок) $G_k = \{(x; y) : |x| \leq k, |y| \leq k, x \geq 0\}$ є вичерпування множини
 $E = \bar{\mathbb{R}}_+^2 = \{(x; y) : x \geq 0\}$. Це ж можна сказати про послідовність кругів
 $G_k = \{(x; y) : (x-k)^2 + y^2 \leq k^2\}$.

Подвійні і потрійні інтеграли

Приклад 5. Послідовність кругів (Рис. 16.5)

$G_k = \{(x; y) : (x - k)^2 + y^2 \leq (k - 1/k)^2\}$, є вичерпуванням множини $E = \mathbb{R}_+^2 = \{(x; y) : x > 0\}$. Це ж можна сказати про послідовність прямокутників $G_k = \{(x; y) : |x - k| \leq k - 1/k, |y| \leq k, x \geq 0\}$.

Приклад 6. Послідовність множин кругів (самостійно зробіть рисунок) $G_k = \{(x; y) : 1/k \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ є вичерпування множини $E = U((0; 0); 1) \setminus (0; 0)$, тобто одиничного круга з виколом центром.

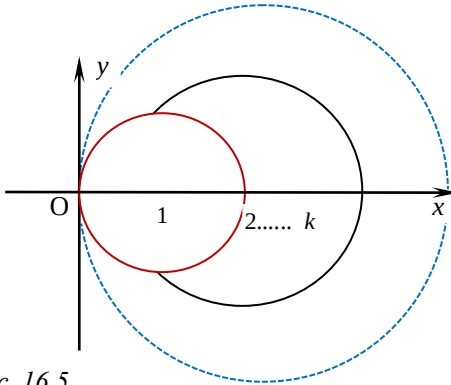


Рис. 16.5

Невласним інтегралом функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ по множині $E \subset \mathbb{R}^2$ називається границя

$$\iint_E f(x; y) dx dy := \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{G_k} f(x; y) dx dy. \quad (16.1)$$

Невласний інтеграл

$$\iint_E f(x; y) dx dy \quad (16.2)$$

називається **збіжним**, якщо для кожної послідовності (G_k) вимірних за Жорданом множин (G_k) границя (1) існує, є скінченною і не залежить від (G_k) . Існування границі (1) передбачає вимірність множин G_k та інтегрованість за Ріманом функції f на G_k , але не передбачає вимірності множини E та інтегрованості за Ріманом функції f на E .

Подвійні і потрійні інтеграли

Теорема 1. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на множині $E \subset \mathbb{R}^2$, то вона є інтегрованою і в невластному розумінні на E і обидва ці інтеграли є рівними.

Доведення цієї теореми подібне до одновимірного випадку, якщо зауважити, що $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(G_k)$. ►

Теорема 2. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною на області визначення і для неї границя (1) існує принаймні для одного вичерпування (G_k) множини E , то ця функція є інтегрованою у невластному розумінні на множині E .

Доведення. Нехай $(\tilde{G}_k)$ – інше вичерпування множини E і $G_{km} = G_k \cap G_m$. Тоді для кожного $m \in \mathbb{N}$ послідовність (G_{km}) є вичерпуванням множини G_m і завдяки невід'ємності функції f

$$\iint_{\tilde{G}_k} f(x; y) dx dy = \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{G_{km}} f(x; y) dx dy \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \iint_{G_m} f(x; y) dx dy = I,$$

Тому

$$\tilde{I} := \lim_{k \rightarrow \infty} \iint_{\tilde{G}_k} f(x; y) dx dy,$$

тобто $\tilde{I} \leq I$. Але в цих міркуваннях обидва вичерпування можна поміняти місцями. Тому $\tilde{I} = I$. ►

Теорема 3. Якщо функції $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ і $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровними за Ріманом на одних і тих же підмножинах множини E , функція g є невід'ємною на області визначення, інтеграл

$$\iint_E g(x; y) dx dy \quad (16.3)$$

є збіжним і

$$(\exists c_1 \in (0; +\infty)) (\forall (x; y) \in D(g)) : |f(x; y)| \leq c_1 g(x; y), \quad (16.4)$$

то невластний інтеграл (2) є збіжним.

Подвійні і потрійні інтеграли

Доведення. Нехай (G_k) – таке вичерпування множини E , що на кожній з G_k функції f і g є інтегровними за Ріманом. Тоді на G_k інтегровною за Ріманом є також функція $|f|$ і

$$\int_{G_{k+n}} |f(x)| dx - \int_{G_n} |f(x)| dx = \int_{G_{k+n} \setminus G_n} |f(x)| dx \leq \int_{G_{k+n} \setminus G_n} g(x) dx.$$

Тому згідно з критерієм Коші існування границі послідовності та попередньою теоремою збіжним є інтеграл

$$\int_E |f(x)| dx. \quad (16.5)$$

Нехай $f_+ = (|f| + f)/2$ і $f_- = (|f| - f)/2$. Тоді $0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|$ і $0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|$. Тому за доведеним вище інтеграли $\int_E f_+(x) dx$ і

$\int_E f_-(x) dx$ є збіжними. Залишилось зауважити, що $f = f_+ + f_-$. ►

Інтеграл (2) називається *абсолютно збіжним*, якщо збіжним є інтеграл (5).

Наслідок 1. Якщо невластний інтеграл є абсолютно збіжним, то він є збіжним.

☞ **Зауваження 1.** Справедливим є і твердження, обернене до сформульованого в наслідку 1: Якщо невластний інтеграл є збіжним, то він є абсолютно збіжним. Таким чином, маємо деяку відмінність з невластними інтегралами на підмножинах з $\mathbb{R}$. Ця відмінність зумовлена, зокрема, тим, що в означенні невластного інтегралу на $\mathbb{R}$ в якості множин G_k брались тільки проміжки і, фактично, він розглядався як узагальнення інтеграла Рімана першого роду.

Приклад 7.

$$\iint_{U((0;0);1)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \iint_{U((0;0);1) \setminus U((0;0);\delta)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^{1} \int_0^{2\pi} d\rho d\varphi = 2\pi.$$

Приклад 8. $\iint_{U((0;0);1)} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha < 1$, і є

розбіжним, якщо $\alpha \geq 1$, бо $\iint_{U((0;0);1)} \frac{dx dy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \int_{\delta}^{1} \int_0^{2\pi} \frac{d\rho d\varphi}{\rho^{2\alpha-1}}.$

Подвійні і потрійні інтеграли

Приклад 9. $\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus U((0;0);1)} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^\alpha} \in \text{збіжним, якщо } \alpha > 1, i \in$

$\text{розбіжним, якщо } \alpha \leq 1, \text{ бо}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2 \setminus U((0;0);1)} \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^\alpha} = \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \int_1^{\Delta} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{\rho^{2\alpha-1}} = 2\pi \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \int_1^{\Delta} \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}.$$

Приклад 10. $\iint_{U((0;0);1)} \frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha} \in \text{збіжним, якщо } \alpha < 1, i \in$

$\text{розбіжним, якщо } \alpha \geq 1, \text{ бо}$ $\iint_{U((0;0);1)} \frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow 1^-} \int_0^{\delta} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(1 - \rho^2)^\alpha}.$

Приклад 11. $\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha} \in \text{збіжним, якщо } \alpha > 1, i \in$

$\text{розбіжним, якщо } \alpha \leq 1, \text{ бо}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2)^\alpha} = \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \int_0^{\Delta} \int_0^{2\pi} \frac{\rho d\rho d\varphi}{(1 + \rho^2)^\alpha} = \pi \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \int_0^{\Delta} \frac{d(1 + \rho^2)}{(1 + \rho^2)^\alpha}.$$

Приклад 12.

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dxdy &= \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \iint_{U((0;0);\Delta)} e^{-x^2 - y^2} dxdy = \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \int_0^{\Delta} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \pi \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \int_0^{\Delta} e^{-\rho^2} d(\rho^2) = -\pi \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} e^{-\rho^2} \bigg|_{\rho^2=0}^{\rho^2=\Delta} = \pi. \end{aligned}$$

Приклад 13.

$$\begin{aligned} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy = \lim_{a \rightarrow +\infty} \iint_{[-a;a] \times [-a;a]} e^{-x^2 - y^2} dxdy \\ &= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2 - y^2} dxdy = \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \int_0^{\Delta} \int_0^{2\pi} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\varphi = \pi. \end{aligned}$$

Тому

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} / 2.$$

Подвійні і потрійні інтеграли

Приклад 14. Інтеграл $\iint_{U((0;0);1)} \frac{\sin(x+y)dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ є збіжним, бо

$$\left| \frac{\sin(x+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ і інтеграл } \iint_{U((0;0);1)} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}} \text{ є збіжним.}$$

17. Означення і найпростіші властивості потрійного інтеграла.

Нехай $T \subset \mathbb{R}^3$ – деяка кубовна множина з об'ємом V_T і $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція трьох змінних. Подамо множину T у вигляді об'єднання ν кубовних множин T_k з об'ємами ΔV_k і діаметрами $\lambda(k)$

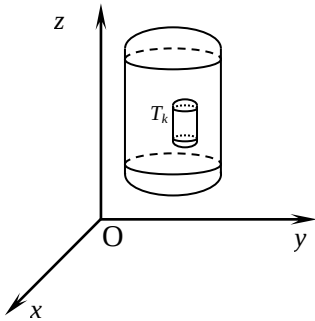


Рис. 17.1

так, що множини T_k не мають спільних внутрішніх точок. Сукупність $\tau = \{T_k : k \in 0; \nu-1\}$ таких множин називатимемо розбиттям множини $T \subset \mathbb{R}^3$. Нехай $\lambda_\tau = \max \{ \lambda(k) : k \in 0; \nu-1 \}$. Число λ_τ називається діаметром розбиття. Візьмемо в кожній з множин T_k довільну точку $(\xi_k; \eta_k; \zeta_k)$ і складемо суму

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\nu-1} f(\xi_k; \eta_k; \zeta_k) \Delta V_k. \quad (17.1)$$

Потрійним інтегралом функції f по множині T або **тримірним інтегралом Рімана** функції f по множині T називається границя

$$\iiint_T f(x; y; z) dxdydz = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma. \quad (17.2)$$

Для позначення потрійного інтегралу використовуються також символи

$$\int_T f dV, \quad \iiint_T f dV, \quad \iiint_T f |dxdydz|.$$

Якщо границя (2) існує і є скінченною, то функція f називається **інтегрованою** за Ріманом по множині T . У протилежному випадку f називається **неінтегрованою** за Ріманом по множині T . Потрійний

Подвійні і потрійні інтеграли

інтеграл є аналогом інтегралу Рімана першого роду (аналоги інтегралу Рімана будуть розглянуті пізніше).

☞ Потрійний інтеграл має звичайні для інтегралів властивості, які формулюються і доводяться за аналогією з подвійним інтегралом.

18. Знаходження об'єму за допомогою потрійного інтегралу.

Теорема 1. Якщо $T \subset \mathbb{R}^3$ – кубовна множина, то її об'єм V_T знаходиться за формулою

$$V_T = \iiint_T dx dy dz. \quad (18.1)$$

Доведення. Справді, взявши в означенні потрійного інтегралу $f \equiv 1$, отримуємо

$$\sigma = \sum_{k=0}^{v-1} f(\xi_k; \eta_k; \zeta_k) \Delta V_k = \sum_{k=0}^{v-1} \Delta V_k = V_T,$$

звідки випливає потрібне. ►

Символ $dx dy dz$ інколи називають *елементом об'єму* в декартовій системі координат.

За допомогою потрійного інтегралу знаходять багато фізичних величин: *маса тіла, статичні моменти інерції* та інші. Наприклад, *маса* m тіла з густиною $\rho(x; y; z)$ обчислюється за формулою

$$m = \iiint_T \rho(x; y; z) dx dy dz.$$

19. Зведення потрійного інтегралу до повторного.

Теорема 1. Нехай функція $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровною на паралелепіпеді $T = \{(x; y; z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, h \leq z \leq s\}$ з ребрами, паралельними осям координат. Тоді

$$\iiint_T f(x; y; z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_h^s f(x; y; z) dz \quad (19.1)$$

Подвійні і потрійні інтеграли

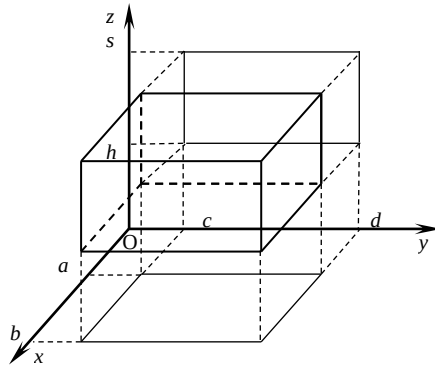


Рис. 19.1

Доведення цієї теореми повторює доведення відповідної теореми для подвійного інтеграла. ►

Теорема 2. Нехай функція $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на кубовній

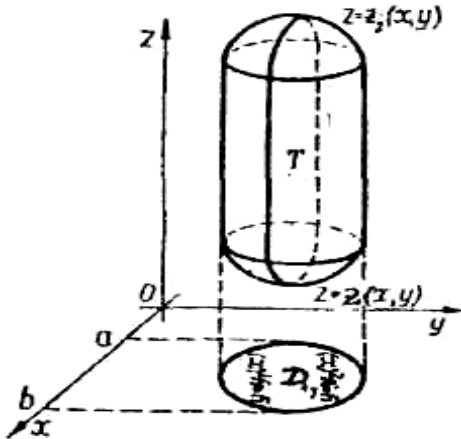


Рис. 19.2

області T (рис.19.2), яка знизу обмежена графіком функції $z = z_1(x; y)$, а зверху графіком функції $z = z_2(x; y)$, з боків циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі OZ , де $z_1: D_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$ і $z_2: D_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, неперервні на замкненій квадронній множині D_{xy} , яка є ортогональною проекцією T на площину HOY , тобто

$$T = \{(x; y; z) : (x; y) \in D_{xy}, \quad z_1(x) \leq z \leq z_2(x)\}.$$

Тоді

$$\iiint_T f(x; y; z) dx dy dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz. \quad (19.2)$$

Доведення. Нехай $\tilde{T} = \{(x; y; z) : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, h \leq z \leq s\}$ – такий паралелепіпед, що $T \subset \tilde{T}$, а

Подвійні і потрійні інтеграли

$$F(x; y; z) = \begin{cases} f(x; y; z), & (x; y; z) \in T, \\ 0, & (x; y; z) \notin T. \end{cases}$$

Тоді за попередньою теоремою

$$\begin{aligned} \iiint_T f(x; y; z) dx dy dz &= \iiint_{\tilde{T}} F(x; y; z) \\ &= \int_a^b \int_c^d dx dy \int_h^s F(x; y; z) dz = \iint_{D_{xy}} dx dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz, \end{aligned}$$

звідки випливає потрібне. ►

Наслідок 1. Якщо виконуються умови теореми 1, $D_{xy} = \{(x; y) : y_1(x) \leq y \leq y_2(x), x \in [a; b]\}$ – криволінійна трапеція, де $y_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $y_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, неперервні на $[a; b]$ і $y_1(x) \leq y_2(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$\iiint_T f(x; y; z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x; y)}^{z_2(x; y)} f(x; y; z) dz. \quad (19.3)$$

Приклад 1. Нехай (рис. 19.3)

$$T = \{(x; y; z) : x \in [0; 1], y \in [0; 2], 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}.$$

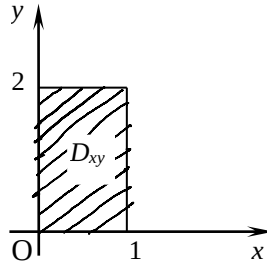
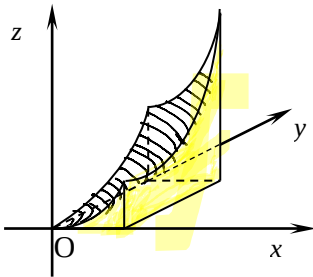


Рис. 19.3

Тоді потрібний інтеграл на множині T функції $f(x; y; z) = x$ обчислюватиметься так

$$\iiint_T x dx dy dz = \int_0^1 x dx \int_0^2 dy \int_0^{x^2 + y^2} dz = \int_0^1 x dx \int_0^2 (z|_0^{x^2 + y^2}) dy = \int_0^1 x dx \int_0^2 (x^2 + y^2) dy$$

Подвійні і потрійні інтеграли

$$= \int_0^1 x(x^2 y + y^3 / 3) \Big|_0^2 dx = \int_0^1 (2x^3 + \frac{8}{3}x) dx = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}.$$

20. Заміна змінних в потрійному інтегралі. Перехід до циліндричної системи координат.

У потрійному інтегралі, подібно як і в подвійному, використовують заміну

$$\begin{cases} x = \psi_1(u; v; w), \\ y = \psi_2(u; v; w), \\ z = \psi_3(u; v; w). \end{cases}$$

Теорема 1. Нехай T_1 і G_1 – дві відкриті множини в $\mathbb{R}^3$ і функція $\psi = (\psi_1; \psi_2; \psi_3): \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ є такою, що: 1) функції ψ_1 , ψ_2 і ψ_3 мають в G_1 неперервні частинні похідні першого порядку по всіх змінних; 2) функція ψ є взаємно однозначним відображенням області G_1 на T_1 ; 3) визначник (якобіан)

$$\det \psi'(u; v; w) = I(u; v; w) = \frac{\partial(\psi_1; \psi_2; \psi_3)}{\partial(u; v; w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} & \frac{\partial \psi_1}{\partial v} & \frac{\partial \psi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial u} & \frac{\partial \psi_2}{\partial v} & \frac{\partial \psi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \psi_3}{\partial u} & \frac{\partial \psi_3}{\partial v} & \frac{\partial \psi_3}{\partial w} \end{vmatrix} \quad (20.1)$$

не дорівнює нулеві в G_1 . Тоді, якщо функція f є інтегровною на кубовній множині T такій, що $\bar{T} \subset T_1$, і $G = \psi^{-1}(T)$, то

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x; y; z) dx dy dz = \\ & = \iiint_G f(\psi_1(u; v; w); \psi_2(u; v; w); \psi_3(u; v; w)) |I(u; v; w)| du dv dw. \end{aligned} \quad (20.2)$$

Доведення цієї теореми аналогічне доведенню відповідної теореми для подвійного інтегралу. ►

Символ $|I(u; v; w)| du dv dw$ називається *елементом об'єму в криволінійній системі координат*.

У потрійному інтегралі часто здійснюється перехід до циліндричної системи координат за формулами

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases} \quad (20.3)$$

На координати $(\varphi; \rho; z)$ можна дивитися як на інші декартові координати, а на формули (3) – як на формули переходу від однієї системи координат до іншої (за такої трактовки формул (3) ρ може бути і від'ємним).

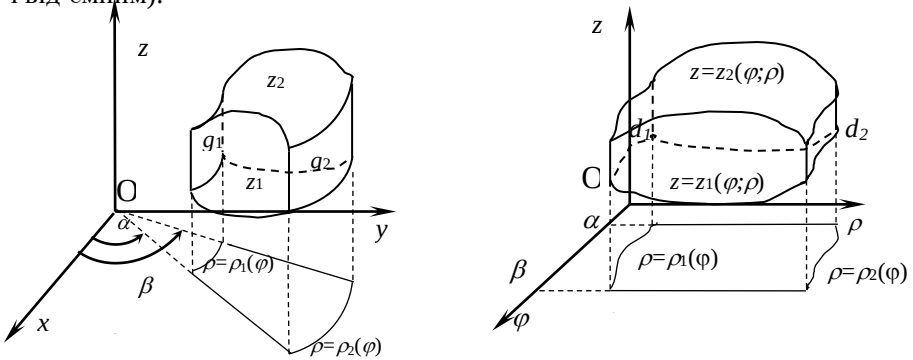


Рис. 20.1

При такому відображенні (3) площина $\varphi = \alpha$ перейде (див. рис. 20.1) у півплощину $y = x \operatorname{tg} \alpha$, площина $\varphi = \beta$ – в півплощину $y = x \operatorname{tg} \beta$, поверхні d_1 і d_2 – в поверхні g_1 і g_2 відповідно. Але на циліндричні координати можна дивитися і як на криволінійні координати. Власне точки $A(x; y; z)$ можна поставити у відповідність циліндричні координати $(\varphi; \rho; z)$, де ρ – відстань від початку координат до точки $A_1(x; y; 0)$ – проекції точки A на площину XOY , а φ – кут між векторами $\overrightarrow{OA_1}$ і $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

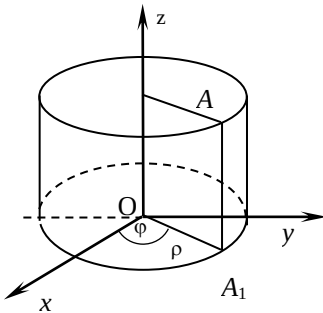


Рис. 20.2

З рис. 20.2 видно, що декартові та циліндричні координати точки A пов'язані формулами (20.3). У циліндричній системі

координат рівняння $\varphi = \alpha$ – це рівняння

півплощини, рівняння $\rho = \rho_0$ – це рівняння циліндра, $z = z_0$ – рівняння площини.

Подвійні і потрійні інтеграли

У даному випадку

$$I(\varphi; \rho; z) = \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho.$$

Тому формула (2) набирає вигляду

$$\iiint_T f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_G f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi; z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

Зокрема, якщо

$$G = \{(\varphi; \rho; z) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, \rho_1(\varphi) \leq \rho \leq \rho_2(\varphi), z_1(\rho; \varphi) \leq z \leq z_2(\rho; \varphi)\},$$

то за відповідних умов

$$\iiint_T f(x; y; z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)} \rho d\rho \int_{z_1(\rho; \varphi)}^{z_2(\rho; \varphi)} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi; z) dz$$

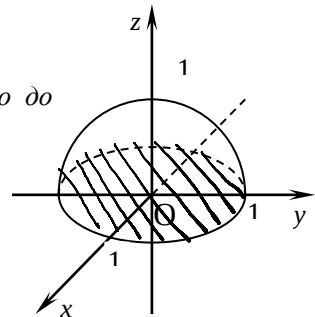
Символ $\rho d\varphi d\rho dz$ інколи називають *елементом об'єму в циліндричній системі координат*.

Приклад 1. Для знаходження потрібного інтегралу

$$I = \iiint_T (x^2 + y^2) dx dy dz,$$

де $T = \{(x; y; z) : 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}\}$, перейдемо до циліндричних координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$



Тоді

$$G = \{(\varphi; \rho; z) : 0 \leq z \leq \sqrt{1 - \rho^2}, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}$$

і

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 d\rho \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho^3 \sqrt{1-\rho^2} d\rho =$$

Подвійні і потрійні інтеграли

$$= \pi \int_0^1 (1 - \rho^2 - 1) \sqrt{1 - \rho^2} d(1 - \rho^2) = \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{4\pi}{15}.$$

21. Перехід в потрійному інтегралі до сферичної системи координат. Інколи в потрійному інтегралі здійснюють перехід до сферичної системи за формулами

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (21.1)$$

На сферичні координати $(\theta; \varphi; r)$ можна дивитись як на декартові координати в іншій системі, а на формули (1) як на формули переходу від однієї декартової системи координат до іншої (тоді r може бути від'ємним).

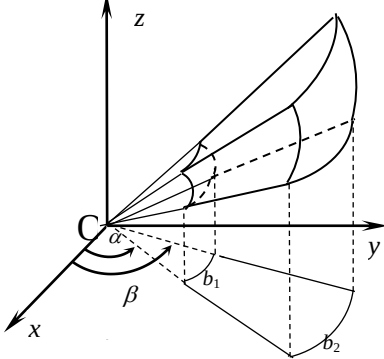


Рис. 21.1

При відображенні (1) площина $\varphi = \alpha$ перейде (рис. 1) в півплощину $y = x \operatorname{tg} \alpha$. Криві a_1 і a_2 перейдуть відповідно в криві b_1 і b_2 . Але на

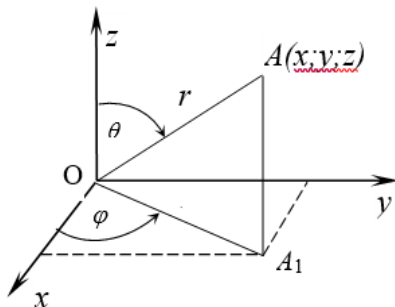


Рис. 21.2

сферичні координати можна дивитись як і на криволінійні координати. Власне (рис.2) точці $A(x; y; z)$ можна поставити у відповідність сферичні координати $(\theta; \varphi; r)$, де r – відстань від початку координат до точки A , θ – кут між векторами $\vec{k} = (0; 0; 1)$ і $\vec{OA}$, який

Подвійні і потрійні інтеграли

вимірюється від осі OZ , $0 \leq \theta \leq \pi$ і φ – кут між векторами $\vec{i} = (1; 0; 0)$ і $\overrightarrow{OA_1}$, де A_1 – проекція точки A на площину XOY .

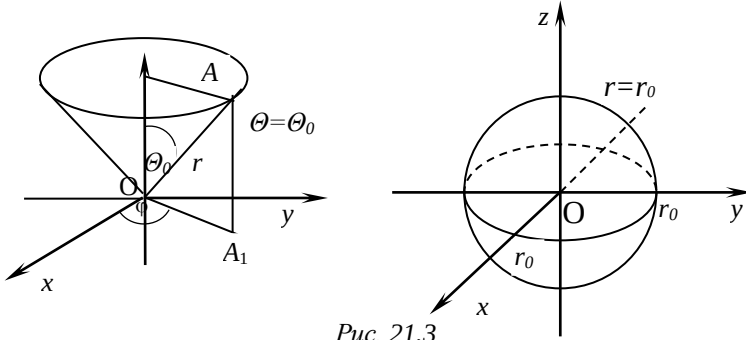


Рис. 21.3

З рис. 21.3 видно, що сферичні і декартові координати пов'язані формулами (21.1). У сферичній системі координат рівняння $r = r_0$, $\theta = \theta_0$ і $\varphi = \varphi_0$ є відповідно рівняннями сфери, конуса і півплощини. У цьому випадку

$$I(\theta; \varphi; r) = \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -\sin \varphi & \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi & \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{vmatrix}$$

$$= r^2 \sin \theta (\cos^2 \theta \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + \cos^2 \theta \sin^2 \varphi) = r^2 \sin \theta.$$

Отже, в даному випадку формула заміни змінних має вигляд

$$\iiint_T f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_G f(r \sin \theta \cos \varphi; r \sin \theta \sin \varphi; r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

Символ $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr$ інколи називають *елементом об'єму в сферичній системі координат*.

Приклад 1. Нехай $T = \{(x; y; z): x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ – куля (рис. 21.4).

Обчислимо $I := \iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$. Перейшовши до сферичної системи координат, отримуємо

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\begin{aligned}
 I &= \iiint_G \sqrt{r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta} \cdot r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^3 dr = \pi.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Нехай $T = \{(x; y; z) : (x^2 + y^2 + z^2)^2 \leq z\}$ (рис. 21.5).

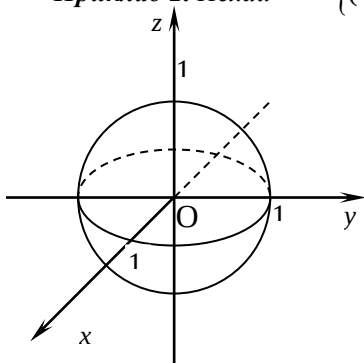


Рис.21.4

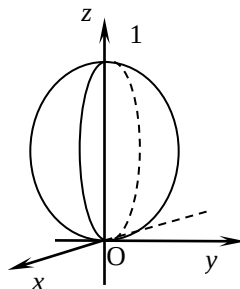


Рис.21.5

Щоб обчислити інтеграл $\iiint_T dx dy dz$, перейдемо до сферичної системи

координат, отримуємо: $r^4 = r \cos \theta$, тобто $r = \sqrt[3]{\cos \theta}$, $\theta \in [0; \pi]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Тоді

$$\begin{aligned}
 \iiint_T dx dy dz &= \iiint_G r^2 \sin \theta d\varphi d\theta dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{\sqrt[3]{\cos \theta}} r^2 dr \\
 &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \frac{1}{3} \sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{2\pi}{6} \int_0^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi}{3},
 \end{aligned}$$

22. Поняття про невластні (невластиві) потрійні інтеграли.

Вичерпуванням множини $E \subset \mathbb{R}^3$ — називається така послідовність (G_k) вимірних множин $G_k \subset E$, що $G_k \subset G_{k+1}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ і $E = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} G_k$. Множину $E \subset \mathbb{R}^3$ можна вичерпувати багатьма способами.

Подвійні і потрійні інтеграли

Приклад 1. Послідовність куль $G_k = \{(x; y; z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq k^2\}$ є вичерпування множини $E = \mathbb{R}^3$. Це ж можна сказати і про послідовність кубів $G_k = \{(x; y; z) : |x| \leq k, |y| \leq k, |z| \leq k\}$.

Приклад 2. Послідовність замкнених куль $G_k = \{(x; y; z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq (1 - 1/k)^2\}$ є вичерпування відкритої кулі $E = \{(x; y; z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

Приклад 3. Послідовність півкуль $G_k = \{(x; y; z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq k, x \geq 0\}$ є вичерпування множини $E = \bar{\mathbb{R}}_+^3 = \{(x; y; z) : x \geq 0\}$. Це ж можна сказати про послідовність паралелепіпедів $G_k = \{(x; y; z) : |x| \leq k, |y| \leq k, |z| \leq k, x \geq 0\}$.

Приклад 4. Послідовність куль $G_k = \{(x; y; z) : (x - k)^2 + y^2 + z^2 \leq (k - 1/k)^2\}$, є вичерпування множини $E = \mathbb{R}_+^3 = \{(x; y; z) : x > 0\}$. Це ж можна сказати про послідовність паралелепіпедів $G_k = \{(x; y; z) : |x - k| \leq k - 1/k, |y| \leq k, |z| \leq k, x \geq 0\}$.

Приклад 5. Послідовність множин $G_k = \{(x; y) : 1/k \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$ є вичерпування множини $E = U((0; 0; 0); 1) \setminus (0; 0; 0)$, тобто одиничного кулі з викорененим центром.

Невласним інтегралом функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ по множині $E \subset \mathbb{R}^3$ називається границя

$$\iiint_E f(x; y; z) dx dy dz := \lim_{k \rightarrow \infty} \iiint_{G_k} f(x; y; z) dx dy dz. \quad (22.1)$$

Невласний інтеграл

$$\iiint_E f(x; y; z) dx dy dz \quad (22.2)$$

називається **збіжним**, якщо для кожної послідовності (G_k) вимірних за Жорданом множин (G_k) границя (22.1) існує, є скінченною і не залежить від (G_k) .

Подвійні і потрійні інтеграли

 Існування границі (22.1) передбачає вимірність множин G_k та інтегрованість за Ріманом функції f на G_k , але не передбачає вимірності множини E та інтегрованості за Ріманом функції f на E .

Теорема 1. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на множині $E \subset \mathbb{R}^3$, то вона є інтегрованою і в невластному розумінні на E і обидва ці інтеграли є рівними.

Теорема 2. Якщо функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною на області визначення і для неї границя (22.1) існує принаймні для одного вичерпування (G_k) множини E , то ця функція є інтегрованою у невластному розумінні на множині E .

Теорема 3. Якщо функції $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ і $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровними за Ріманом на одних і тих же підмножинах множини E , функція g є невід'ємною на області визначення, інтеграл

$$\iiint_E g(x; y; z) dx dy dz \quad (22.3)$$

є збіжним і

$$(\exists c_1 \in (0; +\infty)) (\forall (x; y; z) \in D(g)) : |f(x; y; z)| \leq c_1 g(x; y; z), \quad (22.4)$$

то невластний інтеграл (2) є збіжним.

Доведення цих теорем подібне до одновимірного випадку, якщо зауважити, що $m(E) = \lim_{k \rightarrow \infty} m(G_k)$. ►

Інтеграл (22.2) називається **абсолютно збіжним**, якщо збіжним є інтеграл

$$\iiint_E |f(x; y; z)| dx dy dz.$$

Наслідок 1. Якщо невластний інтеграл є абсолютно збіжним, то він є збіжним.



Зауваження 1. Як і для двовимірного випадку справедливим є твердження, обернене до сформульованого в наслідку 1: якщо невластний інтеграл є збіжним, то він є абсолютно збіжним.

Приклад 6.

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\begin{aligned} \iiint_{U((0;0;0);1)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \iiint_{U((0;0;0);1) \setminus U((0;0;0);\delta)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta = 2\pi. \end{aligned}$$

Приклад 7. $\iiint_{U((0;0;0);1)} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha < 3/2$, і є

розбіжним, якщо $\alpha \geq 3/2$, бо

$$\iiint_{U((0;0;0);1)} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 r^{2-2\alpha} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta.$$

Приклад 8. $\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus U((0;0;0);1)} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha > 3/2$,

і є розбіжним, якщо $\alpha \leq 3/2$, бо

$$\iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus U((0;0;0);1)} \frac{dxdydz}{(x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \int_1^{\delta} r^{2-2\alpha} dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta.$$

Приклад 9. $\iiint_{U((0;0;0);1)} \frac{dxdydz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha < 1$, і є

розбіжним, якщо $\alpha \geq 1$, бо

$$\iiint_{U((0;0;0);1)} \frac{dxdydz}{(1 - x^2 - y^2 - z^2)^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow 0+} \int_{\delta}^1 \frac{r^2 dr}{(1 - r^2)^\alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta.$$

Приклад 10. $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dxdy}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha > 3/2$, і є

розбіжним, якщо $\alpha \leq 3/2$, бо

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dxdydz}{(1 + x^2 + y^2 + z^2)^\alpha} = \lim_{\delta \rightarrow +\infty} \int_0^{\delta} \frac{r^2 dr}{(1 + r^2)^\alpha} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta.$$

Приклад 11. Інтеграл $\iiint_{U((0;0;0);1)} \frac{\sin(x + y + z^3) dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ є збіжним,

бо збіжним є інтеграл $\iiint_{U((0;0;0);1)} \frac{dxdydz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ і

Подвійні і потрійні інтеграли

$$\left| \frac{\sin(x + y + z^3)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right| \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Приклад 12. Інтеграл $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(x^3 + y + z^3) dx dy dz}{\left(\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}\right)^5}$ є збіжним, бо

збіжним є інтеграл $\iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{dx dy dz}{\left(\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}\right)^5}$ і

$$\left| \frac{\sin(x^3 + y + z^3)}{\left(\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}\right)^5} \right| \leq \frac{1}{\left(\sqrt{1 + x^2 + y^2 + z^2}\right)^5}.$$

? Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення елементарної фігури в $\mathbb{R}^2$.
2. Сформулюйте означення міри елементарної фігури в $\mathbb{R}^2$.
3. Сформулюйте означення зовнішньої міри множини $E \subset \mathbb{R}^2$.
4. Сформулюйте означення внутрішньої міри множини $E \subset \mathbb{R}^2$.
5. Сформулюйте означення вимірної за Жорданом множини $E \subset \mathbb{R}^2$.
6. Сформулюйте означення міри Жордана вимірної за Жорданом множини $E \subset \mathbb{R}^2$.
7. Сформулюйте означення квадрованої множини $E \subset \mathbb{R}^2$.
8. Наведіть приклад невимірної за Жорданом множини.
9. Чи існує необмежена і вимірна за Жорданом множина?
10. Сформулюйте означення множини нульової міри за Лебегом.
11. Наведіть приклад множини, яка має нульову міру Лебега, але не є вимірною за Жорданом.
12. Чи існує множина, яка має нульову жорданову міру, але не є множиною нульової лебегової міри?
13. Чи існує вимірна за Жорданом множина, межа якої не є вимірною за Жорданом множиною?
14. Сформулюйте означення розбиття квадрованої множини $E \subset \mathbb{R}^2$.
15. Сформулюйте означення діаметра розбиття квадрованої множини

Подвійні і потрійні інтеграли

$$E \subset \mathbb{R}^2.$$

16. Сформулюйте означення елементарної фігури в $\mathbb{R}^3$.
17. Сформулюйте означення міри елементарної фігури в $\mathbb{R}^3$.
18. Сформулюйте означення зовнішньої міри Жордана множини $E \subset \mathbb{R}^3$.
19. Сформулюйте означення внутрішньої міри множини $E \subset \mathbb{R}^3$.
20. Сформулюйте означення вимірної за Жорданом множини $E \subset \mathbb{R}^3$.
21. Сформулюйте означення міри Жордана вимірної за Жорданом множини $E \subset \mathbb{R}^3$.
22. Сформулюйте означення кубовного тіла $E \subset \mathbb{R}^3$.
23. Сформулюйте означення інтегральної суми функції $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$.
24. Сформулюйте означення інтеграла Рімана функції $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$.
25. Сформулюйте означення функції $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^2$, інтегрованої за Ріманом.
26. Як обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області інтегрування? По довільній квадронній множині?
27. Які умови є необхідними (достатніми) для інтегрованості функції на множині в $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$.
28. Наведіть приклад функції $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ та множин $\tilde{E}$, $\hat{E}$ та E таких, що $\tilde{E} \cap \hat{E} = \emptyset$, $\tilde{E} \cup \hat{E} = E$ і функція f не є інтегрованою на E , але є інтегрованою на $\tilde{E}$ і на $\hat{E}$.
29. Сформулюйте означення інтегральної суми функції $f: T \rightarrow \mathbb{R}$, $T \subset \mathbb{R}^3$.
30. Як обчислити подвійний інтеграл по прямокутній області інтегрування? По довільній квадронній множині?
31. Як обчислити потрійний інтеграл по прямокутній області інтегрування? По довільній кубовній множині?
32. Які ви знаєте властивості подвійного інтеграла?
33. Запишіть формули заміни змінних у подвійному (потрійному) інтегралі.
34. Що таке полярна система координат? Формули переходу?
35. Що таке циліндрична (сферична) система координат? Формули переходу?
36. Запишіть формулу для знаходження об'єму за допомогою подвійного

Подвійні і потрійні інтеграли

інтегралу.

37. Запишіть формулу для знаходження площі поверхні графіка функції за допомогою подвійного інтегралу.
38. Запишіть формулу для знаходження об'єму за допомогою потрійного інтегралу.
39. Як ще можна використати кратні інтеграли?
40. Сформулюйте означення вичерпування множини в $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$.
41. Наведіть приклади вичерпувань площини, півплощини, круга (тривимірного простору, півпростору, октанта, кулі).
42. Що ми називаємо невластим подвійним (потрійним) інтегралом?
43. Які є умови збіжності? Абсолютної збіжності? Який між ними зв'язок?



Вправи і задачі теоретичного характеру

Доведіть твердження:

1. Існує множина $E \subset \mathbb{R}$ нульової лебегової міри, замикання якої співпадає з $\mathbb{R}$.
2. Кожна множина $E \subset \mathbb{R}$ нульової лебегової міри не має внутрішніх точок.
3. Якщо множини $\tilde{E} \subset \mathbb{R}$ і $\hat{E} \subset \mathbb{R}$ є вимірними за Жорданом і $\tilde{E} \subset \hat{E}$, то $m(\tilde{E}) \leq m(\hat{E})$.
4. Якщо $E_1 \subset \mathbb{R}$ – множина нульової лебегової міри і $E_2 \subset \mathbb{R}$, то множина $E_1 \times E_2 \subset \mathbb{R}^2$ має нульову лебегову (двовірну) міру.
5. Інтеграл $\int_0^{2\pi} dx \int_0^{\sin x} 1 dy$ не можна записати як подвійний інтеграл по деякій області.
6. Для будь-яких двох функцій $f_1: E \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$, інтегровних за Ріманом на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$, справедлива нерівність Шварца (Коші-Буняковського)
$$\left| \iint_E f_1(x; y) f_2(x; y) dx dy \right|^2 \leq \iint_E |f_1(x; y)|^2 dx dy \iint_E |f_2(x; y)|^2 dx dy.$$
7. Для будь-яких двох функцій $f_1: E \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2: E \rightarrow \mathbb{R}$, інтегровних за

Подвійні і потрійні інтеграли

Ріманом на вимірній множині $E \subset \mathbb{R}^2$, справедлива нерівність Мінковського

$$\left(\iint_E |f_1(x; y) + f_2(x; y)|^2 dx dy \right)^{1/2} \leq \left(\iint_E |f_1(x; y)|^2 dx dy \right)^{1/2} + \left(\iint_E |f_2(x; y)|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

8. Якщо функції $f_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2 : [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними на проміжках $[a; b]$ та $[c; d]$ відповідно, то

$$\iint_{[a; b] \times [c; d]} f_1(x) f_2(y) dx dy = \left(\int_a^b f_1(x) dx \right) \left(\int_c^d f_2(y) dy \right).$$

9. Якщо функції $f : [a; b] \times [c; d] \rightarrow \mathbb{R}$ і f''_{xy} є неперервними на $[a; b] \times [c; d]$, то $\int_a^b \int_c^d f''_{xy}(x; y) dy = f(b; d) - f(b; c) - f(a; d) + f(a; c)$.

10. $\iint_E x^m y^n dx dy = 0$, якщо принаймні одне з чисел $n \in \mathbb{N}$ і $m \in \mathbb{N}$ є непарним.

11. $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \iint_{U((0; 0); \varepsilon)} f(x; y) dx dy = f(0; 0)$, якщо функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в деякому околі точки $(0; 0)$.

12. $\int_0^a dx \int_0^x f(x; y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x; y) dy$, якщо функція $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в квадраті $[0; a] \times [0; a]$, $a > 0$.

13. $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2) dx_2 = \frac{1}{2} \left(\int_0^x f(\tau) d\tau \right)^2$, якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; a]$, $a > 0$, і $x \in [0; a]$.

14. $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} f(x_3) dx_3 = \frac{1}{3!} \left(\int_0^x f(\tau) d\tau \right)^3$, якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; a]$, $a > 0$, і $x \in [0; a]$.

Подвійні і потрійні інтеграли

15. $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} f(x_2) dx_2 = \int_0^x (x - \tau) f(\tau) d\tau$, якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; a]$, $a > 0$, і $x \in [0; a]$.

16. $\int_0^x dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^{x_2} f(x_3) dx_3 = \frac{1}{2} \int_0^x (x - \tau)^2 f(\tau) d\tau$, якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; a]$, $a > 0$, і $x \in [0; a]$.