

**Дрогобицький державний педагогічний
університет імені Івана Франка**

**Богдан Винницький, Олександр Шаповаловський,
Володимир Шаран, Руслан Хаць**

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ: ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

**Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальностей
А4.04 «Середня освіта (Математика)»,
Е7 «Математика»**

**Дрогобич
2026**

УДК 51(075.8)
X 28

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 3 від 26 лютого 2026 р.)

Рецензенти:

Дільний Володимир Миколайович – доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри вищої математики Національного університету “Львівська політехніка”;

Матурін Юрій Петрович – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Відповідальний за випуск:

Шепарович Ірина Богданівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики та економіки Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В.

X 28 Математичний аналіз функцій однієї змінної : приклади і задачі : навч.-метод. пос. Дрогобич : Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2026. 394 с.

Навчально-методичний посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни „Математичний аналіз” для підготовки фахівців першого (бакалаврського) рівня вищої освіти за спеціальностями А4.04 «Середня освіта (Математика)», Е7 «Математика», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Він містить основні теоретичні відомості, завдання для практичних занять та самостійної роботи, запитання для самоконтролю та індивідуальні завдання.

Бібліографія 46 назв

© **Богдан Винницький**, Олександр Шаповаловський, Володимир Шаран, Руслан Хаць, 2026

© Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, 2026

Зміст

Основні позначення.....	8
Передмова.....	13
Розділ 1. Вступ до математичного аналізу.....	14
1.1. Множини і функції.....	14
1.1.1. Множини.....	13
1.1.2. Множина дійсних чисел. Властивості множини дійсних чисел....	15
1.1.3. Модуль дійсного числа. Біном Ньютона.....	20
1.1.4. Скінченні і обмежені числові множини. Межі числових множин..	21
1.1.5. Поняття функції. Функції в \mathbb{R} та їх основні класи.....	24
1.1.6. Комплексні числа.....	34
1.1.7. Запитання для самоконтролю.....	38
1.1.8. Вправи і задачі.....	40
1.1.9. Індивідуальні завдання.....	45
1.2. Границя послідовності.....	48
1.2.1. Числова послідовність.....	48
1.2.2. Границя послідовності. Властивості збіжних послідовностей.....	51
1.2.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності. Нескінченні границі.....	54
1.2.4. Основні теореми про границі.....	56
1.2.5. Границя монотонної послідовності. Теореми Вейерштрасса та Больцано-Вейерштрасса.....	58
1.2.6. Число e	60
1.2.7. Запитання для самоконтролю.....	61
1.2.8. Вправи і задачі.....	63
1.2.9. Індивідуальні завдання.....	66
1.3. Границя функції в \mathbb{R}.....	67
1.3.1. Границя функції.....	68
1.3.2. Перша важлива (визначна) границя. Властивості функції, яка має границю в точці.....	71
1.3.3. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Нескінченні границі.....	72
1.3.4. Теореми про границі функцій. Однобічні границі.....	73
1.3.5. Границя в ∞	76
1.3.6. Границя композиції функцій.....	78
1.3.7. Друга важлива (визначна) границя.....	80
1.3.8. Запитання для самоконтролю.....	83
1.3.9. Вправи і задачі.....	84
1.3.10. Індивідуальні завдання.....	89

1.4. Неперервність функцій в \mathbb{R}	95
1.4.1. Неперервність функцій в точці. Неперервність суми, добутку і частки. Граничний перехід під знаком неперервної функції.....	95
1.4.2. Однобічна неперервність. Точки розриву та їх класифікація.....	97
1.4.3. Точна верхня межа функції.....	100
1.4.4. Неперервність функції на множині. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку.....	101
1.4.5. Обернена функція.....	105
1.4.6. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора.....	107
1.4.7. Запитання для самоконтролю.....	108
1.4.8. Вправи і задачі.....	110
1.4.9. Індивідуальні завдання.....	112
Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної.....	114
2.1. Означення похідної. Неперервність функції, яка має похідну.....	114
2.2. Геометричний і механічний зміст похідної.....	116
2.3. Похідна сталої, суми, добутку і частки.....	118
2.4. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Похідна композиції.....	119
2.5. Похідні показниково-степеневих функцій. Логарифмічна похідна. Похідна оберненої функції.....	121
2.6. Диференціал функції.....	123
2.7. Похідні і диференціали вищих порядків.....	125
2.8. Параметрично задані функції та їх диференціювання.....	128
2.9. Теорема про середнє для функцій, які мають похідну. Правила Лопіталя.....	129
2.10. Формула Тейлора для довільної функції.....	133
2.11. Умови постійності і монотонності функцій.....	136
2.12. Екстремум. Необхідні і достатні умови екстремуму.....	139
2.13. Найбільше і найменше значення функції на замкненому проміжку.....	142
2.14. Опуклість і точки перегину.....	143
2.15. Асимптоти.....	146
2.16. Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків.....	147
2.17. Запитання для самоконтролю.....	149
2.18. Вправи і задачі.....	151
2.19. Індивідуальні завдання.....	161
Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної.....	169
3.1. Первісна і невизначений інтеграл.....	169
3.1.1. Означення первісної і невизначеного інтегралу. Найпростіші властивості невизначеного інтегралу.....	169
3.1.2. Таблиця основних інтегралів.....	170

3.1.3. Інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів.....	173
3.1.4. Інтегрування частинами невизначених інтегралів.....	177
3.1.5. Інтегрування елементарних раціональних дробів.....	181
3.1.6. Багаточлени (многочлени, поліноми) і раціональні функції. Розклад на елементарні дроби.....	182
3.1.7. Інтегрування раціональних функцій.....	185
3.1.8. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.....	186
3.1.9. Інтегрування тригонометричних та інших трансцендентних функцій.....	190
3.1.10. Запитання для самоконтролю.....	193
3.1.11. Вправи і задачі.....	194
3.1.12. Індивідуальні завдання.....	199
3.2. Інтеграл Рімана (визначений інтеграл).....	204
3.2.1. Означення визначеного інтеграла. Деякі властивості інтегрованих функцій.....	204
3.2.2. Найпростіші властивості визначеного інтеграла.....	206
3.2.3. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Лейбніца-Ньютона.....	209
3.2.4. Інтегрування частинами та заміною змінних визначених інтегралів.....	210
3.2.5. Запитання для самоконтролю.....	212
3.2.6. Вправи і задачі.....	213
3.2.7. Індивідуальні завдання.....	217
3.3. Невласні (невластиві) інтеграли та інші узагальнення інтеграла Рімана.....	222
3.3.1. Означення невластивого інтеграла. Деякі властивості невласних інтегралів.....	222
3.3.2. Збіжність невластивих інтегралів невід’ємних функцій. Ознаки Абеля і Діріхле.....	226
3.3.3. Абсолютно та умовно збіжні інтеграли.....	229
3.3.4. Невласні інтеграли з кількома особливими точками. Невласні інтеграли в розумінні головного значення.....	231
3.3.5. Запитання для самоконтролю.....	232
3.3.6. Вправи і задачі.....	233
3.3.7. Індивідуальні завдання.....	236
3.4. Застосування визначеного інтеграла.....	237
3.4.1. Площа криволінійної трапеції.....	237
3.4.2. Полярні координати. Площа криволінійного сектора.....	240
3.4.3. Довжина кривої (шляху).....	242
3.4.4. Площа поверхні обертання.....	245

3.4.5. Об'єм тіла обертання.....	247
3.4.6. Знаходження об'єму за площею поперечного перерізу.....	249
3.4.7. Запитання для самоконтролю.....	250
3.4.8. Вправи і задачі.....	250
3.4.9. Індивідуальні завдання.....	255
Розділ 4. Ряди.....	264
4.1. Числові ряди.....	264
4.1.1. Поняття числового ряду. Необхідна умова збіжності.....	264
4.1.2. Дії над рядами. Критерій Коші збіжності ряду.....	267
4.1.3. Ознаки збіжності додатних рядів.....	269
4.1.4. Ознаки збіжності знакопочередних рядів.....	276
4.1.5. Ознаки збіжності рядів з довільними членами.....	277
4.1.6. Абсолютно та умовно збіжні ряди.....	279
4.1.7. Запитання для самоконтролю.....	283
4.1.8. Вправи і задачі.....	283
4.1.9. Індивідуальні завдання.....	288
4.2. Функціональні та степеневі ряди.....	293
4.2.1. Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей.....	293
4.2.2. Функціональні ряди. Збіжність і рівномірна збіжність.....	297
4.2.3. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.....	301
4.2.4. Степеневі ряди. Радіус і проміжок збіжності степеневого ряду. Властивості степеневих рядів.....	304
4.2.5. Ряд Тейлора. Розвинення елементарних функцій у ряд Тейлора..	310
4.2.6. Границя послідовності і ряди з комплексними членами.....	314
4.2.7. Запитання для самоконтролю.....	316
4.2.8. Вправи і задачі.....	318
4.2.9. Індивідуальні завдання.....	325
4.3. Ряди Фур'є.....	333
4.3.1. Тригонометрична система. Тригонометричний ряд.....	333
4.3.2. Тригонометричний ряд Фур'є на проміжку довжини 2π . Теорема Рімана-Лебега.....	336
4.3.3. Збіжність середніх арифметичних та поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$	340
4.3.4. Поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжках $[-l; l]$ та $[\alpha; \beta]$	346
4.3.5. Ряд Фур'є по косинусах та синусах.....	349
4.3.6. Ортонормована система. Ряд Фур'є за ортонормованою системою.....	353

4.3.7. Рівномірна і абсолютна збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$	362
4.3.8. Інтегральна формула Фур'є. Поняття про перетворення Фур'є... ..	364
4.3.9. Запитання для самоконтролю.....	366
4.3.10. Вправи і задачі.....	367
4.3.11. Індивідуальні завдання.....	370
Додатки. Основні формули.....	377
Список використаних джерел.....	391

Основні позначення

1. \mathbb{N} – множина всіх натуральних чисел.
2. \mathbb{Z} – множина всіх цілих чисел.
3. \mathbb{N}_0 або \mathbb{Z}_+ – множина всіх цілих невід’ємних чисел.
4. $\overline{n;m} = \{k \in \mathbb{Z} : n \leq k \leq m\}$.
5. \mathbb{Q} – множина всіх раціональних чисел.
6. \mathbb{R} – множина всіх дійсних чисел.
7. $\overline{\mathbb{R}}$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символами “ $-\infty$ ” і “ $+\infty$ ”.
8. $\overline{\mathbb{R}}_0$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символом “ ∞ ”.
9. \mathbb{C} – множина всіх комплексних чисел.
10. \emptyset – порожня множина.
11. \forall – квантор загальності; \exists – квантор існування.
12. $:=$ – рівне за означенням.
13. $A \times B$ – декартовий (прямий) добуток множин A і B .
14. $\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) : x_1 \in \mathbb{R}; \dots; x_n \in \mathbb{R}\}$ – множина всіх упорядкованих наборів із n дійсних чисел.
15. $\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ – сума чисел.
16. $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ – факторіал числа.
17. $\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ – добуток чисел.
18. $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ – біноміальні коефіцієнти.
19. $(a;b)$ – відкритий проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел x , для яких $a < x < b$.
20. $[a;b]$ – замкнений проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел x , для яких $a \leq x \leq b$.
21. $(a;b]$ – напіввідкритий проміжок з включеним правим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел x , для яких $a < x \leq b$.
22. $[a;b)$ – напіввідкритий проміжок з включеним лівим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел x , для яких $a \leq x < b$.
23. $\inf H$ – точна нижня межа множини H .
24. $\sup H$ – точна верхня межа множини H .

25. $\min H$ – найменший елемент множини H .
26. $\max H$ – найбільший елемент множини H .
27. $f: H_1 \rightarrow H_2$ – функція з множини H_1 в множину H_2 .
28. $D(f)$ – область визначення функції f .
29. $E(f)$ – множина значень функції f .
30. $\text{graf}(f) = (f; H_1 \times H_2)$ – графік функції f в множині $H_1 \times H_2$.
31. $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ – образ множини A .
32. $f^{-1}(B) = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}$ – прообраз множини B .
33. $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – обернена функція до оборотної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
34. $[x]$ – ціла частина числа $x \in \mathbb{R}$.
35. $\text{sgn } x$ – функція знаку числа $x \in \mathbb{R}$.
36. $x = \text{Re } z$ – дійсна частина комплексного числа $z = x + iy$.
37. $y = \text{Im } z$ – уявна частина комплексного числа $z = x + iy$.
38. $\arg z$ – головне значення аргументу комплексного числа z .
39. $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ – проколений ε -окіл точки $a \in \mathbb{R}$.
40. (x_n) – числова послідовність.
41. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ – границя послідовності (x_n) .
42. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ – границя функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$.
43. $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ – приріст функції в точці a .
44. $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$, $f^{(0)}(x) := f(x)$, – похідна порядку $n \in \mathbb{N}$ функції f в точці x .
45. $d^n y = f^{(n)}(x) dx^n$ – диференціал порядку $n \in \mathbb{N}$ функції f .
46. $M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$ – найбільше значення функції f на $[a; b]$.
47. $m = \min_{x \in [a; b]} f(x)$ – найменше значення функції f на $[a; b]$.
48. $\int_a^b f(x) dx$ – визначений інтеграл функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.
49. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ – числовий ряд із загальним членом a_k .
50. $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ – n -а частинна сума числового ряду.

51. $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$ – n -ий залишок числового ряду.
52. (aq^{n-1}) – геометрична прогресія.
53. $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ – гармонійний ряд.
54. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k$ – знакозмінний ряд.
55. $(f_k(x))$ – функціональна послідовність.
56. $\|f\|_E = \sup\{|f(x)| : x \in E\}$ – \sup -норма функції f на множині $E \subset \mathbb{R}$.
57. $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ – функціональний ряд.
58. $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ – n -а частинна сума функціонального ряду.
59. $r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ – n -ий залишок функціонального ряду.
60. $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k$ – степеневий ряд.
61. $R = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1}/c_k|$ – радіус збіжності степеневого ряду.
62. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ – ряд Тейлора функції f в околі точки a .
63. (z_n) – послідовність комплексних чисел $z_n = x_n + iy_n$.
64. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ – границя послідовності комплексних чисел z_n .
65. $\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$ – тригонометрична система.
66. $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ – комплексна тригонометрична система.
67. $R[a; b]$ – множина всіх функцій $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, які є інтегровними за Ріманом на скінченному проміжку $[a; b]$.

68. $R_2[a; b]$ – множина всіх функцій $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, які є інтегровними за Ріманом на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$ або функція $|f|^2$ є інтегровною на $[a; b]$ у невластному розумінні.
69. $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx$, $k \in \mathbb{N}_0$,
 $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx$, $k \in \mathbb{N}$, – тригонометричний ряд Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.
70. $\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$ – рівність Парсеваля.
71. $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$, $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx$, $k \in \mathbb{Z}$, – ряд Фур'є за системою $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$.
72. $D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$ – ядро Діріхле.
73. $F_n(t) = \frac{\sin^2(nt/2)}{2\pi n \sin^2(t/2)}$ – ядро Фейєра.
74. $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$, $a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx$,
 $k \in \mathbb{N}_0$, $b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx$, $k \in \mathbb{N}$, – тригонометричний ряд Фур'є функції f на проміжку $[-l; l]$.
75. $f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{l} x}$, $c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{k\pi}{l} t} dt$, $k \in \mathbb{Z}$, – тригонометричний ряд Фур'є функції f на $[-l; l]$ в комплексній формі.
76. $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$, $a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx$, $k \in \mathbb{N}_0$, – ряд Фур'є функції $f \in R_1[0; \pi]$ по косинусах.

77. $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$, $b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx$, $k \in \mathbb{N}$, – ряд Фур'є функції $f \in R_1[0; \pi]$ по синусах.
78. $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy$ – інтегральна формула Фур'є.
79. $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt$ – перетворення Фур'є функції f .
80. $\check{f}(y) = \hat{f}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt$ – обернене перетворення Фур'є функції f .
81. $f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos yt dt$ – косинус-перетворення Фур'є функції f .
82. $f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin yt dt$ – синус-перетворення Фур'є функції f .

Передмова

Математичний аналіз – це розділ математики, що вивчає властивості функцій та числових множин, пов'язані з поняттями границі, неперервності, похідної, диференціала, інтеграла та рядів, а також методи їх дослідження і застосування. Як навчальна дисципліна, математичний аналіз відіграє ключову роль у формуванні професійної підготовки майбутніх висококваліфікованих спеціалістів у галузі природничих наук, математики та статистики.

Пропонований навчально-методичний посібник призначений для студентів закладів вищої освіти, які опановують базові та поглиблені розділи курсу математичний аналіз. Його мета – сформувати цілісне розуміння основних понять математичного аналізу, розвинути логічне мислення та навички строгого математичного доведення. Посібник містить такі розділи: вступ до математичного аналізу, диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної, числові ряди, функціональні та степеневі ряди, ряди Фур'є. Опанування цих знань є необхідним для розуміння складних математичних концепцій і для застосування їх у різних галузях науки та інженерії.

Даний навчально-методичний посібник є переробленим виданням посібників [2-5]. У посібнику систематизовано основний теоретичний матеріал, подано означення, теореми та ілюстративні приклади, а також добірку прикладів і задач різного рівня складності для практичних занять, самостійної роботи та індивідуальних завдань. Особливу увагу приділено методам розв'язування типових вправ і задач, та поясненню змісту ключових ідей курсу. Більш детально викладений теоретичний матеріал із повними доведеннями всіх теорем, лем та наслідків цього посібника міститься у навчальних виданнях [2–6]. Посібник може бути використаний як під час аудиторних занять, так і для самостійного опрацювання матеріалу, а також стане корисним для підготовки та захисту індивідуальних завдань з математичного аналізу.

Означення й термінологія, подані в цьому посібнику, відповідають усталеним і загальноприйнятим нормам навчальної літератури такого типу [1-46].

Призначений для студентів спеціальностей А4.04 «Середня освіта (Математика)» та Е7 «Математика».

Розділ 1. Вступ до математичного аналізу

1.1. Множини і функції

У цьому підрозділі розглянемо основні поняття теорії множин, математичної логіки, дійсних і комплексних чисел, а також поняття функції та їх основні класи, що є основою сучасної математичної мови.

1.1.1. Множини. *Множина* – це первісне математичне поняття в так званій наївній теорії множин і йому означення не дається. Множину уявляють собі як сукупність елементів певної природи. Множини позначають, як правило, великими латинськими літерами: A , B , C , ... Деякі множини мають спеціальні позначення: \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} , \mathbb{C} – це множини відповідно натуральних, цілих, раціональних, дійсних і комплексних чисел. *Множина* складається з певних елементів. Якщо множина A складається з елементів a , b , c , то це записується так: $A = \{a; b; c\}$. Якщо ж множина A складається з елементів x множини H , які мають властивість $p(x)$, то це записують так: $A = \{x \in H : p(x)\}$. Наприклад, $A = \{x \in [0; 1] : x^2 - 4 > 0\}$. Множина \emptyset , яка не містить жодного елемента, називається порожньою. Якщо елемент x належить множині A , то це записують так: $x \in A$. Якщо елемент x не належить множині A , то це записують так: $x \notin A$ або $x \bar{\in} A$. Якщо кожний елемент множини A є і елементом множини B , то множина A називається підмножиною B і це записують так: $A \subset B$ або $B \supset A$. Дві множини називаються *рівними*, коли вони містять одні й ті самі елементи. Множина $A \cap B$, яка утворена з всіх спільних елементів множин A і B , називається *перетином множин* A і B . Множину $A \cup B$, яка складається з тих елементів, які належать принаймні одній з множин A і B , називають *об'єднанням множин* A і B . Множина $A \setminus B$, що містить ті елементи множини A , які не належать множині B , називається *різницею множин* A і B . Якщо $a \in A$ і $b \in B$, то пару елементів a і b , записану у вигляді $(a; b)$ називають *упорядкованою парою* і при цьому пари $(a_1; b_1)$ і $(a_2; b_2)$ називають [2, 4] *рівними*, якщо $a_1 = a_2$ і $b_1 = b_2$. Множина, елементи якої є всі упорядковані пари $(a; b)$, де $a \in A$ і $b \in B$, називається [2, 4] *декартовим або прямим добутком* множин A і B і позначають $A \times B$.

Добуток $A \times A$ називають *декартовим квадратом* множини A і позначають через A^2 . Зокрема, $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ – це множина усіх упорядкованих пар $(x; y)$ дійсних чисел, тобто

$\mathbb{R}^2 = \{(x; y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$. Аналогічно визначається множина $\mathbb{R}^3 = \{(x; y; z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$ – це множина усіх упорядкованих трійок $(x; y; z)$ дійсних чисел і множина $\mathbb{R}^n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) : x_1 \in \mathbb{R}; \dots; x_n \in \mathbb{R}\}$ – множина всіх упорядкованих наборів із n дійсних чисел. Множина, елементами якої є числа (дійсні чи комплексні) називається *числовою множиною*. Множина, яка складається з нескінченної кількості елементів, називається *нескінченною*.

Для скорочення записів часто використовуються символи (квантори): \forall (квантор загальності) і \exists (квантор існування). Квантор \forall читається так: „для всіх”, „кожний”, „будь-який” і т.д. Квантор \exists читається так: „існує”, „знайдеться”, „для деякого” і т.д. За допомогою кванторів можна побудувати висловлення [2, 4]:

- а) $(\forall x \in E) : P(x)$ – для всіх елементів x множини E виконується $P(x)$;
- б) $(\exists x \in E) : P(x)$ – існує елемент x множини E , для якого виконується $P(x)$.

1.1.2. Множина дійсних чисел. Властивості множини дійсних чисел. Множина *натуральних чисел* позначається через \mathbb{N} і складається із цілих додатних чисел. Отже, $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots\}$. Два натуральних числа можна додавати, множити і порівнювати. При цьому сума і добуток двох натуральних чисел є числом натуральним. Проте різниця і частка двох натуральних чисел не обов’язково є числом натуральним. Важливу властивість натуральних чисел виражає *принцип математичної індукції*, суть якого можна сформулювати так [2, 4]. Якщо твердження $p(n)$ про натуральні числа є істинним для $n = 1$ і з припущенням, що воно істинне для $n = k$, де k – довільне натуральне число, впливає його істинність для $n = k + 1$, то твердження $p(n)$ є істинним для будь-якого натурального числа n . Другу важливу властивість натуральних чисел виражає *основна теорема арифметики*, яка формулюється так [2, 4]. Кожне натуральне число n допускає єдине подання у вигляді добутку простих чисел: $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k$, де p_1, p_2, \dots, p_k – прості натуральні числа. Множина \mathbb{N} , до якої додано ще елемент 0 позначається через \mathbb{N}_0 або \mathbb{Z}_+ , тобто $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Суму $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ коротко записують так: $\sum_{j=1}^n a_j$. Отже,

$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. При цьому,

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{m=2}^{n+1} a_{m-1} = \sum_{j=3}^{n+2} a_{j-2} = \dots$$

Добуток $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ коротко записують так: $\prod_{j=1}^n a_j$. Отже,

$\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$. За означенням, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$, $0! = 1$, $1! = 1$,

$(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n$, $(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)$, $\prod_{j=1}^0 a_j = 1$.

Приклад 1. $\sum_{j=1}^3 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$.

Приклад 2. $\sum_{j=1}^4 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8$.

Приклад 3. $\sum_{j=3}^1 a_j = 0$.

Приклад 4. $\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3$.

Приклад 5. $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Справді, якщо $n=1$, то

$\sum_{j=1}^n j = \sum_{j=1}^1 j = 1$ і $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1$. Отже, для $n=1$ розглядувана

рівність є справедливою. Припустимо, що ця рівність є справедливою для $n=k$, тобто

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Тоді, використовуючи останню рівність, отримуємо

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \sum_{j=1}^k j + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

тобто розглядувана рівність є справедливою і для $n=k+1$. Отже, використовуючи принцип математичної індукції приходимо до висновку,

що наше твердження справедливе для будь-якого $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 6.
$$\sum_{j=1}^n q^{j-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad q \neq 1.$$

Приклад 7.
$$\prod_{k=1}^4 \sqrt{k} = \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{4} = 2\sqrt{6}.$$

Приклад 8.
$$\prod_{k=1}^5 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$$

Приклад 9.
$$\prod_{k=4}^2 k = 1.$$

Множина цілих чисел – це така множина \mathbb{Z} , яка складається з всіх натуральних чисел, числа 0 і елементів (від’ємних цілих чисел) $-1, -2, -3, \dots$, які називаються протилежними, відповідно, до чисел $1, 2, 3, \dots$. Кожний елемент множини \mathbb{Z} називається цілим числом. Отже, $\mathbb{Z} = \{\dots, -n; \dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots\}$. Будь-які два цілі числа можна порівнювати, додавати, віднімати, множити і в результаті цих операцій одержуємо ціле число. Частка двох цілих чисел не обов’язково є цілим числом. Множину цілих невід’ємних чисел позначають через \mathbb{N}_0 або через \mathbb{Z}_+ . Множину всіх цілих чисел, які задовольняють нерівність $n \leq k \leq t$ позначаємо через $\overline{n; t}$. Отже, $\overline{n; t} = \{k \in \mathbb{Z} : n \leq k \leq t\}$.

Приклад 10. Для кожного натурального числа n знайдуться такі натуральні числа p, q і ціле невід’ємне число $r \in \overline{0; p}$, що $n = pq + r$.

Приклад 11. Для кожного натурального числа n знайдуться такі числа $t \in \mathbb{N}_0$ і $a_j \in \overline{0; 9}, j \in \overline{0; t}$, що $n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \dots + a_t 10^t$.

Приклад 12. Для кожного натурального числа n і кожного $q \in \overline{2; 9}$ знайдуться такі числа $t \in \mathbb{N}_0$ і $a_j \in \overline{0; q}, j \in \overline{0; t}$, що $n = a_0 q^0 + a_1 q^1 + \dots + a_t q^t$.

Приклад 13. Для кожного натурального числа n знайдуться такі числа $t \in \mathbb{N}_0$ і $a_j \in \overline{0; 1}, j \in \overline{0; t}$, що $n = a_0 + a_1 + \dots + a_t$. Можна взяти, зокрема, $t = n$ і $a_j = 1$ для всіх $j \in \overline{0; t}$.

Множина раціональних чисел позначається через \mathbb{Q} . Множина \mathbb{Q} складається зі всіх звичайних дробів $a = p/q$, де $p \in \mathbb{Z}$ і $q \in \mathbb{N}$.

Будь-яке раціональне число можна записати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \overline{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \dots}$, де $a_0 \in \mathbb{N}_0$, $a_j \in \{0; 1; \dots; 9\}$, $\beta_i \in \{0; 1; \dots; 9\}$, $i \in \overline{1; m}$, $j \in \overline{1; n}$. В періодичному десятковому дробі число $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m$ весь час повторюється. Воно називається періодом десяткового дробу. *Періодичний десятковий дріб* записується так: $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m)$. Щоб перетворити звичайний дріб $a = p/q$ у періодичний потрібно поділити p на q в стовпчик. Кожне ціле число є раціональним, оскільки воно може бути представлено у вигляді звичайного дробу. Деякі раціональні числа зображаються двома способами у вигляді нескінченних періодичних дробів. З двох звичайних додатних дробів з однаковими чисельниками більшим є той дріб, знаменник якого є меншим. З двох звичайних додатних дробів з однаковими знаменниками більшим є той дріб, чисельник якого є більшим. Це часто використовується для доведення різних нерівностей.

Кожний десятковий дріб допускає перетворення у звичайний (спосіб такого перетворення вкажемо пізніше). Тому *множина раціональних чисел* \mathbb{Q} – це множина всіх періодичних десяткових дробів. Будь-які два раціональні числа можна порівнювати, додавати, віднімати, ділити, множити і в результаті цих операцій одержується раціональне число. Виключення становить ділення на нуль, яке в множині раціональних чисел не має змісту. Кожному раціональному числу на числовій прямій відповідає точка. Між двома різними раціональними числами a і b завжди лежить третє раціональне число c (наприклад, $c = (a + b)/2$). Тому якщо б на числовій прямій вдалося відмітити точками всі раціональні числа, то для ока здавалось би, що вся числова пряма заповнена раціональними числами і для інших чисел на числовій прямій не залишилось точок. Але це не так.

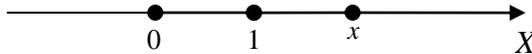
Отже, на числовій прямій є точки, які не відповідають жодному раціональному числу. Таким чином, для практичних цілей множину раціональних чисел потрібно розширити так, щоб кожній точці числової прямої відповідало певне число.

Раціональні числа зображаються у вигляді нескінченних періодичних десяткових дробів. *Ірраціональні числа* – це числа, які зображаються у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$, де $a_0 \in \mathbb{N}_0$, і $a_j \in \{0; 1; \dots; 9\}$.

Приклад 14. Числа $\sqrt{2} = 1,41\dots$ та $\pi = 3,14\dots$ є ірраціональними.

Ірраціональні числа не можна подати у вигляді звичайного дробу

$a = p/q$, де $p \in \mathbb{Z}$ і $q \in \mathbb{N}$. Множина всіх дійсних чисел позначається через \mathbb{R} і складається із всіх раціональних та ірраціональних чисел. Іншими словами, множина \mathbb{R} – це множина всіх нескінченних десяткових дробів: $a = \pm a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots$. Сума, добуток, частка і різниця двох дійсних чисел є дійсним числом. Виключення становить ділення на нуль, яке в \mathbb{R} не має змісту. Кожному дійсному числу на числовій прямій відповідає одна точка і, навпаки, кожній точці числової прямої відповідає певне дійсне число. Тому множину дійсних чисел називають інколи *числовою прямою* або числовою віссю, а самі дійсні числа називають точками.



Між двома різними дійсними числами лежить принаймні одне раціональне число і принаймні одне ірраціональне число. Множини раціональних та ірраціональних чисел є нескінченними, проте з подальшого буде випливати, що ірраціональних чисел є в певному розумінні значно більше, ніж раціональних.

Множини $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ і $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ називаються відповідно замкненим і відкритим проміжками, а множини $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ і $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ називаються відповідно лівим та правим напіввідкритими проміжками.

Нескінченна система (тобто множина) замкнених проміжків

$$\{[a_n; b_n] : n \in \mathbb{N}\} = \{[a_1; b_1]; [a_2; b_2]; \dots; [a_n; b_n]; \dots\} \quad (1)$$

називається *системою замкнених вкладених проміжків*, якщо

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Важливу властивість дійсних чисел виражає наступне твердження, яке називається *аксіомою Кантора* або аксіомою неперервності множини дійсних чисел.

Теорема 1 (принцип вкладених проміжків Кантора) [2, 4]. Для будь-якої нескінченної системи (1) замкнених вкладених проміжків існує принаймні одне дійсне число, яке належить всім проміжкам цієї системи.

Вважають, що довжини проміжків системи (1) прямують до нуля, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $n^* \in \mathbb{N}$, що для всіх $n \geq n^*$ виконується $b_n - a_n < \varepsilon$.

Наслідок 1 [2, 4]. Для будь-якої нескінченної системи (1) замкнених вкладених проміжків, довжини яких прямують до нуля, існує тільки одне дійсне число, що належить всім проміжкам цієї системи.

1.1.3. Модуль дійсного числа. Біном Ньютона. Модулем дійсного числа x називають невід'ємне число $|x|$, визначене формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Приклад 1. $|0| = 0$, $\left| \frac{-1}{2} \right| = \frac{1}{2}$, $|3,4| = 3,4$, $\left| \lg \frac{3}{4} \right| = -\lg \frac{3}{4} = \lg \frac{4}{3}$,
 $|\pi - 3,14| = \pi - 3,14$, $|3,14 - \pi| = -(3,14 - \pi) = \pi - 3,14$.

Теорема 1 [2, 4]. Для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ та $y \in \mathbb{R}$ виконується:

a) $|x| \geq 0$; б) $|x| = |-x|$; в) $|xy| = |x||y|$; г) $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$; д) $x \leq |x|$;
 е) $-x \leq |x|$; є) $|x + y| \leq |x| + |y|$; ж) $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

Приклад 2. $|\sqrt{-2}| = \sqrt{2}$, $|-2| = |2| = 2$.

Приклад 3. $|x - y| = |y - x|$, бо

$$|x - y| = |-1(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x|.$$

Приклад 4. $|x - y| \leq |x| + |y|$, бо

$$|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|.$$

Приклад 5. Нерівність $|x| < \alpha$ рівносильна подвійній нерівності $-\alpha < x < \alpha$. Розв'язком нерівності $|x| < 1$ є проміжок $(-1; 1)$.

Приклад 6. Нерівність $|x - a| < \varepsilon$ рівносильна подвійній нерівності $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Зокрема, розв'язком нерівності $|x - 2| < 1$ є проміжок $(1; 3)$, а розв'язком нерівності $0 < |x - 3| < 1$ є множина $(2; 4) \setminus \{3\}$, тобто множина $(2; 3) \cup (3; 4)$.

Приклад 7. Якщо $d(x; y) = |x - y|$, то $d(x; y) = d(y; x)$, $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$, $d(x; y) \geq 0$ і $d(x; y) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $x = y$.

Приклад 8. $\sqrt{x^2} = |x|$ для кожного дійсного числа x .

Добре відомими є формули:

$$(a+x)^1 = a+x, (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2, (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Ці формули можна узагальнити наступним чином.

Теорема 2 [2, 4]. $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})$:

$$(a+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} x^k, \quad (1)$$

де

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} = \frac{\prod_{j=m-k+1}^m j}{k!}.$$

Формулу (1), яка називається формулою бінома Ньютона, можна переписати так:

$$(a+x)^m = a^m + mxa^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2a^{m-2} + \\ + \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^k a^{m-k} + \dots + x^m.$$

Числа C_m^k називають біноміальними коефіцієнтами. Використовується

часто позначення $C_m^k = \binom{m}{k}$ і $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$.

Приклад 9. $(1+x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k.$

Приклад 10. $\sum_{k=0}^m C_m^k = (1+1)^m = 2^m.$

Приклад 11.

$$(1+x)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k x^k = C_4^0 + C_4^1 x^k + C_4^2 x^k + C_4^3 x^k + C_4^4 x^k = \\ = 1 + 4x + \frac{4 \cdot 3}{2!} x^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} x^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

1.1.4. Скінченні і обмежені числові множини. Межі числових множин. Множина $H \subset \mathbb{R}$ називається обмеженою, якщо $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H): |x| \leq K$. Таким чином, множина $H \subset \mathbb{R}$ є обмеженою, якщо модулі всіх чисел x , які їй належать, не перевищують деякого додатного числа K , незалежного від x . Множина $H \subset \mathbb{R}$ називається скінченною, якщо вона складається з скінченної кількості елементів.

Приклад 1. Множина $\{10;1000;100000000\}$ є скінченною і є обмеженою.

Приклад 2. Кожна скінченна множина є обмеженою.

Приклад 3. Множина $[0;1]$ є обмеженою і є нескінченною.

Приклад 4. Множина $[0;+\infty)$ є необмеженою і є нескінченною.

Приклад 5. Множина \mathbb{N} є необмеженою і є нескінченною.

Приклад 6. Множина $E = \left\{ \frac{n^2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ є нескінченною і є

необмеженою, бо $\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n-1 + \frac{1}{n+1} \geq n-1$.

Приклад 7. Множина $E = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ є нескінченною і є

обмеженою, бо $0 \leq \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} \leq 3$.

Верхньою межею множини $H \subset \mathbb{R}$ називається таке число $K \in \mathbb{R}$, що $(\forall x \in H) : x \leq K$. Множина, яка має верхню межу називається обмеженою зверху. Іншими словами, множина $H \subset \mathbb{R}$ називається обмеженою зверху, якщо $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : x \leq K$. Таким чином, множина $H \subset \mathbb{R}$ є обмеженою зверху, якщо всі числа x , які їй належать, не перевищують деякого дійсного числа K , незалежного від x . Якщо множина H має верхню межу K , то вона має нескінченну кількість верхніх меж.

Приклад 8. Якщо $H = [0;1]$, то верхніми межами цієї множини є, зокрема, числа $K=1$, $K=1,5$, $K=1+\sqrt{2}$, $K=3$, $K=10+\sqrt{2}$ і т.д.

Точною верхньою межею множини $H \subset \mathbb{R}$ називається найменша з її верхніх меж. Точна верхня межа множини $H \subset \mathbb{R}$ називається ще *супремумом* множини H і позначається так $[2, 4]$: $M_0 = \sup H$. Означення точної верхньої межі можна дати і іншим чином. Власне, точною верхньою межею множини $H \subset \mathbb{R}$ називається $[2, 4]$ таке число $M_0 \in \mathbb{R}$, для якого виконуються дві умови: 1) $(\forall x \in H) : x \leq M_0$; 2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' > M_0 - \varepsilon$. Ці два означення є еквівалентними, бо умова 1) означає, що M_0 є верхньою межею, а умова 2) означає, що жодне менше число не може бути верхньою межею. Тому, якщо число M_0 є точною верхньою межею множини H в розумінні

першого означення, то воно є точною верхньою межею множини H в розумінні другого означення і навпаки.

Серед скінченного числа дійсних чисел завжди є найменше із них. Але серед нескінченної кількості дійсних чисел не завжди є найменше. Тому природним є питання про існування точної верхньої межі.

Приклад 9. Множина $H = (0; 5]$ не має найменшого числа, бо $0 \notin H$.

Приклад 10. Множина $H = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$ не має найбільшого елемента, бо $1 \notin H$.

Теорема 1 [2, 4]. Якщо множина $H \subset \mathbb{R}$ є непорожньою і обмеженою зверху, то вона має точну верхню межу (скінченну).

Нижньою межею множини $H \subset \mathbb{R}$ називається таке число $K \in \mathbb{R}$, для якого $(\forall x \in H) : x \geq K$. Точною нижньою межею множини $H \subset \mathbb{R}$ називається найбільша її нижня межа. Точна нижня межа множини $H \subset \mathbb{R}$ називається ще інфімумом множини H і позначається так: $m_0 = \inf H$.

Можна дати і наступне еквівалентне означення точної нижньої межі. Число m_0 називається точною нижньою межею множини $H \subset \mathbb{R}$, якщо воно задовольняє умови [3, 9]: 3) $(\forall x \in H) : x \geq m_0$; 4) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' < m_0 - \varepsilon$.

Теорема 2 [2, 4]. Якщо множина $H \subset \mathbb{R}$ є непорожньою і обмеженою знизу, то вона має точну нижню межу (скінченну).

Найбільший елемент множини H позначають так: $M = \max H$. Якщо множина має найбільший елемент, то $M = M_0$. Найменший елемент множини H позначаються так: $m = \min H$. Якщо множина H має найменший елемент, то $\inf H = \min H$.

Приклад 11. Якщо $H = (-1; 2)$, то $\sup H = 2$ і $\inf H = -1$, $\min H$ не існує і $\max H$ – не існує.

Приклад 12. Якщо $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, то $\inf H = 0$, $\sup H = \max H = 1$, а $\min H$ не існує.

Суттєва різниця між найбільшим елементом множини і її точною верхньою межею полягає в тому, що найбільший елемент множини належить цій множині, а точна верхня межа не обов'язково їй належить.

Інколи вважають, що якщо множина є необмеженою зверху, то $\sup H = +\infty$, а якщо множина H є необмеженою знизу, то $\inf H = -\infty$.

Приклад 13. Якщо $H = \mathbb{N}$, то $\inf H = \min H = 1$, $\sup H = +\infty$, а $\max H$ не існує.

Наслідок 1 (принцип Архімеда) [2, 4]. Для будь-якого дійсного числа a існує таке натуральне число n , що $a < n$.

1.1.5. Поняття функції. Функції в \mathbb{R} та їх основні класи. Розглядаючи різні відповідності між двома множинами H_1 і H_2 бачимо, що деяким елементам множини H_1 може відповідати один або більше елементів множини H_2 і можуть бути такі елементи множини H_1 , яким не відповідає жодний елемент множини H_2 . Функцією з множини H_1 в множину H_2 називається така відповідність з множини H_1 в множину H_2 , за якої кожному елементу множини H_1 відповідає не більше одного елемента множини H_2 . Таким чином [2, 4], функція з множини H_1 в множину H_2 – це така непорожня множина f упорядкованих пар $(x; y)$, де $x \in H_1$ і $y \in H_2$, що з умов $(x_1; y_1) \in f$ і $(x_1; y_2) \in f$ випливає, що $y_1 = y_2$. Функції з H_1 в H_2 позначають символами $f: H_1 \rightarrow H_2$, $H_1 \xrightarrow{\psi} H_2$, $\gamma: H_1 \rightarrow H_2$ або коротше f , γ , ψ , $x \rightarrow f(x)$, $y = f(x)$ і т.д. Сукупність $D(f)$ тих елементів множини H_1 , яким відповідає один елемент множини H_2 називається множиною або *областю визначення функції* f , а сукупність $E(f)$ тих елементів множини H_2 , які відповідають принаймні одному елементу множини H_1 , називається *множиною значень функції* f . Терміни “функція”, “відображення”, “оператор” – це синоніми. Якщо $E(f)$ – числова множина, то таку функцію f називають *числовою функцією* або функціоналом.

Функція $f: H_1 \rightarrow H_2$ називається *сур'єкцією* або *накриттям* [2, 4], якщо $E(f) = H_2$. Функція $f: H_1 \rightarrow H_2$ називається *оборотною* (однолистою, ін'єкцією), якщо образами різних елементів із H_1 є різні елементи множини H_2 . Інакше можна сказати, що функція $f: H_1 \rightarrow H_2$ називається *оборотною* [2, 4], якщо для кожного $y \in E(f)$ рівняння $f(x) = y$ має єдиний розв'язок $x \in D(f)$, тобто якщо з рівності $f(x_1) = f(x_2)$ випливає, що $x_1 = x_2$. *Взаємно однозначною відповідністю* між множинами H_1 і H_2 або *бієкцією* між H_1 і H_2 називається така оборотна функція $f: H_1 \rightarrow H_2$, для якої $D(f) = H_1$ і $E(f) = H_2$.

В математиці вивчаються різні інші класи функцій: послідовності, тобто функції $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, дійсні функції однієї дійсної змінної, тобто функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, дійсні функції двох дійсних змінних, тобто функції $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, дійсні функції трьох дійсних змінних, тобто функції $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, дійсні функції n дійсних змінних, тобто функції $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, векторні функції n дійсних змінних, тобто функції $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ і т.д. Такі функції з різних точок вивчаються в основних розділах математики: геометрії (рівняння кривих та поверхонь задаються такими функціями), в алгебрі (рівняння і системи рівнянь задаються такими ж функціями). *Графіком функції* $f: H_1 \rightarrow H_2$ в множині $H_1 \times H_2$ називається [2, 4] упорядкована пара $\text{graf}(f) = (f; H_1 \times H_2)$. Коли вживають терміни “графік функції”, то мають на увазі певне геометричне зображення точок функції. Наприклад, функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ часто зображають точками евклідової площини у відповідній системі координат.

Функцією в \mathbb{R} , або функцією з \mathbb{R} в \mathbb{R} , або *дійсною функцією однієї дійсної змінної* називається така відповідність в множині дійсних чисел, за якої кожному дійсному числу відповідає не більше одного дійсного числа. Можна також сказати [2, 4], що функцією з \mathbb{R} в \mathbb{R} називається така функція, область визначення $D(f)$ і множина значень $E(f)$ якої є підмножинами множини дійсних чисел. Таким чином [2, 4], функція в \mathbb{R} – це непорожня множина упорядкованих пар $(x; y)$ дійсних чисел, яка не містить двох різних пар з однаковими першими елементами. Функції в \mathbb{R} позначають символами $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$, $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ або коротше f , γ , ψ , $x \rightarrow f(x)$ і т.д. $f(x)$ – це значення функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $x \in \mathbb{R}$. Дійсні функції однієї змінної далі як правило, називаємо функціями, опускаючи інші слова. Якщо ми говоримо, що функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є визначеною на деякій множині H , то це означає, що $H \subset D(f)$.

Графіком функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається упорядкована пара $\text{graf}(f) = (f; \mathbb{R}^2)$ функції f і множини \mathbb{R}^2 . Геометрично графік функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ зображають у вигляді деякої множини точок евклідової площини у певній системі координат. Через $f(A)$ і $f^{-1}(B)$ далі позначаємо відповідно *образ множини* A і *прообраз множини* B , тобто

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \text{ і } f^{-1}(B) = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}.$$

Сумою двох функцій f_1 і f_2 називається така функція $f = f_1 + f_2$, для якої образом числа $x \in \mathbb{R}$ є число $f_1(x) + f_2(x)$. Зрозуміло, що $D(f_1 + f_2) = D(f_1) \cap D(f_2)$. Добутком функції f_1 на число c називається така функція $f = cf_1$, для якої образом числа $x \in \mathbb{R}$ є число $cf_1(x)$. Аналогічно дається означення добутку і частки двох функцій.

Дві функції $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називаються *рівними*, якщо $D(f_1) = D(f_2)$ і $(\forall x \in D(f_1)) : f_1(x) = f_2(x)$.

Функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *сталюю*, якщо знайдеться таке число C , що $f(x) = C$ для всіх $x \in D(f)$.

Нулем функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається таке число a , що $f(a) = 0$, тобто нуль функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – це корінь рівняння $f(x) = 0$.

Приклад 1. Якщо $f(x) = 2x$, то образом числа $x = 1$ є число $y = 2$, прообразом числа $y = 1$ є число $x = 1/2$, $f([0; 1]) = [0; 2]$, $f^{-1}([1; 2]) = [1/2; 1]$.

Приклад 2. Якщо $f(x) = \arcsin x$, то $f([2; 3]) = \emptyset$, $f([0; 2]) = [0; \pi/2]$, $f^{-1}([3; 4]) = \emptyset$ і $f^{-1}([\pi/6; \pi]) = [1/2; 1]$.

Функцію в \mathbb{R} можна задати різними способами.

Приклад 3. Функцію в \mathbb{R} можна задати аналітично, тобто формулою: $y = 1 + \ln \sqrt{\sin x}$, $y = e^{\lg(\ln x)}$,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{якщо } x < 1, \\ 3, & \text{якщо } 1 \leq x < 5, \\ x^2 - 1, & \text{якщо } x \geq 5. \end{cases}$$

Приклад 4. Функцію в \mathbb{R} можна задати графічно, тобто зображенням в евклідовій площині її графіка.

Приклад 5. Функцію в \mathbb{R} можна задати таблично, тобто записом у вигляді таблиці значень аргументу і значень функції.

Приклад 6. Функцію в \mathbb{R} можна задати словесно-описово, тобто словесним описанням відповідності.

Приклад 7. Поставимо у відповідність кожному дійсному числу x найбільше ціле число $[x]$ (тобто цілу частину x), яке не перевищує x . Одержимо функцію, яка позначається так: $f(x) = [x]$.

Приклад 8. Поставимо у відповідність кожному числу $x > 0$

число 1, числу 0 – число 0, а кожному $x < 0$ – число -1 . Одержимо функцію, яка позначається через $\operatorname{sgn} x$. Її можна задати і так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Приклад 9. Кожному раціональному числу поставимо у відповідність 1, а кожному ірраціональному – число 0. Отримаємо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ – раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ – ірраціональне,} \end{cases}$$

яка називається функцією Діріхле.

Приклад 10. Функцію можна задати параметрично, тобто системою

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta],$$

де φ і ψ – відомі функції. Такий спосіб задання слід розуміти так: числу x ставимо у відповідність число y , якщо існує таке число $t \in [\alpha; \beta]$, що упорядкована трійка $(x; y; t)$ є розв'язком цієї системи.

Приклад 11. Функцію $y = x^2$ можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

Приклад 12. Функцію $y = \sqrt{1 - x^2}$ також можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

Приклад 13. Система, якою задається параметрично функція може бути досить складною:

$$\begin{cases} x = e^{\operatorname{tg} t} + \cos 2t, \\ y = 1 + \cos t + e^{\operatorname{tg} t}. \end{cases}$$

Приклад 14. Функцію можна задати неявно рівнянням (тобто рівнянням $F(x, y) = 0$, з якого ми не обов'язково вміємо виразити y через x у вигляді якоїсь формули).

Приклад 15. Рівняння $x^2 + y^2 - 1 = 0$ можна розв'язати відносно y . Воно задає, зокрема, функції $y = \sqrt{1 - x^2}$ і $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Приклад 16. Рівняння

$$e^{\lg x} \cos x + \ln(x + \sin y) = 0$$

ми не вміємо розв'язати відносно y , але можливо, воно має розв'язок і тому може визначати деяку функцію $y = f(x)$.

Приклад 17. Функцію часто задають як розв'язок деякого функціонального рівняння (диференціального, інтегрального та інших). Невідомим в такому рівнянні є не число, а функція.

Приклад 18. Функцію $y = ax$ називають лінійною функцією, а інколи лінійною однорідною.

Приклад 19. Позначимо через f таку функцію, для якої при всіх $x \in \mathbb{R}$ виконується $f'(x) - f(x) = 0$ і $f(0) = 1$. Далі переконаємось, що функція $f(x) = e^x$ є єдиним розв'язком цього рівняння.

Приклад 20. Функція $f(x) = 4 \cos^2 \frac{x}{x^2 - 1} + 4 \sin^2 \frac{x}{x^2 - 1} - 1$ є сталою, бо $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ і $f(x) = 3$ для всіх $x \in D(f)$.

Приклад 21. Нулями функції $f(x) = \sin x$ є числа $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Згідно з означенням, якщо задано функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то задано множину $D(f) \subset \mathbb{R}$ визначення функції і її множину $E(f) \subset \mathbb{R}$ значень. Проте, в дійсності так буває рідко. Частіше в математичному аналізі функція f задається деякою формулою $y = f(x)$ і її множина визначення складається, якщо не вказано на інше, з тих x , для яких ця формула має зміст. Таким чином, для знаходження області визначення функції, яка задана формулою $y = f(x)$, потрібно, якщо не вказано на інше, знайти множину тих x , для яких ця формула має зміст.

Приклад 22. Область визначення функції $f(x) = \sqrt{x - 1}$ складається з тих $x \in \mathbb{R}$, для яких $x - 1 \geq 0$. Отже, $D(f) = [1; +\infty)$.

Функція однозначно визначається областю визначення, множиною значень і тим правилом, за яким елементам з області визначення ставляться у відповідність елементи з множини значень. Проте, інколи вигідно розглядати функцію тільки на деякій підмножині множини визначення.

Приклад 23. Функція $f(x) = \sin x$ не є зростаючою на області визначення, але вона є зростаючою на проміжку $[-\pi/2; \pi/2]$.

Звууженням функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на множину $H \subset D(f)$ називається [2, 4] така функція $f_H: H \rightarrow \mathbb{R}$, яку також позначають так: $f: H \rightarrow \mathbb{R}$, що $(\forall x \in H): f_H(x) = f(x)$. Часто замість того, щоб говорити “розглянемо звууження функції f на множину H ” кажуть “функція f , розглядувана на H ”.

Приклад 24. Функція $f_H(x) = \sqrt{x}$ є звууженням функції $f(x) = \sqrt{|x|}$ на множину $H = [0; +\infty)$.

Інколи навпаки вигідно розглядати функцію f на ширшій множині, ніж її область визначення. Продовженням функції f на множину $H \supset D(f)$ називається [2, 4] така функція φ , що $(\forall x \in D(f)): \varphi(x) = f(x)$.

Приклад 25. Областю визначення функції $f(x) = \sqrt{x}$ є множина $D(f) = [0; +\infty)$. Її можна продовжити на множину $(-\infty; +\infty)$ нескінченною кількістю способів. Зокрема, кожна з функцій

$$\varphi(x) = \sqrt{|x|}, \quad \psi(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -\sqrt{|x|}, & x < 0, \end{cases} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 5x^2 + 7, & x < 0, \end{cases}$$

є таким продовженням.

Композицією функцій $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається функція $F = f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, визначена формулою $F(x) = f(\varphi(x))$. Композицію двох функцій називають інколи складеною функцією.

Приклад 26. Якщо $f(x) = \cos x$ і $\varphi(x) = 2x$, то $F(x) = \cos 2x$, тобто $f \circ \varphi(x) = \cos 2x$.

Приклад 27. Якщо $f(x) = \sin x$ і $\varphi(x) = e^x$, то $F(x) = \sin e^x$, тобто $f \circ \varphi(x) = \sin e^x$.

Функції $f(x) = C$, $f(x) = x^\mu$, $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \arctg x$ та $f(x) = \operatorname{arccctg} x$, де $\mu \in \mathbb{R}$ і $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ – деякі числа, називають *основними елементарними функціями*. Функція називається *елементарною*, якщо її можна задати формулою $y = F(x)$, яка містить тільки скінченне число арифметичних операцій і композицій основних елементарних функцій.

Приклад 28. Функція

$$F(x) = \exp\left(\sqrt{\operatorname{tg}\left(\lg\left(1 + \sqrt{x}\right)\right)}\right) + \exp\left(\frac{\ln(1 + \arcsin 3x)}{\operatorname{arctg}(1 + e^x)}\right)$$

є елементарною.

Елементарні функції можна поділити на різноманітні класи за різними ознаками [2, 4].

Приклад 29. Одночленом називають функцію $f(x) = ax^n$, де $a \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}_0$ – деякі числа.

Приклад 30. Багаточленом (многочленом, поліномом) називають скінченну суму одночленів, тобто функцію $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$, де $a_0 \in \mathbb{R}$, ..., $a_n \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}_0$ – деякі числа. Багаточлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ називають багаточленом степеня $n \in \mathbb{N}_0$, якщо $a_n \neq 0$.

Приклад 31. Багаточлен нульового степеня – це стала функція $f(x) = C$. Багаточлен першого степеня – це афінна функція $f(x) = ax + b$. Зокрема, лінійна функція $f(x) = ax$, де $a \in \mathbb{R}$, є багаточленом першого степеня.

Приклад 32. Багаточлен другого степеня – це квадратний тричлен $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$. Функція $f(x) = 1 - 9x + 12x^5 - 7x^8$ є багаточленом восьмого степеня.

Приклад 33. Раціональна функція – це частка двох багаточленів. Функція $f(x) = \frac{1 + 2x^4 - 7x^5}{5 - 7x^5 + 7x^8}$ є раціональною.

Приклад 34. Ірраціональні функції – це функції, які є елементарними і які можуть бути задані за допомогою формули $y = F(x)$, яка містить тільки скінченне число арифметичних операцій і композицій раціональних і степеневих функцій з раціональним показником. Функції $f(x) = \sqrt{x}$ і $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{3/2} + 1}{(x^7 + 10x + 1)^{5/9}}}$ є ірраціональними.

Приклад 35. Трансцендентні функції – це елементарні функції, які не є ні раціональними, ні ірраціональними.

Приклад 36. Функції $f(x) = a^x$, $f(x) = \log_a x$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \cos x$, $f(x) = \operatorname{tg} x$, $f(x) = \operatorname{ctg} x$, $f(x) = \arcsin x$, $f(x) = \arccos x$, $f(x) = \operatorname{arctg} x$ та $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ є трансцендентними.

Приклад 37. Функції $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$ і $\operatorname{sec} x = \frac{1}{\cos x}$ є

трансцендентними. Використовується також позначення $\operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$.

Функції $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$ і $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$

називаються відповідно гіперболічним синусом, гіперболічним косинусом, гіперболічним тангенсом та гіперболічним котангенсом. Ці функції є елементарними. Використовуються також позначення $\operatorname{sinh} x = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{cosh} x = \operatorname{ch} x$, $\operatorname{tanh} x = \operatorname{th} x$ та $\operatorname{coth} x = \operatorname{cth} x$.

В математичному аналізі вивчаються і функції, які не є елементарними. Наприклад, гамма-функція, циліндричні функції та інші. Такі функції широко використовуються у фізиці та інших науках. Вони задаються як розв'язки деяких функціональних рівнянь, рядами та іншими способами.

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається [2, 4] *парною*, якщо $(\forall x \in D(f)): f(-x) = f(x)$. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *непарною*, якщо $(\forall x \in D(f)): f(-x) = -f(x)$. Для того щоб показати, що функція не є парною досить вказати значення $x \in D(f)$, для якого $f(-x) \neq f(x)$. Аналогічно, для того щоб показати, що функція f не є непарною досить показати, що $(\exists x \in D(f)): f(-x) \neq -f(x)$. Графіки парних функцій симетричні відносно осі OY , а непарних – відносно початку координат.

Існують функції, які є ні парними ні непарними.

Приклад 38. Функція $f(x) = |x|$ є парною, бо $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 39. Функція $f(x) = x^2$ є парною, бо $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 40. Функція $f(x) = \cos x$ є парною, бо $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 41. Функція $f(x) = x$ є непарною, бо $f(-x) = -x = -f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 42. Функція $f(x) = x^3$ є непарною, бо $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 43. Функція $f(x) = \sin x$ є непарною, бо

$f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 44. Якщо $f(x) = 2x + 1$, то $f(1) = 3$, $f(-1) = -1$ і $-f(1) = -3$. Тому ця функція є ні парною ні непарною.

Приклад 45. Функція $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$ є ні парною ні непарною, бо $f(2) = 12$, $f(-2) = 0$. Разом з цим, і $f(1) = f(-1) = 0$.

Приклад 46. Для кожної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для $-x \in D(f)$, якщо $x \in D(f)$, функція $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ є парною.

Приклад 47. Для кожної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для $-x \in D(f)$, якщо $x \in D(f)$, функція $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ є непарною.

Приклад 48. Кожну функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для $-x \in D(f)$, якщо $x \in D(f)$, можна подати у вигляді суми парної функції f_1 і непарної функції f_2 : $f = f_1 + f_2$.

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається [2, 4] *періодичною*, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $(\forall x \in D(f)): f(x \pm T) = f(x)$. *Періодом* функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається таке число $T \neq 0$, для якого виконується остання рівність. Таким чином, функція f називається періодичною, якщо вона має період. Можна сказати і так. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *періодичною* [2, 4], якщо існує таке число $T \neq 0$, що $(\forall x \in D(f)): f(x + T) = f(x)$ і $(\forall x \in D(f)): x - T \in D(f)$. З означення випливає, що разом із числом $T \neq 0$ періодом функції є також кожне число $\tilde{T} = nT$, де $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Приклад 49. Будь-яке число $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ є періодом сталої функції $f(x) = C$ і, таким чином, існують періодичні функції, які не мають найменшого додатного періоду.

Приклад 50. Будь-яке раціональне число є періодом функції Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } x - \text{іраціональне,} \end{cases}$$

і зрозуміло, що найменшого додатного періоду така функція не має.

Приклад 51. Функція $f(x) = x^2$ не є періодичною. Справді, якщо б функція була періодичною, то існувало б $T \neq 0$ таке, що для всіх $x \in \mathbb{R}$ виконувалось би $(x + T)^2 = x^2$. Взятиши тут $x = 0$ отримуємо $T^2 = 0$,

тобто $T = 0$, що суперечить припущенню.

Приклад 52. Функція $f(x) = \sin \sqrt{2}x$ є періодичною і кожне число $T = 2\pi t / \sqrt{2}$, $t \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ є її періодом.

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається зростаючою на множині H , якщо

$$(\forall \{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2): f(x_1) < f(x_2). \quad (1)$$

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається неспадною або монотонно зростаючою на множині H , якщо

$$(\forall \{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2): f(x_1) \leq f(x_2). \quad (2)$$

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається спадною на множині H , якщо

$$(\forall \{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2): f(x_1) > f(x_2). \quad (3)$$

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається незростаючою або монотонно спадною на множині H , якщо

$$(\forall \{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2): f(x_1) \geq f(x_2). \quad (4)$$

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє принаймні одну із умов (1)-(4) називається монотонною на множині H . Функція, яка задовольняє умову (1) або умову (3) називається строго монотонною на множині H .

Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є зростаючою на множинах H' і H'' , то вона не обов'язково є зростаючою на множині $H = H' \cup H''$.

Приклад 53. Функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ є зростаючою на проміжках $H' = (-\pi/2; \pi/2)$ і $H'' = (\pi/2; 3\pi/2)$, але вона не є зростаючою на множині $H = (-\pi/2; \pi/2) \cup (\pi/2; 3\pi/2)$.

Приклад 54. Функція $f(x) = 2x + 1$ є зростаючою на \mathbb{R} , $f(x_1) = 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 = f(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$.

Приклад 55. Функція $f(x) = x \sin x$ не є монотонною на \mathbb{R} , бо $0 = f(x_1) < f(x_2) = \pi/2$, $\pi/2 = f(x_2) > f(x_3) = 0$ і $x_1 < x_2 < x_3$, якщо $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$ і $x_3 = \pi$.

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається обмеженою на множині H , якщо $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H): |f(x)| \leq c$. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка не є обмеженою на множині H , називається необмеженою на H . Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається обмеженою зверху на множині H , якщо $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H): f(x) \leq c$. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається обмеженою знизу на множині H , якщо $(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H): f(x) \geq c$.

Приклад 56. Функція $f(x) = \sin x$ є обмеженою на \mathbb{R} , бо

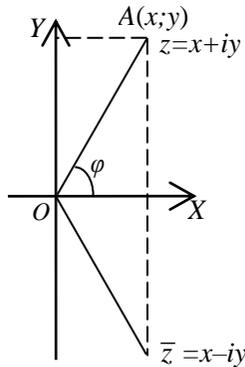
$|\sin x| \leq 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 57. Функція $f(x) = 2x + 1$ є необмеженою на \mathbb{R} .

Приклад 58. Функція $f(x) = x^2$ є обмеженою знизу на \mathbb{R} , але не є обмеженою зверху на \mathbb{R} . Функція $f(x) = -x^2 + 1$ є обмеженою зверху на \mathbb{R} , але не є обмеженою знизу на \mathbb{R} .

Приклад 59. Функція $f(x) = 1/x$ є обмеженою на множині $H = (1; +\infty)$, є необмеженою на множині $H = (0; +\infty)$, є обмеженою знизу на множині $H = (0; +\infty)$, є необмеженою зверху на $H = (0; +\infty)$.

1.1.6. Комплексні числа. Комплексним числом називається [6] упорядкована пара $z = (x; y)$ дійсних чисел x і y , причому число x називається *дійсною частиною* комплексного числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y — *уявною частиною* і позначається $y = \operatorname{Im} z$. Два комплексні числа $z_1 = (x_1; y_1)$ і $z_2 = (x_2; y_2)$ називаються *рівними* [6], якщо рівними є їх дійсні та уявні частини. Число $(x; 0)$ позначають через x : $x = (x; 0)$. Зокрема, $1 = (1; 0)$. Число $(0; y)$ називається *чисто уявним*, а число $i = (0; 1)$ називається *уявною одиницею*.



Додавання і множення комплексних чисел визначаються відповідно так: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Із означення випливає, що $i^2 = i \cdot i = -1$ і кожне комплексне число $z = (x; y)$ можна подати в *алгебраїчній формі*: $z = x + iy$. Множину всіх комплексних чисел позначають через \mathbb{C} . Між множинами \mathbb{C} і \mathbb{R}^2 існує взаємно однозначна відповідність [6]: числу $z = x + iy \in \mathbb{C}$ відповідає точка

$A(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Тому комплексні числа можна зображати точками площини в декартовій системі координат XOY . Число $\bar{z} = x - iy$ називається *спряженим* до числа z . Число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ називається *модулем комплексного числа* z . Модуль числа $z \in \mathbb{C}$ дорівнює довжині вектора \overline{OA} , який називається *радіус-вектором* числа z . Безпосередньо із означення випливає, що $\forall z \in \mathbb{C}: |z| \geq 0, |z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ і $|\bar{z}| = |z|$. Крім того, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ і $|z_1 / z_2| = |z_1| / |z_2|$. Правильні також нерівності [6]

$$\left| |z_1| - |z_2| \right| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|, \quad |\operatorname{Re} z| \leq |z|, \quad |\operatorname{Im} z| \leq |z|,$$

$$\frac{|\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|,$$

які перевіряються безпосередньо. За означенням, для довільного комплексного числа $z = x + iy \in \mathbb{C}$ виконується [6]:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Аргументом комплексного числа z називається кут $\varphi = \operatorname{Arg} z$, утворений радіус-вектором числа z і додатним променем осі OX . Аргумент визначається з точністю до $2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Головним значенням $\operatorname{Arg} z$ називається таке число $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, яке належить проміжку $[-\pi; \pi)$. Справедлива формула $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$. Для знаходження головного значення аргументу числа $z \neq 0$ справедлива формула [6]:

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg}(y/x), & x > 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, \quad y > 0, \\ \operatorname{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0, \quad y < 0, \\ \pi/2, & x = 0, \quad y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Точніше кажучи, *головним значенням аргументу* комплексного числа $z \neq 0$ називається число $\arg z$, визначене рівністю (1). Множина $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ називається [6] *множиною аргументів* числа $z \neq 0$. Інколи головне значення аргументу береться з проміжку $[0; 2\pi)$ (тоді формулу (1) потрібно відповідним чином змінити), а символами

“ $\text{Arg } z$ ” і “ $\arg z$ ” позначають довільний елемент множини аргументів та інші речі. Тому в кожній конкретній ситуації потрібно з’ясувати зміст цих символів. Оскільки $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ і $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, то комплексне число z можна записати [6] також у *тригонометричній формі*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2)$$

та *показниковій формі*

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (3)$$

Якщо число z записано у формі (2) чи (3), то $r = |z|$, а $\varphi \in \text{Arg } z$. Для арифметичних операцій над дійсними числами справедливі ті ж правила, що і для арифметичних операцій над дійсними числами.

Коренем n -го степеня, де $n \in \mathbb{N}$, комплексного числа z називається таке число w , для якого $w^n = z$. Множина всіх коренів n -го степеня з числа z позначається через $w = \sqrt[n]{z}$. Цим же символом позначається довільний елемент цієї множини. Якщо $z = r e^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$, то $\rho^n = r$, $n\theta = \varphi + 2k\pi$. Тому [6]

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad k \in \overline{0; n-1},$$

де $\varphi \in \text{Arg } z$ – будь-яке значення аргументу z і $\sqrt[n]{|z|}$ – арифметичне значення кореня n -го степеня з невід’ємного числа $|z|$.

Логарифмом комплексного числа z називається таке число w , яке є розв’язком рівняння $e^w = z$. Множина всіх таких чисел w позначається через $\text{Ln } z$ [6]:

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i(\varphi + 2k\pi), \quad k \in \mathbb{Z},$$

або

$$\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z,$$

$$\text{Ln } z = \ln z + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z},$$

де $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ – головне значення логарифма ($\arg z \in [-\pi; \pi)$).

За означенням, $z^a = \exp(a \text{Ln } z)$. Зокрема, $e^z = \exp(z \text{Ln } e)$.

Якщо $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – задана функція, то [6] її можна подати у вигляді $f = f_1 + i f_2$, де $f_1 = \text{Re } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_2 = \text{Im } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – дійсні функції дійсної змінної.

Приклад 1. $i^3 = i^2 i = -i$.

Приклад 2. $\arg 2 = 0$, $\arg(-4) = -\pi$, $\arg 3i = \pi/2$,
 $\arg(-3i) = -\pi/2$.

Приклад 3. $|1+3i| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$, $\arg(1+3i) = \arctg 3$,
 $1+3i = \sqrt{10}e^{i \arctg 3}$, $1+3i = \sqrt{10}(\cos \arctg 3 + i \sin \arctg 3)$.

Приклад 4.

$$e^{i(\varphi+2k\pi)} = \cos(\varphi+2k\pi) + i \sin(\varphi+2k\pi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \varphi \in \mathbb{R}.$$

Приклад 5. При множенні двох комплексних чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються, бо

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Приклад 6. $|2e^{i\pi/3}| = 2$, $\arg(2e^{i\pi/3}) = \frac{\pi}{3}$,

$$2e^{i\pi/3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

Приклад 7. $|-2e^{i\pi/3}| = 2$, $-2e^{i\pi/3} = 2e^{-i\pi} e^{i\pi/3} = 2e^{-i2\pi/3}$,

$$\arg(-2e^{i\pi/3}) = -\frac{2\pi}{3}.$$

Приклад 8.

$$\frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(2-i)^2}{|2+i|^2} = \frac{4-4i+i^2}{4+1} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Приклад 9. $\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg } z_1 + \text{Arg } z_2$, $\text{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \text{Arg } z_1 - \text{Arg } z_2$,

$$\begin{aligned} \text{Arg } z^n &= n \text{Arg } z, \quad |z^n| = |z|^n, \quad z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \quad n \in \mathbb{N}, \\ r &= |z|, \quad \varphi \in \text{Arg } z. \end{aligned}$$

Приклад 10.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{3} \right), \quad k \in \overline{0;2}.$$

Тому

$$(\sqrt{-1})_0 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$(\sqrt{-1})_1 = \cos \pi + i \sin \pi = -1, \quad (\sqrt{-1})_2 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Приклад 11.

$$\begin{aligned} \exp(z_1 + z_2) &= \exp(x_1 + x_2) (\cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2)) = \\ &= \exp(x_1 + x_2) (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)) = \\ &= \exp(x_1 + x_2) (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = \exp(z_1) \exp(z_2). \end{aligned}$$

Приклад 12. $e^{2k\pi i} = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = 1, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Приклад 13. $e^{z+2k\pi i} = e^z e^{2k\pi i} = e^z, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad z \in \mathbb{C}.$

Приклад 14. $\text{Ln}(z_1 z_2) = \text{Ln } z_1 + \text{Ln } z_2, \quad \text{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \text{Ln } z_1 - \text{Ln } z_2.$

Приклад 15. $\text{Ln } e = 1 + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.$

Приклад 16. $i^i = \exp(i \text{Ln } i) = \exp(-2k\pi - \pi/2), \quad k \in \mathbb{Z}.$

1.1.7. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення об'єднання двох множин.
2. Сформулюйте означення перетину двох множин.
3. Наведіть три приклади ірраціональних чисел.
4. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, сума яких є раціональним числом.
5. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, добуток яких є раціональним числом.
6. Чи існують такі два різні раціональні числа a і b , що проміжок $(a; b)$ не містить жодного ірраціонального числа?
7. Серед чисел $1, (0); 0,9; \sqrt{2}; \sqrt{4}$ виберіть натуральні.
8. Серед чисел $2; 1,2(7); \sqrt{9}; \sqrt{3}; e; \pi$ виберіть раціональні.
9. Що називається модулем дійсного числа?
10. Порівняйте числа $|x + y|$ і $|x| + |y|$.
11. Порівняйте числа $||x| - |y||$ і $|x - y|$.
12. Порівняйте числа $|y| - |x|$ і $|x - y|$.
13. Порівняйте числа $||a| - |b||$ і $|a + b|$.
14. Порівняйте числа $|x + y|$ і $|x - y|$.

15. Чи правильне твердження: множина всіх раціональних чисел є еквівалентною множині всіх натуральних чисел?
16. Сформулюйте принцип вкладених проміжків.
17. Сформулюйте означення обмеженої множини.
18. Наведіть приклад нескінченної обмеженої множини $H \subset \mathbb{R}$.
19. Наведіть приклад нескінченної необмеженої множини $H \subset \mathbb{R}$.
20. Сформулюйте означення обмеженої зверху множини $H \subset \mathbb{R}$.
21. Сформулюйте означення верхньої межі множини $H \subset \mathbb{R}$.
22. Сформулюйте два означення точної верхньої межі множини $H \subset \mathbb{R}$.
23. Сформулюйте означення обмеженої знизу множини $H \subset \mathbb{R}$.
24. Сформулюйте означення нижньої межі множини $H \subset \mathbb{R}$.
25. Сформулюйте два означення точної нижньої межі множини $H \subset \mathbb{R}$.
26. Наведіть приклад множини $H \subset \mathbb{R}$, яка є обмеженою зверху і необмеженою знизу.
27. Наведіть приклад множини $H \subset \mathbb{R}$, яка є необмеженою зверху і обмеженою знизу.
28. Сформулюйте теорему про існування точної верхньої межі.
29. Наведіть приклад такої множини $H \subset \mathbb{R}$, що вона не має найменшого елемента, має найбільший елемент, $\inf H = -4$ і $\max H = -2$.
30. Сформулюйте означення функції.
31. Сформулюйте означення оборотної функції.
32. Сформулюйте означення взаємно однозначної відповідності.
33. Сформулюйте означення періодичної функції.
34. Сформулюйте означення періоду функції.
35. Сформулюйте означення продовження і звуження функції.
36. Сформулюйте означення неспадної функції.
37. Сформулюйте означення незростаючої функції.
38. Сформулюйте означення монотонної функції.
39. Сформулюйте означення спадної функції.
40. Сформулюйте означення зростаючої функції.
41. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і множин $A_1 \subset \mathbb{R}$ та $A_2 \subset \mathbb{R}$ таких, що f є зростаючою на кожній із множин A_1 і A_2 , але не є зростаючою на $A_1 \cup A_2$.
42. Що називаємо модулем та аргументом комплексного числа?
43. Запишіть формулу Муавра.
44. Сформулюйте означення кореня n -го степеня з комплексного числа і запишіть формулу для його знаходження.
45. Сформулюйте означення e^z та доведіть, що $e^{z_1} e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$.

46. Сформулюйте означення логарифма комплексного числа і запишіть формулу для знаходження логарифмів.
47. Сформулюйте означення z^α .

1.1.8. Вправи і задачі.

1. Розв'яжіть рівняння:

$$1. \sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}.$$

$$3. x - 2\sqrt{x} + 1 = 0.$$

$$5. 2\cos^2 x - 5\cos x - 3 = 0.$$

$$7. \left(\cos^2 x - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(\cos x - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = 0.$$

$$9. \log_2 x = 3.$$

$$11. 4^{5-2x} = 0,25.$$

$$2. \sqrt{x^2-2} = \sqrt{x}.$$

$$4. \sin x + \sin 2x = 0.$$

$$6. \operatorname{tg}^2 x - 2\operatorname{tg} x - 3 = 0.$$

$$8. \sin x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$10. \lg x = 2 - \lg 5.$$

$$12. 3^{x+2} + 3^{x+1} = 28.$$

2. Розв'яжіть нерівність:

$$1. x^2 + 2x + 1 > 0.$$

$$3. -2x^2 - 10x - 8 > 0.$$

$$5. (x^2 + 1)(x - 2) \geq 0.$$

$$7. \frac{6}{x-3} < 2.$$

$$9. 1 < (x-1)^2 < 4.$$

$$11. \sin x \geq 1/2.$$

$$13. |\cos x| > \sqrt{2}/2.$$

$$15. \left(\frac{1}{3} \right)^{x^2-x} < \frac{1}{9}.$$

$$2. x^2 - 3x + 2 \geq 0.$$

$$4. x^2 + x + 4 \leq 0.$$

$$6. \frac{x-1}{x+3} \geq 0.$$

$$8. |x| < 4.$$

$$10. |x-5| < 1.$$

$$12. \ln x < -1.$$

$$14. 2^{x^2} > (0,5)^{2x-3}.$$

$$16. 1 < 5^{1-\frac{1}{2}x} < 25.$$

3. Зобразіть графік функції:

$$1. y = |x| + 1.$$

$$3. y = \frac{1}{x^2} + 1.$$

$$5. y = 2^x + 1.$$

$$7. y = -\lg|x|.$$

$$9. y = |\sin x|.$$

$$2. y = (x+1)^2.$$

$$4. y = 2^{x+1}.$$

$$6. y = 2 \lg x.$$

$$8. y = 2^{-|x|}.$$

$$10. y = -\operatorname{arctg} x.$$

11. $y = -\arccos x$.

12. $y = -|\arctg x|$.

13. $y = \arcsin |x|$.

14. $y = \text{arcc}tg|x|$.

15. $y = (x-1)^3$.

16. $y = -(x+1)^3$.

17. $y = 1 + \sqrt{x}$.

18. $y = -\sqrt{x+1}$.

19. $y = -|\cos x|$.

20. $y = \text{tg}(x + \pi/4)$.

4. Знайдіть ті точки, в яких функція приймає значення A :

1. $f(x) = \sin^2 x$, $A = 1/2$.

2. $f(x) = \text{tg}^2 x$, $A = 1/3$.

3. $f(x) = |x+1| + |x|$, $A = 1/2$.

4. $f(x) = |\ln|x||$, $A = 2$.

5. $f(x) = 5^{x+1} - 5^{x-1}$, $A = 24$.

6. $f(x) = \arcsin^2 \sqrt{x}$, $A = 1/2$.

7. $f(x) = \cos^2 x - 2\cos x$, $A = 24$.

8. $f(x) = \log_2 x^2$, $A = 4$.

9. $f(x) = \sin^2 x + 2|\sin x|$, $A = 0$.

10. $f(x) = x - \sqrt{x+1}$, $A = 1/2$.

5. Знайдіть множину точок, в яких функція приймає додатні значення:

1. $f(x) = \sin x$.

2. $f(x) = \cos x$.

3. $f(x) = \text{tg} x$.

4. $f(x) = \text{ctg} x$.

5. $f(x) = \ln x$.

6. $f(x) = \text{arcc}tg x$.

7. $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$.

8. $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$.

9. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{\ln x}}$.

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \ln x}}$.

6. Знайдіть абсциси тих точок, для яких графік функції лежить під віссю абсцис:

1. $f(x) = (x-1)(x+2)$.

2. $f(x) = \frac{1}{x+3} - 6$.

3. $f(x) = |x+1| - |x|$.

4. $f(x) = \left| |x+1| - |x-1| \right|$.

5. $f(x) = \log_{1/2} x + 1$.

6. $f(x) = \log_2 x^2$.

7. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

8. $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$.

9. $f(x) = \sqrt{x^2} - x$.

10. $f(x) = \lg|x| - 1$.

7. З'ясуйте, чи множина H є: а) обмеженою зверху; б) обмеженою знизу; в) обмеженою; г) має найбільший елемент; д) має найменший елемент:

$$1. H = \{\operatorname{ctg} x : x \in (0; \pi)\}.$$

$$2. H = \{\operatorname{ctg} x : x \in (\pi/6; \pi/3)\}.$$

$$3. H = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$4. H = \left\{ \frac{2n^4}{n^4 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$5. H = \left\{ \frac{(-2)^n}{4^n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$6. H = \left\{ \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$7. H = \left\{ \frac{2+n}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$8. H = \left\{ n \left(\sqrt{n^2 + 1} - n \right) : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$9. H = \left\{ \frac{2^n}{4^n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$10. H = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

8. Знайдіть множину (область) визначення функцій f_1 , f_2 і $f_1 + f_2$:

$$1. f_1(x) = \arcsin \sqrt{x}, f_2(x) = \sqrt{\arccos x}.$$

$$2. f_1(x) = \operatorname{arctg}|x|, f_2(x) = |\ln x|.$$

$$3. f_1(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}, f_2(x) = \sqrt[3]{x}.$$

$$4. f_1(x) = \ln \sqrt{x^2 - 4x + 3}, f_2(x) = \sin|x|.$$

$$5. f_1(x) = |2^x - 3^{x+1}|, f_2(x) = e^{|x|} - 1.$$

$$6. f_1(x) = x^2 - 1, f_2(x) = (x-1)^3.$$

9. Знайдіть множину значень функції:

$$1. f(x) = x^2 + 1.$$

$$2. f(x) = 1 + \arcsin x.$$

$$3. f(x) = 1 + \ln x.$$

$$4. f(x) = e^x + 1.$$

$$5. f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}.$$

$$6. f(x) = \operatorname{arctg}|x| + \frac{\pi}{2}.$$

10. Знайдіть нулі функції:

$$1. f(x) = \sin x.$$

$$2. f(x) = \cos x.$$

$$3. f(x) = \operatorname{tg} x.$$

$$4. f(x) = \operatorname{ctg} x.$$

$$5. f(x) = 4^{\sqrt{x-2}} - 2^{\sqrt{x-2}}.$$

$$6. f(x) = (2^x - 3^x)(\ln x + 1).$$

$$7. f(x) = (2^{|x|} - 2)(\ln x - 1).$$

$$8. f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}.$$

$$9. f(x) = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[8]{x} - 3.$$

$$10. f(x) = |x| - 2\sqrt{|x|} + 1.$$

11. З'ясуйте, чи функція є парною, непарною, ні парною ні непарною:

1. $f(x) = \sqrt{\sin x}$.
2. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$.
3. $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$.
4. $f(x) = \arccos x^2$.
5. $f(x) = \ln x$.
6. $f(x) = x^2 + 1$.
7. $f(x) = e^x$.
8. $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$.
9. $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$.
10. $f(x) = x^2 - 2x$.
11. $f(x) = x \ln |x|$.
12. $f(x) = \cos(x+2)$.
13. $f(x) = \sin(x-1)$.
14. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
15. $f(x) = \sin^2 x$.
16. $f(x) = x \cos x$.
17. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.
18. $f(x) = x + \sin x$.
19. $f(x) = 2x + 1$.
20. $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$.
21. $f(x) = 2$.
22. $f(x) = x^3 + x^2$.
23. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
24. $f(x) = 2^{x-x^2}$.
25. $f(x) = \sin x^2$.
26. $f(x) = \sin 2x + \cos x$.
27. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$.
28. $f(x) = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$.
29. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
30. $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

12. З'ясуйте, чи функція є періодичною:

1. $f(x) = \sin^2 x$.
2. $f(x) = x \cos x$.
3. $f(x) = x^2 + 1$.
4. $f(x) = \cos^2 x$.
5. $f(x) = \cos x^2$.
6. $f(x) = x^2$.
7. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.
8. $f(x) = x + \cos x$.
9. $f(x) = 2^x$.
10. $f(x) = (x+1)^2$.
11. $f(x) = x^3 + x^2$.
12. $f(x) = \sin x^2$.
13. $f(x) = \sin(x-1)$.
14. $f(x) = 2 \cos(2x/3)$.
15. $f(x) = \sin x + 2 \cos \frac{x}{2}$.
16. $f(x) = \sin \sqrt{x}$.

17. $f(x) = \sqrt{\sin x}$.

18. $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$.

19. $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

20. $f(x) = \sin(\sqrt{2x})$.

21. $f(x) = \cos(\sqrt{3x})$.

22. $f(x) = \sqrt{\cos 2x}$.

23. $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

24. $f(x) = 2 \cos \sqrt{x}$.

25. $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

26. $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$.

27. $f(x) = \sin 2x + \cos x$.

28. $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$.

29. $f(x) = 2$.

30. $f(x) = -x^4 + 1$.

13. З'ясуйте, чи функція є обмеженою, обмеженою знизу та обмеженою зверху на множині H :

1. $f(x) = \frac{1}{x}$, $H = (1; +\infty)$.

2. $f(x) = \frac{1}{x}$, $H = (0; 1)$.

3. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $H = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

5. $f(x) = \sin \frac{1}{x}$, $H = (0; +\infty)$.

6. $f(x) = \cos \frac{1}{x}$, $H = (0; +\infty)$.

7. $f(x) = x^2$, $H = \mathbb{R}$

8. $f(x) = -x^2 + 1$, $H = \mathbb{R}$.

14. Виходячи з означення з'ясуйте, чи функція є монотонною на області визначення:

1. $f(x) = 2x + 3$.

2. $f(x) = x^2 + 2$.

3. $f(x) = |x|$.

4. $f(x) = [x]$.

5. $f(x) = x[x]$.

6. $f(x) = |x|[x]$.

7. $f(x) = \operatorname{sh} x$.

8. $f(x) = \operatorname{ch} x$.

15. Знайдіть модуль і аргумент комплексного числа z :

1. $z = i^5$.

2. $z = i^3$.

3. $z = i^6$.

4. $z = 3i^4$.

5. $z = 1 - i$.

6. $z = 1 + i$.

7. $z = -1 - 2i$.

8. $z = -2 + i$.

9. $z = 2e^{i\pi}$.

10. $z = 2e^{-i\pi}$.

11. $z = 3e^{i\pi/3}$.

12. $z = 4e^{-i\pi/4}$.

13. $z = -5e^{2i}$.

14. $z = -4e^{-3i}$.

15. $z = (1+i)(1-2i)$.

16. $z = (1-i)(1-3i)$.

17. $z = 4 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$.

18. $z = \frac{1-2i}{1+i}$.

19. $z = \frac{1+i}{1-2i}$.

20. $z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7} \right)$.

21. $z = -4(\cos 0,6\pi + i \sin 0,6\pi)$.

22. $z = 4 \cos \frac{\pi}{12} + 7i \sin \frac{\pi}{12}$.

16. Запишіть комплексне число a в показниковій і тригонометричній формах:

1. $a = -3$.

2. $a = 2$.

3. $a = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

4. $a = 4 - 3i$.

5. $a = i\sqrt{2}$.

6. $a = -\sqrt{2}$.

7. $a = 1 + i^{121}$.

8. $a = (-3 + 4i)^3$.

9. $a = -1 + i\sqrt{3}$.

10. $a = 1 + \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$.

17. Запишіть комплексне число a в алгебраїчній формі:

1. $a = i \cos \pi$.

2. $a = e^{-\pi i/4}$.

3. $a = e^{1+\pi i/4}$.

4. $a = \frac{1}{i}$.

5. $a = \frac{1-i}{1+i}$.

6. $a = \frac{1+i}{(1-i)^2}$.

1.1.9. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть множину (область) визначення функції:

1. $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \ln x$.

2. $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\ln x}$.

3. $f(x) = \sqrt{\sin x} + \ln \sqrt{x}$.

4. $f(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{x}$.

5. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{\operatorname{tg} x}$.

6. $f(x) = \sqrt{\operatorname{arccotg} x}$.

7. $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$.

8. $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$.

9. $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{\ln x}}$.

10. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \ln x}}$.

11. $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{x})$.

12. $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)}$.

$$13. f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}.$$

$$15. f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 8}}.$$

$$17. f(x) = \frac{2+x}{|x|-x}.$$

$$19. f(x) = \sqrt{2-3x+x^2}$$

$$21. f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}.$$

$$23. f(x) = \frac{1}{x+|x|}.$$

$$25. f(x) = \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2+x+1}}.$$

$$27. f(x) = \arcsin(1-x^2).$$

$$29. f(x) = \arcsin \sqrt{x}.$$

$$14. f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x - 1}}.$$

$$16. f(x) = \ln^2 \frac{x^2+1}{x}.$$

$$18. f(x) = \ln \frac{x^2+1}{x-1}.$$

$$20. f(x) = \frac{1}{\sqrt{-3+4x-x^2}}.$$

$$22. f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$24. f(x) = \frac{1}{x^2-5x+6}.$$

$$26. f(x) = \arccos(1-|x|).$$

$$28. f(x) = \cos \frac{x-1}{x+1}.$$

$$30. f(x) = \sin \frac{1}{x}.$$

2. Знайдіть $A \cup B$, $A \cap B$ та $A \setminus B$:

$$1. A = \{x: (x+1)^2 < 9\},$$

$$B = \{x: 0 < |x| < 1\}.$$

$$2. A = \{x: x^2 > 4\},$$

$$B = \{x: x^2 + 2x + 1 > 0\}.$$

$$3. A = \{x: |x-1| \leq 1\},$$

$$B = \{x: x^2 + 2x + 1 < 0\}.$$

$$4. A = \{x: (x+1)^2 \leq 4\},$$

$$B = \{x: |x| > 1\}.$$

$$5. A = \{x: (x-1)^2 \geq 1\},$$

$$B = \{x: |x+1| \leq 2\}.$$

$$6. A = \{x: x^2 - 10x + 25 \leq 0\},$$

$$B = \{x: 4 < x^2 \leq 9\}.$$

$$7. A = \{x: x^2 + x > 0\},$$

$$B = \{x: |x+2| > 1\}.$$

$$8. A = \{x: x^2 - x < 0\},$$

$$B = \{x: 0 < |x+2| \leq 1\}.$$

$$9. A = \{x: |x-1| + |x+2| > 1\},$$

$$B = \{x: x^2 > 4\}.$$

$$10. A = \{x: |x+1| + |x-1| > 2\},$$

$$B = \{x: x^2 \leq 4\}.$$

$$11. A = \{x: |x-1| + |x-2| \leq 1\},$$

$$B = \{x: |x| > 1\}.$$

- | | |
|-------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| 12. $A = \{x: x + x - 2 > 1\}$, | $B = \{x: x^2 + x > 0\}$. |
| 13. $A = \{x: x + x + 2 > 1\}$, | $B = \{x: x^2 + x \leq 0\}$. |
| 14. $A = \{x: x + x - 1 > 2\}$, | $B = \{x: x^2 - x \geq 0\}$. |
| 15. $A = \{x: x + x - 1 \leq 1\}$, | $B = \{x: x^2 - x < 0\}$. |
| 16. $A = \{x: x + x + 1 > 1\}$, | $B = \{x: x^2 < 9\}$. |
| 17. $A = \{x: x + x + 1 \leq 1\}$, | $B = \{x: x^2 \geq 9\}$. |
| 18. $A = \{x: x > x + 2 \}$, | $B = \{x: 0 < x^2 \leq 4\}$. |
| 19. $A = \{x: x \leq x + 2 \}$, | $B = \{x: (x - 1)^2 > 4\}$. |
| 20. $A = \{x: x \leq x\}$, | $B = \{x: x = 1\}$. |
| 21. $A = \{x: x^2 \leq x\}$, | $B = \{x: x \leq 1\}$. |
| 22. $A = \{x: \sqrt{x^2} \leq x\}$, | $B = \{x: x \geq 1\}$. |
| 23. $A = \{x: \sqrt{(x - 1)^2} \leq 1\}$, | $B = \{x: x - 1 \geq 1\}$. |
| 24. $A = \{x: \sin x > 1/2\}$, | $B = \{x: \cos x \leq 1/2\}$. |
| 25. $A = \{x: 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 \geq 0\}$, | $B = \{x: \log_{1/2}(x - 3/2) > 1\}$. |
| 26. $A = \{x: \sqrt{(x - 1)^2} < 1\}$, | $B = \{x: x + 2 < 1\}$. |
| 27. $A = \{x: x^2 + x + 1 > 0\}$, | $B = \{x: x - 2 < 1\}$. |
| 28. $A = \{x: x - 1 + x < 2\}$, | $B = \{x: x^2 + 2 < 1\}$. |
| 29. $A = \{x: x + 1 + x \geq 1\}$, | $B = \{x: x - 1 + x - x + 1 = 1\}$. |
| 30. $A = \{x: \sqrt{(x - 1)^2} > 1\}$, | $B = \{x: x - 1 > 0\}$. |

3. Знайдіть:

- | | |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------|
| 1. $\sqrt[4]{-1}$. | 2. $\sqrt[3]{i}$. |
| 3. $\sqrt[3]{-i}$. | 4. $\sqrt[6]{1}$. |
| 5. $\sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}$. | 6. $(1 + i)^{100}$. |
| 7. $\frac{(1 + 2i)^3}{(1 - i)^2}$. | 8. $\left(\frac{3 + i^{65}}{i^{16} + 2i}\right)^3$. |

- | | |
|---------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| 9. $(1-i)^{17}$. | 10. $\sqrt[3]{-8}$. |
| 11. $\text{Ln}(-1-i)$. | 12. $\cos(3i + \pi/3)$. |
| 13. $\text{Ln}(1+i)$. | 14. $\sin(1 + \pi i/2)$. |
| 15. $(-\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$. | 16. i^i . |
| 17. $(-i)^i$. | 18. $(3-4i)^{1+i}$. |
| 19. $\text{tg}(1 + \pi i/4)$. | 20. $\text{ctg}(\pi i/4)$. |
| 21. $\sqrt[3]{3-3i}$. | 22. $\sqrt{(1-i)(1+i)}$. |
| 23. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{200}$. | 24. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)^{127}$. |
| 25. $\text{Ln}(-2+i)$. | 26. $\sqrt[6]{-1-i}$. |
| 27. $\sin(1 + \pi i/2)$. | 28. $\text{ch}(3 + \pi i/4)$. |
| 29. $(-i)^{101} + (1+i)(1-i)$. | 30. $\cos(i\pi)$. |

1.2. Границя послідовності

Послідовність є однією з найпростіших функцій. В цьому підрозділі вивчається поняття границі послідовності. Це поняття є дуже важливим. Воно використовується при вивченні багатьох інших понять та в інших розділах математики.

1.2.1. Числова послідовність. Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне дійсне число. ε -околом точки $a \in \mathbb{R}$ називається [2, 4] проміжок $U(a; \varepsilon) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$. Отже $U(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$. Проколим

ε -околом точки $a \in \mathbb{R}$ називається множина $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \setminus \{a\}$.

Отже, $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = U(a; \varepsilon) \setminus \{a\}$, тобто $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$.

Інколи множину \mathbb{R} , доповнюють двома такими символами $-\infty$ і $+\infty$, що $(\forall x \in \mathbb{R}) : -\infty < x < +\infty$. Доповнена такими символами множина \mathbb{R}

називається *розширеною числовою прямою* і позначається через $\overline{\mathbb{R}}$.

Символи $-\infty$ і $+\infty$ не є дійсними числами. Вони називаються *нескінченно віддаленими точками* або *нескінченними числами*. Проколені ε -околи точок $-\infty$ і $+\infty$ визначаються відповідно так [2, 4]:

$\overset{\circ}{U}(-\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\varepsilon\}$ і $\overset{\circ}{U}(+\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x > \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$. Інколи

множину дійсних чисел доповнюють одним символом ∞ , який називають нескінченністю. Доповнена цим символом множина \mathbb{R} позначається через $\overline{\mathbb{R}}$. *Проколим ε -околом ∞* називається множина

$\overset{\circ}{U}(\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \varepsilon\}$, де $\varepsilon > 0$. За означенням вважають, що

$\infty + \infty = \infty$, $\frac{\infty}{0} = \infty$, $\frac{0}{\infty} = 0$, $\infty \cdot \infty = \infty$, $0^\infty = 0$, $\infty^\infty = \infty$. Для будь-якого

$x \in \mathbb{R}$ виконується $x + \infty = \infty$, $\frac{x}{\infty} = 0$, $|\infty| = +\infty$, $|x| < |\infty|$, і якщо

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, то $x \cdot \infty = \infty$ і $\frac{x}{0} = \infty$. Наступні вирази є невизначеними (не

мають змісту в $\overline{\mathbb{R}}$):

а) $\frac{0}{0}$; б) $\frac{\infty}{\infty}$; в) $0 \cdot \infty$; г) $\infty - \infty$; д) ∞^0 ; е) 1^∞ ; є) 0^0 .

ε -околи точок ∞ , $-\infty$ і $+\infty$ визначаються відповідно так: $\{x \in \overline{\mathbb{R}}_0 : |x| > \varepsilon\}$, $\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < -\varepsilon\}$, $\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > \varepsilon\}$.

Приклад 1. $U(1; \varepsilon) = (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$, $U(1; 0, 1) = (0, 9; 1, 1)$.

Приклад 2. $\overset{\circ}{U}(1; 0, 1) = (0, 9; 1) \cup (1; 1, 1)$, $\overset{\circ}{U}(1; \varepsilon) = (1 - \varepsilon; 1) \cup (1; 1 + \varepsilon)$.

Приклад 3. $\overset{\circ}{U}(+\infty; \varepsilon) = (\varepsilon; +\infty)$, $\overset{\circ}{U}(+\infty; 100) = (100; +\infty)$,

$U(+\infty; 100) = (100; +\infty]$, $U(\infty; 100) = (-\infty; 100) \cup (100; +\infty) \cup \{\infty\}$.

Числовою послідовністю називається така функція, область визначення якої є множина натуральних чисел, а множина значень належить \mathbb{R} . Надалі числові послідовності будемо називати *послідовностями* або послідовностями точок із \mathbb{R} , опускаючи слово “числова”. Отже, послідовність є функцією з \mathbb{N} в \mathbb{R} . Для послідовностей використовуються такі ж позначення як і для функцій [2, 4]: $x(n)$, $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ і т.д. Разом з цим, для позначення послідовностей використовуються і спеціальні позначення: (x_n) , $x = (x_n)$, $(x_1; x_2; \dots; x_n; \dots)$, $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_n: n \in \mathbb{N})$, Числа $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ називаються *членами послідовності*, відповідно першим, другим, n -ним і т.д., x_n називають ще *загальним членом послідовності* (x_n) . Слід розрізняти послідовність $x = (x_n)$ і множину її значень $D(x) = \{x_n\}$. Щоб задати послідовність, досить кожному натуральному числу n поставити у

відповідність одне дійсне число x_n . Послідовність можна задати різними способами [2, 4].

Приклад 1. Послідовність можна задати аналітично, тобто за допомогою формули $x_n = f(n)$. Рівність $x_n = n^2 + 1$ задає послідовність (x_n) .

Приклад 2. Послідовність можна задати рекурентно. Цей спосіб полягає в тому, що вказується кілька членів послідовності і вказується спосіб знаходження наступних членів через попередні. Наприклад, нехай $x_1 = 2$ і $x_n = 4x_{n-1}$, якщо $n > 1$.

Приклад 3. Послідовність можна задати таблично, тобто записом у вигляді таблиці значень n і відповідних значень x_n .

Приклад 4. Послідовність можна задати графічно, тобто зображенням в деякій системі координат точок $A_n(n; x_n)$.

Приклад 5. Послідовність можна задати словесно-описово, тобто словесним описом відповідності. Зокрема, нехай (x_n) – це така послідовність, перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний вдвічі більший за попередній.

При розгляді різних послідовностей бачимо, що члени одних послідовностей при зростанні номера n наближаються до певного дійсного числа, а члени інших послідовностей такою властивістю не володіють.

Приклад 6. Послідовність $(2) = (2; 2; 2; \dots; 2; \dots)$, є сталою. Всі члени цієї послідовності дорівнюють 2.

Приклад 7. Члени послідовності

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots\right),$$

при зростанні номера n наближаються до числа 0.

Приклад 8. Члени послідовності

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots; \frac{n-1}{n}; \dots\right)$$

при зростанні номера n наближаються до числа 1.

Приклад 9. Члени послідовності

$$((-1)^n) = (-1; 1; -1; 1; -1; \dots; (-1)^n; \dots),$$

при зростанні номера n не наближаються до якогось числа, а дорівнюють 1 або -1 .

Приклад 10. Члени послідовності

$$(n^2) = (1; 4; 9; 16; 25; \dots; n^2; \dots).$$

при зростанні номера n стають все більшими (наближаючись до $+\infty$).

1.2.2. Границя послідовності. Властивості збіжних послідовностей. Число $a \in \mathbb{R}$ називається *границею послідовності* (x_n) або границею в \mathbb{R} послідовності (x_n) , якщо [2, 4]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n - a| < \varepsilon.$$

Якщо число $a \in \mathbb{R}$ є границею послідовності (x_n) , то цей факт відзначають одним із символів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a, \quad x_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty, \quad x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Послідовність, яка має границю $a \in \mathbb{R}$, називається *збіжною* або *збіжною в \mathbb{R}* . Послідовність, яка не є збіжною в \mathbb{R} , називається *розбіжною* або *розбіжною в \mathbb{R}* . Якщо послідовність (x_n) є збіжною в \mathbb{R} , то кажуть, що границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ існує в \mathbb{R} . Якщо послідовність (x_n) є розбіжною в \mathbb{R} , то кажуть, що границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не існує в \mathbb{R} .

З означення границі послідовності випливає, що зміна скінченного числа членів послідовності не впливає на збіжність і границю послідовності, а також, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, якщо остання границя існує.

Послідовність (x_n) називається *сталюю*, якщо

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}): x_n = c.$$

Теорема 1 [2, 4]. *Границя сталої дорівнює цій же сталій, тобто*
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$

Приклад 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$

Приклад 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$ *Справді, потрібно показати, що*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Шукаємо це n^ . Маємо $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$. Тому нерівність $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$ буде виконуватись, якщо $\frac{1}{n} < \varepsilon$, тобто якщо $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Тому за n^* можна взяти*

будь-яке натуральне число, більше за $\frac{1}{\varepsilon}$. Наприклад, $n^* = [1/\varepsilon] + 1$. Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [1/\varepsilon] + 1)(\forall n \geq n^*): \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

Приклад 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$, якщо $\beta \in (0; +\infty)$, бо $\left| \frac{1}{n^\beta} - 0 \right| < \varepsilon$, якщо $n > 1/\varepsilon^{1/\beta}$.

$$\text{Приклад 4. } \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0, & |q| < 1, \\ \infty, & |q| > 1. \end{cases}$$

Приклад 5. Послідовності $x_n = (-1)^n$ і $x_n = n$ є розбіжними в \mathbb{R} .

Теорема 2 [2, 4]. Послідовність не може мати більше однієї границі.

Послідовність (x_n) називається обмеженою або обмеженою в \mathbb{R} , якщо $(\exists K \in (0; +\infty))(\forall n \in \mathbb{N}): |x_n| \leq K$. Таким чином, послідовність (x_n) є обмеженою, якщо модулі всіх її членів не перевищують деякого додатного числа K , незалежного від n .

Теорема 3 [2, 4]. Якщо послідовність (x_n) є збіжною в \mathbb{R} , то вона є обмеженою в \mathbb{R} .

Приклад 6. Послідовність $x_n = (-1)^n$ є обмеженою, бо $|x_n| \leq 1$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і не є збіжною в \mathbb{R} . Отже, твердження, обернене до теореми 1, не є справедливим.

Приклад 7. Послідовність $x_n = \frac{2^n}{n!}$ є обмеженою, бо

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$. Отже, $|x_{n+1}| \leq |x_n| \leq \dots \leq |x_1| = 2$. Тому $|x_n| \leq 2$ для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 8. Послідовність $x_n = \frac{(2n+3)\sin n}{n+1}$ є обмеженою, бо

$$|x_n| = \frac{(2n+3)|\sin n|}{n+1} \leq \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \leq 2 + 1 = 3$$

для всіх $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 9. Послідовність $x_n = n$ є необмеженою.

Приклад 10. Послідовність $x_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+1}$ є необмеженою, бо

$$|x_n| = \left| (-1)^n \frac{n^2}{n+1} \right| = \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2-1}{n+1} = n-1.$$

Нехай $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ – така нескінченна підмножина множини \mathbb{N} , що

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \quad (1)$$

Підпослідовністю послідовності (x_n) називається [2, 4] така послідовність (b_k) , для якої знайдеться підмножина $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ множини \mathbb{N} з властивістю (1), що для всіх $k \in \mathbb{N}$ виконується $b_k = x_{n_k}$. Підпослідовність послідовності (x_n) позначають так (x_{n_k}) . Кожна послідовність (x_n) має нескінченну кількість підпослідовностей.

Приклад 11. Послідовності $x_{2k} = (-1)^{2k} + 1/(2k)^2$ та $x_{4k+3} = (-1)^{4k+3} + 1/(4k+3)^2$ є, зокрема, підпослідовностями послідовності $x_n = (-1)^n + 1/n^2$. В першому випадку $n_k = 2k$, а в другому – $n_k = 4k+3$.

Теорема 4 [2, 4]. Якщо збіжною є послідовність (x_n) , то збіжною є будь-яка її підпослідовність (x_{n_k}) і має ту ж границю, що і послідовність (x_n) .

Приклад 12. Послідовність $x_n = (-1)^n$ є розбіжною, бо $x_{2k} = 1$ і $x_{2k+1} = -1$ – її підпослідовності, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$ і $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = -1$.

Теорема 5 [2, 4]. Якщо послідовності (x_n) і (y_n) є збіжними в \mathbb{R} і $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$.

Приклад 13. Якщо $x_n = 0$ і $y_n = 1/n$, то $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < y_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Тому, якщо виконуються всі умови теореми 1 і $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < y_n$, то нерівність $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ не обов'язково є справедливою.

Теорема 6 [2, 4]. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ і $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq z_n \leq y_n$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

Теорема 7 [2, 4]. Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $a < b$, то

$$(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'): x_n < b.$$

Приклад 14. Якщо $x_n = 0$, $y_n = 1/n$ і $z_n = 1/(2n)$, то $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n < z_n < y_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Приклад 15. Нехай $x_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$ і $\alpha \in (0;1)$. Тоді $0 \leq x_n = n^\alpha ((1+1/n)^\alpha - 1) \leq n^\alpha ((1+1/n) - 1) = n^{\alpha-1}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) = 0$.

1.2.3. Нескінченно малі та нескінченно великі послідовності.

Нескінченні границі. Послідовність (α_n) називається нескінченно малою, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$. Можна також сказати, що послідовність (α_n)

називається нескінченно малою, якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'): |\alpha_n| < \varepsilon$.

Теорема 1 [2, 4]. Для того щоб число $a \in \mathbb{R}$ було границею послідовності (x_n) , необхідно і достатньо, щоб послідовність (x_n) можна було подати у вигляді $x_n = a + \alpha_n$, де (α_n) – нескінченно мала послідовність.

Сумою, добутком, різницею і часткою двох послідовностей (x_n) і (y_n) називаються відповідно послідовності $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$, $(x_n - y_n)$ і (x_n / y_n) . Добутком послідовності (x_n) на число c називається послідовність (cx_n) .

Теорема 2 [2, 4]. Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Наслідок 1. Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

Теорема 3 [2, 4]. Добуток обмеженої і нескінченно малої послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Теорема 4 [2, 4]. Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

Приклад 1. Послідовність $(1/n)$ є нескінченно малою, бо раніше вже було показано, що $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/n = 0$.

Приклад 2. Послідовність $(1/2^n)$ є нескінченно малою, бо раніше вже було показано, що $\lim_{n \rightarrow \infty} 1/2^n = 0$.

Приклад 3. Послідовність $(\sin n/n)$ є нескінченно малою, бо послідовність $(\sin n)$ є обмеженою, а послідовність $(1/n)$ є нескінченно малою.

Приклад 4. Послідовність $(1/n^2)$ є нескінченно малою, бо вона є добутком двох нескінченно малих послідовностей $(1/n)$ і $(1/n)$.

Послідовність $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$ називається нескінченно великою, якщо $(\forall E > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n| > E$.

Теорема 5 [2, 4]. Для того щоб послідовність $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$ була нескінченно великою, необхідно і достатньо, щоб послідовність $\alpha_n = 1/x_n$ була нескінченно малою.

Точка ∞ називається границею послідовності (x_n) , якщо послідовність (x_n) є нескінченно великою. Послідовність $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$, яка має границю ∞ або скінченну границю $a \in \mathbb{R}$, називається збіжною в $\overline{\mathbb{R}}_0$.

Точка $+\infty$ називається границею послідовності $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, якщо $(\forall E > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n > E$.

Точка $-\infty$ називається границею послідовності $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, якщо $(\forall E > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n < -E$.

Послідовність $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$, яка має границю $a \in \overline{\mathbb{R}}$, називається збіжною в $\overline{\mathbb{R}}$.

Якщо точки $\infty, +\infty, -\infty$ є границями послідовності (x_n) , то це записують відповідно так [2, 4]: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Останні границі називаються нескінченними границями.

Приклад 5. Послідовність (n) є нескінченно великою, бо послідовність $(1/n)$ є нескінченно малою.

Приклад 6. Послідовність $x_n = 2^n$ є нескінченно великою.

Приклад 7. Послідовність $x_n = q^n$, $|q| > 1$, також є нескінченно великою, бо послідовність $1/q^n$ є нескінченно малою.

Приклад 8. Послідовність $((-1)^n n)$ є збіжною в $\overline{\mathbb{R}}_0$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty$.

Приклад 9. Послідовність $((-1)^n n)$ є розбіжною в $\overline{\mathbb{R}}$.

1.2.4. Основні теореми про границі.

Теорема 1 [2, 4]. Границя суми двох послідовностей дорівнює сумі границь, якщо останні існують в \mathbb{R} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (1)$$

Теорема 2 [2, 4]. Границя добутку двох послідовностей дорівнює добутку границь, якщо останні існують в \mathbb{R} :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (2)$$

Наслідок 1. Сталу можна виносити за знак границі, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ для кожної сталої $c \in \mathbb{R}$, якщо остання границя існує.

Теорема 3 [2, 4]. Границя частки двох послідовностей дорівнює частці границь, якщо останні існують в \mathbb{R} і границя знаменника не дорівнює нулеві:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}. \quad (3)$$

Зауваження 1. Якщо принаймні одна з границь $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ є нескінченною або не існує, то теореми 1-3, взагалі кажучи, не можна застосувати. До нескінченних границь їх можна застосувати тільки у випадку, коли при цьому не виникають невизначені вирази $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 1^∞ , 0^0 і інші.

Приклад 1. Якщо $x_n = (-1)^n$ і $y_n = (-1)^{n+1}$, то $x_n + y_n = 0$ і тому $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$, але цю границю не можна знайти за формулою (1), бо границі $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ не існують.

Приклад 2. Якщо $x_n = (-1)^n$ і $y_n = (-1)^{n+1}$, то $x_n y_n = -1$ і тому $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -1$, але цю границю не можна знайти за формулою (2), бо границі $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ не існують.

Приклад 3. Якщо $x_n = (-1)^n$ і $y_n = 1/n$, то $(x_n y_n)$ є нескінченно малою послідовністю як добуток обмеженої і нескінченно малої. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$. Але останню границю не можна знайти за формулою (2), бо границя $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ не існує.

$$\text{Приклад 4. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + 2}{\frac{2}{n^2} + 4} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + 2 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n^2} + 4 \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 4} = \frac{0 + 2}{0 + 4} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Приклад 5. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32}{3} \left(\frac{3}{4} \right)^n = \frac{32}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0.$$

$$\text{Приклад 6. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4}{2 + 4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2} + 4} = \frac{3}{4}.$$

$$\text{Приклад 7. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^4}{n^5 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^5}} = 0.$$

$$\text{Приклад 8. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 1}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5}} = \infty.$$

Зауваження 2. В прикладах 6-8 потрібно було знайти границю частки двох нескінченно великих послідовностей, тобто ми мали невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$ в кожному із цих прикладів. Разом з цим, в кожному з них одержали іншу відповідь. Крім того, в кожному з прикладів 6-8 теореми 1-3 не можна було використовувати, бо була невизначеність. Проте, ми змогли скористатись цими теоремами, зробивши спочатку певні перетворення. Подібним чином поступають часто при знаходженні границь. Взагалі, знаходження кожної границі доцільно починати зі з'ясування наявності невизначеності та її типу.

$$\text{Приклад 9. } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0, \text{ бо для } n \geq 4$$

$$0 \leq \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4} = \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^{n-3}} \leq \frac{32}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Приклад 10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$, якщо існує $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і всі $x_n \geq 0$. Крім того, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}|$, якщо остання границя існує.

Приклад 11.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+2n}{1+3n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{3+1/n}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Приклад 12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ для кожного $a \in (0; +\infty)$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\delta_n} = 1$ для кожного $a \in (0; +\infty)$ і для кожної нескінченно малої послідовності (δ_n) раціональних чисел.

Приклад 13.
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + n^2 + 1} = 1, \text{ бо}$$

$$1 \leq \sqrt[n]{n^4 + n^2 + 1} \leq \sqrt[n]{3n^4} = \sqrt[3]{3} \left(\sqrt[n]{n}\right)^4, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{n}\right)^4 = 1.$$

1.2.5. Границя монотонної послідовності. Теорема Вейєрштрасса та Больцано-Вейєрштрасса.

Послідовність (x_n) називається *неспадною*, якщо $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq x_{n+1}$. Таким чином, послідовність (x_n) є *неспадною*, якщо кожний її наступний член є не меншим за попередній. Послідовність (x_n) називається *обмеженою зверху*, якщо $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq K$. Таким чином, послідовність (x_n) є *обмеженою зверху*, якщо всі її члени не перевищують деякого числа K , незалежного від n .

Теорема 1 (Вейєрштрасса) [2, 4]. *Якщо послідовність (x_n) є неспадною і обмеженою зверху, то вона має скінченну границю. Якщо послідовність (x_n) є неспадною і необмеженою зверху, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$.*

Наслідок 1. *Якщо послідовність (x_n) є неспадною, то вона є збіжною в $\overline{\mathbb{R}}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.*

Послідовність (x_n) називається *незростаючою*, якщо $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \geq x_{n+1}$. Послідовність (x_n) називається *обмеженою знизу*, якщо $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \geq K$.

Теорема 2 [2, 4]. *Якщо послідовність (x_n) є незростаючою і обмеженою знизу, то вона має скінченну границю. Якщо послідовність*

(x_n) є незростаючою і необмеженою знизу, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$.

Наслідок 2. Якщо послідовність (x_n) є незростаючою, то вона є збіжною в $\overline{\mathbb{R}}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Послідовність (x_n) називається монотонною, якщо вона є неспадною або незростаючою.

Наслідок 3. Якщо послідовність (x_n) є монотонною, то вона є збіжною в $\overline{\mathbb{R}}$.

Наслідок 4. Якщо послідовність (x_n) є монотонною і обмеженою, то вона є збіжною в \mathbb{R} .

Послідовність (x_n) називається зростаючою, якщо $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < x_{n+1}$.

Послідовність (x_n) називається спадною, якщо $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n > x_{n+1}$.

Приклад 1. Якщо $x_n = 2n + (-1)^n$, то

$$x_{n+1} - x_n = 2(n+1) + (-1)^{n+1} - 2n - (-1)^n = 2 + (-1)^{n+1} - (-1)^n \geq 0.$$

Тому послідовність (x_n) є неспадною. Вона є обмеженою знизу, бо всі $x_n \geq 0$. Вона є необмеженою зверху, бо всі $x_n \geq 2n - 1$.

Приклад 2. Якщо $x_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+2^n}$, то $x_n \leq x_{n+1}$ і

$$x_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1. \quad \text{Тому розглядувана}$$

послідовність (x_n) є неспадною і обмеженою зверху. Отже, є збіжною в \mathbb{R} .

Приклад 3. Нехай $x_n = \frac{2^n}{n!}$. Тоді $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1$,

$x_{n+1} \leq x_n$ і $0 \leq x_n$, тобто послідовність (x_n) є незростаючою і обмеженою знизу. Крім цього, $x_{n+1} = x_n \frac{2}{n+1}$. Отже, послідовність (x_n)

має скінченну границю a і $a = a \cdot 0$. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Приклад 4. Якщо послідовність (x_n) є неспадною і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq a$.

Не кожна обмежена послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність $x_n = (-1)^n$ є обмеженою, але границі не має. Разом з цим, справедлива наступна теорема.

Теорема 3 (Больцано-Вейєрштрасса) [2, 4]. Для кожної обмеженої послідовності існує її збіжна підпослідовність.

Теорема 4. Для кожної послідовності існує її збіжна в $\bar{\mathbb{R}}_0$ підпослідовність.

Приклад 5. Послідовність $x_n = (-1)^n + 1/n$ є обмеженою, бо $(\forall n \in \mathbb{N}) : |x_n| \leq 2$. Її збіжними підпослідовностями є, зокрема, такі:

$$x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}, \quad x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}, \quad x_{4k+3} = -1 + \frac{1}{4k+3}.$$

1.2.6. Число e . Число e визначається так:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

Теорема 1 [2, 4]. Границя (1) існує в \mathbb{R} .

Наслідок 1. $2 \leq e \leq 4$.

Зауваження 1. Можна переконатись, що число e є ірраціональним і $e \approx 2.71828\dots$

Приклад 1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{1+n}\right)^3 = \frac{1}{e}.$

Приклад 2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}.$

Приклад 3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{n}\right)^n = e^k, \quad k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 2.$

Приклад 4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e,$ де (p_n) – послідовність

натуральних чисел таких, що $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = +\infty$.

$$\text{Приклад 5. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^{n+3} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} \right)^n}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n} \cdot \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^3 = \frac{e^2}{e^{-1}} = e^3.$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 6. } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2+1} \right)^{\frac{n-1}{n+1}} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n^2+1} \right)^{-(n^2+1) \frac{1-n}{(n^2+1)(n+1)}} = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2+1}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Приклад 7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+3n} \right)^n = 0$. Справді, $\frac{n}{1+3n} \leq \frac{n}{3n} \leq \frac{1}{3}$. Тому

$$0 \leq \left(\frac{n}{1+3n} \right)^n \leq \left(\frac{1}{3} \right)^n \rightarrow 0.$$

Приклад 8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1+n} \right)^n = +\infty$. Справді,

$$\frac{2^n}{1+n} \geq \frac{2^n}{2n} \geq \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{2n} = \frac{n-1}{4} \geq 2, \quad n \geq 9.$$

Тому $\left(\frac{2^n}{1+n} \right)^n \geq 2^n \rightarrow +\infty$.

Приклад 9 [2, 4]. Послідовність $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$ є неспадною і

обмеженою зверху.

1.2.7. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення ε -околу точки $a \in \mathbb{R}$.
2. Напишіть ε -окіл точки 2, якщо $\varepsilon = 0,1$.
3. Сформулюйте означення проколеного ε -околу точки $a \in \mathbb{R}$.
4. Напишіть проколений ε -окіл точки -3 , якщо $\varepsilon = 0,01$.
5. Сформулюйте означення ε -околу точки $a = +\infty$.
6. Напишіть ε -окіл точки $+\infty$, якщо $\varepsilon = 10$.
7. Сформулюйте означення проколеного ε -околу точки $a = +\infty$.
8. Сформулюйте означення ε -околу точки $a = -\infty$.
9. Сформулюйте означення проколеного ε -околу точки $a = -\infty$.

10. Сформулюйте означення ε -околу точки $a = \infty$.
11. Сформулюйте означення проколеного ε -околу точки $a = \infty$.
12. Напишіть проколений ε -окіл точки ∞ , якщо $\varepsilon = 100$.
13. Які з рівностей: 1) $\frac{0}{0} = 1$; 2) $\frac{1}{0} = \infty$; 3) $\frac{2}{\infty} = 0$; 4) $\frac{\infty}{\infty} = 1$; 5) $0 \cdot \infty = 0$;
6) $1 \cdot \infty = \infty$; 7) $\infty - \infty = 0$, є правильними в $\overline{\mathbb{R}}_0$?
14. Сформулюйте означення послідовності.
15. Сформулюйте означення границі послідовності на мові околів.
16. Сформулюйте означення збіжної в \mathbb{R} послідовності.
17. Сформулюйте означення сталої послідовності.
18. Сформулюйте теорему про границю сталої послідовності.
19. Наведіть приклад необмеженої послідовності, яка має скінченну часткову границю.
20. Наведіть приклади розбіжних послідовностей (x_n) і (y_n) , для яких послідовності $(x_n + y_n)$ та $(x_n \cdot y_n)$ є збіжними.
21. Відомо, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$. Чому дорівнює $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2} + x_{n-1})$?
22. Сформулюйте означення обмеженої послідовності.
23. Сформулюйте означення нескінченно малої послідовності.
24. Сформулюйте означення нескінченно великої послідовності.
25. Сформулюйте означення неспадної послідовності.
26. Сформулюйте означення обмеженої зверху послідовності.
27. Сформулюйте означення необмеженої зверху послідовності.
28. Сформулюйте означення обмеженої знизу послідовності.
29. Сформулюйте означення необмеженої знизу послідовності.
30. Сформулюйте означення незростаючої послідовності.
31. Сформулюйте означення зростаючої послідовності.
32. Сформулюйте означення спадної послідовності.
33. Сформулюйте означення монотонної послідовності.
34. Сформулюйте теорему про обмеженість збіжної послідовності.
35. Сформулюйте теорему про єдиність границі послідовності.
36. Сформулюйте теорему про підпослідовність збіжної послідовності.
37. Сформулюйте теорему про граничний перехід в нерівностях.
38. Сформулюйте теорему про нескінченно малі послідовності.
39. Сформулюйте теорему про границю неспадної послідовності.
40. Завершіть написання формули $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = i$ і обґрунтуйте її.
41. Завершіть написання формули $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = i$ і обґрунтуйте її.
42. Сформулюйте означення числа e і обґрунтуйте його існування.

43. Завершіть написання формули $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ і обґрунтуйте її.

44. Сформулюйте теорему Больцано-Вейерштрасса.

1.2.8. Вправи і задачі.

1. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n}}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{1 + 4n^2}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n}{n^3 + 9n^2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n}{n^2 + 9n^3}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2n^2}{2n + 2}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 4}{2n^3 + 1}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{2n^2 + 1}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2 + 4}{n^3 + 1}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3n}{n^4 + 1}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{n+4}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2 + 4n + 1}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-1)!}{n! - (n-1)!}$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n!n + (n-1)!}$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + 2}$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 1}}{\sqrt{4n^2 + 1}}$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 5}}{8n^2 + 3}$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2}}{1 + 3n^3}$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 + (n-1)^4}{n^4 + 1}$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (2n-1)^4}{(2n+1)^3}$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{n^3 + 1}$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{(n+1)^3 - (n-1)^3}$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n}{1 + 100n^3}$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{(n+1)^4}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 - (n-1)^2}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$$

2. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (0,2)^n}{2 + (0,3)^n}.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{2^n + 5^n}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{n^2 + 2n + 4}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 2^k}{4 \cdot 2^n + 3}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (4k+1)}{k^2 + 3}.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^{2n+3} + (-1)^{n+1}}{(-1)^n + 9^n}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 2^{k-1}}{\sum_{k=1}^n 3^{k-1}}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-0,2)^n}{2 - (0,3)^n}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0,8)^n + 2}{(-0,3)^n + 3}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^n} + (\sqrt{5})^n}{(\sqrt{2})^n + \sqrt{5^n}}.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (3k-1)}{n^2 + 1}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+5)}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (5k+7)}{2k^2 + 1}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+1} + (-1)^n}{(-1)^{n+1} + (-2)^{2n+3}}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-4)^k}{\sum_{k=1}^n 3^k}.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-0,8)^n + 2}{(-0,3)^n - 3}.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{2 + 4n^2}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n + (-1)^n}{(-1)^n + 9^n}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3^k + 2^k}{6^k}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + (\sqrt{5})^n}{2^n + (\sqrt{5})^n}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{7}{k^2 + k - 2}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k+1)(k-1)k}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+1} + (-1)^n}{(-1)^{n+1} + (-4)^n}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3^{-2k} (1 + 4^k).$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}^n - (-\sqrt{5})^n}{(\sqrt{2})^n + \sqrt{3}^n}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{9k^2 + 3k - 2}.$$

3. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{-4n}$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-2n+1}$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-3}$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n - 1}{3^n + 1}\right)^{3^n - 2}$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n+5}$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{1-2n}\right)^{2n-5}$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{4n-1}\right)^{-n}$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-1}{4n}\right)^{-n}$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 - 1}{n^3}\right)^{-2n^3 - 1}$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 - 4n - 2}{n^2 - 4n - 1}\right)^{n^2 - 4n}$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n}\right)^{-4n}$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{-2n+1}$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-3}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n - 1}{3^n} \right)^{3^n - 2}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1} \right)^{n+5}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{1+2n} \right)^{2n-5}.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{4n+1} \right)^n.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+1}{2n} \right)^n.$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3 + 1}{n^3} \right)^{2n^3 - 1}.$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 4n + 2}{n^2 + 4n + 1} \right)^{n^2 + 4n}.$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{2n} \right)^{2n}.$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{2n}.$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^{-n+3}.$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3^n + 1}{3^n} \right)^{3^n + 2}.$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n-5}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{1+2n} \right)^{-2n+5}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{2n+1} \right)^n.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+1}{n} \right)^{2n}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{n^2 + 1}.$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 3n + 2}{n^2 + 3n + 1} \right)^{n^2 + 3n + 1}.$$

1.2.9. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} + \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 1} \right).$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin n}{n} + \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{2n^2 + n} \right).$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cos n}{n^2 + 1} + \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{3n+1} \right).$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{2n^2 + 2} + \frac{3n^2 + n}{1 + n^2} \right).$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \sin n!}{n^2 + 1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2 + (-2)^n}{3 + 3^n} + \frac{\sqrt[3]{3} \sin \frac{n^3}{n+1}}{n+1} \right)$$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^3 + 3} \cos(2n)! + \frac{n\sqrt{2} + 1}{n^2 + n} \right)$.
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n}{n+1} \right)^{3n} + \frac{(n+1)^4}{2n^4 + 2} \right)$.
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{3n+1}{3n} \right)^{3n+1} + \frac{(3n+1)^5}{n^6 + 2} \right)$.
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{4n}{4n+1} \right)^{4n+5} + \frac{2n^5 + 1}{(n+1)^5} \right)$.
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{4^n + 1}{4^n} \right)^{4^n + 3} + \frac{(2n+1)^{10}}{(n+1)^{10}} \right)$.
12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{5^n}{5^n + 1} \right)^{5^n + 2} + \frac{2n\sqrt[8]{2} + 1}{(n+1)^3} \right)$.
13. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} + \frac{\sqrt[4]{4} \sin n}{(2n+1)^4} \right)$.
14. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + e^n}{4^n - 3^n} \sin n! + \frac{\sqrt[4]{3}}{(3n+1)^2} \right)$.
15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + (-3)^n}{1 + 4^n} \cos n! + \frac{\sqrt[4]{2n}}{2n+1} \right)$.
16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1 + (0,3)^n}{1 + (0,4)^n} + \frac{\sqrt[4]{2} \sin n^2}{n^2 + 1} \right)$.
17. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n \cos n}{n^2 + 1} + \frac{(2n-1)^4}{n^5 + 3} \right)$.
18. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^\pi + n^\pi}$.
19. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2 + 1}$.
20. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sqrt[n]{2 + n^2}$.
21. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{4^n - 3^n} (-1)^{n+1} + \frac{\sqrt[4]{3}}{(3n+1)^2} \right)$.
22. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$.
23. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \sin \sqrt{n}$.
24. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{n+1} \cdot \cos \sqrt{n}$.
25. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 3n}$.
26. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n!}{n!}$.
27. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left((\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}) n^{2/3} + \frac{\sqrt[4]{3}}{n+1} \right)$.
28. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} (1 + 1/n)^{n+1}$.
29. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n} + \sqrt[n]{n} \frac{2 + \sqrt{n}}{n+1} \right)$.
30. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n(-1)^n - 2}{n+4} + \frac{n^3(-1)^n}{n^5 + \sqrt{3}} \right)$.

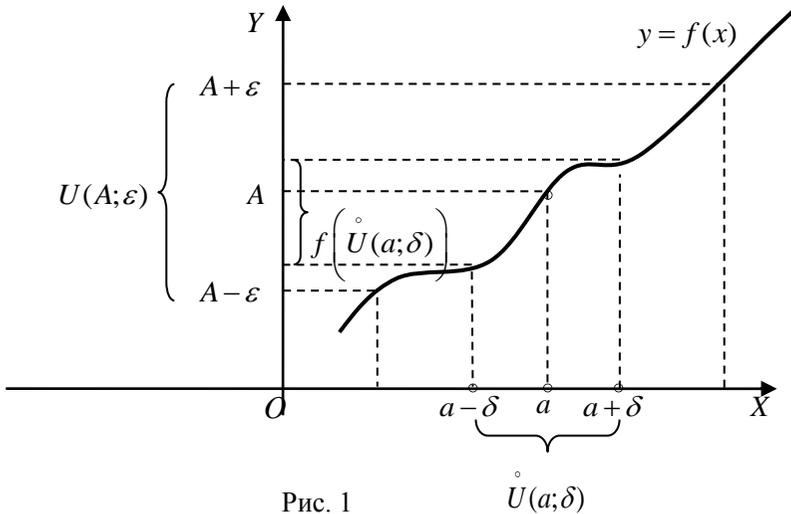
1.3. Границя функції в \mathbb{R}

В цьому підрозділі вивчаються основні властивості границі функції в \mathbb{R} . Це поняття є одним з основних в математичному аналізі.

1.3.1. Границя функції. Границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ або при $x \rightarrow a$ називається таке число $A \in \mathbb{R}$, що [2, 4]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

З означення границі випливає, що значення функції в точці a не впливає на границю, бо вона з розгляду виключається (на це вказано в нерівності $0 < |x - a| < \delta$). Докладніше це означення можна сформулювати в наступній формі. Границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ називається [2, 4] таке число $A \in \mathbb{R}$, що для кожного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, яке може залежати від ε , що для всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $0 < |x - a| < \delta$ виконується $|f(x) - A| < \varepsilon$. Це означення границі функції називають означенням границі на мові “ $\varepsilon - \delta$ ” (або означенням Коші).



Якщо число $A \in \mathbb{R}$ є границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$, то це позначають одним з символів:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \quad \lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow a} f(x) = A, \quad f(x) \rightarrow A, \quad x \rightarrow a,$$

$$f(x) \rightarrow A, \quad \mathbb{R} \ni x \rightarrow a, \quad f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A.$$

Означення границі функції можна сформулювати і в наступній еквівалентній формі (на мові околів). Число $A \in \mathbb{R}$ називається границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо для будь-якого ε -околу $U(A; \varepsilon)$

точки $A \in \mathbb{R}$ знайдеться [2, 4] такий проколений δ -окіл $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$ точки a , образ якого належить $U(A; \varepsilon)$, тобто $f\left(\overset{\circ}{U}(a; \delta)\right) \subset U(A; \varepsilon)$.

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *сталюю* на множині H , якщо існує таке число $C \in \mathbb{R}$, що $f(x) = C$ для всіх $x \in H$.

Теорема 1 [2, 4]. *Границя сталої дорівнює цій же сталій, тобто $\lim_{x \rightarrow a} C = C$.*

Приклад 1. $\lim_{x \rightarrow a} x = a$. *Справді, потрібно показати, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - a| < \delta$ виконується $|x - a| < \varepsilon$. Але це так, бо можна взяти $\delta = \varepsilon$ і тоді $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta) : |x - a| < \varepsilon$.*

Приклад 2. Нехай $f(x) = 2x$. Тоді $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. *Справді, потрібно показати, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для всіх x , які задовольняють нерівність $0 < |x - 1| < \delta$ виконується $|2x - 2| < \varepsilon$. Але це так, бо можна взяти $\delta = \varepsilon/2$ і тоді*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon/2 > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta) : |2x - 2| < \varepsilon.$$

Приклад 3. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$. *Справді, потрібно показати, що $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - 2| < \delta) : |x^2 - 4| < \varepsilon$. Розглянемо останню нерівність. Її можна переписати так $|x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$. Підберемо для кожного $\varepsilon > 0$ відповідне $\delta > 0$. Можемо вважати, що $\delta \leq 1$. Тоді, якщо $|x - 2| < \delta$, то $|x| \leq 2 + \delta \leq 3$. Тому нерівність $|x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$ буде виконуватись, якщо $|x - 2| \cdot 5 < \varepsilon$. Бачимо, що $|x^2 - 4| < \varepsilon$, якщо $|x - 2| < \varepsilon/5$. Таким чином, можна взяти $\delta = \min\{1; \varepsilon/5\}$. Отже,*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \min\{1; \varepsilon/5\} > 0)(\forall x, 0 < |x - 2| < \delta) : |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

Приклад 4. $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$ для довільного $a \in \mathbb{R}$.

Приклад 5. $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$ для довільного $a \in \mathbb{R}$, бо $||x| - |a|| \leq |x - a|$.

Приклад 6. Нехай $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$ (рис. 2). Тоді

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, бо $f(x) = 2x$, якщо $x \neq 1$.

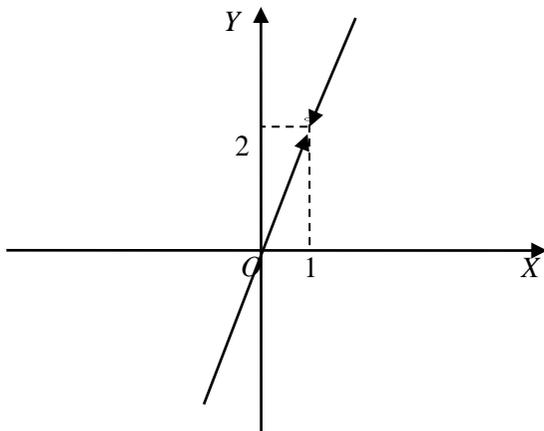


Рис. 2

Теорема 2 [2, 4]. Число $A \in \mathbb{R}$ є границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ тоді й тільки тоді, коли для кожної послідовності (x_n) такої, що $x_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Теорема 1 дає можливість сформулювати ще одне означення границі функції (означення границі функції на мові послідовностей або означення границі функції за Гейне), яке є еквівалентним раніше розглянутому.

Число $A \in \mathbb{R}$ називають [2, 4] границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо для будь-якої послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $x_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Приклад 7. $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ не існує. Справді, якщо $x_n = \frac{1}{\pi n}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Якщо ж $x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1.$$

Отже, за означенням границі на мові послідовності дана границя не існує.

1.3.2. Перша важлива (визначна) границя. Властивості функції, яка має границю в точці.

Правильна наступна теорема [2, 4].

Теорема 1 (перша важлива границя).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Приклад 1. $(\forall x \in (0; \pi/2)) : \sin x < x < \operatorname{tg} x$ і $(\forall x \in \mathbb{R}) : |\sin x| \leq |x|$.

Приклад 2. $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ для кожного $a \in \mathbb{R}$. Справді,

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}.$$

Тому $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|$ і

нерівність $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$ буде виконуватись, якщо $|x-a| < \varepsilon$. Таким чином, $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta) : |\sin x - \sin a| < \varepsilon$.

Функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається обмеженою при $x \rightarrow a$, якщо вона є обмеженою в деякому проколеному околі точки a , тобто якщо

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x-a| < \delta) : |f(x)| \leq K.$$

Теорема 2 [2, 4]. Якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має границю в точці a , то вона є обмеженою при $x \rightarrow a$.

Приклад 3. Оскільки $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, то функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ є

обмеженою в деякому проколеному околі $U^0(0; \delta)$ точки 0 . Якщо $x \notin U^0(0; \delta)$, то $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\delta}$. Тому функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ є обмеженою на множині $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. До того ж висновку приходимо використовуючи нерівність $|\sin x| \leq |x|$.

Теорема 3 [2, 4]. Функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ може мати не більше однієї границі.

Теорема 4 [2, 4]. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$ і для всіх x з деякого проколеного околу точки a виконується $f_1(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x)$, то $\lim_{x \rightarrow a} f_3(x) = A$.

Теорема 5 [2, 4]. Якщо існують границі $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1$, $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$ і для всіх x з деякого проколеного околу точки a виконується $f_1(x) \leq f_2(x)$, то $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$.

Теорема 6 [2, 4]. Якщо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ і $A > B$, то знайдеться такий проколений окіл точки a , що для всіх точок з цього околу виконується $f(x) > B$.

Приклад 4. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$. Справді, $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ і $0 \leq x^2 \leq |x|$, якщо $x \in [-1; 1]$.

1.3.3. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Нескінченні границі. Функція $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається нескінченно малою в точці a або при $x \rightarrow a$, якщо $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$, тобто якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta): |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Функція $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається обмеженою в точці a або при $x \rightarrow a$, якщо $(\exists K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta): |\beta(x)| \leq K$.

Теорема 1 [2, 4]. Число $A \in \mathbb{R}$ є границею функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ тоді й тільки тоді, коли функція f подається у вигляді $f(x) = A + \alpha(x)$, де $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, яка є нескінченно малою при $x \rightarrow a$.

Приклад 1. $\frac{\sin x}{x} = 1 + \alpha(x)$, де α – нескінченно мала функція при $x \rightarrow a$.

Теорема 2 [2, 4]. Сума двох нескінченно малих функцій при $x \rightarrow a$ є функція нескінченно мала при $x \rightarrow a$.

Теорема 3 [2, 4]. Добуток обмеженої і нескінченно малої при $x \rightarrow a$ функцій є функція нескінченно мала при $x \rightarrow a$.

Наслідок 1. Добуток двох нескінченно малих при $x \rightarrow a$ функцій є функція нескінченно мала при $x \rightarrow a$.

Приклад 2. $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. Справді, функція $\alpha(x) = x$ є нескінченно малою при $x \rightarrow 0$, а функція $\beta(x) = \sin \frac{1}{x}$ є обмеженою при $x \rightarrow 0$.

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$ називається нескінченно великою в точці

$a \in \mathbb{R}$ або при $x \rightarrow a$, якщо [2, 4]

$$(\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x)| > E.$$

Теорема 4 [2, 4]. Функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0$ є нескінченно великою при $x \rightarrow a$ тоді й тільки тоді, коли функція $\alpha = 1/f$ є нескінченно малою при $x \rightarrow a$.

Якщо функція f є нескінченно великою при $x \rightarrow a$, то це записують так: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Приклад 3. Функція $f(x) = 1/x$ є нескінченно великою при $x \rightarrow 0$, бо функція $\alpha(x) = 1/f(x) = x$ є нескінченно малою при $x \rightarrow 0$.

Точка ∞ називається *границею* (пишуть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$) функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}_0$ в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо вона є нескінченно великою в точці $a \in \mathbb{R}$. Точка $+\infty$ називається *границею* (пишуть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$) функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо [2, 4]

$$(\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : f(x) > E.$$

Точка $-\infty$ називається *границею* (пишуть $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$) функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо [2, 4]

$$(\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : f(x) < -E.$$

Приклад 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$.

1.3.4. Теорема про границі функцій. Однобічні границі.

Теорема 1 [2, 4]. Границя суми двох функцій дорівнює сумі границь, якщо останні існують в \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

Теорема 2 [2, 4]. Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь, якщо останні існують в \mathbb{R} :

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x).$$

Наслідок 1. Стало можна виносити за знак границі, тобто для кожної сталої $c \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

якщо остання границя існує.

Теорема 3 [2, 4]. Границя частки двох функцій дорівнює частці границь, якщо останні існують в \mathbb{R} і границя знаменника не дорівнює

нулеві:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}.$$

Приклад 1. $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$ для кожного $a \in \mathbb{R}$. Справді,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a = a^2.$$

Приклад 2. $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = A^2$ для кожного $a \in \mathbb{R}$, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A. \text{ Справді,}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A^2.$$

Приклад 3. $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ для кожного $a \in \mathbb{R}$ і для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Справді, для $n=1$ дане твердження правильне. Припустимо, що воно справджується для $n=k$, тобто $\lim_{x \rightarrow a} x^k = a^k$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} x^{k+1} = \lim_{x \rightarrow a} (x x^k) = \lim_{x \rightarrow a} x \lim_{x \rightarrow a} x^k = a a^k = a^{k+1},$$

і за принципом математичної індукції отримуємо потрібний висновок.

Зауваження 1. Якщо принаймні одна з границь $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$ і

$\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ є нескінченною або не існує, то теореми 1-3, взагалі кажучи,

не можна застосувати. До нескінченних границь їх можна застосувати тільки у випадку, коли при цьому не виникають невизначені вирази $\frac{0}{0}$,

$\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 1^∞ , 0^0 і інші. Взагалі, знаходження кожної

границі доцільно починати зі з'ясування наявності невизначеності та її типу.

Число $A \in \mathbb{R}$ називається *правою границею* (пишуть

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A) \text{ функції } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ в точці } a \in \mathbb{R}, \text{ якщо [2, 4]}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, a < x < a + \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Використовуються також для позначення $A = f(a+0)$, $A = f(a+)$,

$A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ та інші. Число $A \in \mathbb{R}$ називається *лівою границею* (пишуть

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A) \text{ функції } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ в точці } a \in \mathbb{R}, \text{ якщо [2, 4]}$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, a - \delta < x < a) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Використовуються також позначення $A = f(a-0)$, $A = f(a-)$, $A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ та інші.

Теорема 4 [2, 4]. Для того щоб існувала границя $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$.

Теорема 5 [2, 4]. Для того щоб існувала границя $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $x_n > a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, виконувалось $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Теорема 6 [2, 4]. Для того щоб існувала границя $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $a < x_n$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, виконувалось $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Приклад 4. Нехай (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ x-1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Тоді $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$ і $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$.

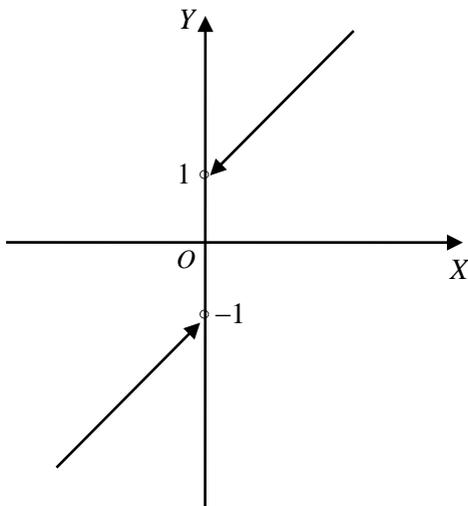


Рис. 1

1.3.5. Границя в ∞ . Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею* (пишуть $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$) функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в ∞ або при $x \rightarrow \infty$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, |x| > \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею* (пишуть $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$) функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в $+\infty$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x > \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$.

Число $A \in \mathbb{R}$ називається *границею* (пишуть $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$) функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в $-\infty$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x < -\delta): |f(x) - A| < \varepsilon$.

Теорема 1 [2, 4]. Для того щоб існувала границя $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$.

Теорема 2 [2, 4]. Для того щоб існувала границя $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$, виконувалось $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Теорема 3 [2, 4]. Для того щоб існувала границя $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$, виконувалось $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Теорема 4 [2, 4]. Для того щоб існувала границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$, необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$, виконувалось $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Приклад 1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2} = 0$. Справді, потрібно показати, що $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x, x > \delta): 1/x^2 < \varepsilon$. Оскільки $x^2 \geq x$, якщо $x \geq 1$, то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \max\{1/\varepsilon; 1\})(\forall x, x > \delta): 1/x^2 < \varepsilon.$$

Приклад 2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$, якщо $a \in (1; +\infty)$. Справді, потрібно показати, що $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x > \delta): a^x > \varepsilon$. Оскільки $a^x > \varepsilon$, якщо $x > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$, то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = (\ln a)^{-1} \ln \varepsilon)(\forall x, x > \delta): a^x > \varepsilon.$$

Приклад 3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$, якщо $a \in (0;1)$. Справді, потрібно показати, що $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x, x > \delta): a^x < \varepsilon$. Оскільки $a^x < \varepsilon$, якщо $x > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$, то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = (\ln a)^{-1} \ln \varepsilon)(\forall x, x > \delta): |a^x| < \varepsilon.$$

Приклад 4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = 0$, якщо $a \in (1; +\infty)$.

Приклад 5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = +\infty$, якщо $a \in (0;1)$.

Приклад 6. $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x$ не існує, якщо $a \in (1; +\infty)$, бо $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ і $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

Приклад 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x$ не існує, якщо $a \in (0;1)$, бо $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ і $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$.

Приклад 8. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x^2}\right)^x = 0$. Справді, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{2+x^2} = 0$. Отже,

$$\frac{1+x}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad x > \delta.$$

Тому

$$0 \leq \left(\frac{1+x}{2+x^2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Приклад 9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x = +\infty$. Справді, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+|x|}{2+x^2} = 0$.

Отже,

$$\frac{1+|x|}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad x < -\delta.$$

Тому

$$\left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

Приклад 10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2} \right)^x$ не існує, бо $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2} \right)^x = 0$ і

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2} \right)^x = +\infty.$$

1.3.6. Границя композиції функцій.

Теорема 1 [2, 4]. Якщо $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ і для кожного

$\sigma > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $\varphi(U(\alpha; \delta)) \subset U(a; \sigma)$, то $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = A$, тобто $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Приклад 1. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, бо $\varphi(t) = 2t \rightarrow 0$, якщо $t \rightarrow 0$.

Приклад 2. $\lim_{t \rightarrow a} \sin 2t = \lim_{x \rightarrow 2a} \sin x = \sin 2a$ для кожного $a \in \mathbb{R}$, бо $\varphi(t) := 2t \rightarrow 2a$, якщо $t \rightarrow a$ і $\lim_{x \rightarrow 2a} \sin x = \sin 2a$.

Приклад 3. Для кожного $a \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{t \rightarrow a} \cos t = \lim_{t \rightarrow a} \sin(-t + \pi/2) = \lim_{x \rightarrow -a + \pi/2} \sin x = \sin(-a + \pi/2) = \cos a.$$

Приклад 4.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1.$$

Приклад 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2 \left(\frac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Зауваження 1 [2, 4]. Далі ми покажемо, що $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ для

кожної основної елементарної функції f і для кожної точки x_0 , яка належить довільному відкритому проміжку з області визначення функції f (для функцій $f(x) = x^n$, $f(x) = \sin x$ та $f(x) = \cos x$ це вже доведено вище) і дослідимо поведінку цих функцій на кінцях відповідних проміжків. В результаті переконаємось в справедливості наступних рівностей:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\mu = x_0^\mu, \mu \in \mathbb{R}, x_0 \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = 0, \mu \in (-\infty; 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = +\infty, \mu \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, a \in (0; +\infty), x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, a \in (1; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, a \in (0; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0, a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}, x_0 \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, a \in (1; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, a \in (0; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{tg} x = -\infty, x_0 = \pi k + \pi/2, k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{ctg} x = -\infty, x_0 = \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, x_0 \in (-1; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \arcsin x = \arcsin x_0, \lim_{x \rightarrow x_0^-} \arccos x = \arccos x_0, x_0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \arcsin x = \arcsin x_0, \lim_{x \rightarrow x_0^+} \arccos x = \arccos x_0, x_0 = -1,$$

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0, x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2, \lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi, \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0.$$

Приклад 6.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 27.$$

Приклад 7.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x+2)} = \frac{1}{8\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Приклад 8.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{4}{x}} = \sqrt{3}.$$

1.3.7. Друга важлива (визначна) границя.

Теорема 1 [2, 4]. *Існують границі:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad \lim_{t \rightarrow 0} (1+t)^{1/t} = e.$$

Приклад 1.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e}.$$

Приклад 2.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e.$$

Приклад 3.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{1 + x^2}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(\left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{-1} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}} \right)^2 = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}} \right)^2} = \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

Зауваження 1. Далі ми покажемо, що $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$, якщо функція f є основною елементарною, існує $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a \in D(f)$ (якщо a не належить жодному відкритому проміжку з $D(f)$, то границі потрібно замінити відповідними однобічними границями). Зокрема, за відповідних умов [2, 4]

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \alpha} (\varphi(t))^\mu &= \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)^\mu, & \lim_{t \rightarrow \alpha} a^{\varphi(t)} &= a^{\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)}, \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} \log_a \varphi(t) &= \log_a \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), & \lim_{t \rightarrow \alpha} \sin \varphi(t) &= \sin \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} \cos \varphi(t) &= \cos \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), & \lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi(t) &= \operatorname{tg} \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{ctg} \varphi(t) &= \operatorname{ctg} \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), & \lim_{t \rightarrow \alpha} \arcsin \varphi(t) &= \arcsin \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} \arccos \varphi(t) &= \arccos \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), & \lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{arctg} \varphi(t) &= \operatorname{arctg} \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{arcctg} \varphi(t) &= \operatorname{arcctg} \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \\ \lim_{t \rightarrow \alpha} (u(t))^{v(t)} &= \lim_{t \rightarrow \alpha} e^{v(t) \ln u(t)} = \\ &= e^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t) \ln u(t)} = e^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t) \ln \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t)\right)} = \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t)\right)^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t)}. \end{aligned}$$

Наслідок 1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

Справді, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1$.

Наслідок 2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Справді, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$.

Наслідок 3. $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a$, $a > 0$.

Справді, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \ln a} - 1}{t \ln a} \ln a = \ln a$.

Наслідок 4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu, \mu \in \mathbb{R}.$

Справді, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{\mu \ln(1+x)} \cdot \frac{\mu \ln(1+x)}{x} \right) = \mu.$

Приклад 4.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2. \end{aligned}$$

Приклад 5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{2\sin x} - 1}{2\sin x} \cdot \frac{2\sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2\sin x} - 1}{2\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin x}{x} = 2.$$

Приклад 6.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - (1+x)^{\sqrt{2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left((1+x)^2 - 1 \right) - \left((1+x)^{\sqrt{2}} - 1 \right)}{x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}} - 1}{x} = 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

Приклад 7.

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$$

Приклад 8.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^{(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} x^{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-1)} = 2^3 = 8.$$

Приклад 9.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + (\cos x - 1) \right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(1 + (\cos x - 1) \right)^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

Приклад 10.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{2}.$$

1.3.8. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення границі функції.
2. Сформулюйте означення границі функції на мові околів.
3. Сформулюйте означення границі функції на мові послідовностей.
4. Сформулюйте теорему про еквівалентність означення границі функції на мові " $\varepsilon - \delta$ " і на мові послідовностей.
5. Сформулюйте теорему про першу важливу границю.
6. Сформулюйте теорему про єдиність границі функції.
7. Сформулюйте означення функції, обмеженої в деякому проколеному околі точки $a \in \mathbb{R}$.
8. Сформулюйте теорему про обмеженість функції, яка має границю.
9. Сформулюйте теореми про перехід до границі в нерівностях (для функцій в \mathbb{R}).
10. Сформулюйте означення нескінченно малої функції.
11. Сформулюйте означення нескінченно великої функції.
12. Сформулюйте теореми про нескінченно малі функції.
13. Сформулюйте теорему про границю суми.
14. Сформулюйте теорему про границю добутку.
15. Сформулюйте теорему про границю частки.
16. Сформулюйте означення правої границі.
17. Сформулюйте означення лівої границі.
18. Сформулюйте теорему про однобічні границі.
19. Сформулюйте теорему про другу визначну границю.
20. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$ і $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
21. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ не існує і $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$.
22. Завершіть написання формули $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ і обґрунтуйте її.
23. Завершіть написання формули: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$.
24. Завершіть написання формули: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ і обґрунтуйте її.
25. Завершіть написання формули: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$ і обґрунтуйте її.

26. Завершіть написання формули: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} =$ і обґрунтуйте її.
27. Сформулюйте теорему про існування границі монотонної функції.
28. Сформулюйте критерій Коші існування границі функції.
29. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$,
 $A \in \mathbb{R}$.
30. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
31. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$,
 $A \in \mathbb{R}$.
32. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$,
 $A \in \mathbb{R}$.
33. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$,
 $a \in \mathbb{R}$.
34. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$,
 $a \in \mathbb{R}$.
35. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
36. На мові "ε-δ" сформулюйте означення границі $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.

1.3.9. Вправи і задачі.

1. Знайдіть границю:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}$. | 2. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}$. |
| 3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}$. | 4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$. |
| 5. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 5x + 6}$. | 6. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27}$. |
| 7. $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{27x^3 + 1}$. | 8. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}$. |
| 9. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}$. | 10. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{x^3 - 27}$. |
| 11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}$. | 12. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}$. |

13. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}$.

15. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}$.

17. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}$.

19. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}$.

21. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{20} - 1}{t^{40} - 1}$.

23. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}$.

25. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}$.

27. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{11} - 1}{y - 1}$.

29. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 4x^2 + 3x}{x^3 - 3x + 2}$.

14. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}$.

16. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 5x - 2}$.

18. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 1}$.

20. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 13x + 4}{x^2 - x - 12}$.

22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + 9x - 10}$.

24. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 17x + 15}{x^2 - 6x - 27}$.

26. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 2x + 1)^2}$.

28. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{40} - 1}{t^{80} - 1}$.

30. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x - 1}{x^4 - 2x^2 - x}$.

2. Знайдіть границю:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}$.

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 5x^3 + 100x^2}{10x^2 + 3x^3 - x}$.

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 8x^5}{1000x + 7x^5}$.

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{11x^3 + 3x^2 + 5}{2x^2 - 2x + 1}$.

9. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 + 9}$.

11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 7x + 9}{x^4 - 2 - 5x^5}$.

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}$.

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{2 + 3x^2 + x^5}$.

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1}$.

8. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{7x^3 + 3x^2 + 5}{x^2 + 7x + 1}$.

10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 9}{x^5 - 10x^2 + 7}$.

12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 7x^9}{x^4 + 8x^9}$.

$$13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^9 - 100x^{11}}{10000x^9 - 0,1x}$$

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x}{3x + 2x^2}$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^8 - 9x^7 + 1}{x + x^2}$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^3 - x^5}{2x + x^2 + x^4}$$

$$23. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - x^3 - x^{10}}{2x^9 + 1}$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x + x^2 + 1}{x^4 + x}$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3x^3 - x^7}{2x + 3x^2 - 2x^4}$$

$$29. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x^3 - x^{10}}{x - x^2 - 2x^{11}}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 2x^3}{4 + x^2}$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x^3 + x}{x + 81x^2}$$

$$18. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^3 + 20}{x^2 + 3x^3 + 1}$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^5}{100x - 0,1x^2}$$

$$22. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^3 + x^9}{2x + 3x^3 + 2x^8}$$

$$24. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 4x^3 - x^{10}}{2x^2 + x^3 + 1}$$

$$26. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 + 4x^8 + 1}{2x^8 + x^3 + 4}$$

$$28. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2x^2 + 4x^9}{1 + 3x^3 - 2x^8}$$

$$30. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 1 - 4x^9}{1 + x^3 - 2x^{10}}$$

3. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}}{x}$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+16} - 4}$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$$

$$4. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - 1}$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{2x^2}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{\sqrt{x} - 3}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x^2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{3x^2 + x^3}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 1}{3x^2 + x^3}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{6x+1} - 5}.$$

4. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{3x^3}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{4x^2}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x \sin x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right).$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos^3 x - 2}{5x^2}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{\operatorname{tg} x - \sin x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2(x+1)}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^2 x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{1 - \cos x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x + \sin^2 x}{x^2}.$$

5. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x+1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x+5}{5x+1} \right)^{5x+2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x-1}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x-1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x-1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x+4} \right)^{2x+5}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x-1}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2-3x}{5-3x} \right)^{x+1}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2+x}{-1+x} \right)^{x+2}.$$

13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-2+x}{2+x} \right)^{2x-1}$.

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$.

15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}$.

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{-5x+3}$.

17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{2x+1}$.

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-9}{x} \right)^{3x+1}$.

19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3+3x} \right)^{2x+1}$.

20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+5x}{5+5x} \right)^{1-x}$.

21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+9}{2+2x} \right)^{x+3}$.

22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^4+9}{2+x^4} \right)^{x^2+3}$.

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\sqrt{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}}$.

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{x}{1+x^2} \right)^{1/x}$.

25. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$.

26. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$.

27. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-2x)^{\frac{1}{x}+1}$.

28. $\lim_{x \rightarrow 0} (1-x)^{\frac{1}{2x}-1}$.

29. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+3x)^{\frac{1}{x}+2}$.

30. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{2}{x}-2}$.

1.3.10. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть границю:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^6 - x^3}{x^3 + x} \right)$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - x^8}{x^6 + 2x^3} \right)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right)$.

4. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x+1} \right)$.

5. $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x-2} - \frac{1-x^2+2x}{x^2-4} \right)$.

6. $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2+x}{x^2-1} - \frac{x^2-x}{x-1} \right)$.

7. $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^n - 1}{t^m - 1}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.

8. $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{10} - 1}{y - 1}$.

9. $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y}, n \in \mathbb{N}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+x^2+\dots+x^n-n}{x-1}, n \in \mathbb{N}$.

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right)$.
12. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^3 - 1}{x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x^4}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2}{x^6 + 2x^3} - \frac{x-2}{x^2} \right)$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}$.
18. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}$.
19. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^5 + 1}$.
20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^7 - 1}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$.
24. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - 2x + 1}{-x^2 + x + 2}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$.
26. $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$.
27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.
28. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$.
29. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$.
30. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^3 - x}$.

2. Знайдіть границю:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^5 - 13x^2 + 7}{4x^5 - x^2 + 1}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x^4 + x^3 + 1}{x^4 - 2x^2 - x + 2}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^4 + x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + x + 2}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x^3 - x^7 + 2x}{2x^8 + x^7 - 2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x^6 + 1}{-3x^6 - 2x^8 + x + 1}$.
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 31x^4 + 1}{-2x^3 + x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + x}{100x^3 + x + 200}$.

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^6 - 3x^4 + 1}{2x^2 - x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - x^4 + 10}{x^3 + x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^6 - x^4 + 1}{x^5 - 10x^2}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x+3}{x+1} \right)^{x+1}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+9}{x} \right)^{2x+2}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2-5x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+9}{x} \right)^{2x+2}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{x+1} \right)^{2-5x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-3}{x-1} \right)^{\frac{\sqrt{1-x}-1}{2x}}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4 + x}{100x^3 + x + 200}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x^6 + x}{-4x^4 + x^2 + 2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^7 + 3x^2}{3x^3 + 2x^2 + 1}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{2+2x} \right)^{-x+2}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+2x^2}{3x^2} \right)^{-x^4}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{3x-1}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{1+2x} \right)^{-x+1}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-3}{2x+1} \right)^{3x-1}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+3}{1+2x} \right)^{-x+1}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{1+x} \right)^{2\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}}.$$

3. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} x \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow -8} 3 \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt{x} - 4)\sqrt{x}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt{x} - 4)}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 2} 3 \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1} \sqrt{2x} \right).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{2x}\sqrt{x^2-4}}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}.$$

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+2x)^{3/2} - 1)\sqrt{1+3x}}{((1+3x)^{3/2} - 1)\sqrt{1+2x}}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x^2} - 1)\sqrt{1+x}}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)\sqrt{4+x}}$.
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x})$.
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})$.
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 4}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 - 1}}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 6} + |x|}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{2x(x-1)}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - 1}$.
18. $\lim_{x \rightarrow 0} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$.
19. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$.
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{(x^3 + x^2)\sqrt{4+x}}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x-1} + 2}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} + 3}{\sqrt{x-1} + \sqrt{2}}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{2}}{x-2}, n \in \mathbb{N}$.
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 - x^4} + 1}{\sqrt{x^4 - 10x^2}}$.
26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x^2}}{x^2 + 2x + 1}$.
27. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{x} - 3} + \frac{x}{x^2 - 3} \right)$.
28. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2 - 3} \right)$.
29. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1})$.
30. $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$.

4. Знайдіть границю:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{4x\sqrt{1+2x}}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 6x}{\sin 2x}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x \sin x)}{x^2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x/2)}{1 - \sqrt{x}}$.

$$7. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sin 2\pi x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x \right).$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 \cos x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{1 - \sqrt{\cos x}}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^2 \sqrt{4 - 2x}}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(\operatorname{tg} x - 1) \sin x}{x - \pi/4}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 1} (1 - x) \sqrt{4x} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} - 2 \cos x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 3x}{\operatorname{tg} 5x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^2 x \cos x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2 \sqrt{x + 1}}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2 \sqrt{9 + 2x}}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{4x - \pi}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{x \cos x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 + \cos 2x}}{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2}}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\sin 2x} - \sqrt{\sin x}}{\cos x - 1}.$$

5. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1) \cos \pi x}{3^{x-1} - \sqrt{x}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{x-1} - \ln x}{x^3 - 1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 1}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2^{x-1} - \ln x}.$$

5. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{x^2 - 16}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{10^x - 100}{x^3 - 8}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x) - \log_3(1+x)}{x}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2^2(1 + \sqrt[3]{x})}{\log_3^3(1 + \sqrt{x})}$.
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln^2(x+1) - \ln^2 x)$.
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2\sqrt{-x})^{2\sqrt{2}} - 1}{x - \sqrt{-x}}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x}{(1 + 3x)^{\sqrt{3}} - 1}$.
13. $\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x}{(4 + \sqrt{-x})^{\sqrt{3}} - 1}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5-x)^{2\sqrt{2}} - 1}{(x-4)\sqrt{6-x}}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1 + \sqrt{x}} - \sqrt[4]{1 + 2x}}{x + \sqrt{x}}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{-x} - 1}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\sqrt{1+2x}}{(1 + \sin x)^{\sqrt{2}} - 1}$.
18. $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{x + \ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}$.
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x}(\ln(x+1) - \ln x)$.
20. $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - 1}{(1 + 2 \sin x)^{\sqrt{2}} - 1}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\sqrt{2}}{\ln \cos 2x}$.
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x^2$.
24. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$.
25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1} \right) x$.
26. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sqrt{x} - 1}$.
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}$.
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}$.
29. $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}$.
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 2}{\ln(1 + 2x)}$.

1.4. Неперервність функцій в \mathbb{R}

Поняття неперервності функції є математичною моделлю інтуїтивних уявлень про неперервність часу, потоку води, телефонної лінії і т.д. Природні явища описуються певними функціями. Якщо якесь явище відбувається неперервно, то не відбувається різких змін. Тому дослідження неперервності функцій має важливе практичне значення. Разом з цим, неперервність функції дає можливість обґрунтувати існування розв'язків відповідних рівнянь, що має також важливе теоретичне значення.

1.4.1. Неперервність функції в точці. Неперервність суми, добутку і частки. Граничний перехід під знаком неперервної функції. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *неперервною в точці* $a \in \mathbb{R}$, якщо

$$\lim_{D(f) \ni x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$
 Докладніше умову неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

в точці $a \in \mathbb{R}$ можна виразити у вигляді трьох умов [2, 4]: 1) функція повинна бути визначеною в деякому околі точки a ; 2) в точці a вона повинна мати скінченну границю; 3) ця границя повинна дорівнювати значенню функції в точці a .

Як і означення границі, означення неперервності можна сформулювати в наступних еквівалентних формах [2, 4]: на мові " $\varepsilon - \delta$ ", на мові околів, на мові послідовностей, на мові приростів (еквівалентність цих означень впливає безпосередньо з відповідних теорем про границі).

Означення неперервності на мові " $\varepsilon - \delta$ ". Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D(f), |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Означення неперервності на мові околів. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо для кожного ε -околу $U(f(a); \varepsilon)$ точки $f(a)$ знайдеться такий δ -оکیل $U(a; \delta)$ точки a , образ якого належить $U(f(a); \varepsilon)$, тобто $f(U(a; \delta)) \subset U(f(a); \varepsilon)$.

Означення неперервності на мові послідовностей. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо для будь-якої послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.

Означення неперервності на мові приростів. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст

функції, тобто $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0$, де $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$ – приріст функції в точці a .

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка не є неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$, називається *розривною* в цій в точці.

Приклад 1. Якщо $f(x) = x^2$, то

$$\Delta f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Приклад 2. Стала функція $f(x) = C$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$, бо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} C = C = f(a)$.

Приклад 3. Функція $f(x) = x$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$, бо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a)$.

Приклад 4. Функція $f(x) = x^2$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$, бо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 = f(a)$.

Приклад 5. Для кожного $n \in \mathbb{N}$ функція $f(x) = x^n$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$, бо $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n = f(a)$.

Приклад 6. Функція $f(x) = \sin x$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$. Справді, $\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}$. Тому

$$|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|$$

і нерівність $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$ буде виконуватись, якщо $|x-a| < \varepsilon$. Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta) : |\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

тобто $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Приклад 7. Функція $f(x) = |x|$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$. Справді, $\left| |x| - |a| \right| \leq |x-a|$ і $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a| = f(a)$.

Зауваження 1 [2, 4]. Усі основні елементарні функції є неперервними в кожній точці своєї області визначення.

Теорема 1 [2, 4]. Якщо функції $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними в точці a , то в цій точці є неперервними також функції $f_1 + f_2$ і $f_1 f_2$. Якщо, крім цього, $f_2(a) \neq 0$, то функція f_1/f_2 також є неперервною в точці a .

Приклад 8. Функція $f(x) = x \sin x$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$ як добуток двох неперервних функцій.

Приклад 9. Функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ як частка двох неперервних функцій.

Приклад 10. Функції $f_1(x) = \sin x - \operatorname{sgn} x$ і $f_2(x) = \operatorname{sgn} x$ не є неперервними в точці $a = 0$, але їхня сума є функцією, неперервною в цій точці.

Нагадаємо, що композицією функцій $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається функція $F = f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, визначена формулою $F(t) = f(\varphi(t))$. Композицію двох функцій називають інколи складеною функцією.

Теорема 2 [2, 4]. Якщо функція $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в точці $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha) = a$ і функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$, то функція $F(t) = f(\varphi(t))$ є неперервною в α .

Приклад 11. Функція $F(t) = \sin t^2$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$, бо $F(t) = f(\varphi(t))$, де $f(x) = \sin x$ і $\varphi(t) = t^2$ – неперервні функції.

Приклад 12. Функція $F(t) = \cos t$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$, бо $F(t) = f(\varphi(t))$, де $f(x) = \sin x$ і $\varphi(t) = -t + \pi/2$ – неперервні функції.

Теорема 3 [2, 4]. Якщо існує $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a \in \mathbb{R}$ і функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в точці a , то $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$.

Приклад 13. Функція $f(x) = \sin x$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R}$. Тому $\lim_{t \rightarrow \alpha} \sin(\varphi(t)) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$, якщо існує $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a \in \mathbb{R}$.

$$\text{Приклад 14. } \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x} \right) = \sin \left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}} \right) \right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

1.4.2. Однобічна неперервність. Точки розриву та їх класифікація. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$ зліва, якщо $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a)$, тобто якщо $f(a-) = f(a)$. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$ справа, якщо $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a)$, тобто якщо $f(a+) = f(a)$.

Теорема 1 [2, 4]. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$ тоді й тільки тоді, коли вона є неперервною в цій точці зліва і справа, тобто щоб $f(a-) = f(a+) = f(a)$.

Точка $a \in \mathbb{R}$, в якій функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ не є неперервною, називається *точкою розриву* функції f . Якщо існують скінченні границі $f(a-) := \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$ і $f(a+) := \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$, то точка $a \in \mathbb{R}$ розриву функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *точкою розриву першого роду*. При цьому, число $f(a+) - f(a-)$ називається *стрибком функції* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$. Точка $a \in \mathbb{R}$ розриву першого роду, для якої $f(a+) = f(a-)$, є *точкою усувного розриву*. Останній термін пов'язаний з тим, що приписавши в точці a функції f значення $f(a) = f(a+) = f(a-)$, отримаємо функцію, неперервну в точці a , тобто розрив можна усунути. Таким чином [2, 4], функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має *усувний розрив* в точці $a \in \mathbb{R}$ тоді і тільки тоді, коли існує $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$ (точка a може належати області визначення функції, а може і не належати). Точка розриву функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка не є точкою розриву першого роду, називається *точкою розриву другого роду*.

Приклад 1. Функція $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ є неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, оскільки є часткою двох всюди неперервних функцій. В точці $a = 0$ функція не є визначеною, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, і має в цій точці усувний розрив, бо $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, тобто $f(0+) = f(0-) = 1$. Якщо прийняти $f(0) = 1$, то одержимо функцію, неперервну в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

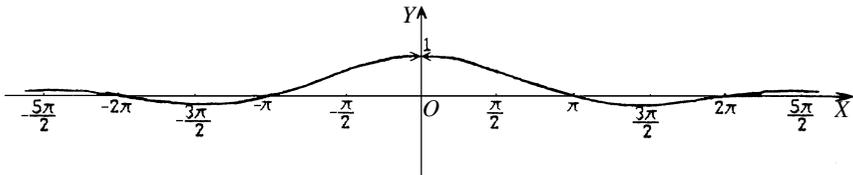


Рис. 1

Приклад 2. Функція $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x-1}, & \text{якщо } x \neq 1, \\ 3, & \text{якщо } x = 1, \end{cases}$ є

неперервною в кожній точці $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. В точці $a=1$ функція має усувний розрив, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, бо $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \neq 3 = f(1)$, тобто $f(1^-) = f(1^+) \neq f(1)$. Якщо змінити значення функції в точці $a=1$, прийнявши $f(1)=2$, то одержимо функцію, неперервну в кожній точці $a \in \mathbb{R}$.

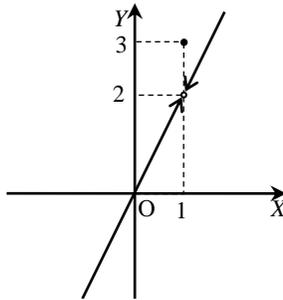


Рис. 2

Приклад 3. Функція $f(x) = \operatorname{tg} x$ є неперервною в усіх точках $a_k \neq k\pi + \pi/2$, як частка двох всюди неперервних функцій. В кожній точці $a_k = k\pi + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$, має розрив другого роду, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, бо $\lim_{x \rightarrow a_k^-} \operatorname{tg} x = +\infty$ і $\lim_{x \rightarrow a_k^+} \operatorname{tg} x = -\infty$. Цій функції не можна приписати в точках a_k певних значень так, щоб вона стала неперервною в цих точках.

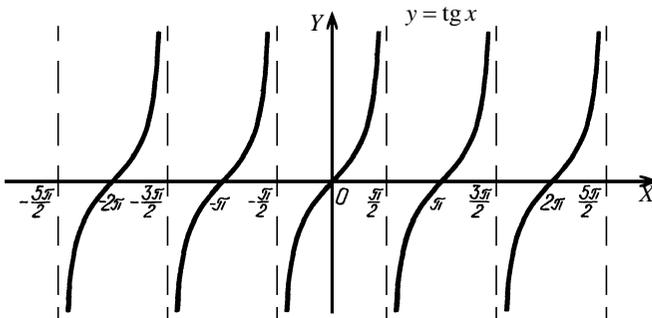


Рис. 3

Приклад 4. Функція $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ є неперервною в усіх точках $a \neq 0$, як композиція неперервних функцій. В точці $a=0$ функція має розрив другого роду, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, бо границі $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$ і $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$ не існують. Цій функції не можна приписати в точці $a=0$ певного значення так, щоб вона стала неперервною в ній.

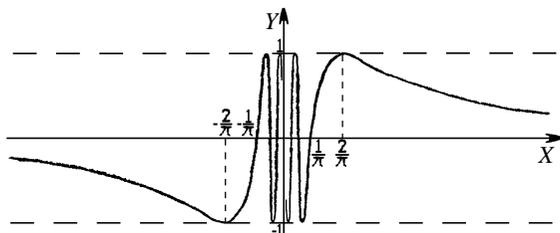


Рис. 4

Приклад 5. Функція $f(x) = \ln x$, як функція з \mathbb{R} в \mathbb{R} , має розриви другого роду в кожній точці проміжку $(-\infty; 0]$ і є неперервною, в чому переконуємось згодом, в кожній точці проміжку $(0; +\infty)$.

Приклад 6. Функція $f(x) = \arcsin x$, як функція з \mathbb{R} в \mathbb{R} , має розриви другого роду в кожній точці проміжку $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ і є неперервною, в чому переконуємось згодом, в кожній точці проміжку $(-1; 1)$.

1.4.3. Точна верхня межа функції. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається обмеженою на множині H , якщо $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H): |f(x)| \leq K$. Точною верхньою межею функції f на множині $H \subset D(f)$ називається [2, 4] точна верхня межа множини значень звуження f_H функції f на множину H , тобто це точна верхня межа множини $\{f(x): x \in H\}$. Точна верхня межа функції f на множині H позначається так $M_0(f; H) = \sup\{f(x): x \in H\}$ або так $M_0(f; H) = \sup\{f(x)\}$. Найбільшим значенням функції f на множині H називається найбільший елемент множини $\{f(x): x \in H\}$. Найбільше значення функції f на множині H позначається так: $M(f; H) = \max\{f(x)\}$ або так $M(f; H) = \max\{f(x): x \in H\}$. Якщо функція f приймає найбільше значення на множині H , то

$M(f; H) = M_0(f; H)$. Кажуть, що функція f досягає на множині H своєї точної верхньої межі [2, 4] або приймає найбільше значення, якщо $(\exists x_0 \in H) : f(x_0) = M_0(f; H)$, тобто якщо $M(f; H) = M_0(f; H)$. Аналогічно визначається *точна нижня межа* і *найменше значення* функції f на множині H . Це є відповідно точна нижня межа і найменший елемент множини $\{f(x) : x \in H\}$. Вони позначаються відповідно так $m_0(f; H) = \inf\{f(x) : x \in H\}$ і $m(f; H) = \min\{f(x) : x \in H\}$.

Приклад 1. Якщо $f(x) = x^2$ і $H = [-1; 1]$, то $M_0(f; H) = M(f; H) = 1 = f(-1) = f(1)$ і $m_0(f; H) = m(f; H) = 0 = f(0)$, тобто точна верхня межа цієї функції на множині $H = [-1; 1]$ досягається в точках $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$, а точна нижня межа – в точці $x_3 = 0$.

Приклад 2. Якщо $f(x) = x^2$ і $H = [-\infty; +\infty]$, то $m_0(f; H) = m(f; H) = 0 = f(0)$, $\max_{x \in H}\{f(x)\}$ не існує, $\sup_{x \in H}\{f(x)\} = +\infty$ і функція f не досягає своєї точної верхньої межі на цій множині.

1.4.4. Неперервність функцій на множині. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку. Функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ називається *неперервною на проміжку $(a; b)$* , якщо вона є неперервною в кожній точці цього проміжку. Функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається *неперервною на замкненому проміжку $[a; b]$* , якщо вона є неперервною в кожній точці проміжку $(a; b)$, неперервною в точці a справа і неперервною в точці b зліва. Функція $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ називається *неперервною на множині H* , якщо вона є неперервною в кожній точці множини H за множиною H . Для $H = (a; b)$ і $H = [a; b]$ останнє означення співпадає з вище наведеними.

Приклад 1. Функція $f(x) = [x]$ є неперервною на проміжку $(0; 1)$, є неперервною на проміжку $[0; 1)$, але не є неперервною на проміжку $[0; 1]$.

Приклад 2. Функція $f(x) = \begin{cases} 2, & x = 4, \\ x^2, & x \in [0; 1], \end{cases}$ є неперервною на множині $H = [0; 1] \cup \{4\}$.

Теорема 1 (перша теорема Вейєрштрасса) [2, 4]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкненому проміжку $[a; b]$, то вона є обмеженою на ньому.

Приклад 3. Функція $f(x) = 1/x$ є неперервною на відкритому проміжку $(0; 1)$, але не є обмеженою на ньому. Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі 1, є істотною.

Теорема 2 (друга теорема Вейєрштрасса) [2, 4]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкненому проміжку $[a; b]$, то вона досягає на цьому проміжку своїєї точної верхньої і точної нижньої меж, тобто

$$\begin{aligned} (\exists x_0 \in [a; b]) : \max\{f(x) : x \in [a; b]\} &= \sup\{f(x) : x \in [a; b]\} = f(x_0), \\ (\exists x_1 \in [a; b]) : \min\{f(x) : x \in [a; b]\} &= \inf\{f(x) : x \in [a; b]\} = f(x_1). \end{aligned}$$

Приклад 4. Функція $f(x) = 1/x$ є неперервною на відкритому проміжку $(0; 1)$, але не досягає на цьому проміжку своїєї точної верхньої межі. Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі 2, є істотною.

Приклад 5. Функція $f(x) = -\frac{1}{1-x^2}$ є неперервною на відкритому проміжку $(-1; 1)$ і не є неперервною на замкненому проміжку $[-1; 1]$, але приймає на проміжку $(-1; 1)$ найбільше значення в точці 0, але не досягає на $(-1; 1)$ своїєї точної нижньої межі.

Приклад 6. Функція $f(x) = \begin{cases} -2, & x = 0, \\ [x], & x \in (0; 1), \\ 3, & x = 1, \end{cases}$ не є неперервною на

замкненому проміжку $[-1; 1]$, але досягає на $[-1; 1]$ своїєї точної нижньої і точної верхньої меж.

Теорема 3 (перша теорема Больцано-Коші) [2, 4]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкненому проміжку $[a; b]$ і на кінцях цього проміжку приймає значення протилежних знаків, то $(\exists c \in (a; b)) : f(c) = 0$.

Теорему 3 інакше можна сформулювати так. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкненому проміжку $[a; b]$ і на його кінцях приймає значення протилежних знаків, то її графік принаймні один раз перетинає вісь OX в точці, яка належить проміжку $(a; b)$, тобто рівняння $f(x) = 0$ має принаймні один корінь на проміжку $(a; b)$.

Наслідок 1. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкненому проміжку $[a;b]$ і на кінцях цього проміжку приймає значення протилежних знаків, то рівняння $f(x)=0$ на проміжку $(a;b)$ має принаймні один корінь.

Наслідок 2. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і строго монотонною на замкненому проміжку $[a;b]$ і на кінцях цього проміжку приймає значення протилежних знаків, то рівняння $f(x)=0$ на проміжку $(a;b)$ має єдиний корінь.

Приклад 7. Функція $f(x)=x^2+3$ є неперервною на замкненому проміжку $[1;3]$, проте $f(x) \neq 0$ для всіх $x \in [1;3]$. Тому вимога, щоб функція на кінцях проміжку приймала значення протилежних знаків, в теоремі 3 є істотною.

Приклад 8. Функція $f(x)=x^2-4$ є неперервною на замкненому проміжку $[-4;4]$, на його кінцях приймає значення одного знаку і має два нулі на цьому проміжку. Тому вимога, щоб функція на кінцях проміжку приймала значення протилежних знаків, в теоремі 3 не є необхідною.

Приклад 9. Функція $f(x) = \begin{cases} -2, & x < 0, \\ 3, & x \geq 0, \end{cases}$ на кінцях замкненого проміжку $[-1;1]$ приймає значення протилежних знаків і не має нулів на цьому проміжку. Тому вимога, щоб функція була неперервною, в теоремі 3 є істотною.

Приклад 10. Функція $f(x) = \begin{cases} 2, & x = 1, \\ (x-2)^2, & x \in (1;4) \\ 3, & x = 4, \end{cases}$ на кінцях замкненого проміжку $[1;4]$ приймає значення одного знаку, не є неперервною і має один нуль на цьому проміжку. Тому вимога, щоб функція була неперервною, в теоремі 3 не є необхідною.

Приклад 11. Функція $f(x)=x^5+x-1$ є неперервною на проміжку $[-2;1]$, $f(-2) < 0$ і $f(1) > 0$. Тому рівняння $x^5+x-1=0$ має принаймні один розв'язок, який належить проміжку $[-2;1]$.

Приклад 12. Функція $f(x)=\sin x$ на проміжку $[-\pi/2;5\pi/2]$ задовольняє всі умови теоремі 3 і має на вказаному проміжку три нулі. Тому за виконання умов теоремі 3 точок c , про існування яких говориться в теоремі 3, може бути декілька.

Теорема 4 (друга теорема Больцано-Коші) [2, 4]. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкнутому проміжку $[a;b]$, то для будь-якого D , що лежить між $f(a)$ і $f(b)$ знайдеться така точка $c \in [a;b]$, що $f(c) = D$.

Наслідок 3. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкнутому проміжку $[a;b]$, то $f([a;b]) = [m;M]$, де $M = \max\{f(x): x \in [a;b]\}$ і $m = \min\{f(x): x \in [a;b]\}$.

Наслідок 4. Якщо функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і строго монотонною на проміжку $(a;b)$, то $f((a;b)) = (m_0;M_0)$, де $M_0 = \sup\{f(x): x \in (a;b)\}$ і $m_0 = \inf\{f(x): x \in (a;b)\}$.

Наслідок 5. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є зростаючою на проміжку $[a;b]$, то $f((a;b)) = (m;M_0)$, де $M_0 = \sup\{f(x): x \in (a;b)\}$ і $m = \min\{f(x): x \in [a;b]\}$.

Приклад 13. Число 2,5 лежить між $f(-1) = -1$ і $f(3) = 3$, якщо $f(x) = [x]$. Проте $f(x) \neq 2,5$ для всіх $x \in [-1;3]$. Тому вимога неперервності функції в теоремі 4 є істотною.

Приклад 14. Якщо $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2, \end{cases}$ то для будь-якого D , що лежить між $f(-3)$ і $f(4)$ знайдеться точка $c \in [-3;4]$, що $f(c) = D$. Тому вимога, щоб функція була неперервною, в теоремі 3 не є необхідною.

Приклад 15. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкнутому проміжку $[a;b]$ і $f([a;b]) \subset [a;b]$, то рівняння $f(x) = x$ має принаймні один корінь на проміжку $[a;b]$.

Наслідок 6. Якщо функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $(a;b)$ і $\{x_k: k \in \overline{1;n}\}$, $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$, – множина її нулів, то на кожному проміжку $(x_k; x_{k+1})$, $k \in \overline{0;n}$, функція f приймає значення одного знаку (додатні або від'ємні), де $x_0 = a$ і $x_{n+1} = b$.

На наслідку 6 базується метод проміжків розв'язування нерівностей.

Приклад 16. Функція $f(x) = \frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1}$ є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і має нулі в точках $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ та $x_3 = 2$. Згідно з наслідком 6 на кожному з проміжків $(-\infty; -3)$, $(-3; 0)$, $(0; 2)$ та

$(2; +\infty)$ функція зберігає знак. Оскільки $f(-4) > 0$, $f(-2) < 0$, $f(1) > 0$ і $f(3) > 0$, то розв'язком нерівності $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1} > 0$ є множина $(-\infty; -3) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$, а розв'язком нерівності $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1} < 0$ є множина $(-3; 0)$.

1.4.5. Оборнена функція. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *оборотною*, якщо для кожного $y \in E(f)$ рівняння $f(x) = y$ має єдиний розв'язок $x \in D(f)$, тобто якщо образами різних точок $x \in D(f)$, є різні точки $y \in E(f)$. Можна також сказати, що функція f називається *оборотною* [2, 4], якщо з рівності $f(x_1) = f(x_2)$ випливає, що $x_1 = x_2$. Оборненою до оборотної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається така функція $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $D(f^{-1}) = E(f)$ і образом кожного $y \in D(f^{-1})$ є таке $x \in D(f)$, для якого $f(x) = y$. З означення випливає [2, 4], що $D(f^{-1}) = E(f)$, $E(f^{-1}) = D(f)$ і $(\forall x \in D(f)): f^{-1}(f(x)) = x$, $(\forall y \in D(f^{-1})): f(f^{-1}(y)) = y$. Зауваживши, що точки $(x_0; y_0)$ і $(y_0; x_0)$ є симетричними відносно прямої $y = x$ переконуємось, що графіки функцій $y = f(x)$ і $y = f^{-1}(x)$ є також симетричними відносно цієї ж прямої. Якщо функція задана формулою $y = f(x)$, то щоб знайти формулу $y = f^{-1}(x)$, яка задає оборнену функцію, потрібно з формули $y = f(x)$ виразити x через y , а потім x і y поміняти місцями. Разом з цим, не кожна функція має оборнену. Тому природним є питання про існування оборненої функції та її неперервність.

Приклад 1. Якщо $y = 2x - 1$, то $x = \frac{1}{2}(y + 1)$ і формула $y = \frac{1}{2}(x + 1)$ задає оборнену функцію до функції $y = 2x - 1$.

Приклад 2. Функція $y = x^2$ не має оборненої, бо не є оборотною. Проте, звуження цієї функції на проміжок $[0; +\infty)$ має оборнену і нею є функція $y = \sqrt{x}$. Звуження функції $y = x^2$ на проміжок $(-\infty; 0]$ має оборнену функцію і нею є функція $y = -\sqrt{x}$.

Приклад 3. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є зростаючою, то вона є оборотною. Справді, якщо $x_1 < x_2$, то $f(x_1) < f(x_2)$ і тому $f(x_1) \neq f(x_2)$, якщо $x_1 \neq x_2$.

Приклад 4. Якщо існує функція $f^{-1}: E(f) \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $(\forall x \in D(f)): f^{-1}(f(x)) = x$, то функція f є оборотною. Справді, якщо $f(x_1) = f(x_2)$, то $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$, тобто $x_1 = x_2$.

Приклад 5. Функція $f(x) = \operatorname{sh} x$, тобто функція $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, є зростаючою на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тому є оборотною. Для знаходження оберненої функції маємо рівняння $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$, з якого знаходимо $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$. Отже, функція $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ є оберненою до функції $f(x) = \operatorname{sh} x$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Для позначення цієї функції використовується позначення $\operatorname{arsh} x$. Отже, $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$.

Приклад 6. Функція $f(x) = \operatorname{ch} x$, тобто функція $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ не є оборотною. Проте розглянемо рівняння $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$. Воно має два розв'язки $x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$ і $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$. Функція $y = \operatorname{arch}_+ x$, де $\operatorname{arch}_+ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$, є оберненою до функції $y = \operatorname{ch} x$, розглядуваної на проміжку $[0; +\infty)$, а функція $y = \operatorname{arch}_- x$, де $\operatorname{arch}_- x = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$, є оберненою до функції $y = \operatorname{ch} x$, розглядуваної на проміжку $(-\infty; 0]$.

Теорема 1 [2, 4]. Якщо функція $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і строго монотонною на проміжку $(a; b)$, то вона має обернену функцію $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, область визначення якої є проміжок $(\alpha; \beta)$, де $\alpha = \inf\{f(x): x \in (a; b)\}$ і $\beta = \sup\{f(x): x \in (a; b)\}$. На $(\alpha; \beta)$ обернена

функція є неперервною. Обидві функції f і f^{-1} є одночасно зростаючими або спадними.

Наслідок 1. Якщо функція $f : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і строго монотонною на проміжку $(a;b)$, то рівняння $f(y) = x$ має розв'язок $y \in (a;b)$ для тих і тільки тих x , які належать проміжку $(\alpha;\beta)$, і для кожного $x \in (\alpha;\beta)$ існує єдиний розв'язок цього рівняння і ним є $y = f^{-1}(x)$, де $\alpha = \inf\{f(x) : x \in (a;b)\}$ і $\beta = \sup\{f(x) : x \in (a;b)\}$.

Теорема 2 [2, 4]. Якщо функція $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і строго монотонною на проміжку $[a;b]$, то вона має обернену функцію $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, область визначення якої є замкнений проміжок $[c;d]$ з кінцями в точках $f(a)$ і $f(b)$. На цьому проміжку функція f^{-1} є строго монотонною і неперервною. Обидві функції f і f^{-1} є одночасно зростаючими або спадними.

Наслідок 2. Якщо функція $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і строго монотонною на проміжку $[a;b]$, то рівняння $f(y) = x$ має розв'язок $y \in [a;b]$ для тих і тільки тих x , які належать проміжку $[c;d]$ з кінцями в точках $f(a)$ і $f(b)$, і для кожного $x \in [c;d]$ існує єдиний розв'язок цього рівняння і ним є $y = f^{-1}(x)$.

Приклад 7. Стала функція $f(x) = C$ є неспадною і не є оборотною. Тому вимога строгої монотонності функції в останніх двох теоремах є істотною.

Зауваження 1. Оборотні і тільки оборотні функції мають обернену. Якщо функція $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є оберненою до функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є оберненою до функції $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1.4.6. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора. Означення неперервності функції $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a;b]$ можна сформулювати так. Функція $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається неперервною на проміжку $[a;b]$, якщо [2, 4]

$$(\forall \tilde{x} \in [a;b])(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a;b], |x - \tilde{x}| < \delta) : |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon. \quad (1)$$

В цьому означенні δ може залежати від \tilde{x} і ε . Функція $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається рівномірно неперервною на $[a;b]$, якщо [2, 4]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \{x, \tilde{x}\} \subset [a;b], |x - \tilde{x}| < \delta) : |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon. \quad (2)$$

Істотна різниця між (1) і (2) в тому, що в (2) δ не залежить від \tilde{x} . Таким чином, кожна рівномірно неперервна функція є неперервною на $[a; b]$. Наступна теорема показує, що справедливе і обернене твердження.

Теорема 1 (Кантора) [2, 4]. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на замкненому проміжку $[a; b]$, то вона є рівномірно неперервною на $[a; b]$.

Приклад 1. Функція $f(x) = x^2$ є неперервною на проміжку $[0; 1]$. Тому згідно з теоремою Кантора є рівномірно неперервною на $[0; 1]$.

Приклад 2. Функція $f(x) = 1/x$ є неперервною на проміжку $(0; 1)$, але не є рівномірно неперервною на ньому. Справді, нехай

$x_n = \frac{1}{2+n}$ і $\tilde{x}_n = \frac{1}{1+n}$. Тоді $x_n \in (0; 1)$, $\tilde{x}_n \in (0; 1)$, $x_n - \tilde{x}_n \rightarrow 0$ і $f(x_n) - f(\tilde{x}_n) = (2+n) - (1+n) = 1$. Тому

$$(\exists \varepsilon = 1/2)(\forall \delta > 0)(\exists \{x_n; \tilde{x}_n\} \subset (0; 1), |x_n - \tilde{x}_n| < \delta) : |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon,$$

а це означає, що функція $f(x) = 1/x$ не є рівномірно неперервною на проміжку $(0; 1)$. Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі Кантора є істотною.

Приклад 3. Функція $f(x) = \cos x$ є рівномірно неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Справді,

$$|\cos x - \cos \tilde{x}| = \left| -2 \sin \frac{x + \tilde{x}}{2} \sin \frac{x - \tilde{x}}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - \tilde{x}}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - \tilde{x}}{2} \right| = |x - \tilde{x}|.$$

Тому $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall \{x; \tilde{x}\} \subset \mathbb{R}, |x - \tilde{x}| < \delta) : |\cos x - \cos \tilde{x}| < \varepsilon$, а це і означає, що функція $f(x) = \cos x$ є рівномірно неперервною на \mathbb{R} . Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі Кантора не є необхідною.

1.4.7. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці.
2. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці на мові “ $\varepsilon - \delta$ ”.
3. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці на мові околів.
4. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці на мові послідовностей.

5. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці на мові приростів.
6. Чи є функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta): |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.
7. Чи є функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ неперервною в точці $a \in \mathbb{R}$, якщо для будь-якої послідовності (x_n) такої, що $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ і $x_n \neq a$ для всіх $n \in \mathbb{N}$, виконується $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$.
7. Сформулюйте теорему про неперервність суми, добутку та частки.
8. Наведіть приклад таких функцій $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що вони не є неперервними в точці $a = 0$, але їхній добуток є функцією, неперервною в цій точці.
9. Сформулюйте теорему про неперервність композиції функцій.
10. Сформулюйте теорему про граничний перехід під знаком неперервної функції.
11. За яких умов справедлива рівність $\lim_{t \rightarrow \alpha} \cos(\varphi(t)) = \cos\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$?
12. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ справа.
13. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ зліва.
14. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ справа на мові послідовностей.
15. Сформулюйте означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ зліва на мові послідовностей.
16. Сформулюйте означення точки розриву функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
17. Сформулюйте означення точки розриву першого роду і стрибка функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
18. Сформулюйте означення точки усунього розриву функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
19. Сформулюйте означення точки розриву другого роду функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
20. Сформулюйте критерій неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в термінах одnobічних неперервностей.
21. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка має усунвий розрив у точці $a = 1$ і є неперервною в усіх інших точках $a \in \mathbb{R}$.
22. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка має розрив першого роду в

точці $a=0$, розрив другого роду в точці $a=1$ і є неперервною в усіх інших точках $a \in \mathbb{R}$.

23. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка є неперервною зліва в точці $a=0$, не є неперервною справа в цій точці, має розрив другого роду в точці $a=1$ і є неперервною в усіх інших точках $a \in \mathbb{R}$.
24. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка є неперервною в кожній точці проміжку $[0;1)$ і є розривною в усіх інших точках $a \in \mathbb{R}$.
25. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка має розрив другого роду в точках $a=-1$, $a=0$ і є неперервною в усіх інших точках $a \in \mathbb{R}$.
26. Сформулюйте означення функції, неперервної на проміжку $(a;b)$.
27. Сформулюйте означення функції, неперервної на проміжку $[a;b]$.
28. Сформулюйте означення функції, неперервної на множині H .
29. Сформулюйте першу теорему Вейєрштрасса.
30. Сформулюйте другу теорему Вейєрштрасса.
31. Сформулюйте першу теорему Больцано-Коші.
32. Сформулюйте другу теорему Больцано-Коші.
33. Сформулюйте означення рівномірної неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на множині H .
34. Сформулюйте теорему Кантора.

1.4.8. Вправи і задачі.

1. Дослідіть функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на неперервність, неперервність справа, неперервність зліва, знайдіть точки розриву та їхній тип:

1. $f(x) = 2^{1/(x-3)}$.

2. $f(x) = 5^{1/(x-3)} + 1$.

3. $f(x) = \frac{x}{x-2}$.

4. $f(x) = \frac{x-8}{x+1}$.

5. $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$.

6. $f(x) = \frac{x+3}{(x-4)(x+5)}$.

7. $f(x) = \frac{x-8}{(x^2+1)(x-7)}$.

8. $f(x) = \frac{2^{1/x}}{x+7}$.

9. $f(x) = \frac{x+2}{2^{1/x}}$.

10. $f(x) = \frac{x}{\sin x}$.

11. $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$.

12. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$.

13. $f(x) = \frac{x+7}{\cos x}$.

14. $f(x) = \frac{x+1}{-x^2+x+3}$.

$$15. f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases} \quad 16. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3, \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < \pi/2, \\ \sin x, & x \geq \pi/2. \end{cases} \quad 18. f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ x^2-1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & x > 3. \end{cases} \quad 20. f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \arccos(\cos x).$$

$$22. f(x) = \cos(\arccos x)$$

$$23. f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ \sin x, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x).$$

$$26. f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x).$$

$$27. f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ x, & 1 \leq x < 2, \\ 3, & 2 \leq x < 3. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \ln \ln(1+x).$$

$$30. f(x) = \sqrt{x^2-1}.$$

2. З'ясуйте, чи є функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ рівномірно неперервною на множині H :

$$1. f(x) = 2x - 5, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$2. f(x) = x + \sin 2x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$3. f(x) = x \cos x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$4. f(x) = x \sin x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$5. f(x) = 2x^2, \quad H = [0; 1].$$

$$6. f(x) = 3x^4 + x, \quad H = [-1; 1].$$

$$7. f(x) = x^2, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$8. f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad H = (0; 1).$$

$$9. f(x) = \sin x^2, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$10. f(x) = x^3, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$11. f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \quad H = (0; \pi/2]. \quad 12. f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad H = (0; \pi].$$

$$13. f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad H = (0; \pi].$$

$$14. f(x) = x + \cos \frac{1}{x}, \quad H = (0; \pi/2].$$

$$15. f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$16. f(x) = x + \operatorname{arctg} x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$17. f(x) = \sqrt{x}, \quad H = [0; +\infty).$$

$$18. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$19. f(x) = \frac{1}{x}, \quad H = (0; 1).$$

$$20. f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad H = (0; 1).$$

$$21. f(x) = x^5, \quad H = (a; b).$$

$$22. f(x) = e^{-\sqrt{x}}, \quad H = [0; +\infty).$$

1.4.9. Індивідуальні завдання.

1. Дослідіть функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на неперервність, неперервність справа, неперервність зліва, знайдіть точки розриву і їхній тип та зобразіть графік:

$$1. f(x) = \begin{cases} x+4, & x < -1, \\ x^2+2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x+2, & x \leq -1, \\ (x+1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x+4, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1-x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x+2, & x > 3. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x-3, & x < 0, \\ x+1, & 0 \leq x < 4, \\ 3+x, & x > 4. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} [x], & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, & x < 0, \\ x \sin(1/x), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1, \\ x+1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

15. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4x+5}$.

17. $f(x) = \frac{x+7}{2^x-1}$.

19. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$.

21. $f(x) = \frac{1}{-x^2+2x+3}$.

23. $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4x+3}$.

25. $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

27. $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{x}$.

29. $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg}^2 x}$.

16. $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$.

18. $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$.

20. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$.

22. $f(x) = 2^{x/(x-1)}$.

24. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$.

26. $f(x) = \frac{e^{1/x}+1}{e^x-1}$.

28. $f(x) = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}$.

30. $f(x) = \frac{2^{1/x}+1}{2^{1/x}+2}$.

Розділ 2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

Похідна функції є одним з основних інструментів дослідження функцій, рівнянь, багатьох природних явищ та суспільних проблем. Власне саме це поняття і було введено в зв'язку з дослідженням рухів та інших фізичних процесів.

2.1. Означення похідної. Неперервність функції, яка має похідну. *Похідною функції* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці x_0 називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля [2, 4]:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1)$$

де $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ – *приріст функції* f у точці x_0 . Якщо границя (1) існує і є скінченною, то кажуть, що в точці x_0 функція f має похідну, а якщо границя (1) не існує або рівна ∞ , то кажуть, що функція f у точці x_0 похідної не має. Інколи, правда, коли границя рівна $-\infty$, $+\infty$ або ∞ , кажуть, що в точці x_0 функція має відповідну нескінченну похідну. Означення похідної можна записати й так [2, 4]:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2)$$

Для позначення похідної використовують також символи

$$\frac{df}{dx}(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, f', y', \dot{y}, Dy, \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

та інші, а приріст функції f у точці x_0 позначають через Δy . Тому

означення похідної можна записати і так: $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Природним

чином, визначаються права і ліва похідні функції f в точці x_0 :

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Теорема 1 [2, 4]. *Якщо функція* $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *має похідну в точці* x_0 , *то вона є неперервною в цій точці.*

Приклад 1. *Якщо* $f(x) = x^2$, *то* $(x^2)' = 2x$, *бо*

$$\begin{aligned}
 f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Приклад 2. Функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$.

Справді, $\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|$. Отже,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Тому розглядувана функція не має похідної в точці $x_0 = 0$. Функція $f(x) = |x|$ є неперервною в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і цей приклад показує, що твердження, обернене до теореми 1, не є справедливим. Більше того, існують неперервні всюди функції, які не мають похідної в жодній точці $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$, $x \in (0; +\infty)$, $\mu \in \mathbb{R}$. Справді,

$$\begin{aligned}
 (x^\mu)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^\mu \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} = \\
 &= x^{\mu-1} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\mu - 1}{t} = \mu x^{\mu-1}.
 \end{aligned}$$

Приклад 4. $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Справді, використовуючи неперервність косинуса, отримуємо

$$\begin{aligned}
 (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x.
 \end{aligned}$$

Приклад 5. $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Справді, використовуючи неперервність синуса, отримуємо

$$\begin{aligned}
 (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} = \\
 &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2} \right) = - \sin x.
 \end{aligned}$$

Приклад 6. $(e^x)' = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Справді,

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

Кажуть, що функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну на проміжку $[a; b]$, якщо вона має похідну в кожній точці $x \in (a; b)$, має праву похідну в точці a і має ліву похідну в точці b .

2.2. Геометричний і механічний зміст похідної. Графік функції $y = f(x)$ геометрично в прямокутній декартовій системі координат зображається у вигляді деякої лінії.

Візьмемо на графіку дві точки $M_0(x_0; y_0)$ і $M(x; y)$, і проведемо через ці точки пряму, яку будемо називати січною. Дотичною до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M_0(x_0; y_0)$ називається така пряма T , яка проходить через цю точку і є граничним положенням січної M_0M , коли M прямує до M_0 по графіку функції.

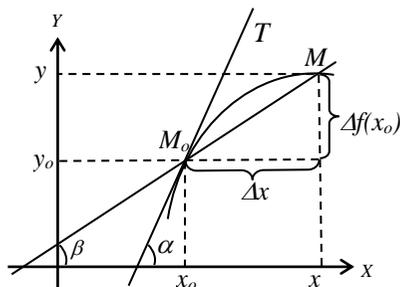


Рис. 1

Якщо T перпендикулярна до осі Ox , то T називається вертикальною дотичною, а в протилежному випадку – похилою дотичною.

Теорема 1 [2, 4]. Графік неперервної в точці x_0 функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має в точці $(x_0; y_0)$, де $y_0 = f(x_0)$, похилу дотичну тоді і тільки тоді, коли f має скінченну похідну в точці x_0 і при цьому рівняння дотичної має вигляд $y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$. Графік неперервної в точці x_0 функції f має в точці $(x_0; y_0)$ вертикальну дотичну тоді і тільки тоді, коли f має нескінченну похідну в точці x_0 і при цьому рівняння вертикальної дотичної має вигляд $x = x_0$.

З теореми 1 випливає такий *геометричний зміст похідної* [2, 4]: похідна функції f в точці x_0 рівна кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції f в точці $(x_0; f(x_0))$, тобто $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут, утворений дотичною з додатним променем осі абсцис. Зокрема, $f'(x_0) = 0$ тоді і тільки тоді, коли дотична до графіка функції в точці $(x_0; f(x_0))$ є паралельною осі абсцис.

В означенні дотичної використовувалось поняття граничного положення січної. *Граничним положенням січної* M_0M , коли M прямує до M_0 по графіку функції f , називається [2, 4] така пряма, яка проходить через точку M_0 і для якої для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх точок $M \in \operatorname{graf}(f)$, для яких $M_0M < \delta$, пряма M_0M лежить у двох вертикальних кутах, для яких T є бісектрисою і величина яких є меншою за ε .

Приклад 1. Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sin x$ у точці $(x_0; y_0)$, для якої $x_0 = \pi/3$. Оскільки $f'(x) = \cos x$, $f(x_0) = \sqrt{3}/2$ і $f'(x_0) = 1/2$, то $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \pi/3)$ – шукане рівняння.

Приклад 2. Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = x^3$ у точці $(x_0; y_0)$, для якої $x_0 = 0$. Оскільки $f'(x) = 3x^2$, $f(x_0) = 0$ і $f'(x_0) = 0$, то $y = 0$ – шукане рівняння.

Приклад 3. Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції $f(x) = \sqrt[3]{x}$ у точці $(x_0; y_0)$, для якої $x_0 = 0$. Оскільки $f'(x) = 1/(3x^{2/3})$, функція f є неперервною у точці x_0 і $f'(x_0) = \infty$, то $x = 0$ – шукане рівняння.

Приклад 4. Знайдемо ті точки графіка функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$, дотична в яких є паралельною осі абсцис. Оскільки $f'(x) = x^2 + 3x - 4$, то $f'(x) = 0$, якщо $x = -4$ або $x = 1$. Тому точки $\left(-4; \frac{59}{3}\right)$ і $\left(1; -\frac{7}{6}\right)$ є шуканими.

Нормаллю до графіка функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $(x_0; y_0)$ називається така пряма, яка проходить через цю точку і є перпендикулярною до дотичної, проведеної в цій же точці. З умов перпендикулярності двох прямих випливає, що рівнянням нормалі має вигляд:

$$y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

2.3. Похідна сталої, суми, добутку і частки.

Теорема 1 [2, 4]. Похідна сталої функції дорівнює нулеві, тобто $(C)' = 0$.

Теорема 2 [2, 4]. Похідна суми двох функцій u і v дорівнює сумі похідних, якщо останні існують: $(u + v)' = u' + v'$.

Теорема 3 [2, 4]. Похідна добутку двох функцій u і v знаходиться за формулою $(uv)' = u'v + uv'$, якщо похідні u' і v' існують.

Наслідок 1. Сталу можна виносити за знак похідної, тобто $(Cu)' = Cu'$ для довільної сталої C , якщо u' існує.

Теорема 4 [2, 4]. Похідна частки двох функцій u і v знаходиться за формулою

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

якщо похідні $u'(x)$ та $v'(x)$ існують, і $v(x) \neq 0$.

Приклад 1.

$$(x + \sin x + \cos x)' = (x)' + (\sin x)' + (\cos x)' = 1 + \cos x - \sin x.$$

Приклад 2. $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$.

Приклад 3. $\left(\frac{x^2}{4}\right)' = \left(\frac{1}{4}x^2\right)' = \frac{1}{4}(x^2)' = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x$.

Приклад 4.
$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 + 1}{x^4 + 3}\right)' &= \frac{(x^2 + 1)'(x^4 + 3) - (x^4 + 3)'(x^2 + 1)}{(x^4 + 3)^2} = \\ &= \frac{2x(x^4 + 3) - 4x^3(x^2 + 1)}{(x^4 + 3)^2} = \frac{2x(x^4 + 3 - 2x^4 - 2x^2)}{(x^4 + 3)^2} = \\ &= \frac{2x(-x^4 - 2x^2 + 3)}{(x^2 + 3)^2}. \end{aligned}$$

Приклад 5. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$. Справді,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Приклад 6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$. Справді,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Приклад 7. Функції $u(x) = |x|$ і $v(x) = \sin x - |x|$ не мають похідної в точці $x = 0$, проте їхня сума функція $f(x) = \sin x$ має похідну в цій точці.

2.4. Таблиця похідних основних елементарних функцій. Похідна композицій.

Таблиця похідних основних елементарних функцій:

- | | |
|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------|
| 1. $(C)' = 0$. | 2. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$, $\mu \in \mathbb{R}$. |
| 3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. | 4. $(e^x)' = e^x$. |
| 5. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. | 6. $(\sin x)' = \cos x$. |
| 7. $(\cos x)' = -\sin x$. | 8. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. |
| 9. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$. | 10. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. |
| 11. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. | 12. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$. |
| 13. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$. | 14. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$. |
| 15. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$. | 16. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$. |
| 17. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$. | |

Ці формули справедливі в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, в якій обидві частини відповідної рівності мають зміст. Частина цих формул вже доведена в попередніх пунктах. Решту формул отримаємо в наступних пунктах.

Теорема 1 [2, 4]. Якщо функція $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну в точці x_0 , а функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну в точці $y_0 = \varphi(x_0)$, то функція $F(x) = f(\varphi(x))$ має похідну в точці x_0 і

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0), \quad (1)$$

тобто $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

В довільній точці x рівність (1) можна записати і в інших формах:

$$F'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x), \quad (f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad z'_x = z'_y \cdot y'_x, \quad (f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Таким чином, за виконання відповідних умов $(e^\varphi)' = e^\varphi \varphi'$,

$$(\sin \varphi)' = \cos \varphi \cdot \varphi', \quad (\cos \varphi)' = -\sin \varphi \cdot \varphi', \quad (\ln \varphi)' = \frac{\varphi'}{\varphi}, \quad \left(\frac{1}{\varphi}\right)' = -\frac{\varphi'}{\varphi^2} \text{ і т.д.}$$

Приклад 1. $(\sin 2x)' = \sin'(2x)(2x)' = 2 \cos 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 2. $(e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = e^{x^2} 2x$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 3. $(e^{-x})' = e^{-x} (-x)' = -e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 4.

$$(\sin^4 2x^3)' = 4 \sin^3 2x^3 \cos 2x^3 (2x^3)' = 24x^2 \sin^3 2x^3 \cos 2x^3$$
, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 5.

$$(\operatorname{ch} x)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x$$
, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 6.

$$(\operatorname{sh} x)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{1}{2}((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x$$
, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 7. $(a^x)' = a^x \ln a$, $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}$. *Справді,*

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

Приклад 8. $(\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x$.

Приклад 9. $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x$.

Приклад 10. $(e^{\sin^2 3x})' = e^{\sin^2 3x} \cdot 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3e^{\sin^2 3x} \sin 6x$.

Приклад 11. $(\ln|x|)' = 1/x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. *Справді, якщо $x > 0$, то*

$(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$. *Якщо ж $x < 0$, то*

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{x}.$$

Приклад 12. *Якщо $f(x) = \sin 2x + \cos^3 2x$, то*

$$f'(x) = 2\cos 2x + 6\cos^2 2x \sin 2x \quad i \quad f'(0) = 2.$$

2.5. Похідні показниково-степеневих функцій. Логарифмічна похідна. Похідна оберненої функції. Часто функція f задається формулою $y = u^v$, де u і v – функції, які мають похідні в точці x . Для знаходження похідної такої функції слід скористатись такою формулою $u = e^{\ln u}$. Тоді $u^v = e^{v \ln u}$. Отже, за виконання відповідних умов

$$y' = (u^v)' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Приклад 1.

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

Зауваження 1. Інколи похідну функції $y = u^v$ простіше знаходити наступним чином. Оскільки $\ln y = v \ln u$, то $\frac{y'}{y} = (v \ln u)'$,

$$y' = y \cdot (v \ln u)' = u^v (v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

Приклад 2. Якщо $y = x^x$, то $\ln y = x \ln x$, $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$ і

$$y' = y (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

Похідна логарифма функції називається *логарифмічною похідною*: $(\ln f)' = \frac{f'}{f}$.

Приклад 3. Якщо $y = x \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$, то

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 - 1) - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1), \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x^2 + 1} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4 - 1},$$

і

$$y' = y \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4 - 1} \right) = x \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \left(\frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4 - 1} \right) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{2x^2}{x^4 - 1} \right).$$

Теорема 1 [2, 4]. Якщо функція $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є строго монотонною і неперервною на проміжку $(a; b)$ і має похідну $f'(x_0) \neq 0$ в точці $x_0 \in (a; b)$, то функція f^{-1} , обернена до f , має похідну в точці $y_0 = f(x_0)$ і

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (1)$$

Зауваження 1. Формулу (1) можна записати так:

$$f^{-1}'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Отже, в точці x похідна оберненої функції знаходиться за формулою

$$f^{-1}'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Формулу (1) записують також так: $y'_x = \frac{1}{x'_y}$.

Приклад 4. Якщо $f(x) = \sin x$, то функція $f^{-1}(x) = \arcsin x$ є оберненою до звуження функції f на проміжок $[-\pi/2; \pi/2]$. Тому

$$\begin{aligned} \arcsin' x &= \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

Приклад 5. Якщо $f(x) = \cos x$, то функція $f^{-1}(x) = \arccos x$ є оберненою функцією до звуження функції f на проміжок $[0; \pi]$. Тому

$$\begin{aligned} \arccos' x &= \frac{1}{f'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

Приклад 6. Якщо $f(x) = \operatorname{tg} x$, то функція $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$ є оберненою до звуження функції f на проміжок $(-\pi/2; \pi/2)$. Тому

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{f'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 7. Якщо $f(x) = \operatorname{ctg} x$, то функція $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$ є оберненою до звуження функції f на проміжок $(0; \pi)$. Тому

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg}' x &= \frac{1}{f'(\operatorname{arcctg} x)} = -\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arcctg} x)} = \\ &= \frac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)} = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 8. Якщо $f(x) = e^x$, то функція $f^{-1}(x) = \ln x$ є оберненою до функції f . Тому

$$\ln' x = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty).$$

Приклад 9. Якщо $f(x) = a^x$, $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ то функція $f^{-1}(x) = \log_a x$ є оберненою до функції f . Тому

$$\log'_a x = \frac{1}{f'(\log_a x)} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \in (0; +\infty).$$

2.6. Диференціал функції. Функція f називається [2, 4] диференційовною в точці x_0 , якщо її приріст $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ в цій точці можна подати у вигляді $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$, де A – деяке число, яке від Δx не залежить (A залежить від функції f і від x_0), а $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$. Якщо функція f є диференційованою, то $A \cdot \Delta x$ називається її *диференціалом в точці x_0* і позначається $df(x_0)$, dy , $d(f(x_0); \Delta x)$ і т.д. Отже, $df(x_0) = A \cdot \Delta x$. Замість Δx часто пишуть dx і тоді $df(x_0) = A \cdot dx$. Бачимо, що за сталого x_0 диференціал є лінійною функцією змінної Δx .

Приклад 1. Нехай $f(x) = x^2$. Тоді $\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$. Отже, $df(x_0) = 2x_0 dx$.

Теорема 1 [2, 4]. Для того щоб функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ була диференційовною в точці x_0 , необхідно і достатньо, щоб вона мала похідну в цій точці. Якщо ця умова виконана, то

$$df(x_0) = f'(x_0) dx. \quad (1)$$

Отже, функція має похідну в точці тоді і тільки тоді, коли вона є диференційовна в цій точці. Тому функції, які мають похідну, часто називають *диференційовними*, а правила знаходження похідних – *правилами диференціювання*.

Зауваження 1. Формулу (1) в довільній точці x записують так $dy = f'(x) dx$. В цій формулі $dx = \Delta x$ – довільне число, яке не залежить від x .

Приклад 2. Нехай $f(x) = e^{2x}$. Тоді $f'(x) = 2e^{2x}$. Отже, $df(x) = 2e^{2x} dx$. Зокрема, $d(f(0); 0,1) = 0,2$.

Теорема 2 [2, 4]. Якщо c – стала функція, а $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – диференційовні функції в точці x , то: 1) $d(c) = 0$; 2) $d(u + v) = du + dv$; 3) $d(uv) = vdu + u dv$; 4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$, якщо $v(x) \neq 0$.

Приклад 3. $d(xe^x) = xd(e^x) + e^x dx = xe^x dx + e^x dx = (xe^x + e^x) dx$.

Нехай функція f є диференційовною в точці x_0 . Тоді її приріст $\Delta f(x_0) = \Delta(f(x_0); \Delta x)$ можна подати у вигляді $\Delta f(x_0) = df(x_0) + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ і $df(x_0) = f'(x_0) \Delta x$. Якщо $f'(x_0) \neq 0$, то для малих Δx маємо $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$. Отже, $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Ця наближена формула інколи використовується для наближеного знаходження значення функції f у точці x , якщо відомим є значення в близькій точці x_0 .

Приклад 4. Для знаходження наближеного значення $\sqrt[4]{17}$ розглянемо функцію $f(x) = \sqrt[4]{x}$ та її значення в точках $x = 17$ і $x_0 = 16$. Тоді $f(16) = 2$, $x - x_0 = 1$, $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$, $f'(16) = \frac{1}{4}(16)^{-3/4} = \frac{1}{32}$. Тому

$$\sqrt[4]{17} \approx 2 + \frac{1}{32} = \frac{65}{32}.$$

Подивимось на диференціал з іншого боку. Диференційовна в точці x_0 функція f має в цій точці дотичну і з графіка видно, що диференціал функції в точці x_0 дорівнює приросту функції $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ (приросту ординати дотичної), що відповідає приросту $\Delta x = x - x_0$ незалежної змінної.

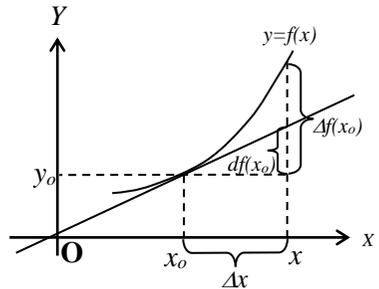


Рис. 1

Нехай функція f є диференційовною в кожній точці проміжку $(a; b)$. Тоді її диференціал в точці $x \in (a; b)$ знаходиться за формулою [2, 4]

$$dy = f'(x) dx. \tag{2}$$

Нехай тепер на проміжку $(\alpha; \beta)$ задано функцію $x: (\alpha; \beta) \rightarrow (a; b)$, яка диференційовна на $(\alpha; \beta)$. Тоді диференціал функції $y = f(x(t))$ знаходиться за формулою $dy = f'(x(t))x'(t)dt$ або $dy = f'(x(t))dx(t)$. Опустивши в останній формулі t , знову маємо

$$dy = f'(x)dx. \quad (3)$$

Отже, незалежно від того, чи є x незалежною змінною, чи x є функцією, диференціал функції $y = f(x)$ знаходиться за формулами (2)-(3). Ця властивість називається [2, 4] *інваріантністю форми першого диференціала*. Вона часто використовується на практиці. Формули (2)-(3) однакові за формою, але вони різні за змістом. У формулі (2) $dx = \Delta x$ – довільне число, а в формулі (3) dx – це диференціал функції $x = x(t)$ і не завжди в цьому випадку $dx = \Delta x$.

Зауваження 2. З інваріантності форми першого диференціала випливає, що похідна функції в якійсь точці дорівнює частці диференціалів: $y'_x = \frac{dy}{dx}$. При цьому знаходити значення диференціалів можна по будь-якій змінній.

Приклад 5. Якщо $\varphi(x) = e^x$, $x(t) = t^2$ і $f(t) = e^{t^2}$, то $\varphi'(x) = e^x$ і

$$\varphi'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{e^{t^2} 2tdt}{2tdt} = e^{t^2} = e^x.$$

Приклад 6.

$$\begin{aligned} d(\ln^2 \sin^3 4x) &= 2 \ln \sin^3 4x d(\ln \sin^3 4x) = \frac{2 \ln \sin^3 4x}{\sin^3 4x} d(\sin^3 4x) = \\ &= \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin^3 4x} \sin^2 4x d(\sin 4x) = \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} d(\sin 4x) = \\ &= \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} \cos 4x d(4x) = \frac{24 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} \cos 4x dx. \end{aligned}$$

2.7. Похідні і диференціали вищих порядків. Нехай функція f має похідну в кожній точці $x \in (a; b)$. Тоді функція $f': x \rightarrow f'(x)$ називається похідною функцією функції f або *першою похідною* функції f . Похідна функції f' в точці x_0 називається *другою похідною* функції f в точці x_0 і позначається через $f''(x_0)$. Отже [2, 4],

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Другу похідну позначають також так y'' , $f^{(2)}(x_0)$, $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$, \ddot{y} , $y''_{x^2}(x_0)$

і т.д.

Означення другої похідної можна також записати так: $f''(x_0) = (f'(x))'|_{x=x_0}$. Аналогічно даємо означення *похідної n -го порядку*:

$f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'(x_0)$. Крім цього, за означенням $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$ – похідна нульового порядку.

Теорема 1 [2, 4]. $(Cu)^{(n)} = C u^{(n)}$ для довільних $C \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$, якщо $u^{(n)}$ існує.

Теорема 2 [2, 4]. $(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$ для довільного $C \in \mathbb{R}$ і $n \in \mathbb{N}$, якщо похідні $u^{(n)}$ і $v^{(n)}$ існують.

Теорема 3 (формула Лейбніца) [2, 4]. $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

для довільного $n \in \mathbb{N}$, якщо похідні $u^{(n)}$ і $v^{(n)}$ існують.

Приклад 1. Якщо $f(x) = xe^x$, то

$$f''(x) = (xe^x)'' = \left((xe^x)' \right)' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = e^x(2+x).$$

Зокрема, $f''(0) = 2$.

Приклад 2. Знайдемо n -ну похідну функції $f(x) = \sin x$. Маємо,

$f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$, $f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$. На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$. Зокрема,

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{парне,} \\ (-1)^{(n-1)/2}, & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases}$$

Приклад 3. Якщо $f(x) = \cos x$, то

$$f^{(n)}(x) = \left(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \right)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Приклад 4. Якщо $f(x) = x^\mu$, то $f'(x) = \mu x^{\mu-1}$, $f''(x) = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$ і на основі принципу математичної індукції переконуємось, що $f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}$.

Приклад 5. Якщо $f(x) = \ln x$, то $f'(x) = \frac{1}{x}$, $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$ і на основі принципу математичної індукції переконуємось, що

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Приклад 6. Якщо $f(x) = (x^2 - 1)e^x$, то позначивши $u = x^2 - 1$ і $v = e^x$, отримуємо, що $v^{(n)} = e^x$, $u^{(0)} = x^2 - 1$, $u' = 2x$, $u'' = 2$, $u''' = 0$, $u^{(4)} = 0$, Тому, скориставшись формулою Лейбніца, одержуємо

$$\begin{aligned} f^{(20)}(x) &= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k u^{(k)} v^{(20-k)} = C_{20}^0 u^{(0)} v^{(20)} + C_{20}^1 u^{(1)} v^{(19)} + C_{20}^2 u^{(2)} v^{(18)} = \\ &= (x^2 - 1)e^x + 40xe^x + 380e^x = (x^2 + 40x + 379)e^x. \end{aligned}$$

Якщо функція f є диференційовною на $(a; b)$, то її диференціал в кожній точці $x \in (a; b)$ знаходиться за формулою $dy = f'(x)dx$, який називається ще *першим диференціалом функції* f . Перший диференціал є функцією двох змінних: x і dx . При цьому dx від x не залежить. При сталому dx функція dy є функцією в \mathbb{R} . Якщо вона диференційовна, то її диференціал $\delta(dy)$ знаходиться за формулою $\delta(dy) = (f'(x)dx)' \delta x = f''(x)dx \delta x$, де dx і δx – довільні числа. Значення диференціала від першого диференціала при $\delta x = dx$ називається *другим диференціалом функції* f в точці x і позначається d^2y . Таким чином, другий диференціал знаходиться за формулою $d^2y = f''(x)dx^2$, де $dx^2 := dx \cdot dx = (dx)^2$ і dx – довільна стала, незалежна від x . Аналогічно дається означення диференціала n -го порядку. Для знаходження диференціала n -го порядку справедлива формула [2, 4]:

$$d^n y = f^{(n)}(x) dx^n.$$

Зауваження 1. Слід розрізняти позначення $d^n x$, dx^n та $d(x^n)$:

$$d^n x = \begin{cases} 0, n > 1, \\ dx, n = 1, \end{cases} \quad dx^n = (dx)^n, \quad d(x^n) = nx^{n-1} dx.$$

Зауваження 2. Другий диференціал не має властивості інваріантності форми.

Теорема 4 [2, 4]. $d^n(u + v) = d^n u + d^n v$ для кожного $n \in \mathbb{N}$, якщо диференціали $d^n u$ та $d^n v$ існують.

Теорема 5 [2, 4]. $d^n(Cu) = Cd^n u$ для кожного $n \in \mathbb{N}$ і кожного $C \in \mathbb{N}$, якщо диференціал $d^n u$ існує.

Теорема 6 [2, 4]. $d^n(uv) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k}u d^k v$ для кожного $n \in \mathbb{N}$,

якщо диференціали $d^n u$ та $d^n v$ існують.

Зауваження 3. Символічно останню формулу записують так $d^n(uv) = \{du + dv\}^{[n]}$. В цих формулах u і v n -раз диференційовні функції і $d^0 u = u$.

Приклад 7. Якщо $f(x) = e^x$, то $f''(x) = e^x$. Тому $d^2 f(x) = e^x dx^2$.

2.8. Параметрично задані функції та їх диференціювання.

Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається заданою параметрично системою

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta), \quad (1)$$

якщо $\psi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ – деякі функції, функція $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ має обернену функцію і $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$.

Теорема 1 [2, 4]. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ задана параметрично системою (1), а функції $\psi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ мають похідні в точці t і $\varphi'(t) \neq 0$, то функція f має похідну в точці $x = \varphi(t)$ і

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (2)$$

Формулу (2) коротко записують так $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$.

Щоб знайти другу похідну функції f слід f' розглядати як функцію, задану параметрично системою

$$\begin{cases} y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \\ x = \varphi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta).$$

Тоді за виконання відповідних умов

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \right)'_t}{\varphi'(t)},$$

або коротше [2, 4]

$$y''_{x^2} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}$$

Приклад 1. Знайдемо похідну функції $f(x)$, заданої параметрично системою

$$\begin{cases} x = te^{t^2}, \\ y = t^2 \ln t + e^t. \end{cases}$$

Маємо

$$f'(x) = \frac{(t^2 \ln t + e^t)'_t}{(te^{t^2})'_t} = \frac{t(2 \ln t + 1) + e^t}{e^{t^2}(1 + 2t^2)}.$$

Приклад 2. Знайдемо другу похідну функції $f(x)$, заданої параметрично системою

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, \quad t \in [0; \pi/2], \end{cases}$$

в точці $x = \sqrt{2}$. Маємо

$$f'(x) = \frac{2 \cos t}{-2 \sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad f''(x) = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(2 \cos t)'_t} = -\frac{1}{2 \sin^3 t}.$$

Якщо $x = \sqrt{2}$, то $t = \pi/4$. Тому $f''(\sqrt{2}) = -1/(2 \sin^3(\pi/4)) = -\sqrt{2}$.

Зауваження 1. Другу і вищі похідні функції, заданої параметрично, можна знаходити іншим методом, використовуючи інваріантність форми першого диференціала і формули

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{x^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2 y - d^2 x dy}{dx^3}.$$

2.9. Теорема про середнє для функцій, які мають похідну.

Правила Лопітала.

Теорема 1 (Ферма) [2, 4]. Якщо функція $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $c \in (a; b)$ приймає найбільше або найменше значення на цьому проміжку $(a; b)$ і існує похідна $f'(c)$, то $f'(c) = 0$.

Приклад 1. Функція $f(x) = x$ приймає на замкненому проміжку $[0; 1]$ найбільше значення в точці $c = 1$, але її похідна в цій точці не дорівнює нулеві. Тому для замкненого проміжку теорема Ферма не є справедливою.

Наслідок 1. Якщо виконуються умови теореми Ферма, то дотична до графіка функції f у точці $(c; f(c))$ є паралельною осі абсцис.

Теорема 2 (Ролля) [2, 4]. Нехай функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє наступні умови: 1) є неперервною на проміжку $[a; b]$; 2) має похідну на проміжку $(a; b)$; 3) $f(b) = f(a)$. Тоді $(\exists c \in (a; b)): f'(c) = 0$.

Приклад 2. Функція $f(x) = |x| - 3$ є неперервною на проміжку $[-1; 1]$, $f(-1) = f(1) = -2$ і не існує такої точки c , що $f'(c) = 0$.

Теорема 3 (Лагранжа) [2, 4]. Нехай функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняє наступні умови: 1) є неперервною на проміжку $[a; b]$; 2) має похідну на проміжку $(a; b)$. Тоді

$$(\exists c \in (a; b)): f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

Приклад 3. $\sin 2 - \sin 1 = \cos c$, $c \in (1; 2)$.

Приклад 4. Якщо $x_1 \in \mathbb{R}$, $x_2 \in \mathbb{R}$, $x_1 < x_2$, $f(x) = \arctg x$, то $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $\arctg x_2 - \arctg x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1)$, $c \in (x_1; x_2)$. Тому

$$|\arctg x_2 - \arctg x_1| \leq |x_2 - x_1|, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

Наслідок 2. Якщо виконуються умови теореми Лагранжа, то існує така точка $c \in (a; b)$, що дотична до графіка функції f у точці $(c; f(c))$ є паралельною прямою, яка проходить через точки $(a; f(a))$ і $(b; f(b))$.

Зауваження 1. Нехай $\theta = \frac{c-a}{b-a}$. Тоді $c = a + \theta(b-a)$ і $0 < \theta < 1$.

Тому співвідношення (1) можна переписати так:

$$(\exists \theta \in (0; 1)): f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a). \quad (2)$$

Зауваження 2. Нехай $a = x$, $b - a = \Delta x$. Тоді $b = x + \Delta x$ і співвідношення (2) можна переписати так:

$$(\exists \theta \in (0; 1)): f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x. \quad (3)$$

Теорема 4 (Коші) [2, 4]. Нехай функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють наступні умови: 1) є неперервними на проміжку $[a; b]$; 2) мають похідні на проміжку $(a; b)$; 3) $(\forall x \in (a; b)): \varphi'(x) \neq 0$. Тоді

$$(\exists c \in (a; b)): \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

Зауваження 3. Як і в теоремі Лагранжа, в теоремі 4 можна записати $c = a + \theta(b - a)$ і $0 < \theta < 1$.

Теорема 5 (перше правило Лопіталя: невизначеність $0/0$) [2, 4]. Нехай функції $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють наступні умови: 1) вони диференційовні на проміжку $(a; b)$; 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = 0$; 3) $\varphi'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$; 4) існує границя

$$(скінченна або нескінченна) \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k. \text{ Тоді } \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Теорема 6 (друге правило Лопіталя: невизначеність ∞/∞) [2, 4]. Нехай функції $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ задовольняють наступні умови: 1) вони диференційовні на $(a; b)$; 2) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} \varphi(x) = \infty$; 3) $\varphi'(x) \neq 0$ для всіх $x \in (a; b)$; 4) існує границя (скінченна або нескінченна) $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k$. Тоді $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$.

Зауваження 4 [2, 4]. Ми сформулювали і довели правила Лопіталя для правої границі. Проте, вони залишаються справедливими з відомими змінами у формулюванні і для лівої границі, і для границі, а також для $a = -\infty$, $a = +\infty$ та $a = \infty$. Останні випадки можна звести до випадку $a = 0$ шляхом розгляду функцій $f_1(t) = f(1/t)$ і $\varphi_1(t) = \varphi(1/t)$. Тоді

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_1'(t)}{\varphi_1'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{\varphi'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Зауваження 5 [2, 4]. При застосуванні правил Лопіталя потрібно дивитись, чи виконуються відповідні умови, бо можна прийти, інколи, до неправильних висновків. Правила Лопіталя можна застосовувати і до інших невизначеностей ($0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, ∞^0 , 1^∞ , 0^0 і т.д.).

Приклад 5.
$$\frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$$

Приклад 6.

$$\frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 7.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$
 В той же час

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \cos x)'}{(2 + \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{-\sin x} = 1. \text{ Бачимо, що тут правило Лопіталя}$$

приводить до хибного результату. Це пов'язано з тим, що не виконується умова 2) теореми 1.

Прикла 8.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1.$$
 Разом з цим,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'}$ – не існує і тому правила Лопіталя тут застосувати не

можна.

Приклад 9. $0 \cdot \infty: \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$

Приклад 10.

$$\begin{aligned} \infty - \infty: \lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 11. $0^0: \lim_{x \rightarrow 0+} x^x = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x\right) = 1.$

Приклад 12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$

Приклад 13. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0$ для кожного $a > 1$ і кожного $\mu \in \mathbb{R}$, бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\mu-1) \cdot \dots \cdot (\mu-n+1)x^{\mu-n}}{a^x \ln^n a} = 0,$$

якщо $n \geq \mu$.

Приклад 14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$ для кожного $\varepsilon > 0$, бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$

Приклад 15. При використанні правил Лопіталя до знаходження границь доцільно знаходити границі тих співмножників (але не доданків)

в чисельнику та знаменнику, які мають скінченні і ненульові границі без правил Лопітала. Зокрема,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sqrt{2 + x^2}}{(1 + 3\sqrt{\cos x}) \sin^2 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{\sin^2 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2 + x^2}}{1 + 3\sqrt{\cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4 \sin 2x \cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{32} = \frac{1}{16\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Приклад 16.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \sin^2 \sqrt{x}\right)^{(1+\sqrt{x}) \ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \sin^2 \sqrt{x}\right)^{\frac{-\sin^2 \sqrt{x}(1+\sqrt{x}) \ln x}{-\sin^2 \sqrt{x}}} = \\ &= e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \sqrt{x}(1+\sqrt{x}) \ln x}{\sin^2 \sqrt{x}}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \sqrt{x} \ln x}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{x \ln x}{x^2}} = \\ &= \exp \left(-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \right) = \exp \left(-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \right) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

2.10. Формула Тейлора для довільної функції. Багаточленом Тейлора степеня n функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $a \in \mathbb{R}$ називається

багаточлен $P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$. Нехай $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Тоді $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$ або [2, 4]

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + r_n(x). \quad (1)$$

Формула (1) називається *формулою Тейлора* в точці $a \in \mathbb{R}$ функції f , а $r_n(x)$ – додатковим членом формули Тейлора. Якщо $a=0$, то формула

Тейлора (1) приймає вигляд $f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x)$.

Останню формулу інколи називають *формулою Маклорена*. Що являє собою $r_n(x)$? Якщо f – це багаточлен степеня n , то $r_n(x) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. В загальному випадку, $r_n(x)$ не обов'язково дорівнює нулеві.

Теорема 1 [2, 4]. Якщо для деякого $h > 0$ на проміжку $[a - h; a + h]$ функція f має похідні до порядку $n + 1$ включно, то $r_n(x)$ можна подати у вигляді Лагранжа

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad (2)$$

де $x \in [a - h; a + h]$ і $0 < \theta < 1$.

Формула (1), додатковий член якої записаний у формі (2), називається *формулою Тейлора з додатковим членом у формі Лагранжа*.

Якщо $a = 0$, то формула (2) приймає вигляд

$$r_n(x) = \frac{f^{n+1}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3)$$

Теорема 2 [2, 4]. Якщо виконуються умови теореми 1, то додатковий член формули Тейлора можна записати у вигляді Коші

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n!} (1-\theta)^n (x-a)^{n+1}, \quad (4)$$

де $x \in [a - h; a + h]$ і $0 < \theta < 1$.

Формула (1), в якій $r_n(x)$ записаний у формі (4), називається *формулою Тейлора з додатковим членом у формі Коші*.

Теорема 3 [2, 4]. Якщо функція f в точці $a \in \mathbb{R}$ має похідні до порядку n включно, то додатковий член формули Тейлора можна записати також у формі Пеано: $r_n(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$, де $\varepsilon(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow a$.

Наслідок 1 [2, 4]. Якщо функція f в точці $a \in \mathbb{R}$ має похідні до порядку $n + 1$ включно, то додатковий член формули Тейлора можна записати також у формі: $r_n(x) = \beta(x)(x-a)^{n+1}$, де $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, обмежена в деякому проколеному околі точки a .

Приклад 1. Якщо $f(x) = e^x$, то $f^{(k)}(x) = e^x$ і $f^{(k)}(0) = 1$. Тому

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + r_n(x).$$

Приклад 2. Якщо $f(x) = \sin x$, то $f^{(m)}(x) = \sin(x + m\pi/2)$ і

$$f^{(m)}(0) = \sin(m\pi/2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 2k, \\ (-1)^k, & \text{якщо } m = 2k + 1. \end{cases}$$

Тому

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_n(x).$$

Приклад 3. Якщо $f(x) = \cos x$, то $f^{(m)}(x) = \cos(x + m\pi/2)$ і

$$f^{(m)}(0) = \cos(m\pi/2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 2k+1, \\ (-1)^k, & \text{якщо } m = 2k. \end{cases}$$

Тому

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_n(x).$$

Приклад 4. Якщо $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, то

$$f^{(k)}(x) = (1+x)^{\alpha-n} \prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1) \quad \text{і} \quad f^{(k)}(0) = \prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1). \quad \text{Тому}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k!} x^k + r_n(x).$$

Тут $\prod_{j=1}^0 (\alpha - j + 1) := 1$.

$$\text{Приклад 5.} \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + r_n(x).$$

Часто виникає необхідність заміни функції в околі точки $a \in \mathbb{R}$ багаточленом. Для цього можна скористатися формулою Тейлора. Тоді

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (5)$$

Абсолютна похибка цієї наближеної формули дорівнює $|r_n(x)|$. Зокрема, можна записати [2, 4]:

$$f(x) \approx f(a), \quad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2.$$

При цьому, $f(a)$ називається нульовим наближенням, $f(a) + f'(a)(x-a)$ – афінним або лінійним наближенням і

$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$ – квадратичним наближенням

функції f в околі точки a . Перший, другий і третій доданки формули

(5) називаються відповідно нульовим, лінійним і квадратичним членами наближення. Якщо для всіх $n \in \mathbb{N}$ виконується $f^{(n)}(a) \neq 0$, то для x близьких до a найбільшим доданком у формулі (5) є перший доданок. В свою чергу третій доданок є значно меншим за другий. Чим більше беремо доданків у формулі (5), тобто чим більше n , тим менше наближене значення функції, знайдене за формулою (5), відрізняється від точного.

2.11. Умови постійності і монотонності функцій. Функція $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ називається *сталою* на множині H , якщо $(\exists c)(\forall x \in H): f(x) = c$.

Теорема 1 [2, 4]. Для того щоб функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ була сталою на проміжку Δ (відкритому, замкненому, напіввідкритому), необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною на ньому і $f'(x) = 0$ у всіх внутрішніх точках проміжку Δ .

Приклад 1. $(\forall x \in (-1; +\infty)) : \arctg x + \arctg \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$. Справді, позначимо ліву частину цієї рівності через $f(x)$. Тоді

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = 0$$

для всіх $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. Але $f(1) = \pi/4$. Тому $(\forall x \in (-1; +\infty)) : f(x) = \pi/4$. Зауваживши, що $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi/2 - \pi/4 = -3\pi/4$, маємо $(\forall x \in (-\infty; -1)) : f(x) = -3\pi/4$.

Теорема 2 [2, 4]. Якщо функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку Δ і $f'(x) > 0$ у всіх внутрішніх точках x проміжку Δ , то функція f є зростаючою на Δ . Якщо функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку Δ і $f'(x) < 0$ у всіх внутрішніх точках x проміжку Δ , то функція f є спадною на Δ .

Теорема 3 [2, 4]. Якщо функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку Δ і $f'(x) > 0$ у всіх внутрішніх точках x проміжку Δ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то функція f є зростаючою на Δ . Якщо функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку Δ і $f'(x) < 0$ у всіх внутрішніх точках x проміжку Δ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то функція f є спадною на Δ .

В більшості випадків досліджувати функцію на монотонність можна в наступній послідовності [2, 4]: 1) знайти область визначення функції; 2) знайти ті точки з області визначення, в яких похідна дорівнює нулеві або не існує, та точки, які є кінцями проміжків, що входять в область визначення функції; 3) користуючись методом проміжків знайти знак похідної на кожному з проміжків, утворених вказаними точками; 4) скористатись теоремами 2 та 3 і означенням, якщо потрібно, монотонної функції. В деяких випадках дослідження доцільніше проводити тільки на основі означення.

Приклад 2. Якщо $f(x) = (1 - x^2)^3$, то $D(f) = (-\infty; +\infty)$ і $f'(x) = -6x(1 - x^2)^2$. Тоді $6x(1 - x^2)^2 = 0$, якщо $f'(x) = 0$. Отримуємо точки $x_1 = -\infty$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ і $x_5 = +\infty$. Таким чином, розглядаємо проміжки $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ і $(1; +\infty)$. Оскільки $f'(-2) = 108 > 0$, $f'(-1/2) = 27/16 > 0$, $f'(1/2) = -27/16 < 0$ і $f'(2) = -108 < 0$, то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що $f'(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; -1)$ і $x \in (-1; 0)$ та $f'(x) < 0$, якщо $x \in (0; 1)$ і $x \in (1; +\infty)$. Але в точках $x_2 = -1$ і $x_4 = 1$ наша функція є неперервною. Отже, розглядувана функція є зростаючою на проміжку $(-\infty; 0)$ і є спадною на проміжку $(0; +\infty)$. Вона також є зростаючою на проміжку $(-\infty; 0]$ і є спадною на проміжку $[0; +\infty)$.

Приклад 3. Якщо $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, то $D(f) = (0; +\infty)$ і $f'(x) = 2x - 2/x$. Тоді $\frac{x^2 - 1}{x} = 0$, якщо $f'(x) = 0$. Отримуємо точки $x_1 = 0$, $x_2 = 1$ і $x_3 = +\infty$ (областю визначення розглядуваної функції f є проміжок $(0; +\infty)$ і тому точки $-\infty$ та -1 не розглядаємо). Таким чином, розглядаємо два проміжки $(0; 1)$ і $(1; +\infty)$. Оскільки $f'(1/2) = -3 < 0$ і $f'(2) = 3 > 0$, то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що $f'(x) < 0$, якщо $x \in (0; 1)$ і $f'(x) > 0$, якщо $x \in (1; +\infty)$. Отже, розглядувана функція є спадною на проміжку $(0; 1)$ і зростаючою на проміжку $(1; +\infty)$. Вона також є спадною на проміжку $(0; 1]$ і є зростаючою на проміжку $[1; +\infty)$.

Приклад 4. Якщо $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$, то $D(f) = [-1; 1]$ і $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$. Тоді $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$, якщо $f'(x) = 0$. Отримуємо точки $x_1 = -1$, $x_2 = -1/\sqrt{2}$, $x_3 = 1/\sqrt{2}$ і $x_4 = 1$. Таким чином, розглядаємо проміжки $(-1; -1/\sqrt{2})$, $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ і $(1/\sqrt{2}; 1)$. Оскільки $f'(-3/4) < 0$, $f'(0) > 0$ і $f'(3/4) < 0$, то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що $f'(x) < 0$, якщо $x \in (-1; -1/\sqrt{2})$ і $x \in (1/\sqrt{2}; 1)$, а $f'(x) > 0$, якщо $x \in (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$. Отже, розглядувана функція є спадною на проміжках $(-1; -1/\sqrt{2})$ та $(1/\sqrt{2}; 1)$ (не можна повторювати типову помилку, говорячи, що вона є спадною на множині $(-1; -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; 1)$, бо $f(-3/4) < f(3/4)$!) і є зростаючою на проміжку $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$. Вона також є спадною на проміжках $[-1; -1/\sqrt{2}]$ та $[1/\sqrt{2}; 1]$ і є зростаючою на проміжку $[-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}]$.

Приклад 5. Якщо $f(x) = x^{2/3}$, то $D(f) = (-\infty; +\infty)$ і $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Тоді $f'(x) \neq 0$ і $f'(x)$ не існує в точці 0. Отримуємо точки $x_1 = -\infty$, $x_2 = 0$ і $x_3 = +\infty$. Таким чином, розглядаємо проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Оскільки $f'(-1) < 0$ і $f'(1) > 0$, то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що $f'(x) < 0$, якщо $x \in (-\infty; 0)$ і $f'(x) > 0$, якщо $x \in (0; +\infty)$. Отже, розглядувана функція є спадною на проміжку $(-\infty; 0)$ і є зростаючою на проміжку $(0; +\infty)$. Вона також є спадною на проміжках $(-\infty; 0]$ і є зростаючою на проміжку $[0; +\infty)$.

Приклад 6. Якщо $f(x) = x + 1/x$, то $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ і $f'(x) = 1 - 1/x^2$. Тоді $f'(x) = 0$, якщо $1 - 1/x^2 = 0$. Отримуємо точки $x_1 = -\infty$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ і $x_5 = +\infty$. Таким чином, розглядаємо проміжки $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$ і $(1; +\infty)$. Оскільки $f'(-2) > 0$,

$f'(-1/2) < 0$, $f'(1/2) < 0$ і $f'(2) > 0$, то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що $f'(x) < 0$, якщо $x \in (-1; 0)$ та $x \in (0; 1)$ і $f'(x) > 0$, якщо $x \in (-\infty; -1)$ та $x \in (1; +\infty)$. Отже, розглядувана функція є зростаючою на проміжках $(-\infty; -1)$ та $(1; +\infty)$ і є спадною на проміжках $(-1; 0)$ та $(0; 1)$. Вона також є зростаючою на проміжках $(-\infty; -1]$ та $[1; +\infty)$ і є спадною на проміжках $[-1; 0)$ та $(0; 1]$. Проте не є спадною на проміжках $[-1; 0]$ та $[0; 1]$, бо $0 \notin D(f)$. В даному випадку можна говорити, що функція є зростаючою на множині $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ і є спадною на множині $[-1; 0) \cup (0; 1]$, бо $f(x) < 0$, якщо $x < 0$ і $f(x) > 0$, якщо $x > 0$.

2.12. Екстремум. Необхідні і достатні умови екстремуму. Точка x_0 називається *точкою максимуму* функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)): f(x) \leq f(x_0).$$

Точка x_0 називається *точкою мінімуму* функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, якщо

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)): f(x) \geq f(x_0).$$

Точки мінімуму і максимуму мають спільну назву – *точки екстремуму*. Значення функції в точці максимуму називається *максимумом функції*, а значення функції в точці мінімуму називається *мінімумом функції*. Мінімуми і максимуми мають спільну назву – *екстремуми функції*. Можна сказати, що *екстремум функції* – це значення функції в точці екстремуму. Наприклад, для функції f , графік якої зображений на рис. 1, точки x_1 і x_3 є точками максимуму, точка x_2 є точкою мінімуму, точки x_1, x_2, x_3 є точками екстремуму, числа y_1 і y_3 є максимумами, число y_2 є мінімумом, а числа y_1, y_2 і y_3 є екстремумами. Деколи говорячи про екстремум, мінімум чи максимум функції додають слово *локальний*, тобто говорять локальний максимум, локальний мінімум і т.д. Слово локальний означає місцевий і підкреслює той факт, що, наприклад, локальний максимум не є обов'язково найбільшим значенням функції, а тільки є найбільшим в досить малому ε -околі відповідної точки.

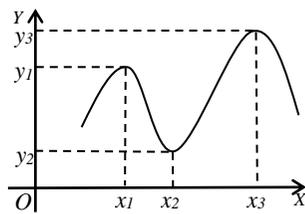


Рис. 1

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму) [2, 4]. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має в точці x_0 екстремум, то $f'(x_0)$ не існує або $f'(x_0) = 0$.

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулеві називаються *стаціонарними точками* функції. Точки з області визначення функції, в

яких похідна дорівнює нулеві або не існує називаються *критичними точками* або точками підозрілими на екстремум. Теорема 1 показує, що екстремум функція може мати лише в критичних точках. Проте не в кожній критичній точці функція має екстремум. Щоб дослідити функцію на екстремум спочатку потрібно знайти критичні точки, а потім перевірити, чи є в кожній критичній точці екстремум. Цю перевірку можна здійснювати використовуючи достатні умови екстремуму або виходячи з означення мінімуму і максимуму шляхом розгляду різниці $f(x) - f(x_0)$, де x_0 – критична точка.

Приклад 1. Якщо $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$, то $D(f) = (0; +\infty)$ і $f'(x) = x - \frac{1}{x}$. Тоді $\frac{x^2 - 1}{x} = 0$, якщо $f'(x) = 0$. Точка $x_1 = 1$ є стаціонарною точкою і є критичною точкою. Інших критичних точок ця функція не має, бо $-1 \notin D(f)$ і $0 \notin D(f)$.

Приклад 2. Якщо $f(x) = x^{2/3}$, $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$. Тоді $f'(x) \neq 0$ і $f'(x)$ не існує в точці 0. Ця функція не має стаціонарних точок. Точка $x_1 = 0$ є її єдиною критичною точкою.

Приклад 3. Точка $x_0 = 0$ є стаціонарною точкою функції $f(x) = x^3$, але екстремуму в цій точці ця функція не має.

Теорема 2 (перша достатня умова екстремуму) [2, 4]. Нехай функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною в точці x_0 і за деякого $\delta > 0$ має похідну на проміжку $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, за винятком, можливо, точки x_0 . Тоді: 1) якщо $(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)) : f'(x) > 0$ і $(\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)) : f'(x) < 0$, то точка x_0 є точкою максимуму; 2) якщо $(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)) : f'(x) < 0$ і $(\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)) : f'(x) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму; 3) якщо на проміжках $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$ функція f' приймає значення однакового знаку (+ або -), то x_0 не є точкою екстремуму функції f .

Приклад 4. Якщо $f(x) = x^3 - 12x$, то $D(f) = (-\infty; +\infty)$ і $f'(x) = 3x^2 - 12$. Точки $x_1 = -2$ і $x_2 = 2$ є стаціонарними точками. Тому розглядаємо проміжки $(-\infty; -2)$, $(-2; 2)$ і $(2; +\infty)$. Оскільки $f'(-3) > 0$, $f'(0) < 0$ і $f'(3) > 0$, то точка $x_1 = -2$ є точкою максимуму і $f(-2) = 16$ – максимум, а точка $x_2 = 2$ є точкою мінімуму і $f(2) = -16$ – мінімум.

Приклад 5. Якщо $f(x) = x^{1/3}$, то $D(f) = (-\infty; +\infty)$ і $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$. Стаціонарних точок ця функція не має. Точка $x_1 = 0$ є її єдиною критичною точкою. Тому розглядаємо проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Оскільки $f'(-1) > 0$ і $f'(1) > 0$, то точка $x_1 = 0$ не є точкою екстремуму і екстремумів функція не має.

Приклад 6. Якщо $f(x) = x^3 + x$, то $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $f'(x)$ існує всюди і $f'(x) \neq 0$. Тому екстремумів функція не має.

Приклад 7. Якщо $f(x) = (x-2)^2(x+1)^3$, то $D(f) = (-\infty; +\infty)$ і $f'(x) = (5x-4)(x-2)(x+1)^2$. Точки $x_1 = -1$, $x_2 = 4/5$ і $x_3 = 2$ є стаціонарними точками. Тому розглядаємо проміжки $(-\infty; -1)$, $(-1; 4/5)$, $(4/5; 2)$ і $(2; +\infty)$. Оскільки $f'(-2) > 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$ і $f'(3) > 0$, то в точці $x_1 = -1$ функція екстремуму не має, точка $x_2 = 4/5$ є точкою максимуму і $f(4/5) = \frac{26244}{3125}$ – максимум, точка $x_3 = 2$ є точкою мінімуму і $f(2) = 0$ – мінімум.

Теорема 3 (друга достатня умова екстремуму) [2, 4]. Нехай точка x_0 є стаціонарною точкою функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f''(x_0)$ існує. Тоді: 1) якщо $f''(x_0) < 0$, то точка x_0 є точкою максимуму функції f ; 2) якщо $f''(x_0) > 0$, то точка x_0 є точкою мінімуму функції f .

Приклад 8. Якщо $f(x) = x^3 - 3x$, то $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $f'(x) = 3x^2 - 3$, точки $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$ є стаціонарними, $f''(x) = 6x$, $f''(-1) = -6$ і $f''(1) = 6$. Тому точка $x_1 = -1$ є точкою максимуму і $f(-1) = 2$ – максимум, а точка $x_2 = 1$ є точкою мінімуму і $f(1) = -2$ – мінімум функції.

Зауваження 1. Якщо $f''(x_0) = 0$, то x_0 може бути точкою екстремуму, а може і не бути, на що вказують функції $f(x) = x^3$ і $f(x) = x^4$, перша з яких не має екстремуму в стаціонарній точці $x_0 = 0$ і для неї $f''(x_0) = 0$, а друга функція має екстремум в стаціонарній точці $x_0 = 0$ і для неї $f''(x_0) = 0$.

Теорема 4 (третя достатня умова екстремуму) [2, 4]. Нехай в точці x_0 функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ має всі похідні до порядку $n \in \mathbb{N}$ включно і

$f^{(m)}(x_0) = 0$, $m \in \overline{0; n-1}$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$. Тоді: 1) якщо n – парне число, то у випадку $f^{(n)}(x_0) < 0$ точка x_0 є точкою максимуму функції f , а у випадку $f^{(n)}(x_0) > 0$ точка x_0 є точкою мінімуму функції f ; 2) якщо n – непарне число, то x_0 не є точкою екстремуму функції f .

Приклад 9. Якщо $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x + 2$, то $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$, $f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$, $f^{(3)}(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$, $f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$, $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = 0$ і $f^{(4)}(0) = 2$. Тому функція $f(x) = \operatorname{sh} x - \sin x + 2$ має в точці $x_0 = 0$ мінімум і $f(0) = 2$.

2.13. Найбільше і найменше значення функції на замкненому проміжку. За другою теоремою Вейерштрасса неперервна на замкненому проміжку $[a; b]$ функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ приймає на цьому проміжку найбільше і найменше значення. Проте, ця теорема не вказує способу їх знаходження. Найбільше або найменше значення на $[a; b]$ функція f може приймати або в середині проміжку або на кінцях проміжку. Якщо найбільше або найменше значення на $[a; b]$ функція f приймає у внутрішній точці проміжку, то ця точка є точкою локального екстремуму. Звідси випливає, що найбільше і найменше значення на проміжку $[a; b]$ функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на $[a; b]$ можна знаходити так [2, 4]: 1) знайти всі критичні точки функції f , які належать $(a; b)$; 2) знайти значення функції в цих критичних точках та на кінцях проміжку і серед цих значень вибрати найбільше і найменше. *Найбільше значення функції f на $[a; b]$ називається глобальним максимумом f на $[a; b]$ і позначається $M = \max\{f(x) : x \in [a; b]\}$ або $M = \max_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$, а найменше значення – глобальним мінімумом на $[a; b]$ і позначається $m = \min\{f(x) : x \in [a; b]\}$ або $m = \min_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$.*

Неперервна на відкритому проміжку $(a; b)$ функція $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ не обов'язково приймає на $(a; b)$ найбільше і найменше значення. Проте, якщо приймає, то відповідна точка є точкою локального екстремуму.

Приклад 1. Знайдемо найбільше значення функції $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$ на проміжку $[0; 3]$. Оскільки $f'(x) = x^2 + 3x - 4$, точки $x_1 = -4$ і $x_2 = 1$ є стаціонарними точками функції, $x_1 \notin [0; 3]$, $f(0) = 0$, $f(1) = -13/6$, $f(3) = 21/2$ і $M = \max\{f(x) : x \in [0; 3]\} = f(3) = 21/2$.

Приклад 2. Знайдемо множину значень функції $f(x) = xe^{-x}$.

Оскільки $D(f) = (-\infty; +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$,

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$, $f'(x) = (1-x)e^{-x}$, точка $x_1 = 1$ є єдиною

точкою максимуму функції, $f(1) = 1/e$, множиною значень функції на проміжках $(-\infty; 1)$ і $(1; +\infty)$ є відповідно проміжки $(-\infty; 1/e)$ і $(0; 1/e)$, то $E(f) = (-\infty; 1/e)$.

2.14. Опуклість і точки перегину. Функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається опуклою на проміжку $[a; b]$, якщо $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$ для будь-яких $x_1 \in [a; b]$, $x_2 \in [a; b]$ і $\alpha \in [0; 1]$.

Теорема 1 [2, 4]. Для того щоб функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ була опуклою на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб

$$f(x) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

для будь-яких x_1, x і x_2 , $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$.

Теорема 1 дає можливість геометрично інтерпретувати опуклі функції. Власне, через точки $A_1(x_1; f(x_1))$ і $A_2(x_2; f(x_2))$, де $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, проведемо пряму. Ця пряма задається рівнянням

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

тобто

$$y = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Бачимо, що функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $[a; b]$ тоді і тільки тоді, коли для будь-яких x_1 і x_2 , $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, її графік на проміжку $[x_1; x_2]$ лежить не вище прямої A_1A_2 .

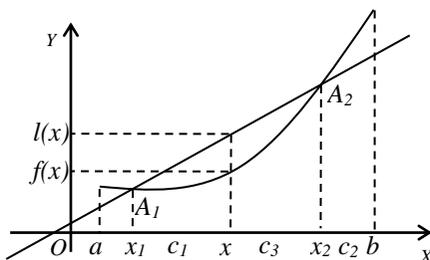


Рис. 1

Функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ називається *опуклою* на відкритому проміжку $(a;b)$, якщо вона є опуклою на кожному замкненому проміжку $[a_1;b_1] \subset (a;b)$.

Теорема 2 (достатня умова опуклості) [2, 4]. Якщо $(\forall x \in (a;b)): f''(x) \geq 0$, то функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $(a;b)$.

Наслідок 1. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a;b]$ і $(\forall x \in (a;b)): f''(x) \geq 0$, то функція f є опуклою на $[a;b]$.

Функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається *вгнутою* на проміжку $[a;b]$, якщо $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$ для будь-яких $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$ і $\alpha \in [0;1]$. Функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ називається *вгнутою* на $(a;b)$, якщо вона є вгнутою на кожному проміжку $[a_1;b_1] \subset (a;b)$.

Теорема 3 (достатня умова вгнутості) [2, 4]. Якщо $(\forall x \in (a;b)): f''(x) \leq 0$, то функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є вгнутою на проміжку $(a;b)$.

Приклад 1. Функція $f(x) = e^x$ є опуклою на проміжку $(-\infty; +\infty)$, бо $f''(x) = e^x$ і $f''(x) > 0$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 2. Функція $f(x) = \ln x$ є вгнутою на проміжку $(0; +\infty)$, бо $f''(x) = -1/x^2$ і $f''(x) < 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$.

Приклад 3. Функція $f(x) = x$ є вгнутою на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і опуклою на цьому проміжку, бо $f''(x) = 0$ для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$.

Приклад 4. Функція $f(x) = x^3$ є опуклою на проміжку $[0; +\infty)$ і вгнутою на проміжку $(-\infty; 0]$, бо $f''(x) = 6x$ і $f''(x) > 0$ для всіх $x \in (0; +\infty)$ і $f''(x) < 0$ для всіх $x \in (-\infty; 0)$.

Приклад 5. Функція $f(x) = x^{2/3}$ є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$, вгнутою на кожному з проміжків $(-\infty; 0]$ і $[0; +\infty)$, не є вгнутою на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і не має похідної в точці $x_0 = 0$.

Точка $x_0 \in (a;b)$ називається *точкою перегину* функції f , якщо вона є неперервною в цій точці і для деякого $\delta > 0$ на проміжку $[x_0 - \delta; x_0]$ є вгнутою, а на проміжку $[x_0; x_0 + \delta]$ є опуклою або навпаки. Якщо точка x_0 є точкою перегину функції f , то точка $(x_0; f(x_0))$ називається *точкою перегину графіка* функції f .

Теорема 4 [2, 4]. Якщо функція f має на проміжку $(a;b)$ другу похідну, функція f'' є неперервною в точці x_0 і точка x_0 є точкою перегину функції f , то $f''(x_0) = 0$.

Теорема 5 [2, 4]. Якщо точка x_0 є точкою перегину функції f , то $f''(x_0) = 0$ або $f''(x_0)$ не існує.

Цю теорему можна отримати довівши теорему 4, що для опуклих функцій в кожній точці існує права похідна, яка є неспадною функцією.

Таким чином, за виконання відповідних умов точки перегину і проміжки опуклості та вгнутості функції можна знаходити наступним чином: 1) знайти точки x_k , в яких друга похідна функції дорівнює нулеві, або не існує, або є кінцями проміжків визначення; 2) розглянути проміжки $(x_k; x_{k+1})$, які належать області визначення функції і знайти знак другої похідної на кожному з них; 3) користуючись означеннями та наведеними вище теоремами знайти проміжки опуклості, проміжки вгнутості та точки перегину.

Приклад 6. Якщо $f(x) = x^3$, то $f''(x) = 6x$ і $f''(x) = 0$, якщо $x = 0$. Тому маємо точки $x_1 = -\infty$, $x_2 = 0$ і $x_3 = +\infty$ та проміжки $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. При цьому, $f''(-1) = -6 < 0$ і $f''(1) = 6 > 0$. Отже, розглядувана функція є вгнутою на проміжку $(-\infty; 0)$, опуклою на проміжку $(0; +\infty)$ і точка $x_2 = 0$ є точкою її перегину.

Приклад 7. Якщо $f(x) = \operatorname{tg} x$, то $f''(x) = 2 \sin x / \cos^3 x$, $f''(x) = 0$ в точках $x_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$ і $f''(x)$ не існує в точках $x_k = \pi k + \pi/2$, $k \in \mathbb{Z}$. Тому отримуємо проміжки, $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$ та $(\pi k; \pi k + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$. На кожному з проміжків $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$ друга похідна є від'ємною, а на кожному з проміжків $(\pi k; \pi k + \pi/2)$ друга похідна є додатною. Тому проміжки $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$, є проміжками вгнутості, проміжки $(\pi k; \pi k + \pi/2)$, $k \in \mathbb{Z}$, є проміжками опуклості, а точки $x_k = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, є точками перегину.

Приклад 8. Якщо $f(x) = e^{x^2}$, то $f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$ і $f''(x) \neq 0$. Тому маємо дві точки $x_1 = -\infty$ і $x_2 = +\infty$ та проміжок $(-\infty; +\infty)$. Оскільки $f''(0) = 2 > 0$, то на проміжку $(-\infty; +\infty)$ функція є опуклою, а точок перегину нема.

Функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається *строго опуклою* на проміжку $[a;b]$, якщо $f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2)$ для будь-яких $x_1 \in [a;b]$, $x_2 \in [a;b]$ і $\alpha \in [0;1]$. Функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ називається *строго опуклою* на $(a;b)$, якщо вона є строго опуклою на кожному проміжку $[a_1;b_1] \subset (a;b)$.

Наслідок 2. Якщо $(\forall x \in (a;b)): f''(x) > 0$, то функція f є строго опуклою на $(a;b)$.

Приклад 9. Якщо функція $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $(a;b)$, то $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$ для будь-яких точок $x_1 \in (a;b)$ і $x_2 \in (a;b)$. Для отримання цього досить в означенні опуклості взяти $\alpha = 1/2$.

Приклад 10. Функція $f(x) = e^x$ є опуклою на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Тому $e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$ для будь-яких $x \in \mathbb{R}$ і $y \in \mathbb{R}$.

2.15. Асимптоти. Похилою асимптотою функції $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в $+\infty$ або при $x \rightarrow +\infty$ називається така пряма $y = kx + b$, для якої $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$. Число $\Delta = |f(x) - kx - b|$ – це відстань між точками графіків функцій $y = kx + b$ і $y = f(x)$ з однаковою абсцисою, рівною x .

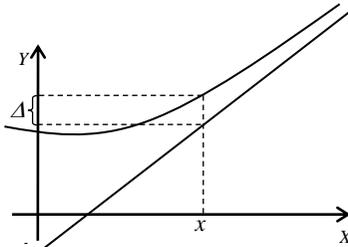


Рис. 1.

Теорема 1 [2, 4]. Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \tag{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b, \tag{2}$$

то пряма $y = kx + b$ є похилою асимптотою функції f в $+\infty$. Якщо ж принаймні одна з границь (1) або (2) не існує або рівна ∞ , то похилої асимптоти в $+\infty$ функція f не має.

Аналогічно визначається асимптота в $-\infty$ і в ∞ .

Вертикальною асимптотою функції f називається така пряма $x = x_0$, що принаймні одна з границь $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ рівна ∞ .

Приклад 1. Якщо $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$, то

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Тому прямі $y = x + \pi/2$ і $y = x - \pi/2$ є похилими асимптотами функції f в $+\infty$ і в $-\infty$ відповідно. Похилої асимптоти в ∞ ця функція не має.

Не має вона також вертикальних асимптот.

Приклад 2. Нехай $f(x) = 1/x$. Тоді

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0) = 0.$$

Тому пряма $y = 0$ є похилою асимптотою функції f в ∞ . Крім цього, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. Тому пряма $x = 0$ є вертикальною асимптотою цієї функції.

2.16. Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків. Дослідження функцій і побудову їх графіків можна здійснювати за наступною схемою [2, 4]. Знайти область визначення, множини точок неперервності і точок розриву. Знайти асимптоти функцій. Знайти проміжки монотонності, точки екстремуму і екстремуми. Дослідити функцію на парність і періодичність. Знайти проміжки опуклості і точки перегину графіка функції. Зобразити графік функції. Інколи доцільно ще знайти координати точок перетину з осями координат та провести додаткові дослідження.

Приклад 1. Дослідимо функцію $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$ і зобразимо її

графік. 1. Оскільки задана функція є раціональною, то вона невизначена в тих точках, де знаменник дорівнює нулеві: $x^2 - 1 = 0$. Отже, областю визначення заданої функції є множина $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

Функція є неперервною на області визначення. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

то точки $x_1 = -1$ і $x_2 = 1$ є точками розриву другого роду. 2. Знаходимо асимптоти. Оскільки

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2 - 1)x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

то пряма $y = x$ є похилою асимптотою. Прямі $x = -1$ і $x = 1$ є вертикальними асимптотами. 3. Функція є неперіодичною і непарною, бо

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

4. Знайдемо проміжки монотонності. Оскільки

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} > 0$$

для $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$, то функція є зростаючою на проміжках $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(\sqrt{3}; +\infty)$ і є спадною на проміжках $(-\sqrt{3}; -1)$, $(-1; 1)$ і $(1; \sqrt{3})$. Знайдемо точки екстремуму і екстремуми. Розв'язавши рівняння

$$f'(x) = 0, \quad \text{тобто рівняння} \quad \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0, \quad \text{знаходимо, що точки}$$

$x_1 = -\sqrt{3}$, $x_2 = 0$ і $x_3 = \sqrt{3}$ є підозрілими на екстремум. Оскільки похідна в точці x_1 змінює знак з "+" на "-", в точці x_2 не змінює знак, а в точці x_3 змінює знак з "-" на "+", то точка x_1 є точкою максимуму, точка x_2 не є точкою екстремуму, а точка x_3 є точкою мінімуму і

$$y_{\min} = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y_{\max} = f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5. Знайдемо проміжки опуклості і точки перегину. Оскільки

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2(4x^3 - 6x) - 2(x^4 - 3x^2)(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} > 0$$

для $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$, то функція є опуклою на проміжках $(-1; 0)$, $(1; +\infty)$ і вгнутою на проміжках $(-\infty; -1)$, $(0; 1)$. Оскільки єдиним коренем рівняння $f''(x) = 0$ є $x = 0$ і в точці $x = 0$ друга похідна змінює

знак з "+" на "-", то ця точка є точкою перегину функції, а точка (0;0) є точкою перегину графіка функції. 6. Точка (0;0) є точкою перетину графіка функції з осями координат. Дослідимо поведінку функції в точках $-\infty$ і $+\infty$. Маємо

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

7. Зображуємо графік функції.

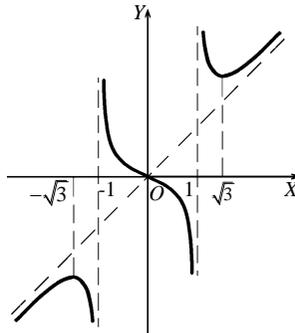


Рис. 1

2.17. Запитання для самоконтролю.

1. Дайте означення похідної функції в точці.
2. Дайте означення дотичної до графіка функції і напишіть її рівняння.
3. Опишіть геометричний зміст похідної.
4. Наведіть приклад функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такої, що $f'(0) = 1$, а $f''(0)$ не існує.
5. Наведіть приклад функції, дотична до графіка якої перетинає його в двох точках.
6. Наведіть приклад функції графік якої в точці (0;0) має вертикальну дотичну.
7. Сформулюйте означення другої похідної.
8. Сформулюйте означення диференційовної функції і диференціала.
9. Запишіть основні правила знаходження диференціала.
10. Інтерпретуйте геометричний зміст диференціала.
11. Інтерпретуйте інваріантність форми першого диференціала.
12. Сформулюйте означення другої похідної і запишіть основні правила знаходження n -ої похідної.
13. Сформулюйте означення другого диференціала і запишіть основні формули для знаходження n -го диференціала.

14. Сформулюйте означення точок мінімуму, максимуму і екстремуму.
15. Сформулюйте означення мінімуму, максимуму і екстремуму.
16. Сформулюйте означення стаціонарних і критичних точок.
17. Сформулюйте необхідну умову екстремуму.
18. Сформулюйте означення опуклої функції.
19. Сформулюйте означення вгнутої функції.
20. Сформулюйте означення точки перегину.
21. Сформулюйте означення похилої і вертикальної асимптот.
22. Наведіть приклад функції такої, що її асимптота перетинає її графік у двох точках.
23. Завершіть написання формули $(c)' =$ і доведіть її.
24. Завершіть написання формули $(x^u)' =$ і доведіть її.
25. Завершіть написання формули $(e^x)' =$ і доведіть її.
26. Завершіть написання формули $(\ln x)' =$ і доведіть її.
27. Завершіть написання формули $(\sin x)' =$ і доведіть її.
28. Завершіть написання формули $(\cos x)' =$ і доведіть її.
29. Завершіть написання формули $(\operatorname{tg} x)' =$ і доведіть її.
30. Завершіть написання формули $(\operatorname{ctg} x)' =$ і доведіть її.
31. Завершіть написання формули $(\arcsin x)' =$ і доведіть її.
32. Завершіть написання формули $(\arccos x)' =$ і доведіть її.
33. Завершіть написання формули $(\operatorname{arctg} x)' =$ і доведіть її.
34. Завершіть написання формули $(\operatorname{arcctg} x)' =$ і доведіть її.
35. Завершіть написання формули $(\operatorname{sh} x)' =$ і доведіть її.
36. Завершіть написання формули $(\operatorname{ch} x)' =$ і доведіть її.
37. Сформулюйте теорему про неперервність суми, добутку і частки двох неперервних функцій.
38. Сформулюйте теорему про неперервність складеної функції.
39. Сформулюйте теорему про неперервність функції, яка має похідну.
40. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну суми.
41. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну добутку і наслідок з неї.
42. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну частки.
43. Сформулюйте теорему про похідну композиції функцій.
44. Сформулюйте теорему про похідну оберненої функції.
45. Сформулюйте теорему про зв'язок між існуванням похідної і диференційовністю.
46. Сформулюйте теорему про похідну функції, заданої параметрично.
47. Сформулюйте теорему Ферма.

48. Чи можна в теоремі Ферма проміжок $(a;b)$ замінити проміжком:
 1. $[a;b]$, 2. $(a;b]$, 3. $[a;b)$?
49. Сформулюйте теорему Ролля.
 50. Сформулюйте теорему Лагранжа.
 51. Сформулюйте теорему Коші про середнє.
 52. Сформулюйте перше правило Лопітала.
 53. Сформулюйте друге правило Лопітала.
 54. Сформулюйте теорему про формулу Тейлора для довільної функції з додатковим членом у формі Коші і Лагранжа.
 55. Сформулюйте теорему про формулу Тейлора для довільної функції з додатковим членом у формі Пеано.
 56. Сформулюйте теорему про умови постійності функції.
 57. Сформулюйте теорему про умови монотонності функції.
 58. Наведіть приклад зростаючої на $(-\infty; +\infty)$ функції f , яка не має похідної в трьох точках.
 59. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму в термінах першої похідної.
 60. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму в термінах другої похідної.
 61. Сформулюйте теорему про достатні умови екстремуму в термінах n -ої похідної.
 62. Сформулюйте теорему про достатні умови опуклості функції.
 63. Наведіть приклад функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, яка є опуклою на кожному і проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$, але не є опуклою на $(-\infty; +\infty)$.
 64. Сформулюйте теорему про асимптоти функції.
 65. Наведіть приклад функції, асимптота якої перетинає її графік.

2.18. Вправи і задачі.

1. Знайдіть похідну функції у вказаній точці:

1. $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}$, $x_0 = 1$.

2. $f(x) = \frac{2}{x}$, $x_0 = -1$.

3. $f(t) = \frac{1}{2t}$, $t_0 = -1$.

4. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, $x_0 = 1$.

5. $f(x) = \frac{2}{x^3}$, $x_0 = 1$.

6. $f(u) = 2u - 4 + \sqrt{2}u^2$, $u_0 = 0$.

7. $f(x) = \frac{x}{4} + \sqrt{2} - \frac{2}{x^2}$, $x_0 = -1$.

8. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}} + x^2\sqrt{2}$, $x_0 = 1$.

9. $f(s) = s^{\sqrt{2}}$, $s_0 = 1$.

10. $f(x) = \sqrt{2}x^{-\sqrt{3}} + \pi^{-\sqrt{2}}$, $x_0 = 1$.

11. $f(x) = e^{\sqrt{\pi}} + x^{\pi^2}$, $x_0 = 1$. 12. $f(x) = x^5 \sqrt{x} + 2x\sqrt{2x}$, $x_0 = 1$.
13. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x}} + \frac{\sqrt{2x}}{x^3}$, $x_0 = 1$. 14. $f(y) = 4 - 2^y + \log_2 3$, $y_0 = 0$.
15. $f(\tau) = \sqrt{\tau} + \frac{1}{\tau}$, $\tau_0 = 1$. 16. $f(x) = 2 \sin x + \ln 2$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
17. $f(x) = e^2 \cos x$, $x_0 = 0$. 18. $f(x) = -2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 1$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$.
19. $f(x) = e^{\sin \sqrt{2}} \operatorname{ch} x$, $x_0 = 0$. 20. $f(w) = \frac{\operatorname{sh} w}{e^{\sqrt{2}}}$, $w_0 = 1$.
21. $f(x) = e^{\sin \sqrt{2}} + \ln x$, $x_0 = e$. 22. $f(x) = \arcsin x + \ln 3$, $x_0 = -1$.
23. $f(x) = \sqrt{3} \arccos x$, $x_0 = 0$. 24. $f(x) = \operatorname{arctg} x + \ln \frac{1}{2}$, $x_0 = 1$.
25. $f(y) = \frac{y^2}{2} + \operatorname{arctg} y$, $y_0 = 1$. 26. $f(x) = \frac{\lg \frac{1}{3}}{2} + \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 1$.
27. $f(x) = \frac{\sin x}{4} + \frac{\cos x}{2}$, $x_0 = \pi/2$. 28. $f(x) = 1 + \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$, $x_0 = 1$.
29. $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{arctg} x}{2}$, $x_0 = 1$. 30. $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \operatorname{ch} x$, $x_0 = 0$.

2. Знайдіть похідну функції:

1. $y = x^2 e^x$. 2. $y = (x^2 + 1) \ln x$.
3. $y = (2x^3 + 6) \cos x$. 4. $y = \sqrt{x} \sin x$.
5. $y = x \arccos x$. 5. $y = x^2 \operatorname{arctg} x$.
6. $y = x \arcsin x$. 6. $y = x^2 \arccos x$.
7. $y = e^x \operatorname{ch} x$. 7. $y = \ln x \operatorname{ch} x$.
8. $y = \sin x (\operatorname{tg} x + 1)$. 8. $y = (\cos x + 1) \operatorname{ctg} x$.
9. $y = \frac{x+1}{x-1}$. 9. $y = \frac{x^2 - 1}{2x}$.
10. $y = \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}$. 10. $y = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$.
11. $y = \frac{1}{1 - \ln x}$. 11. $y = \frac{1}{1 - e^x}$.

19. $y = \frac{1}{2 - \sin x}$.

21. $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$.

23. $y = \frac{1}{x - \arcsin x}$.

25. $y = \frac{1}{x \operatorname{sh} x}$.

27. $y = \frac{1}{x + \operatorname{tg} x}$.

29. $y = \frac{1}{x^3 + 1}$.

20. $y = \frac{1}{3 - \cos x}$.

22. $y = \frac{1}{1 - x^4}$.

24. $y = \frac{1}{2 \operatorname{arctg} x}$.

26. $y = \frac{1}{2 \operatorname{ch} x}$.

28. $y = \frac{1}{x - \operatorname{ctg} x}$.

30. $y = \frac{1}{1 - x^4}$.

3. Знайдіть похідну функції:

1. $y = x^{-x}$.

3. $y = x^{\sin x \cos x}$.

5. $y = x^{2\sqrt{x}}$.

7. $y = x^{-x \cos x}$.

9. $y = \sin x^{\sqrt{x}}$.

11. $y = \operatorname{arctg}(2x^3)$.

13. $y = e^{\sin^2 x}$.

15. $y = e^{-\sin^2(1-3x)}$.

17. $y = e^{-4\sin^2 \sqrt{4x}}$.

19. $y = \ln \ln \ln^2 x$.

21. $y = e^{\sin^3 \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}$.

23. $y = (1-7x)^{10}$.

25. $y = \operatorname{sh}^2(1-x)^8$.

27. $y = e^{\operatorname{arctg}^2 x^2}$.

29. $y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$.

2. $y = \lg x^{\operatorname{tg} x}$.

4. $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1 - e^x}}$.

6. $y = x^{x^3}$.

8. $y = \arcsin^2(4x-1)$.

10. $y = x^{-x}$.

12. $y = \arccos^2(7-2x)$.

14. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{5x}$.

16. $y = \operatorname{tg}^3(1-3x^2)$.

18. $y = \ln \ln^2 x$.

20. $y = \ln \arcsin x$.

22. $y = \sin e^{2\cos x}$.

24. $y = (\sqrt{1-x})^{101}$.

26. $y = \operatorname{tg}^2(1-2x^2)^8$.

28. $y = \ln^2 \operatorname{ch}^3 4x$.

30. $y = \frac{1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$.

4. Знайдіть похідну функції:

1. $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
2. $y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{-2x} + 1}$.
3. $y = x^2 \sin^2 x$.
4. $y = \sqrt{x-1} e^{-2x}$.
5. $y = \operatorname{sh} 2x \cdot \cos 2x$.
6. $y = \operatorname{ch}(1-2x) \cdot \sin(1-2x)$.
7. $y = (1+2x)^5 (1-2x)^{10}$.
8. $y = (1-x)^7 (1+2x)^6$.
9. $y = x^9 (1-9x)^9$.
10. $y = (1-2x)^2 (x-1)(1+2x)^8$.
11. $y = x e^x \cos x$.
12. $y = x^2 2^x \operatorname{tg} x$.
13. $y = x \cdot \cos x \cdot e^x \cdot \operatorname{ctg} x$.
14. $y = x^3 \cdot \ln x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{arctg} x$.
15. $y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, a > 0$.
16. $y = \frac{\sqrt{3}}{1-2x}$.
17. $y = \frac{a^2 + \sqrt{3}}{(1-4x)^2}, a > 0$.
18. $y = \frac{1+a^2}{(1-x)^8}, a > 0$.
19. $y = \frac{1+2x}{\ln(1+2x)}$.
20. $y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}$.
21. $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.
22. $y = \frac{1-x}{\ln(1+x)}$.
23. $y = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}$.
24. $y = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}$.
25. $y = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 + \sin^2 x}$.
26. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.
27. $y = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}$.
28. $y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.
29. $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{\cos x}}$.
30. $y = \ln \frac{3-x^2}{2-x^2}$.

5. Знайдіть диференціал функції:

1. $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^{\sqrt{2}}} + \frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$.
2. $f(x) = \sin(x - x^2)$.
3. $f(x) = (1-x)^7$.
4. $f(x) = (1-2x)^{-5}$.

$$5. f(x) = \frac{1}{\sin(1-x)}.$$

$$6. f(x) = \sin^2 2x.$$

6. Обчисліть приблизно з використанням диференціала:

$$1. \sqrt{9,01}.$$

$$2. \sqrt{\frac{4,1^2 + 4}{4,1^2 - 12}}.$$

$$3. \sqrt{\frac{2,037^2 - 3}{2,037^2 + 5}}.$$

$$4. \arctg 1,05.$$

$$5. \sin 29^\circ.$$

$$6. \cos 151^\circ.$$

7. Знайдіть похідну функції порядку n :

$$1. y = \frac{\ln x}{x}, n = 6.$$

$$2. y = x \ln x, n = 5.$$

$$3. y = e^x x^2, n = 10.$$

$$4. y = e^x / x, n = 8.$$

$$5. y = e^x \sin x, n \in \mathbb{N}.$$

$$6. y = e^x \cos x, n \in \mathbb{N}.$$

$$7. y = e^x \operatorname{sh} x, n = 4.$$

$$8. y = e^x \operatorname{ch} x, n \in 4.$$

$$9. y = x^4 \operatorname{sh} x, n = 5.$$

$$10. y = x^2 \operatorname{ch} x, n = 4.$$

$$11. y = x^3 \ln x, n = 5.$$

$$12. y = x^3 \ln(1+x^2), n = 4.$$

8. Знайдіть першу та другу похідну функції f , заданої параметрично:

$$1. \begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 3t - t^2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = \cos t - \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{t}, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

9. Напишіть рівняння дотичної і нормалі до графіка функції f в точці $(x_0; f(x_0))$:

$$1. f(x) = x^3, x_0 = 0.$$

$$2. f(x) = x^{2/3}, x_0 = 0.$$

$$3. f(x) = \sin x, x_0 = \pi/2.$$

$$4. f(x) = \cos x, x_0 = \pi/2.$$

$$5. f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1.$$

$$6. f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \pi/4.$$

$$7. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad x_0 = \pi. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad x_0 = 1/8. \end{cases}$$

10. Знайдіть диференціали вказаного порядку:

$$1. y = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}, \quad n = 2.$$

$$2. y = x^{2/3}, \quad n = 2.$$

$$3. y = (x+1)^3(x-1)^2, \quad n = 2.$$

$$4. y = \frac{e^x}{x}, \quad n = 3.$$

$$5. y = x^3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$6. y = \frac{x}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

11. Знайдіть границю за правилом Лопітала:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0+} (-\ln x)^x.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0+} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\cos \sqrt{x} \right)^{1/x^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0+} (\arcsin 2x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(1-x^4) - 5(1-x^5)}{(1-x^4)(1-x^5)}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \left(\frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{x} \right)}{\ln(1+x)}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} x^{10} \ln x.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)^x.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{x^2 + 1} \right)^{1/x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^7 \frac{x^k}{k!}}{x^8}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^2}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3^x}{3^x - 9}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 4^x}{2^x - 16}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\frac{1}{x^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x} \right).$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right) \sqrt{x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^2(1+x)}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

12. Знайдіть проміжки монотонності функції:

$$1. f(x) = 2 - 3x + x^3.$$

$$2. f(x) = (x^2 - 1)^{3/2}.$$

$$3. f(x) = xe^{-2x}.$$

$$4. f(x) = (2-x)(x+1)^2.$$

$$5. f(x) = x^3 - 12x + 11.$$

$$6. f(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}.$$

$$7. f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$$

$$8. f(x) = x^3 + 6x - 7.$$

$$9. f(x) = x + \cos x.$$

$$10. f(x) = x^3 - 3x - 2.$$

$$11. f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

$$12. f(x) = x^4 - 2x^2 - 8.$$

$$13. f(x) = 2x - \ln x.$$

$$14. f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7.$$

$$15. f(x) = (1 + 1/x)^x.$$

$$16. f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}.$$

$$17. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$18. f(x) = x^2 \ln x.$$

$$19. f(x) = x^2 - 10 \ln x.$$

$$20. f(x) = \exp(-3x).$$

$$21. f(x) = \exp(x)/x.$$

$$22. f(x) = (x-1)^3(2x+3)^2.$$

$$23. f(x) = 8x^3 - x^4.$$

$$24. f(x) = xe^x.$$

$$25. f(x) = x^3 - 3x - \ln x.$$

$$26. f(x) = 2e^{2x} - 4e^x.$$

$$27. f(x) = \frac{1-x+x^2}{1+x+x^2}.$$

$$28. f(x) = x^2 + 1/x^2.$$

$$29. f(x) = x + \ln(x^2 - 4).$$

$$30. f(x) = \frac{x^3}{9 - x^3}.$$

13. Знайдіть екстремуми функції:

$$1. f(x) = 6x - x^3.$$

$$2. f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1.$$

$$3. f(x) = \frac{x}{1 + x^3}.$$

$$4. f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}.$$

$$5. f(x) = xe^x.$$

$$6. f(x) = x^2e^x.$$

$$7. f(x) = x^3e^{-4x}.$$

$$8. f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x.$$

$$9. f(x) = \sin 2x - x.$$

$$10. f(x) = \ln \sin x.$$

$$11. f(x) = e^x - 2x - e^{-x}.$$

$$12. f(x) = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}.$$

$$13. f(x) = \frac{2^x}{x}.$$

$$14. f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}.$$

$$15. f(x) = x^2\sqrt{e}.$$

$$16. f(x) = 2\sin x + \cos 2x.$$

$$17. f(x) = x^4 - 8x^2 + 12.$$

$$18. f(x) = \frac{1}{x^2 - x}.$$

$$19. f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

$$20. f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x.$$

$$21. f(x) = x - 2\arctg x.$$

$$22. f(x) = \sqrt{x} \ln x.$$

$$23. f(x) = x^x.$$

$$24. f(x) = x + \sin x.$$

$$25. f(x) = (x^2 - 3)\ln x - \frac{3}{2}x^2.$$

$$26. f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}.$$

$$27. f(x) = (1+x)^2(x-2).$$

$$28. f(x) = x^4 + 6x^2 + 5.$$

$$29. f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2.$$

$$30. f(x) = \exp(\sqrt[3]{x}).$$

14. Знайдіть проміжки опуклості і точки перегину функції:

$$1. f(x) = e^{-x} + x^2.$$

$$2. f(x) = e^x + x.$$

$$3. f(x) = \operatorname{tg} x.$$

$$4. f(x) = x^4 - 12.$$

$$5. f(x) = x^x.$$

$$6. f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$$7. f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

$$8. f(x) = e^{-x^2}.$$

$$9. f(x) = \begin{cases} -e^x + \frac{4}{3}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{3}e^x, & x > 0. \end{cases}$$

$$10. f(x) = 1 + |x^2 - 4|.$$

$$11. \begin{cases} x = te^{-t}, \\ y = te^t. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = \frac{t^2}{4(1-t)}, \\ y = \frac{t^3}{8(1-t)}. \end{cases}$$

15. Знайдіть асимптоти функції:

$$1. f(x) = \frac{x^4}{4(x-2)}.$$

$$2. f(x) = 3x - \arcsin \frac{1}{x}.$$

$$3. f(x) = \frac{2x^2}{x-1}.$$

$$4. f(x) = \frac{3}{x^2 - x}.$$

$$5. f(x) = \sqrt{3x^2 - 4}.$$

$$6. f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+4)}.$$

$$7. f(x) = \ln \frac{x}{x+2} + 1.$$

$$8. f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$9. f(x) = \frac{x^4}{(1+x^2)(x^2-1)}.$$

$$10. f(x) = xe^{-1/x}.$$

$$11. f(x) = \frac{x^3}{x-1}.$$

$$12. f(x) = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x^3+3}}{x}.$$

$$13. f(x) = 2x + 1 - \frac{\sin 3x}{x^2 + 1}.$$

$$14. f(x) = x \arctg x.$$

$$15. f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x.$$

$$16. f(x) = \frac{e^x}{x}.$$

$$17. f(x) = x^2 e^{-x}.$$

$$18. f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}.$$

$$19. f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}.$$

$$20. f(x) = \frac{x}{2x-1} + 2x.$$

$$21. f(x) = 2x + \frac{\cos x}{x}.$$

$$22. f(x) = 2x + \frac{\sin^2 x}{x}.$$

$$23. f(x) = 2x + \sin x.$$

$$24. f(x) = -x - \cos x.$$

25. $f(x) = x + \arctg^2 x$.

26. $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x$.

27. $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + 1}$.

28. $f(x) = \frac{1 - x\sqrt{x^3 + 1}}{x}$.

29. $f(x) = \frac{2x^2 - 9}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

30. $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

16. Проведіть повне дослідження функції і зобразіть її графік:

1. $f(x) = e^{2-x^2}$.

2. $f(x) = xe^x$.

3. $f(x) = (4e^{x^2} - 1)e^{-x}$.

4. $f(x) = xe^{1/x}$.

5. $f(x) = (x+2)e^{1-x}$.

6. $f(x) = \frac{(1-x)^3}{(x-2)^2}$.

7. $f(x) = (x+1)e^{2x}$.

8. $f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$.

9. $y = x + \frac{1}{x+1}$.

10. $f(x) = \frac{(x-2)^2}{(x+1)^2}$.

11. $f(x) = x - \ln(1+x^2)$.

12. $f(x) = -x \ln^2 x$.

13. $f(x) = x\sqrt{\frac{x}{4-x}}$.

14. $f(x) = x + \ln(x^2 - 4)$.

15. $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$.

16. $y = \ln \frac{x+6}{x} - 1$.

17. $f(x) = (2+x)(x+1)^{-2}$.

18. $f(x) = x \ln^2 x$.

19. $f(x) = \frac{2(x+1)^2}{x-2}$.

20. $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$.

21. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.

22. $f(x) = \frac{x^3}{9-x^3}$.

23. $f(x) = \frac{4x}{4+x^2}$.

24. $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 6)$.

25. $f(x) = \ln(4-x^2)$.

26. $f(x) = \frac{(x-1)^2}{x+2}$.

27. $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$.

28. $f(x) = e^{-1/x^2}$.

$$29. f(x) = \frac{e^x}{16 - x^2}.$$

$$30. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}.$$

2.19. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть похідну функції:

$$1. y = xe^x.$$

$$2. y = x \ln x.$$

$$3. y = x^2 \cos x.$$

$$4. y = x \sin x.$$

$$5. y = \arcsin x \cdot \arccos x.$$

$$6. y = \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x.$$

$$7. y = x^2 \arcsin x.$$

$$8. y = x^3 \arccos x.$$

$$9. y = e^x \operatorname{sh} x.$$

$$10. y = x^2 \operatorname{ch} x.$$

$$11. y = \sin x \operatorname{tg} x.$$

$$12. y = \cos x \operatorname{ctg} x.$$

$$13. y = \frac{x-1}{x+1}.$$

$$14. y = \frac{2x}{x^2-1}.$$

$$15. y = \frac{1-x-x^2}{1+x+x^2}.$$

$$16. y = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}.$$

$$17. y = \frac{1}{2 \ln x}.$$

$$18. y = \frac{1}{e^x + 1}.$$

$$19. y = \frac{1}{\sin x - 1}.$$

$$20. y = \frac{1}{2 \cos x}.$$

$$21. y = \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

$$22. y = \frac{1}{x^3 - 1}.$$

$$23. y = \frac{1}{3 \arcsin x}.$$

$$24. y = \frac{1}{x \operatorname{arctg} x + 1}.$$

$$25. y = \frac{1}{x \operatorname{sh} x}.$$

$$26. y = \frac{1}{x + \operatorname{ch} x}.$$

$$27. y = \frac{1}{x \operatorname{tg} x}.$$

$$28. y = \frac{1}{4 \operatorname{ctg} x}.$$

$$29. y = \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} x + 1}.$$

$$30. y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}.$$

2. Знайдіть похідну функції:

$$1. y = \cos 2x.$$

$$2. y = \cos(2x+1).$$

$$3. y = \operatorname{ctg}(1-x).$$

$$4. y = \sin(1-x).$$

$$5. y = \ln(1-2x).$$

$$6. y = e^{2-3x}.$$

$$7. y = \operatorname{ctg}^3 x.$$

$$8. y = \sin^2 x.$$

9. $y = \cos x^4$.
10. $y = \operatorname{tg} x^2$.
11. $y = e^{x^2}$.
12. $y = \cos(x^2 - x)$.
13. $y = \operatorname{arctg}(1 - x)$.
14. $y = \arccos^2 x$.
15. $y = \arcsin x^2$.
16. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$.
17. $y = \sin^3 x^2$.
18. $y = \cos^2(1 - x^3)$.
19. $y = \operatorname{sh}^2(1 - 2\sqrt{x})$.
20. $y = \operatorname{ch}^3(1 - x^2)$.
21. $y = e^{\cos^2 x}$.
22. $y = \operatorname{arctg} \ln^2 x$.
23. $y = \operatorname{arctg}^2 \ln x$.
24. $y = \sqrt{\operatorname{tg}(1 - 3x^2)}$.
25. $y = e^{-\sin^2 \ln x}$.
26. $y = \ln^2 \ln x$.
27. $y = \ln^2 \ln \ln x$.
28. $y = \ln \arcsin^2 x$.
29. $y = e^{\sin^2 \operatorname{ctg}^3 \sqrt{x}}$.
30. $y = \sin^2 e^{-\cos^3(1-2x)}$.

3. Знайдіть похідну функції:

1. $y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}$.
2. $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}$.
3. $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}}$.
4. $y = \sqrt{\arcsin \frac{1}{x}}$.
5. $y = \sqrt{1 + x\sqrt{x+3}}$.
6. $y = x^2 \sqrt{1 + \sqrt{x}}$.
7. $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$.
8. $y = \frac{1}{2} \arcsin \frac{2x}{1+x^2}$.
9. $y = 2^{x \operatorname{tg} x}$.
10. $y = e^{1/\ln x}$.
11. $y = 3^{\frac{1}{2x \operatorname{sh} x}}$.
12. $y = e^{\frac{2}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}}$.
13. $y = \ln \sqrt{2 \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$.
14. $y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$.
15. $y = \sin \left(\sin \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \right)$.
16. $y = \cos \left(\cos \frac{1}{2x} \right)$.
17. $y = (1 - \operatorname{sh} \sqrt{x})^{11}$.
18. $y = \left(2 - \operatorname{ch} \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^{10}$.

$$19. y = 10^{-x \arcsin x}.$$

$$21. y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt{x}}}.$$

$$23. y = e^{-x \ln^2 x}.$$

$$25. y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$27. y = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right), a > 0.$$

$$29. y = \ln\left(\sqrt{x^2 - a^2} - x\right), a > 0.$$

$$20. y = \frac{1}{2^{x^2 \operatorname{arctg} x}}.$$

$$22. y = \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}}}.$$

$$24. y = \left(1 + \ln \frac{1}{x}\right)^5.$$

$$26. y = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos x^2}.$$

$$28. y = \sqrt{a^2 - x^2} \arcsin \frac{x}{a}, a > 0.$$

$$30. y = \log_x(x^2 + 4).$$

4. Знайдіть похідну функції:

$$1. y = x^{\frac{x}{\ln x}}.$$

$$3. y = x^{\frac{\ln x}{x}}.$$

$$5. y = x^{e^{\sqrt{x}}}.$$

$$7. y = x^{2^x} 2^x.$$

$$9. y = e^{x^2} \ln x \operatorname{ctg}^x x \sin x.$$

$$11. y = \operatorname{arctg} x^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$13. y = \arccos x^{\arccos x}.$$

$$15. y = \arcsin x^{\arcsin x}.$$

$$17. y = \ln^x x.$$

$$19. y = x^{\cos x \sin x}.$$

$$21. y = x^{-2x^2}.$$

$$23. y = (\operatorname{tg} x)^{-\operatorname{ctg} x}.$$

$$25. y = \cos x^{\sqrt{x}}.$$

$$27. y = x^{-x^{\arcsin x}}.$$

$$2. y = (x^2 + 1)^{2x}.$$

$$4. y = \operatorname{tg}^{\frac{x}{\ln x}} x.$$

$$6. y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

$$8. y = 9^{x^9} x^9.$$

$$10. y = 2^{x^3} \sqrt{-x} \arcsin^x x \cos x.$$

$$12. y = \operatorname{arctg}^{\operatorname{arctg} x} x.$$

$$14. y = \arccos^{\arccos x} x.$$

$$16. y = \arcsin^{\arcsin x} x.$$

$$18. y = \left(\frac{x}{1+x}\right)^{-x}.$$

$$20. y = x^{\cos^{\sin x} x}.$$

$$22. y = \left(\sqrt{x}\right)^{-\sqrt{x}}.$$

$$24. y = \operatorname{tg} x^{-\operatorname{ctg} x}.$$

$$26. y = x^{-x^2}.$$

$$28. y = x^{-x^{\arccos x}}.$$

$$29. y = \sin^x x \operatorname{arctg} x.$$

$$30. y = \sqrt{1-x} \operatorname{ch}^x x.$$

5. Знайдіть похідну функції:

$$1. y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} - \frac{4}{(x-2)^5}.$$

$$2. y = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \frac{3}{2x^3 - 3x + 1}.$$

$$3. y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg} 5x^3.$$

$$4. y = 2^{\operatorname{tg} x} \operatorname{arcsin} 7x^4.$$

$$5. y = \frac{e^{-\sin x}}{(x+5)^{10}}.$$

$$6. y = \frac{(x-4)^7}{e^{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$7. y = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\ln(5x+1)}.$$

$$8. y = \frac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}.$$

$$9. y = \frac{5 \ln(5x+7)}{(x-7)^2}.$$

$$10. y = \frac{7 \log_4(2x-5)}{(x-1)^5}.$$

$$11. y = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} - \frac{3}{(x-5)^4}.$$

$$12. y = \sqrt[5]{(x+4)^6} - \frac{2}{2x^2 - 3x + 7}.$$

$$13. y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arccctg} 3x^5.$$

$$14. y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \operatorname{arccos} x^4.$$

$$15. y = \frac{(3x+1)^4}{e^{4x}}.$$

$$16. y = \frac{5x^2 + 4x - 2}{e^{-x}}.$$

$$17. y = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\log_2(7x-5)}.$$

$$18. y = \frac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}.$$

$$19. y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \log_2(x-3x^2).$$

$$20. y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} \log_3(x^2 + x + 4).$$

$$21. y = \sqrt[5]{3x^2 + 4x - 5} + \frac{4}{(x-4)^4}.$$

$$22. y = \sqrt[4]{(x+4)^5} - \frac{4}{7x^2 - 3x + 2}.$$

$$23. y = \operatorname{sh}^4 3x \cdot \operatorname{arccos} 5x^4.$$

$$24. y = (2-x)^7 \cdot \operatorname{arccos} \sqrt{x}.$$

$$25. y = \frac{e^{\operatorname{arccos}^3 x}}{\sqrt{x+5}}.$$

$$26. y = \frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}.$$

$$27. y = \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{\operatorname{sh} \sqrt{x}}.$$

$$28. y = \frac{\operatorname{arcsin} 5x^3}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}.$$

$$29. y = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)}.$$

$$30. y = \frac{\sqrt{(x+2)^3(x-1)^4}}{(x+2)^7}.$$

6. Знайдіть похідну функції вказаного порядку n у вказаній точці:

1. $f(x) = e^x \cos x, n = 2, x_0 = 0.$
2. $f(x) = e^{-x} \sin x, n = 2, x_0 = 0.$
3. $\varphi(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}, n = 2, x_0 = 0.$
4. $F(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, n = 2, x_0 = 1.$
5. $\psi(x) = \frac{x}{3^x}, n = 4, x_0 = 0.$
6. $f(t) = \frac{2^t}{t}, n = 2, t_0 = 1.$
7. $f(y) = \frac{y^2}{1 - y}, n = 2, y_0 = 0.$
8. $f(x) = \frac{x^2}{1 + x}, n = 2, x_0 = 1.$
9. $f(x) = \frac{1}{1 - x}, n = 4, x_0 = -1.$
10. $f(x) = \cos^2 x, n = 2, x_0 = \pi.$
11. $f(x) = \arcsin x, n = 2, x_0 = 1/2.$
12. $f(x) = \operatorname{arctg} x, n = 2, x_0 = 1.$
13. $f(x) = \arccos x, n = 2, x_0 = 1.$
14. $f(x) = \frac{\ln x}{x}, n = 2, x_0 = 1.$
15. $f(x) = 2^{-x}, n = 3, x_0 = 0.$
16. $f(x) = \operatorname{sh} 2x, n = 2, x_0 = 0.$
17. $f(x) = x e^{-x^2}, n = 2, x_0 = 0.$
18. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x, n = 2, x_0 = 1.$
19. $f(x) = x \ln x, n = 4, x_0 = 1.$
20. $A(x) = x^2 e^{-2x}, n = 3, x_0 = 0.$
21. $f(x) = \operatorname{ch}(-x), n = 2, x_0 = 0.$
22. $f(x) = \operatorname{arctg} 1, n = 2, x_0 = 0.$
23. $f(x) = \operatorname{sh} 2x, n = 3, x_0 = 0.$
24. $f(x) = x \cos x, n = 2, x_0 = 0.$
25. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, n = 2, x_0 = 0.$
26. $f(x) = e^{-x}, n = 4, x_0 = 1.$
27. $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, n = 3, x_0 = 1.$
28. $f(x) = x^2 \ln x, n = 2, x_0 = 1.$
29. $f(x) = x e^{-x}, n = 3, x_0 = 0.$
30. $f(t) = t \sqrt{1 + t^2}, n = 2, t_0 = 0.$

7. Знайдіть границю за правилом Лопіталля:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}.$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}.$
3. $\lim_{x \rightarrow 0+} x^2 \ln x.$
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}.$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}.$
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}.$
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}.$
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right).$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right).$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \frac{2}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 1-} (1-x)^{\ln x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0+} (x^{x^2} - 1).$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{\arctg x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right).$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} \right)^x.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{4}{1-x^4} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0+} x^{x^{x-1}}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\sin^2 x}.$$

8. Знайдіть екстремуми функції:

$$1. f(x) = (x+1)e^{2x}.$$

$$3. f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14.$$

$$5. f(x) = (1-x)^3.$$

$$7. f(x) = e^x + x^3.$$

$$9. f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}.$$

$$2. f(x) = (x+3)^3(x+2)^{-2}.$$

$$4. f(x) = 3x^3 - 6x.$$

$$6. f(x) = x^{2/5}.$$

$$8. f(x) = -x^5 - 4x^3 - x.$$

$$10. f(x) = \frac{1}{x^2 - x}.$$

11. $f(x) = \frac{x}{x^4 + 4}$.

12. $f(x) = -x^2\sqrt{x^2 + 2}$.

13. $f(x) = x - \ln(1+x)$.

14. $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

15. $f(x) = \ln(1+x^2) - 2\arctg x$.

16. $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.

17. $f(x) = x^5 + 5x - 6$.

18. $f(x) = x^6 + 4x^2$.

19. $f(x) = x^2 - x^8$.

20. $f(x) = (x-5)^{5/3} + 2$.

21. $f(x) = xe^x$.

22. $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$.

23. $f(x) = x + \frac{2}{x+1}$.

24. $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x + 18$.

25. $f(x) = x\arctg x$.

26. $f(x) = x^4 + x^2 + 3^x$.

27. $f(x) = -x^2\sqrt{x^2 + 2}$.

28. $f(x) = \ln(1+x^3)$.

29. $f(x) = x^4(12\ln x - 7)$.

30. $f(x) = (x+1)^4 + 2^x$.

9. Знайдіть найбільше і найменше значення функції f на вказаному проміжку:

1. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x - 1}$, $[-4; 6]$.

2. $f(x) = \frac{3x^2}{x - 2}$, $[-1; 1]$.

3. $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x}$, $[-10; 1]$

4. $f(x) = x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$, $[-2; 1]$.

5. $f(x) = x^3(x-1)^2$, $[-1; 1]$.

6. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$, $[1; 4]$.

7. $f(x) = x - \ln(1+x)$, $[1; 4]$.

8. $f(x) = x \ln x$, $[1/e^2; 1]$.

9. $f(x) = x^3 e^{-x}$, $[-1; 4]$.

10. $f(x) = e^{2x-x^2}$, $[-2; 2]$.

11. $f(x) = \frac{e^{-x}}{x}$, $[1; 3]$.

12. $f(x) = (3-x)e^{-x}$, $[0; 5]$.

13. $f(x) = \frac{2x^3}{2x^2 - 9}$, $[4; 6]$.

14. $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$, $[0; 2]$.

15. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, $[0; 3]$.

16. $f(x) = \frac{1}{x} + \ln x$, $[1; e]$.

17. $f(x) = 108x - x^4$, $[-1; 4]$.

18. $f(x) = (x+2)e^{1-x}$, $[-1; 2]$.

19. $f(x) = e^{4x-x^2}$, $[1; 3]$.

20. $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{\ln 3}$, $[-2; 1]$.

21. $f(x) = \operatorname{tg} x$, $[-\pi/4; \pi/2)$. 22. $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$, $[0; +\infty)$.
23. $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$, $[0; 3]$. 24. $f(x) = x - \operatorname{tg} x$, $[-\pi/4; \pi/4]$.
25. $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$, $[-2; 2]$. 26. $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2$, $[-1; 2]$.
27. $f(x) = x^2 + 1$, $[0; 2]$. 28. $f(x) = e^{2x} - e^x$, $[0; 1]$.
29. $f(x) = xe^{-x}$, $[0; +\infty)$. 30. $f(x) = x + 2\sqrt{x}$, $[0; 4]$.

10. Проведіть повне дослідження функції і зобразіть її графік:

1. $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$. 2. $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$.
3. $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$. 4. $f(x) = xe^{-x}$.
5. $f(x) = x \sin x$. 6. $f(x) = xe^{-1/x}$.
7. $f(x) = \sin x + \cos^2 x$. 8. $f(x) = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$.
9. $f(x) = x + \cos x$. 10. $f(x) = x \ln x$.
11. $f(x) = e^{8x-x^4-14}$. 12. $f(x) = e^{2x-x^2}$.
13. $f(x) = 36x(x-1)^3$. 14. $f(x) = x - \arcsin x$.
15. $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$. 16. $f(x) = \sin x + \sin 2x$.
17. $f(x) = \cos x - \cos^2 x$. 18. $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$.
19. $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$. 20. $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.
21. $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}$. 22. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4}$.
23. $f(x) = x + \sin x$. 24. $f(x) = xe^{-4x}$.
25. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. 26. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$.
27. $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$. 28. $f(x) = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$.
29. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. 30. $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{x^2+4}$.

Розділ 3. Інтегральне числення функцій однієї змінної

3.1. Первісна і невизначений інтеграл

В попередньому розділі були розглянуті методи знаходження похідних функцій та методи використання похідної до їх дослідження. В цьому розділі розглядається проблема знаходження функції за її похідною. Така задача виникає у зв'язку з дослідженням як теоретичних задач (наприклад, при дослідженні диференціальних рівнянь), так і задач прикладного характеру (наприклад, при знаходженні швидкості матеріальної точки за її прискоренням, площі криволінійної трапеції та інших).

3.1.1. Означення первісної і невизначеного інтегралу. Найпростіші властивості невизначеного інтегралу. Первісною функції $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку Δ називається така функція $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, що $(\forall x \in \Delta): F'(x) = f(x)$. Сукупність, тобто множина, всіх первісних функцій f на проміжку Δ називається невизначеним інтегралом функції f на Δ і позначається $\int f(x)dx$.

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція f має первісну F на проміжку Δ , то

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

де C – довільна стала.

Наслідок 1. Дві первісні однієї функції відрізняються на сталий доданок.

Приклад 1. Первісною функції x^2 є функція $x^3/3$ і тому

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Приклад 2. Первісною функції $f(x) = |x|$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ є функція

$$F(x) = \begin{cases} x^2/2, & x \geq 0, \\ -x^2/2, & x < 0. \end{cases}$$

Приклад 3. Якщо функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну на проміжку Δ , то вона не може мати розривів першого роду.

Приклад 4. Функція $f(x) = [x]$ не має первісної на жодному проміжку Δ , довжина якого є більшою за 1.

Приклад 5. Нехай $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція, неперервна в усіх

точках проміжку Δ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, а $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ і $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, неперервні на проміжку Δ , для яких рівності $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$ виконуються всюди на Δ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок. Тоді знайдеться така стала C , що $\Phi(x) = F(x) + C$ для всіх $x \in \Delta$.

Виділимо наступні найпростіші властивості невизначеного інтегралу.

Теорема 2 [3, 5]. 1°. Якщо f має похідну на Δ , то

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

2°. Якщо f має первісну на Δ , то $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

3° (адитивність). $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$, якщо останні інтеграли існують.

4° (однорідність). $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ для будь-якої сталої $k \neq 0$, якщо останній інтеграл існує.

5° (лінійність). $\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))dx = k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx$ для будь-яких сталих k_1 і k_2 таких, що $|k_1| + |k_2| \neq 0$, якщо останні інтеграли існують.

3.1.2. Таблиця основних інтегралів.

1. $\int dx = x + C$.
2. $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, m \neq -1, m \in \mathbb{R}$.
3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.
4. $\int e^x dx = e^x + C$.
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$.
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$11. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$12. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$15. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$20. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$21. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 \pm x^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Формули 1-21 справедливі [3, 5] на кожному проміжку з області визначення підінтегральної функції. В цих формулах $C \in \mathbb{R}$ і $a \in (0; +\infty)$ – довільні сталі. Ці формули випливають безпосередньо з означення первісної і невизначеного інтеграла. Доведемо, наприклад, формулу 2. За правилами знаходження похідної

$$\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right)' = \frac{1}{m+1} (x^{m+1})' = x^m.$$

Тому формула 2 доведена. Формула 3 є справедливою на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. На другому з них

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

а на першому з них

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Тому формула 3 доведена, а інші доводяться аналогічно.

Використовуючи таблицю основних інтегралів багато невизначених інтегралів можна виразити через основні елементарні функції. Для знаходження невизначених інтегралів достатньо пам'ятати перші десять табличних інтегралів, оскільки інші можна отримати на їх основі методами інтегрування, що ми і зробимо далі.

Зауваження 1. При знаходженні невизначених інтегралів різними способами можна отримати різні правильні відповіді (насправді, відповіді однакові, але не завжди легко показати, що одна з первісних відрізняється від іншої на сталий доданок). Правильність знайденої відповіді можна встановити шляхом знаходження похідної первісної.

Зауваження 2. При знаходженні невизначених інтегралів у відповіді входить довільна стала C , яка може бути будь-яким дійсним числом і можна записати $C = 2 + C_1$, $C = 74 - C_2$, ..., де C_1, C_2, \dots – довільні сталі. При цьому, якщо, наприклад, C_2 пробігає множину всіх дійсних чисел, то і C пробігає множину всіх дійсних чисел і навпаки.

Приклад 1.
$$\int (e^x + 1 + 2x) dx = \int e^x dx + \int dx + 2 \int x dx = e^x + x + x^2 + C.$$

Ця відповідь є правильною, оскільки $(e^x + x + x^2)' = e^x + 1 + 2x$.

Приклад 2.
$$\int 2 \sin x dx = 2 \int \sin x dx = -2 \cos x + C.$$

Приклад 3.
$$\int \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \left(\int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx \right) = \frac{1}{3} x^{3/2} + \sqrt{x} + C.$$

Приклад 4.
$$\int \left(5^{-x} + \frac{x^2+3}{x^2+4} \right) dx = \int \left((0,2)^x + 1 - \frac{1}{x^2+4} \right) dx =$$

$$= \int (0,2)^x dx + \int dx - \int \frac{1}{x^2+2^2} dx = \frac{(0,2)^x}{\ln(0,2)} + x - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Приклад 5.
$$\int \frac{1}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

Приклад 6. $\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \operatorname{tg} x - x + C.$

Приклад 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{(2/3)^2 - x^2}} = \frac{1}{3} \arcsin \frac{3x}{2} + C$

Зауваження 3 [3, 5]. Є такі інтеграли, які існують, але їхні первісні не є елементарними функціями і тому ці інтеграли не можна виразити через елементарні функції. До таких інтегралів належать, наприклад,

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx,$$

$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin \varphi}}, \int \sqrt{1-k^2 \sin \varphi} d\varphi,$$

$$\int \frac{e^x}{x^n} dx, \int \frac{\sin x}{x^n} dx, \int \frac{\cos x}{x^n} dx, n \in \mathbb{N}.$$

Ці інтеграли відіграють важливу роль в математичному аналізі та його застосуваннях. Їхні первісні виражаються через так звані спеціальні функції. Тому відповідь, наприклад, до завдання „знайти інтеграл $\int e^{-x^2} dx$ ” є такою: первісна підінтегральної функції не є елементарною функцією. Ця відповідь є правильною, якщо передбачається, що відповідач не зобов'язаний бути знайомим зі спеціальною функцією Erf. В протилежному випадку $\int e^{-x^2} dx = \operatorname{Erf}(x) + C$ – правильна відповідь.

3.1.3. Інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів.

Теорема 1 [3, 5]. Нехай функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну F на проміжку Δ , а функція $\varphi: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну на проміжку Δ_1 і $\varphi(\Delta_1) \subset \Delta$. Тоді функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на проміжку Δ_1 і

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \quad (1)$$

Справді, за теоремою про похідну складеної функції $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ і (1) доведено.

Зауваження 1. Формулу (1) записують у вигляді

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)},$$

або у вигляді

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Якщо функція φ має обернену функцію φ^{-1} , то її можна записати і так

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Наслідок 1 (інтегрування методом внесення під диференціал)

[3, 5]. Якщо функція $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ є диференційовною на проміжку Δ , то

$$\int f^m(x)f'(x)dx = \int f^m(x)df(x) = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + C,$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = \int e^{f(x)}df(x) = e^{f(x)} + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int d \ln f(x) = \ln|f(x)| + C, \quad f(x) \neq 0,$$

$$\int f'(x)\sin f(x)dx = \int \sin f(x)df(x) = -\cos f(x) + C$$

і т.д.

Приклад 1. Відповідно до написаних вище формул інтеграл

$\int \sin(2x+1)dx$ можна знаходити наступними способами.

$$1. \int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x+1)2dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

$$2. \text{ Нехай } 2x+1=t. \text{ Тоді } x = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, \quad dx = \frac{1}{2}dt \text{ і}$$

$$\int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

$$3 \text{ (метод внесення під диференціал). } \int \sin(2x+1)dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(2x+1)d(2x+1) = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

$$\text{Приклад 2. } \int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x} + C.$$

$$\text{Приклад 3. } \int (1+4x)^{19}dx = \frac{1}{4} \int (1+4x)^{19}d(1+4x) = \frac{(1+4x)^{20}}{80} + C.$$

$$\text{Приклад 4. } \int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$$

$$= \int \sin x dx + \int \cos^2 x d \cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

$$\text{Приклад 5. } \int x\sqrt{1-x^2}dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{1/2} d(1-x^2) =$$

$$= -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C.$$

Приклад 6. Для знаходження інтегралу $\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$ зробимо заміну $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$ і $dx = 2tdt$. Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx &= \int \frac{2t^2}{t^2+1} dt = \int \frac{2t^2+2-2}{t^2+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt = \\ &= 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7. $\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C$, якщо $x \in (-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 8. $\int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \int e^{x \ln a} d(x \ln a) =$
 $= \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Приклад 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$, $a > 0$.

Приклад 10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $a > 0$.

Приклад 11. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx =$
 $= \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right) = \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C =$
 $= \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$, $a > 0$.

Приклад 12. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} =$
 $= \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$, якщо $x \in (\pi k; \pi(k+1))$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 13.
$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3} = \int \frac{dx}{x^2 + 3x + (3/2)^2 - (3/2)^2 + 3} =$$

$$= \int \frac{dx}{(x + 3/2)^2 + 3/4} = \int \frac{d(x + 3/2)}{(x + 3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 3}{\sqrt{3}} + C.$$

Приклад 14.
$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2} =$$

$$= \int (x + 1)^{-2} d(x + 1) = -\frac{1}{x + 1} + C.$$

Приклад 15.
$$\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} = \int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)} = \int \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right) dx =$$

$$= \int \frac{1}{x + 1} d(x + 1) - \int \frac{1}{x + 2} d(x + 2) = \ln|x + 1| - \ln|x + 2| + C.$$

Приклад 16. Для знаходження інтеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ зробимо заміну $x = a \operatorname{sh} t$. Тоді $dx = a \operatorname{ch} t dt$, $t = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \ln a$. Тому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{a \operatorname{ch} t dt}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2}} = \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}}$$

$$= \int dt = t + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C_1, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 17. Для знаходження інтеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ зробимо заміну $x = a \operatorname{ch} t$. Тоді $dx = a \operatorname{sh} t dt$ і $t = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln a$, якщо $x > a$. Тому

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{a \operatorname{sh} t dt}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2}} = \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}}$$

$$= \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{|\operatorname{sh} t|} = t + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln a + C, \quad x > a.$$

Крім цього,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = -\int \frac{d(-x)}{\sqrt{(-x)^2 - a^2}} = -\ln\left|-x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \ln a + C$$

$$= -\ln \left| \frac{a^2}{-x - \sqrt{x^2 - a^2}} \right| + \ln a + C = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| - \ln a + C, \quad x < -a.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C_1, \quad |x| > a, \quad a > 0.$$

Приклад 18. Для знаходження інтеграла $\int \frac{e^{x^2} dx}{x^3}$ зробимо заміну

$$x^2 = t. \quad \text{Тоді } x = \sqrt{t} \quad \text{і} \quad dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt. \quad \text{Тому } \int \frac{e^{x^2} dx}{x^3} = \frac{1}{2} \int \frac{e^t dt}{t^2}.$$

Первісна функції $f(t) = e^t / t^2$ не є елементарною функцією. Тому розглядуваний інтеграл не виражається через елементарні функції.

Зауваження 2 [3, 5]. При обчисленні конкретних інтегралів методом заміни змінних доцільно слідкувати за проміжками на яких цим методом його знайдено. Правда, в більшості випадків підінтегральна функція та її первісна є аналітичними функціями (з теорією таких функцій читач познайомиться при подальшому вивченні математики) і з властивостей таких функцій випливає, що знайдена первісна на деякому проміжку Δ є первісною і на кожному проміжку Δ_1 , який містить Δ , якщо первісна є диференційовною на Δ_1 .

3.1.4. Інтегрування частинами невизначених інтегралів.

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні на проміжку Δ , то

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Справді, за правилом знаходження похідної добутку $(uv)' = uv' + u'v$. Тому $\int u dv = \int uv' dx = \int (uv)' dx - \int v u' dx = uv - \int v du$.

Формула (1) називається формулою інтегрування частинами.

Зауваження 1. Інтегруванням частинами знаходяться інтеграли (тут $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$)

$$\int x^n e^{\alpha x} dx, \quad \int x^n \sin \alpha x dx, \quad \int x^n \arcsin x dx, \\ \int x^n \ln x dx, \quad \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \quad \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$$

та інші. При використанні методу інтегрування частинами важливим є вдалий вибір u та dv .

Приклад 1. Для знаходження інтеграла $\int x \sin x dx$ позначимо $u = x$ і $dv = \sin x dx$. Тоді $du = dx$ і $v = -\cos x$. Тому

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Для знаходження інтеграла $\int \ln x dx$ позначимо $u = \ln x$ і $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x} dx$ і $v = x$. Тому

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C, \quad x > 0.$$

Приклад 3. Для знаходження інтеграла $\int \arctg x dx$ позначимо $u = \arctg x$ і $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ і $v = x$. Тому

$$\begin{aligned} \int \arctg x dx &= x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) = \\ &= x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Двічі використовуючи формулу інтегрування частинами знаходимо

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx = \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 5. Використовуючи формулу інтегрування частинами n разів знаходимо

$$\begin{aligned} \int x^n e^x dx &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + n(n-1) \int x^{n-2} e^x dx = \\ &= \dots = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \dots + (-1)^n n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \int e^x dx = \\ &= \dots = e^x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 6.
$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \int x d \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = \\ &= x \operatorname{tg} x + \int \frac{d \cos x}{\cos x} = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C \end{aligned}$$

на кожному проміжку Δ , який не містить точок $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 7. Для знаходження інтеграла $\int e^{\sqrt{x}} dx$ спочатку зробимо

заміну $t = \sqrt{x}$, а потім проінтегруємо частинами. Тоді $x = t^2$, $dx = 2t dt$ і

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2te^t - 2 \int e^t dt = \\ &= 2te^t - 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 8. Для знаходження інтеграла $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$,

позначимо $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ і $dv = dx$. Тоді $du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ і $v = x$. Тому

$$\begin{aligned} I &= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \\ &= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - I, \end{aligned}$$

звідки

$$I = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a.$$

Приклад 9.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \\ &= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx. \end{aligned}$$

Тому

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 10.

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 - a^2} dx &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \\ &= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx. \end{aligned}$$

Тому

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C, \quad a > 0, \quad |x| > a.$$

Приклад 11. Нехай

$$I = \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Інтегруючи двічі частинами отримуємо

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx = \\ &= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx \right) = \\ &= \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I, \end{aligned}$$

звідки

$$I \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2}.$$

Таким чином,

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2} + C, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 12 [3, 5]. Розглянемо інтеграл

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad a > 0.$$

Якщо $m=1$, то цей інтеграл є табличним і $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$. Нехай

$$u = \frac{1}{(t^2 + a^2)^m} \quad \text{і} \quad dv = dt. \quad \text{Тоді} \quad du = -\frac{2mtdt}{(t^2 + a^2)^{m+1}}, \quad v = t. \quad \text{Тому,}$$

інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{(t^2 + a^2)^{m+1}} dt = \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} - 2ma^2 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}}, \end{aligned}$$

тобто

$$I_m = 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1} + \frac{t}{(t^2 + a^2)^m},$$

звідки

$$I_{m+1} = \frac{2m-1}{2ma^2} I_m + \frac{t}{2ma^2(t^2 + a^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, послідовно знаходимо

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + C,$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{3}{4a^2} I_2 + \frac{t}{4a^2(t^2 + a^2)^2} \\
 &= \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{3t}{8a^4(t^2 + a^2)} + \frac{t}{4a^2(t^2 + a^2)^2} + C
 \end{aligned}$$

і т.д. Приходимо до висновку, що для кожного $t \in \mathbb{N}$ інтеграл I_m можна виразити через основні елементарні функції.

3.1.5. Інтегрування елементарних раціональних дробів.

Елементарні раціональні дроби над множиною дійсних чисел – це функції, визначені формулами [3, 5]:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{A}{x-b}, \quad f(x) = \frac{A}{(x-b)^n}, \\
 f(x) &= \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m},
 \end{aligned}$$

де $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ і $b \in \mathbb{R}$ – числові сталі, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Теорема 1 [3, 5]. Первісні елементарних раціональних дробів є елементарними функціями.

Справді,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{x-b} dx &= \int \frac{d(x-b)}{x-b} = \ln|x-b| + C. \\
 \int \frac{1}{(x-b)^n} dx &= \int \frac{d(x-b)}{(x-b)^n} = \\
 &= \int (x-b)^{-n} d(x-b) = -\frac{1}{(n-1)(x-b)^{n-1}} + C, \quad n > 1. \\
 \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{At dt}{t^2+a^2} + \int \frac{\left(B - \frac{Ap}{2}\right) dt}{t^2+a^2} = \\
 &= \frac{A}{2} \ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C = \\
 &= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{1}{2a} (2B - Ap) \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2a} + C,
 \end{aligned}$$

де $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ і $t = x + \frac{p}{2}$. Крім цього,

$$\frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} = \frac{Ax + B}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^m}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} dx &= \int \frac{A\left(x + \frac{p}{2}\right) + \left(B - A\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right)^m} dx = \int \frac{At + D}{(t^2 + a^2)^m} dt = \\ &= A \int \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} dt + D \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\ &= \frac{A}{2} \int (t^2 + a^2)^{-m} d(t^2 + a^2) + D \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} = \\ &= -\frac{A}{2} \frac{1}{(m-1)(t^2 + a^2)^{m-1}} + D \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}, \end{aligned}$$

де $m > 1$, $t = x + \frac{p}{2}$, $D = B - A\frac{p}{2}$ і $a = \sqrt{q - p^2/4}$. Але первісна функції

$\frac{1}{(t^2 + a^2)^m}$ є елементарною функцією і тому ми приходимо до твердження теореми.

$$\begin{aligned} \text{Приклад 1. } \int \frac{x}{x^2 + x + 1} dx &= \int \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx = \\ &= \int \frac{(x+1/2)dx}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + C. \end{aligned}$$

3.1.6. Багаточлени (многочлени, поліноми) і раціональні функції. Розклад на елементарні дробі. Багаточлен степеня $n \in \mathbb{N}_0$ над полем дійсних чисел – це функція P , визначена формулою

$P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n$, де $d_i \in \mathbb{R}$ і $d_n \neq 0$. Числа d_i називаються коефіцієнтами багаточлена. Якщо число x_0 є нулем багаточлена P , то $P(x) = (x - x_0)\tilde{P}(x)$, де \tilde{P} – багаточлен степеня $n-1$. Якщо $P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_{n-1}x^{n-1} + x^n$ і всі коефіцієнти d_i є цілими числами, то кожне ціле число x_0 , яке є нулем багаточлена P є дільником вільного члена d_0 . Два багаточлени $P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n$ і $Q = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ називаються [3, 5] *рівними*, якщо $(\forall x \in \mathbb{R})$: $P(x) = Q(x)$. Два багаточлени P і Q є рівними тоді і тільки тоді, коли рівними є їхні степені і рівними є їхні коефіцієнти при відповідних степенях x , тобто коли $m = n$ і $d_i = b_i$ для всіх $i \in \overline{1; n}$. Кожний багаточлен Q подається у вигляді [3, 5]

$Q(x) = b_m(x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1} \dots (x^2 + p_vx + q_v)^{\beta_v}$, (1)
де x_1, \dots, x_k – різні дійсні нулі багаточлена Q , $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0$, $\beta_1 \in \mathbb{N}_0, \dots, \beta_v \in \mathbb{N}_0$, $q_1 \in \mathbb{R}, \dots, q_v \in \mathbb{R}$, $p_1 \in \mathbb{R}, \dots, p_v \in \mathbb{R}$ – деякі числа і при цьому всі квадратні тричлени $x^2 + p_ix + q_i$ не мають дійсних нулів, тобто $p_i^2 - 4q_i < 0$.

Раціональна функція – це функція, визначена формулою $R = P/Q$, де P і Q – багаточлени, степеня n та m , відповідно. Якщо $n < m$, тобто якщо степінь чисельника є меншим за степінь знаменника, то раціональна функція R називається *правильною раціональною функцією* або *правильним раціональним дробом*. Якщо ж $n \geq m$, то раціональна функція, називається *неправильним раціональним дробом*. Кожний неправильний раціональний дріб P/Q можна записати у формі

$$\frac{P}{Q} = T + \frac{P_1}{Q}, \quad (2)$$

де P_1/Q – правильний раціональний дріб, а T – багаточлен. Задля отримання (2) потрібно багаточлен P поділити на Q .

Будь-який правильний раціональний дріб P_1/Q можна представити як суму елементарних раціональних дробів. Для цього Q слід подати у вигляді (1). Тоді [3, 5]

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_{11}}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \dots + \frac{A_{k1}}{x - x_k} +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{1\beta_1}x + N_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} + \\
& + \dots + \frac{M_{v1}x + N_{v1}}{x^2 + p_vx + q_v} + \dots + \frac{M_{v\beta_v}x + N_{v\beta_v}}{(x^2 + p_vx + q_v)^{\beta_v}}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Для знаходження чисел A_{ij} , M_{sk} і N_{sk} слід праву частину рівності (3) привести до спільного знаменника. Тоді отримаємо рівність $P_1/Q = P_2/Q$, де P_2 – багаточлен. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x багаточленів P_1 і P_2 отримаємо систему, яка містить стільки рівнянь скільки є невідомих і завжди має розв’язок. Розв’язавши цю систему, знаходимо потрібні числа. Таким чином, кожний правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів.

Приклад 1. Багаточлен $Q(x) = (x^5 + x)^6$ подається у вигляді (1) так

$$\begin{aligned}
Q(x) &= x^6(x^4 + 1)^6 = x^6((x^2)^2 + 2x^2 + 1 - 2x^2)^6 = \\
&= x^6(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)^6 \cdot (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)^6.
\end{aligned}$$

Приклад 2. Раціональний дріб $R(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$ подається у вигляді

(2) так

$$\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Це впливає з наступних записів

$$\begin{array}{r|l}
\frac{x^4 + 1}{x^4 + x^2} & \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \\
\hline
\frac{-x^2 + 1}{-x^2 - 1} & \\
\hline
\frac{-x^2 - 1}{2} &
\end{array}$$

Приклад 3. Розкладемо дріб $\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)}$ на елементарні

дроби. Маємо

$$\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+2},$$

$$\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A(x^2+2) + B(x^3+x^2+2x+2) + (Mx+N)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+2)},$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x багаточленів, які стоять в чисельнику останньої рівності, отримуємо систему

$$\begin{cases} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B + N = 0, \\ 2B + M + 2N = 2, \\ A + B + 2M + N = 0, \\ B + M = 0, \end{array} \right.$$

з якої знаходимо $A = -\frac{6}{9}$, $B = \frac{2}{9}$, $M = -\frac{2}{9}$, $N = \frac{8}{9}$ і тому

$$\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} = -\frac{6}{9(x+1)^2} + \frac{2}{9(x+1)} + \frac{-2x+8}{9(x^2+2)}.$$

Приклад 4. Для розкладу раціональної функції

$R(x) = \frac{2x}{(x-1)^3(x+5)(x^2+2x+3)^2}$ на елементарні дробі слід записати

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{(x-1)^3(x+5)(x^2+2x+3)^2} = \\ & = \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{B_1}{x+5} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+2x+3}. \end{aligned}$$

3.1.7. Інтегрування раціональних функцій. Для знаходження інтеграла $\int R(x)dx$, де $R = P/Q$ – раціональна функція, слід подати R у вигляді $R = T + P_1/Q$, де T – багаточлен, а P_1/Q – правильний раціональний дріб. Тоді

$$\int R(x)dx = \int T(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx.$$

Для знаходження останнього інтеграла слід P_1/Q записати у вигляді суми елементарних раціональних дробів, а їх інтеграли, як і інтеграл багаточлена, виражається через елементарні функції. Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 1 [3, 5]. Кожна раціональна функція має первісну на кожному проміжку, який належить області її визначення, і ця первісна є елементарною функцією.

Таким чином, невизначений інтеграл раціональної функції

виражається через елементарні функції на кожному проміжку, що входить до області визначення підінтегральної функції.

Приклад 1.

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Приклад 2.

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Інколи інтеграл правильного раціонального дробу P_1/Q простіше знайти *методом Остроградського* [3, 5]. Суть цього методу така. Нехай $Q(x) = Q_2(x) \cdot Q_3(x)$, де

$$Q_2(x) = (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_k) \cdot (x^2+p_1x+q_1) \cdot \dots \cdot (x^2+p_vx+q_v).$$

Тоді

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (1)$$

де P_2 і P_3 – багаточлени з невідомими коефіцієнтами, степені яких на одиницю менші за степені багаточленів Q_2 і Q_3 відповідно. Для знаходження цих коефіцієнтів багаточленів P_2 і P_3 продиференціюємо рівність (1). Тоді

$$\frac{P_1}{Q} = \left(\frac{P_3}{Q_3}\right)' + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Після перетворень отримаємо рівність $\frac{P_1}{Q} = \frac{P_4}{Q}$, де P_4 – багаточлен.

Прирівнявши відповідні коефіцієнти багаточленів P_1 і P_4 знайдемо коефіцієнти багаточленів P_2 і P_3 .

Приклад 3. Для знаходження інтегралу $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3(x+1)} dx$

методом Остроградського слід записати

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3(x+1)} dx = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3}{(x^2+1)^2} + \int \frac{B_0 + B_1x + B_2x^2}{(x^2+1)(x+1)} dx.$$

3.1.8. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Якщо функція f – раціональна, то інтеграл її виражається через елементарні функції. Якщо ж f – ірраціональна функція, то її інтеграл виражається через елементарні функції тільки в окремих випадках, хоч сам інтеграл

може й існувати [3, 5].

1°. Інтеграли

$$\int R\left(x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx,$$

де $R(u; v)$ – раціональна функція двох змінних, знаходяться заміною

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}. \text{ Інтеграли}$$

$$\int R\left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right) dx,$$

де R – раціональна функція s змінних, $r_i = m_i/n_i$ – раціональні числа,

$m_i \in \mathbb{Z}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in \overline{1; s}$, знаходяться заміною $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, де n –

спільний знаменник дробів $r_i = m_i/n_i$.

Раціональна функція s змінних – це функція, яка подається у вигляді частки двох багаточленів s змінних, а багаточлен s змінних – це функція [3, 5]

$$P(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_s \leq k, \\ k_i \in \mathbb{N}_0}} a_{k_1, \dots, k_s} x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s},$$

де $a_{k_1, \dots, k_s} \in \mathbb{R}$, k_1, \dots, k_s – цілі невід’ємні числа.

Приклад 1. Функції $P(x; y) = 4x + 7y + 6$ і $Q(x; y) = 9x^2 + 8y^2 + 3xy + 4x + 7y + 6$ є багаточленами двох змінних.

Приклад 2. Інтеграл $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ знаходиться заміною $t = \sqrt{x}$. Тоді

$$\begin{aligned} x = t^2, \quad dx = 2t dt \quad & \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{2t dt}{1+t} = 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = \\ & = 2(t - \ln|1+t|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x})) + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Для знаходження інтегралу $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1+\sqrt{x}}$ слід зробити

заміну $t = \sqrt[6]{x}$. Тоді $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$ і $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1+\sqrt{x}} = \int \frac{6t^7 dt}{1+t^3}$. Отже, ми звели розглядуваний інтеграл до інтегралу раціональної функції, який

можна знайти методами, описаними в попередніх пунктах.

2°. Інтеграли

$$\int R\left(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx,$$

де R – раціональна функція двох змінних, знаходяться за допомогою підстановок Ейлера [3, 5]: а) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, якщо $a > 0$; б) $\pm\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$, якщо корені x_1 і x_2 підкореневого квадратного тричлена є дійсними різними (в цьому випадку $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$), що слід використати при практичному здійсненні заміни); в) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm\sqrt{c} \pm xt$, якщо $c > 0$. В цих замінах комбінація знаків $+$ і $-$ є довільною, хоч і потрібно враховувати проміжок, на якому знаходимо первісну [3, 5].

Вказані вище підстановки Ейлера часто приводять до громіздких перетворень. В багатьох випадках ці інтеграли можна знайти простіше різними штучними прийомами. Інтеграли

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

можна знаходити подібно до інтегралів

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Інтеграл

$$\int R(x) \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

в якому R – раціональна функція можна знайти подавши R у вигляді $R = T + R_1$, де T – поліном і R_1 – сума елементарних раціональних дробів.

Приклад 4. Для знаходження інтегралу $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ зробимо

заміну $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$. Тоді $x + 1 = 2xt + t^2$, $x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}$,

$$\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t = \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t},$$

$$dx = \frac{2t(1 - 2t) + 2(t^2 - 1)}{(1 - 2t)^2} dt = -\frac{2(t^2 - t + 1)}{(1 - 2t)^2} dt$$

і тому

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} = -2 \int \frac{\frac{t^2-1}{1-2t} \cdot \frac{t^2-t+1}{(1-2t)^2} dt}{1-2t} = 2 \int \frac{t^2-1}{(1-2t)^2} dt.$$

Отже, ми звели розглядуваний інтеграл до інтегралу раціональної функції, який можна знайти методами, описаними в попередніх пунктах. Разом з цим, розглядуваний інтеграл можна знайти простіше:

$$\begin{aligned} \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+x+1}} &= \int \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}} dx = \int \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2+x+1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}} d(x^2+x+1) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x+1/2)}{\sqrt{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}} = \\ &= \sqrt{x^2+x+1} - \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x+1} \right| + C. \end{aligned}$$

3°. Інтеграл

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx, \quad (1)$$

де $a, b \in \mathbb{R}$, а $p, m, n \in \mathbb{Q}$, зветься інтегралом диференціального бінома. Він виражається через елементарні функції лише в окремих випадках і в цих випадках їх можна знайти за допомогою наступних підстановок Чебишова [3, 5]: а) $x = t^\lambda$, якщо $p \in \mathbb{Z}$, де λ – спільний знаменник дробів m та n ; б) $a+bx^n = t^\mu$, якщо $(m+1)/n$ – ціле число, де μ – знаменник дробу p ; в) $ax^{-n} + b = t^\mu$, якщо $p + (m+1)/n$ – ціле число, де μ – знаменник дробу p .

Якщо $|a| + |b| \neq 0$ і жодне з чисел p , $(m+1)/n$ і $p + (m+1)/n$ не є цілим числом, то можна переконатись, що інтеграл (1) існує, але через елементарні функції не виражається.

Вказані вище підстановки Чебишова часто приводять до громіздких перетворень. В багатьох випадках ці інтеграли можна знайти простіше різними штучними прийомами [3, 5].

Приклад 5. Для знаходження інтегралу $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ зробимо заміну

(в даному випадку $m=2$, $p=-1/2$, $n=2$, $p+(m+1)/n=1$) $x^2 - 1 = t^2$.

Тоді $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} dt$. Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)} + C = \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (0;1). \end{aligned}$$

3.1.9. Інтегрування тригонометричних та інших трансцендентних функцій. Інтеграли тригонометричних функцій часто зводяться до табличних за допомогою тригонометричних формул. В складніших випадках доцільніше скористатися відповідними підстановками [3, 5].

1°. Інтеграли

$$\int R(\sin x; \cos x) dx, \quad (1)$$

де R – раціональна функція двох змінних, знаходяться за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Тоді [3, 5]

$$dt = \left(\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1+t^2) dx, \quad dx = 2(1+t^2)^{-1} dt,$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

і тому інтеграл (1) можна виразити через елементарні функції. Якщо $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ або $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то замість заміни $t = \operatorname{tg}(x/2)$ доцільніше використовувати відповідно підстановки $\cos x = t$, $\sin x = t$ і $\operatorname{tg} x = t$.

Приклад 1.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4 \cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x - 4) \cos^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2} \right| + C$$

(заміна $\operatorname{tg} x = t$) на кожному проміжку $\Delta \subset \mathbb{R}$, який не містить коренів рівняння $\operatorname{tg}^2 x - 4 = 0$.

Приклад 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x d \sin x}{\sin^2 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d \sin x}{\sin^2 x} = \\ &= \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x} - \int d \sin x = \frac{-1}{\sin x} - \sin x + C \end{aligned}$$

(заміна $\sin x = t$) на кожному проміжку $\Delta \subset \mathbb{R}$, який не містить коренів рівняння $\sin x = 0$.

Приклад 3.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) d \operatorname{tg} x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \\ &= \int (1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{ctg}^2 x) d \operatorname{tg} x = \int \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x = \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x + 2 \int d \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x d \operatorname{tg} x = \frac{-1}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

(заміна $\operatorname{tg} x = t$) на кожному проміжку $\Delta \subset \mathbb{R}$, який не містить точок $\pi k / 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 4 [3, 5]. Для знаходження інтегралу

$$I(x) = \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$$

зробимо заміну $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тоді, якщо $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$I(x) = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{5}} + c_n.$$

Оскільки підінтегральна функція є неперервною на \mathbb{R} , то первісна повинна бути неперервною на \mathbb{R} . Тому для кожного $n \in \mathbb{Z}$ повинно виконуватись $I(2\pi n + \pi+) = I(2\pi n + \pi-)$, тобто $c_n + \frac{\pi}{2\sqrt{5}} = c_{n+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{5}}$.

Отже, $c_n = C + \frac{\pi n}{\sqrt{5}}$, де C – довільна стала. Але $n < \frac{x + \pi}{2\pi} < n + 1$. Тому

$n = \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right]$ і $I(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right] \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C$, $x \neq (2n+1)\pi$.

Крім цього,

$$\lim_{x \rightarrow (2n+1)\pi} I(x) = \frac{2n+1}{2\sqrt{5}} \pi, \quad x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 5.
$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{a^2} \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + (b/a)^2} =$$

$$= \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} x}{b} + C, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

2°. Інтеграл

$$I_{\mu, \nu} = \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx$$

зводяться [3, 5] до інтеграла диференціального бінома замінами $\cos x = t$ та $\sin x = t$. В багатьох випадках їх можна знайти різними іншими прийомами з використанням тригонометричних формул, виведенням рекурентних формул і т.д.

Приклад 6.

$$\int \cos^4 x dx = \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx =$$

$$= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \int \frac{1 + \cos 4x}{8} dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

Приклад 7.

$$I_n(x) := \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx =$$

$$= \int \cos^{n-2} x dx - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = I_{n-2}(x) + \int \cos^{n-2} x \sin x d \cos x =$$

$$= I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int \cos^{n-1} x \cos x dx =$$

$$= I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n(x).$$

Отже,

$$I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2.$$

Приклад 8.

$$\tilde{I}_n(x) := \int \sin^n x dx = - \int \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) d \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -I_n \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

Тому

$$\tilde{I}_n(x) = -I_n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = \frac{n-1}{n} \tilde{I}_{n-2}(x) - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2.$$

3°. Інтеграли

$$\int \sin(ax+b)\cos(cx+d)dx, \int \cos(ax+b)\cos(cx+d)dx, \\ \int \sin(ax+b)\sin(cx+d)dx$$

можуть бути зведені [3, 5] до табличних через застосування формул

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}, \quad \cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}, \\ \sin x \sin y = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}.$$

Приклад 9.

$$\int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

4°. Інтеграли гіперболічних функцій знаходяться подібно до інтегралів тригонометричних функцій. Разом з цим, часто краще скористатись формулами $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ та $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$.

Приклад 10.

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx = \int \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} d \operatorname{th} \frac{x}{2} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$$

5°. Інтеграли

$$\int (a^2 - x^2)^\beta dx, \int (a^2 + x^2)^\beta dx, \int (x^2 - a^2)^\beta dx$$

та їм подібні часто доцільно знаходити підстановками [3, 5]: $x = a \cos t$, $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$, $x = a/\sin t$ і т.д.

Приклад 11. Для знаходження інтегралу $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ зробимо

заміну $x = \sin t$. Тоді

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = \int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C = \\ = \frac{\arcsin x}{2} - \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C, \quad |x| < 1.$$

3.1.10. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення первісної.
2. Сформулюйте означення невизначеного інтеграла.
3. Сформулюйте та обґрунтуйте найпростіші властивості невизначеного інтеграла.

4. Запишіть таблицю основних інтегралів.
5. Сформулюйте теорему про інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів.
6. Сформулюйте теорему про інтегрування частинами невизначених інтегралів.
7. Які функції називають елементарними раціональними дробами ?
8. Покажіть, що первісні елементарних раціональних дробів є елементарними функціями.
9. Опишіть метод подання правильного раціонального дробу у вигляді суми елементарних раціональних дробів.
10. Опишіть метод знаходження невизначених інтегралів раціональних функцій.

3.1.11. Вправи і задачі.

1. Знайдіть:

$$1. \int \frac{(1+x)^2}{2x+2x^3} dx.$$

$$2. \int \frac{1+x^2}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$3. \int \sqrt{x^3} dx.$$

$$4. \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx.$$

$$5. \int (2x+1) dx.$$

$$6. \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$7. \int (\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1) dx.$$

$$8. \int (\sqrt{2}-2u) du.$$

$$9. \int (a-x^2) da.$$

$$10. \int (x_2^2 - x_1) dx_1.$$

$$11. \int \left(\frac{1-u}{u} \right)^2 du.$$

$$12. \int \frac{dx}{2+2x^2}.$$

$$13. \int \left(2x^4 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x} + 1 \right) dx.$$

$$14. \int \frac{(1+y)^3}{\sqrt{y}} dy.$$

$$15. \int \frac{dy}{\sqrt{9-9y^2}}.$$

$$16. \int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx.$$

$$17. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$18. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$19. \int |\sin x| dx.$$

$$20. \int |x| dx.$$

$$21. \int \frac{1+2x^2}{x^2+x^4} dx.$$

$$22. \int \frac{1+x^2}{2+\sqrt{a}} dx, a > 0.$$

23. $\int \frac{3}{2\sin^2 x} dx.$

25. $\int \sin|x| dx.$

27. $\int \frac{(1+2x)^2}{\sqrt{2x}} dx.$

29. $\int \sqrt{2}(x^3 + \sqrt[3]{x}) dx.$

24. $\int \frac{\sqrt{3}}{4\cos^2 x} dx.$

26. $\int \frac{3dx}{\sqrt{2}}.$

28. $\int \frac{(3+2x)^3}{\sqrt[3]{x}} dx.$

30. $\int \frac{2}{4+x^2} dx.$

2. Методом внесення під диференціал знайдіть:

1. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^5(x+1)}.$

3. $\int 3x^2 \cos x^3 dx.$

5. $\int \left((-x+3)^{10} + \frac{1}{\sqrt{-2x+1}} \right) dx.$

7. $\int \left(\frac{1}{(x+2)^4} + \sqrt[4]{3x-1} \right) dx.$

9. $\int \frac{dx}{1-3x}.$

11. $\int (-2x+1)^7 dx.$

13. $\int e^{-2x} dx.$

15. $\int \sin(-x+1) dx.$

17. $\int \cos(2-x) dx.$

19. $\int \frac{e^x dx}{e^x + 1}.$

21. $\int e^{x^2} x dx.$

23. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx.$

25. $\int \frac{\sqrt{2}}{1+2x^2} dx.$

2. $\int \frac{dx}{(x+2)^3}.$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

6. $\int \frac{dx}{3-4x}.$

8. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\arctg x}.$

10. $\int (1-x)^{20} dx.$

12. $\int \sqrt{1-2x} dx.$

14. $\int 3x^2 \sin x^3 dx.$

16. $\int e^{-\sin x} \cos x dx.$

18. $\int \cos(1-3x) dx.$

20. $\int e^{2-4x} dx.$

22. $\int x \sin x^2 dx.$

24. $\int \frac{\sin \ln x dx}{x}.$

26. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}} dx.$

$$27. \int (x+3)^{10} dx.$$

$$29. \int 2\sqrt{1+2x} dx.$$

3. Зробивши вказану заміну знайдіть:

$$1. \int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}, t = 4 + \sin^2 x.$$

$$3. \int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^2} dx, x = 3 \operatorname{sh} t.$$

$$5. \int \operatorname{ctg}^3 x dx, t = \operatorname{ctg} x.$$

$$7. \int \sqrt{4-x^2} dx, x = 2 \cos t.$$

$$9. \int (9-x^2)^{3/2} dx, x = 2 \sin t.$$

$$11. \int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}, t = 1 + \ln x.$$

$$13. \int \frac{x^3 dx}{2+x^8}, t = x^4.$$

$$15. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{x^2+1}}, t = x^2 + 1.$$

$$17. \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}, t = \operatorname{tg} x.$$

$$19. \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}, t = \operatorname{sh} x.$$

$$21. \int x\sqrt{1-x} dx, t = \sqrt{1-x}.$$

$$23. \int \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}} dx, t = e^x.$$

$$25. \int \frac{x^3 dx}{2+x^8}, t = x^4.$$

$$28. \int 2\sqrt[3]{1+x/3} dx.$$

$$30. \int \frac{dx}{1-x/2}.$$

$$2. \int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, t = 1 + \sqrt{x}.$$

$$4. \int \frac{e^x dx}{1+e^x}, t = 1 + e^x.$$

$$6. \int \frac{x dx}{1+\sqrt[5]{x}}, t = 1 + \sqrt[5]{x}.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}, t = 1/x.$$

$$10. \int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}, t = \sqrt{1+e^x}.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}, x = \sin t.$$

$$14. \int \frac{x dx}{\sqrt[3]{2+x}}, t = \sqrt[3]{2+x}.$$

$$16. \int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}, t = \sqrt[3]{x}.$$

$$18. \int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^2} dx, x = 3 \operatorname{tg} t.$$

$$20. \int \frac{(x^2-x) dx}{(x-2)^3}, t = x-2.$$

$$22. \int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}, t = \sqrt{1+x}.$$

$$24. \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx, t = 1 + \sqrt{x}.$$

$$26. \int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}, t = \operatorname{tg} x.$$

$$27. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}, \quad t = \arcsin x.$$

$$28. \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad t = e^x$$

$$29. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad x-a = (b-a)\sin^2 t. \quad 30. \int \frac{xdx}{1+x^4}, \quad t = x^2.$$

4. Інтегруючи частинами знайдіть:

$$1. \int (1+x^3) \ln x dx$$

$$2. \int x^{10} \ln x dx.$$

$$3. \int (x^2+x) \sin x dx.$$

$$4. \int (x+1) \arcsin x dx.$$

$$5. \int (x^2-x)e^x dx.$$

$$6. \int (x^2+x)e^{-2x} dx.$$

$$7. \int (x^3+x) \sin x dx.$$

$$8. \int (x^3-x) \cos 2x dx.$$

$$9. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$$

$$11. \int x^5 \cos x dx.$$

$$12. \int (x^2+1)e^{-3x} dx.$$

$$13. \int (x^3+5)e^{-2x} dx.$$

$$14. \int \ln^2 x dx.$$

$$15. \int (x+1)^2 \ln x dx.$$

$$16. \int (x^3-1) \sin x dx.$$

$$17. \int \frac{x}{\sin^2 x} dx.$$

$$18. \int \frac{x \cos x}{\sin^3 x} dx.$$

$$19. \int x^3 \cos x dx.$$

$$20. \int x \ln(x-1) dx.$$

$$21. \int \ln(x^2+1) dx.$$

$$22. \int x \sin^2 x dx.$$

$$23. \int x \cos^2 x dx.$$

$$24. \int \sin \ln x dx.$$

$$25. \int x \sin^2 x dx.$$

$$26. \int x^2 \arctg x dx.$$

$$27. \int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$28. \int x^2 \ln x dx.$$

$$29. \int x^2 \arcsin x dx.$$

$$30. \int x^4 e^{-x} dx.$$

5. Знайдіть:

$$1. \int \frac{1-x}{1+2x^2} dx.$$

$$2. \int \frac{1+2x}{x^2+1} dx.$$

$$3. \int \frac{2+3x}{(x+1)^3} dx.$$

$$4. \int \frac{2+2x}{1-x^2} dx.$$

5. $\int \frac{2+3x}{(x+1)^3} dx.$

7. $\int \frac{x}{x+2} dx.$

9. $\int \frac{x+1}{2x+1} dx.$

11. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$

13. $\int \frac{x^2}{x+1} dx.$

15. $\int \frac{x^3}{x+1} dx.$

17. $\int \frac{x^4}{x^2-1} dx.$

19. $\int \frac{x^2+2}{x+2} dx.$

21. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

23. $\int \frac{(2x+3)}{x^2+x+2} dx.$

25. $\int \frac{x}{x^2+4x+3} dx.$

27. $\int \frac{dx}{x^2+3x+2}.$

29. $\int \frac{x+7}{1-x} dx.$

6. $\int \frac{x}{(x-1)^2} dx.$

8. $\int \frac{x-1}{x-2} dx.$

10. $\int \frac{x+2}{1-2x} dx.$

12. $\int \frac{x^2}{1+2x^2} dx.$

14. $\int \frac{x^2}{x-1} dx.$

16. $\int \frac{x^3}{x-1} dx.$

18. $\int \frac{x^4}{x^2+1} dx.$

20. $\int \frac{x^2-2}{x-2} dx.$

22. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$

24. $\int \frac{dx}{(2x+1)(2x+7)}.$

26. $\int \frac{dx}{(x+1)(-x-2)}.$

28. $\int \frac{dx}{x^2-x+5}.$

30. $\int \frac{x+1}{x-1} dx.$

6. Знайдіть:

1. $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}.$

3. $\int \frac{x+1}{(x-1)^2} dx.$

5. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}.$

2. $\int \frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}.$

4. $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

6. $\int \frac{x-1}{(x+1)^3} dx.$

7. $\int \frac{x}{(x^2 + x + 1)^2} dx.$
8. $\int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 9)^2} dx.$
9. $\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 3x + 4)}.$
10. $\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 5x + 6)}.$
11. $\int \frac{dx}{x^2 + x^4}.$
12. $\int \frac{x^2}{(1 + x)^3} dx.$
13. $\int \frac{x^3 + 2x}{(1 + x^2)^3} dx.$
14. $\int \frac{x^3 + 1}{(x^2 - 4)^2} dx.$
15. $\int \frac{x^2 + 2x}{(2x^2 + 1)^2} dx.$
16. $\int \frac{x}{(2x^2 + x + 1)^2} dx.$
17. $\int \frac{x}{8 + x^3} dx.$
18. $\int \frac{x}{1 + 8x^3} dx.$
19. $\int \frac{x}{(2x^2 - x - 1)^2} dx.$
20. $\int \frac{x}{(x^2 - x + 1)^2} dx.$
21. $\int \frac{x^2}{8 + x^3} dx.$
22. $\int \frac{x^2}{8 - x^3} dx.$
23. $\int \frac{x}{(x^2 + 4)^3} dx.$
24. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^4}.$
25. $\int \frac{dx}{(1 + 4x^2)^6}.$
26. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$
27. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^3}.$
28. $\int \frac{x}{(x^2 + 9)^3} dx.$
29. $\int \frac{x}{(1 + x^2)^3} dx.$
30. $\int \frac{(2x + 1)}{(x^2 + 4)^3} dx.$

3.1.12. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть:

1. $\int \frac{2x^5 + 1}{x^2 + x^4} dx.$
2. $\int \frac{4x^7 - 5x}{(1 + x)^3} dx.$
3. $\int \frac{x^4 + 2x}{(1 + x^2)^2} dx.$
4. $\int \frac{x^5 + 1}{(x^2 - 4)^2} dx.$

5. $\int \frac{x^4 + 2x}{(2x^2 + 1)^2} dx.$
6. $\int \frac{x^7}{2x^2 + x + 1} dx.$
7. $\int \frac{x^8}{8 + x^3} dx.$
8. $\int \frac{x^9}{1 + 8x^3} dx.$
9. $\int \frac{x^6}{(x+1)(x+2)^2} dx.$
10. $\int \frac{x^5}{(x-2)(x-1)^2} dx.$
11. $\int \frac{x^9 + 1}{(x-1)^2} dx.$
12. $\int \frac{2x^5}{(x-1)^2(x+1)} dx.$
13. $\int \frac{x^4}{(x+1)^2(x-1)} dx.$
14. $\int \frac{(x-1)^4}{(x+1)^3} dx.$
15. $\int \frac{x^5}{x^2 + x + 1} dx.$
16. $\int \frac{(x+1)^4}{x^2 + 2x + 9} dx.$
17. $\int \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 3x + 4} dx.$
18. $\int \frac{5x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx.$
19. $\int \frac{4x^5 + x^2}{2x^2 - x - 1} dx.$
20. $\int \frac{2x^5 + x^2}{x^2 - x + 1} dx.$
21. $\int \frac{3x^5 + x}{8 + x^3} dx.$
22. $\int \frac{4x^4 + x^2}{8 - x^3} dx.$
23. $\int \frac{x^6}{(x^2 + 4)^3} dx.$
24. $\int \frac{x^7 + x^2}{(4 + x^2)^3} dx.$
25. $\int \frac{2x^5 + 4x^2}{(1 + 4x^2)^2} dx.$
26. $\int \frac{x^8 + x^2}{(x^2 + 1)^3} dx.$
27. $\int \frac{4x^5 + x^2}{(4 + x^2)^2} dx.$
28. $\int \frac{4x^5}{(x^2 + 9)^2} dx.$
29. $\int \frac{4x^5 + x^3}{(1 + x^2)^3} dx.$
30. $\int \frac{4x^5 + 1}{(x^2 + 4)^2} dx.$

2. Знайдіть:

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}} dx.$
2. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$
3. $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$
4. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^4}} dx.$

5. $\int \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x} dx.$
6. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1+x}}.$
7. $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$
8. $\int \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$
9. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$
10. $\int \frac{x}{1 + \sqrt[5]{x}} dx.$
11. $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$
12. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 4}} dx.$
14. $\int \frac{x^2 + 2x}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$
15. $\int \sqrt{-9x^2 - 6x + 2} dx.$
16. $\int \sqrt{(2-x)(3+x)} dx.$
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$
18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 - 6x + 5}}.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 + 4x - 3}}.$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-4x^2}}.$
21. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2 + x - 1}}.$
22. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}} dx.$
23. $\int \frac{1}{x^4\sqrt{x^2 - 3}} dx.$
24. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^3}} dx.$
25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}.$
26. $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} dx.$
27. $\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - 9}} dx.$
28. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$
29. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x+1}} dx.$
30. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$

3. Знайдіть

1. $\int (x - \cos x)^3 dx.$
2. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx.$
3. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$
4. $\int \sin^6 x dx.$

5. $\int \frac{du}{2\cos^2 u + 3\sin^2 u}.$
6. $\int \frac{dx}{\sin 2x}.$
7. $\int \frac{dx}{\cos 2x}.$
8. $\int \sin^5 x dx.$
9. $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx.$
10. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$
11. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$
12. $\int \sin x \cos 2x \sin 3x dx.$
13. $\int \cos^4 x dx.$
14. $\int \frac{dx}{5 - 3\sin x}.$
15. $\int \frac{dx}{5 + 4\cos x}.$
16. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$
17. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$
18. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$
19. $\int \frac{dx}{5 - 4\sin x - \cos x}.$
20. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$
21. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$
22. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$
23. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$
24. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}.$
25. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} dx.$
26. $\int \sin^2 2x \cos x dx.$
27. $\int \cos^2 2x \sin^2 2x dx.$
28. $\int \cos^4 2x dx.$
29. $\int \sin^3 3x \cos 2x dx.$
30. $\int \cos^3 2x \sin 2x dx.$

4. Знайдіть:

1. $\int x e^{\sqrt{x}} dx.$
2. $\int x \sqrt{9 - x^2} dx.$
3. $\int \sqrt{4 + x^2} dx.$
4. $\int \ln(4 + x^2) dx.$
5. $\int x^2 \ln(2 + x) dx.$
6. $\int \ln^2 x dx.$
7. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$
8. $\int \frac{x^2}{1 + \sqrt{x}} dx.$
9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{3x}} dx.$
10. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x}}.$

11. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x+3}} dx.$
12. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}.$
13. $\int \frac{x}{x^2+x+9} dx.$
14. $\int \frac{x^5}{x^2-4x+3} dx.$
15. $\int (2x+1)\sin(2x+1)dx.$
16. $\int (x^2-3x+1)e^x dx.$
17. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x-1} dx.$
18. $\int \frac{x}{\sqrt{x^4-x^2-1}} dx.$
19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}.$
20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2-x-x^2}}.$
21. $\int \frac{x^7}{x^2+4} dx.$
22. $\int \frac{x^6}{x^2-9} dx.$
23. $\int \frac{x^4}{x^2+x+3} dx.$
24. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$
25. $\int \sin^2 x \cos^6 x dx.$
26. $\int x^2 \sin \sqrt{x} dx.$
27. $\int x^2 \cos \sqrt{x} dx.$
28. $\int \sqrt{x} \cos x dx.$
29. $\int x^3 e^{-\sqrt{x}} dx.$
30. $\int (4-16x^2)\sin 4x dx.$

5. Знайдіть:

1. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx.$
2. $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}} dx.$
3. $\int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$
4. $\int \frac{1}{\sin^5 x \cos^3 x} dx.$
5. $\int \sin^3 x \sqrt{\cos^5 x} dx.$
6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$
7. $\int \frac{x}{(7-x^2)^7} dx.$
8. $\int \frac{dx}{\ln(1-2x)}.$
9. $\int \sin^2(1-x) dx.$
10. $\int \sin^3(1-2x) dx.$
11. $\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx.$
12. $\int \frac{\cos(2-x)}{\sqrt[5]{\sin(2-x)}} dx.$
13. $\int e^{-2x} \cos e^{-2x} dx.$
14. $\int \frac{dx}{x \cos^2(1-\ln x)}.$

$$15. \int \frac{x + \arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$$

$$16. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$$

$$17. \int \frac{e^{-2x}}{4 + e^{-4x}} dx.$$

$$18. \int x(1-x)^{99} dx.$$

$$19. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$$

$$20. \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$$

$$21. \int \frac{x^2}{(27-x^3)^{3/2}} dx.$$

$$22. \int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx.$$

$$23. \int \frac{x+1}{(x^2+2x-8)^8} dx.$$

$$24. \int \frac{\cos x}{\cos 3x} dx.$$

$$25. \int \frac{6^x}{9^x - 4^x} dx.$$

$$26. \int \sin(1-x)\sin(1+x) dx.$$

$$27. \int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3\sqrt{x^2}} dx.$$

$$28. \int \frac{\arcsin x}{x^2} dx.$$

$$29. \int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$$

$$30. \int \frac{1}{\cos^3 x \sin^5 x} dx.$$

3.2. Інтеграл Рімана (визначений інтеграл)

Ряд задач з різних розділів науки, які розглянемо пізніше, приводять до знаходження границь певних сум. Ці границі отримали спеціальну назву – інтегралів Рімана або визначених інтегралів, які й розглядаються в цьому розділі. Про інші підходи до цього поняття та найпростіші його узагальнення йтиметься в наступному розділі.

3.2.1. Означення визначеного інтеграла. Деякі властивості інтегровних функцій. Нехай $[a; b] \subset \mathbb{R}$ – деякий скінченний проміжок і $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція. Множину $\tau = \{x_k : k \in \overline{1; n}\}$ точок таких, що $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, будемо називати розбиттям проміжку $[a; b]$ або τ -розбиттям, а число $\lambda = \lambda_\tau = \max\{\Delta x_k : k \in \overline{1; n-1}\}$, де $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$, – діаметром розбиття. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$ візьмемо довільну точку ξ_k і побудуємо суму $\sigma = \sigma_f(\tau) = \sigma_f(\tau; \xi)$ [3, 5]:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_0) \Delta x_0 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}.$$

Сума σ називається *інтегральною сумою функції* $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a;b]$. Інтегральна сума σ залежить від функції f , розбиття τ і способу вибору точок $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$, тобто від множини $\xi = \{\xi_k\}$. Таким чином, для кожного проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$ інтегральна сума σ є функцією трьох змінних: $\sigma = \sigma_f(\tau) = \sigma_f(\tau; \xi)$. *Визначенням інтегралом* або *інтегралом Рімана функції* $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a;b]$ називається границя [3, 5]

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma. \quad (1)$$

Якщо границя (1) існує і є скінченною, то функція f називається інтегрованою за Ріманом на $[a;b]$. Крім цього, за означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad a \in \mathbb{R},$$

і

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx, \quad b < a.$$

До того ж,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = \dots$$

Приклад 1. Функція $f(x) = 1$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$ і $\int_a^b 1dx = b - a$, бо

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \Delta x_0 + \Delta x_1 + \dots + \Delta x_{n-1} = b - a.$$

Приклад 2. Якщо $f(x) = e^x$, $[a;b] = [0;10]$, $x_k = k$, то $\lambda = \Delta x_k = 1$, $\sigma = \sum_{k=0}^9 e^{\xi_k}$, де ξ_k – довільна точка проміжку $[k; k+1]$.

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a;b]$, то вона є обмеженою на $[a;b]$.

Приклад 3. Функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

є обмеженою на проміжку $[0;1]$, але не є інтегрованою на $[0;1]$.

Приклад 4. Функція

$$f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

не є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[-1;1]$, бо є необмеженою на $[-1;1]$.

Теорема 2 [3, 5]. Якщо функція $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[a;b]$, то вона є інтегрованою на $[a;b]$.

Теорема 3 [3, 5]. Добуток двох інтегровних на $[a;b]$ функцій $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $g : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є функція інтегровна на $[a;b]$.

Приклад 5. Функція $f(x) = [x]$ є інтегрованою на проміжку $[-4;5]$, бо є неспадною на ньому.

Теорема 4 [3, 5]. Якщо функція $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою на проміжку $[a;b]$ і неперервною на проміжку $[a;b]$ всюди, за винятком, хіба-що скінченної кількості точок, то вона є інтегрованою за Ріманом на $[a;b]$.

3.2.2. Найпростіші властивості визначеного інтеграла.

Теорема 1 (однорідність інтеграла) [3, 5]. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$

для будь-якої сталої c , якщо останній інтеграл існує.

Теорема 2 (адитивність інтеграла) [3, 5].

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx, \quad \text{якщо} \quad \text{останні}$$

інтеграли існують.

Теорема 3 (лінійність інтеграла) [3, 5].

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx \quad \text{для} \quad \text{будь-яких}$$

чисел c_1 і c_2 , якщо останні інтеграли існують.

Теорема 4 [3, 5]. Якщо $a \leq b$, функція $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a;b]$ і $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a;b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Теорема 5 [3, 5]. Якщо $a \leq b$, функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровними на проміжку $[a; b]$ і $(\forall x \in [a; b]): f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b \varphi(x) dx.$$

Теорема 6 [3, 5]. Якщо $a \leq b$, функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою за Ріманом на проміжку $[a; b]$ і $m \leq f(x) \leq M$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Теорема 7 [3, 5]. Якщо $a \leq b$, функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то інтегровою на $[a; b]$ є також функція $|f|$ і

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Наслідок 1. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Теорема 8 [3, 5]. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то вона є інтегровою на будь-якому проміжку $[a_1; b_1] \subset [a; b]$.

Теорема 9 [3, 5]. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою за Ріманом на проміжках $[a; c]$ і $[c; b]$, $a < c < b$, то вона інтегровою за Ріманом на проміжку $[a; b]$ і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Теорема 10 [3, 5]. Якщо $a \leq b$, функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$ і

$$\int_a^b f(x) dx = 0, \text{ то } f(x) = 0 \text{ для всіх } x \in [a; b].$$

Приклад 1. $\int_0^4 e^{x^2} dx = \int_0^2 e^{x^2} dx + \int_2^4 e^{x^2} dx.$

Приклад 2. $\pi/2 < \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+8\cos^2 x} dx < 3\pi/2.$

Теорема 11 (перша теорема про середнє) [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, то

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Теорема 12 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, то існує таке $\mu \in [m(f); M(f)]$, що

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b-a).$$

Теорема 13 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і приймає значення одного знаку на $[a; b]$, то

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx.$$

Теорема 14 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і приймає значення одного знаку на $[a; b]$, то

$$(\exists \mu \in [m(f); M(f)]) : \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx.$$

Теорема 15 (друга теорема про середнє) [3, 5]. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на $[a; b]$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неспадною і невід'ємною на $[a; b]$. Тоді

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(b-) \int_a^c f(x) dx.$$

Теорема 16 [3, 5]. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на $[a; b]$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є незростаючою і невід'ємною на $[a; b]$. Тоді

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x)g(x) dx = g(a+) \int_c^b f(x) dx.$$

Теорема 17 [3, 5]. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на $[a; b]$. Тоді

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+) \int_a^c f(x)dx + g(b-) \int_c^b f(x)dx.$$

Приклад 3. $\int_0^{3/2} e^{-x^2} \sin x dx = \int_0^c \sin x dx + e^{-9/4} \int_c^{3/2} \sin x dx$, якщо $0 \leq c \leq 3/2 < \pi/2$.

Приклад 4. $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln(1+c^2) \leq \ln 2$.

3.2.3. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Формула Лейбніца-Ньютона. Функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

називається інтегралом зі змінною верхньою межею.

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[a; b]$, то $(\forall x \in [a; b]) : \Phi'(x) = f(x)$, тобто

$$\left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x).$$

Наслідок 1 [3, 5]. Кожна неперервна на проміжку $[a; b]$ функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну на $[a; b]$. Однією з її первісних є функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Теорема 2 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то функція Φ є неперервною на $[a; b]$.

Наслідок 2 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, то

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t)dt = \int_a^b f(t)dt, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Приклад 1. $\left(\int_0^x \sin \sqrt{t} dt \right)' = \sin \sqrt{x}$.

Приклад 2. $\left(\int_x^1 \cos^7 t dt \right)' = \left(- \int_1^x \cos^7 t dt \right)' = -\cos^7 x.$

Приклад 3. $\left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin t dt \right)' = \sin \sqrt{x} (\sqrt{x})' = \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$

Приклад 4. Використовуючи правила Лопіталя, отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{\frac{e^{x^2} 2x^2 + e^{x^2}}{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Теорема 3 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a), \tag{1}$$

де F – будь-яка первісна функції f .

Зауваження 1. Формулу (1) яку називають формулою Лейбніца-Ньютона, записують так

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b.$$

Приклад 5. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$

Приклад 6.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2} |\sin x| dx = \\ &= -\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^0 \sin x dx + \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \sqrt{2} \cos x \Big|_{-\pi/2}^0 - \sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Приклад 7. Якщо $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$ то

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 xdx + \int_0^2 dx = \frac{x^2}{2} \Big|_{-1}^0 + x \Big|_0^2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

3.2.4. Інтегрування частинами та заміною змінних визначених інтегралів.

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функції $u:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $v:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[a;b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад 1. $\int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}$. Тут

$u = x$, $dv = e^{-x} dx$, $du = dx$ і $v = -e^{-x}$.

Теорема 2 [3, 5]. Нехай функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a;b]$, а функція $\varphi:[\alpha;\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною і монотонною на проміжку $[\alpha;\beta]$, $\varphi([\alpha;\beta]) = [a;b]$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Наслідок 1 [3, 5]. Нехай функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a;b]$, а функція $\varphi:[\alpha;\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною і монотонною на проміжку $[\alpha;\beta]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді справедлива рівність (1).

Приклад 2. Для знаходження інтегралу $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ зробимо заміну

$\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$, $dx = 2t dt$. Якщо $x = 0$, то $t = 0$. Якщо $x = 4$, то $t = 2$. Крім цього, $([0;2])^2 = [0;4]$. Тому

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} &= \int_0^2 \frac{2t dt}{t+1} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+1} \right) = \\ &= 2 \left(t \Big|_0^2 - \ln(t+1) \Big|_0^2 \right) = 2(2 - \ln 3) = 4 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

Приклад 3. Для знаходження інтегралу $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ зробимо заміну $x = 2 \sin t$. Тоді $dx = 2 \cos t dt$. Якщо $x = 0$, то $t = 0$. Якщо $x = 2$,

то $t = \pi/2$. Крім цього, $2\sin([0; \pi/2]) = [0; 2]$. Тому

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi.$$

Приклад 4.
$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \sin x dx =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^2 x d \cos x + \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Приклад 5. Для знаходження інтегралу $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ зробимо

заміну $x = \pi - t$. Тоді $dx = -dt$. Якщо $x = 0$, то $t = \pi$. Якщо $x = \pi$, то $t = 0$. Тому

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} d(\pi - t) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt,$$

звідки

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Приклад 6. Якщо функція $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ є парною і неперервною на проміжку $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Приклад 7. Якщо функція $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ є непарною і неперервною на проміжку $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = 0.$$

3.2.5. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте теорему про обмеженість інтегрованої функції.
3. Сформулюйте критерій інтегровності.
4. Сформулюйте теорему про інтегровність неперервної функції.
5. Сформулюйте теорему про інтегровність монотонної функції.
6. Сформулюйте теорему про однорідність інтеграла.
7. Сформулюйте теорему про адитивність інтеграла.
8. Сформулюйте теорему про інтегровність модуля інтегрованої функції.
9. Сформулюйте першу теорему про середнє для визначених інтегралів.

10. Сформулюйте другу теорему про середнє для визначених інтегралів.
11. Сформулюйте теорему про похідну інтеграла Рімана зі змінною верхньою межею.
12. Запишіть і обґрунтуйте формулу Лейбніца-Ньютона.
13. Сформулюйте теорему про інтегрування частинами визначених інтегралів.
14. Сформулюйте теорему про заміну змінних у визначеному інтегралі.
15. Наведіть приклад функції $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0;1]$ і неінтегрованої за Ріманом на $[0;1]$.
16. Наведіть приклад функції $f : [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$, диференційовної на проміжку $[0;1]$, для якої функція f' є неінтегрованою за Ріманом на $[0;1]$.

3.2.6. Вправи і задачі.

1. Знайдіть:

- | | |
|---------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| 1. $\int_1^2 \left(\frac{1}{3x} + \sqrt{2x} \right) dx.$ | 2. $\int_{-2}^1 (2\sqrt[3]{x} - \sqrt{3}) dx.$ |
| 3. $\int_{-4}^{-1} \left(\ln 2 - \frac{1}{2x^2} \right) dx.$ | 4. $\int_0^1 (e^{-2x+1} - \sqrt{2}) dx.$ |
| 5. $\int_0^1 (1-2x)^9 dx.$ | 6. $\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x^3}{\sqrt{9-x^4}} dx.$ |
| 7. $\int_0^1 \frac{x}{3+2x^2} dx.$ | 8. $\int_0^1 x^2 \sqrt[3]{1-x^3} dx.$ |
| 9. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$ | 10. $\int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{\sqrt{9-x^4}} dx.$ |
| 11. $\int_{-4}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-x}}.$ | 12. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x} dx.$ |
| 13. $\int_0^{1/2} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ | 14. $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ |
| 15. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$ | 16. $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arccos x}.$ |

$$17. \int_0^{1/\sqrt{2}} x \sin \pi x^2 dx.$$

$$19. \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$21. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2 2x} dx.$$

$$23. \int_{-8}^0 \sqrt[4]{-x} dx.$$

$$25. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx.$$

$$27. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{x} \operatorname{ctg} \sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$29. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{x \sin^2 \ln x} dx.$$

$$18. \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos x^2 dx.$$

$$20. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$22. \int_{-4}^{-1} \sqrt{-x} dx.$$

$$24. \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 2x} dx.$$

$$26. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$$

$$28. \int_{(\pi/6)^3}^{(\pi/3)^3} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} \cos^2 \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$30. \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$$

2. Знайдіть:

$$1. \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$$

$$3. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(-2x+1)(-2x+5)}.$$

$$5. \int_{-3}^{-2} \frac{2+3x}{(x+1)^3} dx.$$

$$7. \int_{-1}^0 \frac{x dx}{x+2}.$$

$$9. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

$$11. \int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2 + 1} dx.$$

$$13. \int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx.$$

$$2. \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + x + 2}.$$

$$4. \int_2^3 \frac{2+2x}{1-x^2} dx.$$

$$6. \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$8. \int_{-1}^1 \frac{x-1}{x-2} dx.$$

$$10. \int_{-1}^0 \frac{x+2}{1-2x} dx.$$

$$12. \int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+2x^2} dx.$$

$$14. \int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1} dx.$$

$$15. \int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx .$$

$$17. \int_2^3 \frac{x^4 dx}{x^2 - 1} .$$

$$19. \int_{-1}^0 \frac{x^2 + 2}{x + 2} dx .$$

$$21. \int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-1)(x+3)} .$$

$$23. \int_0^1 \frac{2 + 2x}{1 + x^2} dx .$$

$$25. \int_0^1 \frac{x+1}{2x+1} dx .$$

$$27. \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} .$$

$$29. \int_0^1 \frac{1+2x}{x^2 + 1} dx .$$

$$16. \int_{-2}^0 \frac{x^3}{x-1} dx .$$

$$18. \int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{x^2 + 1} .$$

$$20. \int_{-2}^0 \frac{x^2 - 2}{x - 2} dx .$$

$$22. \int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x-2)} .$$

$$24. \int_{-1}^0 \frac{1-2x}{x^2 + 1} dx .$$

$$26. \int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx .$$

$$28. \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 4x + 3} .$$

$$30. \int_0^1 \frac{1-x}{1+2x^2} dx .$$

3. Знайдіть:

$$1. \int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx .$$

$$3. \int_0^1 \arcsin^2 x dx .$$

$$5. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx .$$

$$7. \int_1^e (1 - \ln x)^2 dx .$$

$$9. \int_1^e (1+x) \ln x dx$$

$$11. \int_0^{\pi/2} (x^2 + x) \sin x dx .$$

$$2. \int_1^e \ln^2 x dx .$$

$$4. \int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx .$$

$$6. \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx .$$

$$8. \int_{1/e}^1 x \ln^2 x dx .$$

$$10. \int_{1/e}^1 x^{10} \ln x dx .$$

$$12. \int_{-1}^0 (x+1) \arcsin x dx .$$

$$13. \int_0^1 (x^2 - x)e^x dx .$$

$$15. \int_{-\pi}^0 (x^3 + x) \sin x dx .$$

$$17. \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx .$$

$$19. \int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx .$$

$$21. \int_0^{\pi} x^5 \cos x dx .$$

$$23. \int_0^1 \arcsin x dx .$$

$$25. \int_0^1 x e^{-x} dx .$$

$$27. \int_0^1 x^2 \arcsin x dx .$$

$$29. \int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx .$$

$$14. \int_0^1 (x^2 + x)e^{-2x} dx .$$

$$16. \int_{-\pi/2}^0 (x^3 - x) \cos 2x dx .$$

$$18. \int_{\sqrt{3}/3}^1 x^{-2} \sqrt{1+x^2} dx .$$

$$20. \int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx .$$

$$22. \int_{-\pi/2}^0 x^4 \sin x dx .$$

$$24. \int_0^1 x \arcsin x dx .$$

$$26. \int_0^1 x^4 e^{-x} dx .$$

$$28. \int_0^1 x^3 \operatorname{arctg} x dx .$$

$$30. \int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx .$$

4. Знайдіть:

$$1. \int \frac{dx}{\sqrt{2} x^5 \sqrt{x^2 - 1}} .$$

$$3. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} .$$

$$5. \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2} .$$

$$7. \int_{2,5}^5 \frac{\sqrt{(25-x^2)^3}}{x^4} dx .$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3} .$$

$$2. \int_0^2 \frac{1}{x + \sqrt{4-x^2}} dx .$$

$$4. \int_0^3 \frac{1}{(3+x^2)^{5/2}} dx .$$

$$6. \int_{2,5}^5 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^4} dx .$$

$$8. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx .$$

$$10. \int_0^2 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx .$$

$$11. \int_{-1}^1 \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$$

$$13. \int_1^5 \frac{xdx}{\sqrt{4x+5}}.$$

$$15. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$17. \int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$$

$$19. \int_0^4 x^3 \sqrt{9+x^2} dx.$$

$$21. \int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} dx.$$

$$23. \int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx.$$

$$25. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$$

$$27. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx.$$

$$29. \int_9^{64} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$$

$$12. \int_0^2 (\sqrt{4-x^2})^3 dx.$$

$$14. \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{2x+1}} dx.$$

$$16. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+2} dx.$$

$$18. \int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$$

$$20. \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1} dx.$$

$$22. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx.$$

$$24. \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$$

$$26. \int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$$

$$28. \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$$

$$30. \int_1^4 \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2}.$$

3.2.7. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть:

$$1. \int_1^2 (3x^4 + \sqrt{2x}) dx.$$

$$3. \int_{-4}^{-1} (\ln 2 - x^2) dx.$$

$$5. \int_0^1 (1+2x)^{11} dx.$$

$$2. \int_{-2}^1 (2\sqrt[4]{x} + \sqrt{3}) dx.$$

$$4. \int_0^1 (e^{-x} - 1) dx.$$

$$6. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

7. $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2}$.
8. $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx$.
9. $\int_0^1 (2^{-x} - 1) dx$.
10. $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.
11. $\int_0^1 \frac{dx}{1-x}$.
12. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}(-x) dx$.
13. $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2}$.
14. $\int_0^1 \frac{dx}{2+9x^2}$.
15. $\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx$.
16. $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.
17. $\int_0^{1/4} \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.
18. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx$.
19. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$.
20. $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx$.
21. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx$.
22. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx$.
23. $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x-1} dx$.
24. $\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$.
25. $\int_1^2 \frac{1}{x^2-1} dx$.
26. $\int_5^6 \frac{1}{x^2-4} dx$.
27. $\int_{-1}^0 \frac{x}{x^2-4x+3} dx$.
28. $\int_0^1 \frac{x}{x^2+4x+3} dx$.
29. $\int_{-1}^0 \frac{2x+3}{x^2+x+2} dx$.
30. $\int_0^1 \frac{1-2x}{x^2-x+2} dx$.

2. Знайдіть:

1. $\int_{-1/2}^1 \frac{x}{x^2+x+1} dx$.
2. $\int_{-1/2}^0 \frac{x}{x^2-x+1} dx$.
3. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}$.
4. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}$.

5. $\int_{-2}^0 \frac{x+1}{(x-1)^2} dx.$
6. $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$
7. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}.$
8. $\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^3} dx.$
9. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-x+5}.$
10. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+x+5}.$
11. $\int_0^1 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2+1} dx.$
12. $\int_{-1}^0 \frac{3x^5+x^2+1}{x^2+1} dx.$
14. $\int_{-1}^0 \frac{x}{(x^2+x+1)^2} dx.$
13. $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x^2+2x+9)^2} dx.$
15. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2(x^2-3x+4)}.$
16. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2(x^2-5x+6)}.$
17. $\int_0^1 x^2 e^x dx.$
18. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx.$
19. $\int_{-2}^0 (x^2+2)e^{x/2} dx.$
20. $\int_1^8 \frac{\ln^2 x}{x^{3/2}} dx.$
21. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx.$
22. $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$
23. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$
24. $\int_0^3 (\sqrt{9-x^2})^3 dx.$
25. $\int_0^2 \frac{x^2}{(4+x^2)^2} dx.$
26. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x^2} dx.$
27. $\int_0^2 \sqrt{2x+x^2} dx.$
28. $\int_1^2 \frac{dx}{(\sqrt{1+x})^3 + \sqrt{1+x}}.$
29. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{1+5x+x^2}}.$
30. $\int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$

3. Знайдіть:

1. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos^2 x}.$
2. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2+\cos x}.$

3. $\int_0^{\pi/2} \cos \sqrt{x} dx$.
4. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}$.
5. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x(1 + \cos x)}$.
6. $\int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.
7. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx$.
8. $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx$.
9. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$.
10. $\int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx$.
11. $\int_0^{16} (\sqrt{256 - x^2})^3 dx$.
12. $\int_{1/2}^2 \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$.
13. $\int_0^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}$.
14. $\int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx$.
15. $\int_0^1 \frac{x^4}{(2 - x^2)^{3/2}} dx$.
16. $\int_{0,1}^{10} \frac{\ln x dx}{1 + x^2}$.
17. $\int_0^1 (\sqrt{9 - x^2})^3 dx$.
18. $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx$.
19. $\int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x + 1)} dx$.
20. $\int_0^e \sqrt{x} \ln^2 x dx$.
21. $\int_2^3 (x - 1) \ln^2 (x - 1) dx$.
22. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4 + 3 \cos 2x} dx$.
23. $\int_0^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx$.
24. $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx$.
25. $\int_0^4 x^3 \sqrt{x^2 + 9} dx$.
26. $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx$.
27. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1 + \sin x)^2}$.
28. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{4 + x^2}$.
29. $\int_1^9 \sqrt{x} \ln x dx$.
30. $\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx$.

4. Знайдіть:

1. $\int_{-1}^2 \sqrt[3]{|x-1|} dx .$
2. $\int_{-3}^5 \sqrt[3]{|4-x|} dx .$
3. $\int_{-1}^{1/2} |\arcsin x| dx .$
4. $\int_{-1}^{1/2} |\arccos x| dx .$
5. $\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} |\operatorname{arctg} x| dx .$
6. $\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} |\operatorname{arctg} x| dx .$
7. $\int_{1/e}^e |1 - \ln x| dx .$
8. $\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx .$
9. $\int_{-2}^1 \sqrt{|x-1|} dx .$
10. $\int_{-2}^6 \sqrt{|4-x|} dx .$
11. $\int_{-1}^{1/2} \arcsin |x| dx .$
12. $\int_{-1}^{1/2} \arccos |x| dx .$
13. $\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \operatorname{arctg} |x| dx .$
14. $\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \operatorname{arctg} |x| dx .$
15. $\int_{1/e}^e |1 + \ln x| dx .$
16. $\int_{-\sqrt{3}/2}^1 |\operatorname{arctg} x| dx .$
17. $\int_{-2}^1 |x^2 - 1| dx .$
18. $\int_{-2}^3 |4 - x^2| dx .$
19. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{tg} x| dx .$
20. $\int_{-\pi/2}^{3\pi/4} |\cos |x|| dx .$
21. $\int_{-\pi/2}^{\pi/6} |\sin |x|| dx .$
22. $\int_{-\pi/2}^{3\pi/4} \cos |x| dx .$
23. $\int_{1/e}^e |\ln^2 x| dx .$
24. $\int_{-\sqrt{3}/2}^1 |x| \operatorname{arctg} |x| dx .$
25. $\int_{1/e}^e |\ln x| dx .$
26. $\int_{-\sqrt{3}/2}^1 |x| \operatorname{arctg} x dx .$
27. $\int_{-2}^1 f(x) dx , f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-2; -1), \\ 1, & x \in [-1; 1]. \end{cases}$

$$28. \int_{-1}^2 f(x)dx, f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x \in [0; 2]. \end{cases}$$

$$29. \int_{-2}^1 f(x)dx, f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-2; -1), \\ 2, & x \in [-1; 0), \\ x^3, & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$30. \int_1^4 f(x)dx, f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1; 2), \\ x^2, & x \in [2; 3), \\ x, & x \in [3; 4]. \end{cases}$$

3.3. Невласні (невластиві) інтеграли та інші узагальнення інтеграла Рімана

В означенні інтеграла Рімана припускалось, що проміжок $[a; b]$ є обмеженим. Крім цього, інтегровними за Ріманом не можуть бути необмежені функції. Тепер ми розширимо поняття інтеграла так, що інтегровними стануть деякі необмежені функції і можна буде знаходити інтеграли по нескінченних проміжках.

3.3.1. Означення невластного інтеграла. Деякі властивості невластних інтегралів. Нехай функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою за Ріманом на будь-якому проміжку $[a; \eta]$, який належить обмеженому або необмеженому проміжку $[a; b)$, $a \in \mathbb{R}$. *Невластним або невластивим інтегралом функції $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a; b)$ називається [3, 5] границя (якщо $b = +\infty$, то $b- := +\infty$)*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow b-} \int_a^{\eta} f(x)dx. \quad (1)$$

Якщо границя (1) існує і є скінченною, то функція f називається *інтегровою у невластному розумінні на $[a; b)$* (інколи зручніше говорити на $[a; b]$ або невластному розумінні на $[a; b]$ з особливою точкою b).

Якщо границя (1) не існує або рівна ∞ , то невластний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ називається розбіжним.

Теорема 1 [3, 5]. *Якщо функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою за Ріманом на проміжку $[a; b) \subset \mathbb{R}$, то вона інтегровна на $[a; b]$ в невластному розумінні і її невластний інтеграл дорівнює інтегралу Рімана.*

Теорема 2 (однорідність інтеграла) [3, 5]. $\int_a^b cf(x)dx = c \int_a^b f(x)dx$

для будь-якої сталої c , якщо останній інтеграл є збіжним.

Теорема 3 (адитивність інтеграла) [3, 5].

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx,$$

якщо останні інтеграли є збіжними.

Теорема 4 (лінійність інтеграла) [3, 5]. $\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx =$

$$c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx \text{ для будь-яких чисел } c_1 \text{ і } c_2, \text{ якщо останні два}$$

інтеграли є збіжними.

Аналогічно визначається невласний інтеграл на лівому кінці проміжку $(a; b]$, $b \in \mathbb{R}$. Нехай функція $f : (a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta; b] \subset (a; b]$. Невласним інтегралом функції f на $(a; b]$ (інколи зручніше говорити на $[a; b]$ або невласним інтегралом на $[a; b]$ з особливою точкою a) називається [3, 5] границя (якщо $a = -\infty$, то $a+ := -\infty$)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow a+} \int_{\eta}^b f(x)dx.$$

При дослідженні невласних інтегралів потрібно з'ясувати спочатку, в яких точках цей інтеграл є невласним.

Приклад 1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} x^{-2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} + 1 \right) = 1$

(на практиці часто границі знаходять усно і відповідні записи

виглядають так: $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} = 1$).

Приклад 2. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = (\arctg x) \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Приклад 3. $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_0^{\eta} xe^{-x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left((-xe^{-x}) \Big|_0^{\eta} + \int_0^{\eta} e^{-x} dx \right)$

$= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} ((-\eta e^{-\eta} - e^{-\eta}) + 1) = 1$ (часто границі знаходять усно і записи

виглядають так: $\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = (-x e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = (-x e^{-x} - e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 1$).

Приклад 4.

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_e^{\eta} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_e^{\eta} \right) = 1.$$

Приклад 5. Інтеграл $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx$ є розбіжним, бо

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{e^2}^{\eta} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} d \ln \ln x = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left((\ln \ln \ln x) \Big|_{e^2}^{\eta} \right) = +\infty.$$

Приклад 6. Інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ є розбіжним, бо

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\eta}^1 = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) = +\infty.$$

Приклад 7. Інтеграл

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$$

є розбіжним, бо

$$\lim_{\eta \rightarrow 2^-} \int_0^{\eta} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\eta \rightarrow 2^-} (\ln |x-2|) \Big|_0^{\eta} = -\infty.$$

Приклад 8. Інтеграл $\int_0^1 \ln x dx$ є розбіжним, бо

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \ln x dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(x \ln x \Big|_{\eta}^1 - \int_{\eta}^1 dx \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (-\eta \ln \eta - 1 + \eta) = -1.$$

Приклад 9.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left((\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^{\eta} \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

На невластні інтеграли можна перенести ряд інших властивостей і

теорем, які справедливі для інтегралів Рімана [3, 5].

Теорема 5 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b)$ і для деякої первісної F функції f на проміжку $[a; b)$ існує границя $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) := F(b)$, то

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

Теорема 6 [3, 5]. Нехай функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b)$, а функція $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[\alpha; \beta]$, $\varphi([\alpha; \beta]) = [a; b)$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = b$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Теорема 7 [3, 5]. Якщо функції $u : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ і $v : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[a; b)$ і існує границя

$$\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) := u(b)v(b), \text{ то } \int_a^b u dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du.$$

Останню формулу записують часто у вигляді

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Приклад 10. Для знаходження інтеграла $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ зробимо заміну $x = \sin t$. Тоді $dx = \cos t dt$, $x \in [0; 1)$ тоді і тільки тоді, коли

$$t \in [0; \pi/2) \text{ і } \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin t = 1. \text{ Тому } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

Бачимо, що після заміни та спрощень невласний інтеграл звівся до інтеграла Рімана. Так буває часто.

Приклад 11. Для знаходження інтеграла $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$

зробимо заміну $x = 2t$. Тоді

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt.$$

Але

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt = - \int_0^{\pi/4} \ln \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) d \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u du .$$

Тому

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I .$$

Отже, $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Приклад 12.

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \left(-x e^{-x} \right) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left(-x e^{-x} - e^{-x} \right) \Big|_0^{+\infty} = 1 .$$

3.3.2. Збіжність невластних інтегралів невід’ємних функцій.

Ознаки Абеля і Діріхле.

Теорема 1 [3, 5]. Нехай функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$. Для того щоб невластний інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

був збіжним, необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta \in (a; b))(\forall \eta' \in (\eta; b))(\forall \eta'' \in (\eta; b)) : \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x) dx \right| < \varepsilon .$$

Теорема 2 [3, 5]. Нехай функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід’ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$. Для того щоб невластний інтеграл (1) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб

$$(\exists c_1)(\forall \eta \in (a; b)) : \int_a^{\eta} f(x) dx \leq c_1 .$$

Теорема 3 [3, 5]. Нехай функції $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ і $g : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід’ємними на проміжку $[a; b)$, інтегровними за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$ і $(\exists c_1)(\forall x \in [a; b)) : f(x) \leq c_1 g(x)$. Тоді: 1) якщо

$$\int_a^b g(x) dx \tag{2}$$

є збіжним, то збіжним є інтеграл (1); 2) якщо інтеграл (1) є розбіжним, то розбіжним є інтеграл (2).

Теорема 4 [3, 5]. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha > 1$ і є розбіжним,

якщо $\alpha \leq 1$.

Наслідок 1 [3, 5]. Нехай функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$. Тоді: 1) якщо $(\exists \alpha > 1)(\exists c_1)(\forall x \in [1; +\infty)) : f(x) \leq c_1 / x^\alpha$, то інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \quad (3)$$

є збіжним; 2) якщо $(\exists \alpha \geq 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in [1; +\infty)) : f(x) \geq c_1 / x^\alpha$, то невласний інтеграл (3) є розбіжним.

Наслідок 2 [3, 5]. Нехай функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$ і існує границя $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha f(x) = \gamma$. Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то інтеграл (3) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha \leq 1$, то інтеграл (3) є розбіжним.

Приклад 1. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4 + 2}} dx$ є збіжним, бо збіжним є

інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ і $\frac{1}{\sqrt{x^4 + 2}} \leq \frac{1}{x^2}$, якщо $x \in [1; +\infty)$.

Приклад 2. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$ є розбіжним, бо розбіжним є

інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ і $\frac{1}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}$, якщо $x \in [1; +\infty)$.

Приклад 3. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^7 + 1}} dx$ є збіжним, бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{2x^2 + 1}{\sqrt{x^7 + 1}} = 2.$$

Приклад 4. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/\sqrt{x}} - 1}{3\sqrt{x} + 1} dx$ є розбіжним, бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{e^{1/\sqrt{x}} - 1}{3\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{3}.$$

Теорема 5 [3, 5]. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha < 1$ і є розбіжним,

якщо $\alpha \geq 1$.

Наслідок 3 [3, 5]. Нехай функція $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta;1] \subset (0;1]$. Тоді:

1) якщо $(\exists \alpha < 1)(\exists c_1)(\forall x \in (0;1]) : f(x) \leq c_1 / x^\alpha$, то інтеграл

$$\int_0^1 f(x) dx \quad (4)$$

є збіжним; 2) якщо $(\exists \alpha \geq 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in (0;1]) : f(x) \geq c_1 / x^\alpha$, то інтеграл (4) є розбіжним.

Наслідок 4 [3, 5]. Нехай функція $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta;1] \subset (0;1]$ і існує границя $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\alpha f(x) = \gamma$. Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha < 1$, то інтеграл (4) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha \geq 1$, то інтеграл (4) є розбіжним.

Приклад 5. Інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^4} dx$ є розбіжним.

Приклад 6. Інтеграл $\int_0^1 \frac{x + 2x^2}{4x^2 + 3x^3} dx$ є розбіжним, бо

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{x + 2x^2}{4x^2 + 3x^3} = \frac{1}{4}.$$

Приклад 7. Інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$ є збіжним, бо збіжним є інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ і}$$

$$0 \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \in (0;1].$$

Приклад 8. Інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $-\infty < a < b < +\infty$, є збіжним,

якщо $\alpha < 1$, і є розбіжним, якщо $\alpha \geq 1$, бо

$$\int_a^{\eta} \frac{dx}{(b-x)^{\alpha}} = \begin{cases} \ln(b-a) - \ln(b-\eta), & \alpha = 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(b-\eta)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right), & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

Теорема 6 (Абея) [3, 5]. Нехай функція $f:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a;+\infty)$, а функція $g:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною і обмеженою на проміжку $[a;+\infty)$. Тоді невластний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx \quad (5)$$

є збіжним.

Теорема 7 (Діріхле) [3, 5]. Нехай функції $f:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є такою, що

$$(\exists c_1)(\forall \eta \in [a;+\infty)) : \left| \int_a^{\eta} f(x)dx \right| \leq c_1,$$

а функція $g:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[a;+\infty)$ і $g(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$. Тоді невластний інтеграл (5) є збіжним.

Приклад 9. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ є збіжним, бо

$\left| \int_1^{\eta} \sin x dx \right| = |-\cos \eta + \cos 1| \leq 2$, якщо $\eta \in [1;+\infty)$, а функція $g(x) = 1/x$ є монотонною на $[1;+\infty)$ і $g(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Приклад 10. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ є збіжним, бо

$\int_1^{\eta} \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\sin x}{x} + \int_1^{\eta} \frac{\sin x}{x^2} dx$, якщо $\eta \in [1;+\infty)$, а функція $g(x) = 1/x$ є монотонною на $[1;+\infty)$ і $g(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

3.3.3. Абсолютно та умовно збіжні інтеграли. Невластний інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx \quad (1)$$

називається *абсолютно збіжним*, якщо збіжним є інтеграл

$$\int_a^b |f(x)| dx. \quad (2)$$

Теорема 1 [3, 5]. Якщо невластний інтеграл (1) є абсолютно збіжним, то він є збіжним і $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Теорема 1 показує, що не всі властивості визначених інтегралів є справедливими і для невластних інтегралів. Нагадаємо [3, 5], що якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то на цьому ж проміжку інтегровна за Ріманом і функція $|f|$, але якщо функція $|f|$ є інтегрованою на $[a; b]$, то функція f не обов'язково є інтегрованою на $[a; b]$.

Наслідок 1 [3, 5]. Нехай функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$ і $(\exists c_1)(\forall x \in [a; b)) : |f(x)| \leq c_1 g(x)$, де $g : [a; b) \rightarrow [0; +\infty)$ – така функція, що збіжним є інтеграл $\int_a^b g(x) dx$. Тоді інтеграл (1) є абсолютно збіжним.

Наслідок 2 [3, 5]. Нехай функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$ і $(\exists \alpha > 1)(\exists c_1)(\forall x \in [1; +\infty)) : |f(x)| \leq c_1 / x^\alpha$. Тоді інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ є абсолютно збіжним.

Наслідок 3 [3, 5]. Нехай функція $f : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta; 1] \subset (0; 1]$ і $(\exists \alpha < 1)(\exists c_1)(\forall x \in [1; +\infty)) : |f(x)| \leq c_1 / x^\alpha$. Тоді інтеграл $\int_0^1 f(x) dx$ є абсолютно збіжним.

Якщо інтеграл (1) є збіжним, а інтеграл (2) є розбіжним, то інтеграл (1) називають умовно збіжним.

Приклад 1. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ є збіжним, абсолютно, бо збіжним є інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ і $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, якщо $x \in [1; +\infty)$.

Приклад 2. Інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin^3 x \cos 2x}{x^{7/2}} dx$ є збіжним, абсолютно, бо

збіжним є інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ і $\left| \frac{\sin^3 x \cos 2x}{x^{7/2}} \right| \leq \frac{1}{x^{1/2}}$, якщо $x \in (0;1]$.

Приклад 3. Інтеграли $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ і $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ є умовно збіжними.

3.3.4. Невласні інтеграли з кількома особливими точками.

Невласні інтеграли в розумінні головного значення. Вище ми розглядали випадок, коли інтегровність за Ріманом у функції f втрачається на кінцях проміжків. Але функція f може бути необмеженою і в деякому околі точки $x_0 \in (a;b)$. Якщо функція f є інтегровоною хоч-би в невластному розумінні на проміжках $[a; x_0]$ і $[x_0; b]$, то за означенням [3, 5]

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx. \quad (1)$$

При цьому, якщо обидва інтеграли з правої частини (1) є збіжними, то функція f називається *інтегровоною у невластному розумінні* на $(a;b)$ (інколи кажуть на $[a;b]$). Крім цього, права частина (1), якщо написані в ній інтеграли існують, не залежить від x_0 . Це впливає з властивостей інтеграла Рімана. Аналогічно визначається [3, 5] невластний інтеграл на проміжку $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{\eta_1 \rightarrow -\infty} \int_{\eta_1}^0 f(x) dx + \lim_{\eta_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{\eta_2} f(x) dx. \quad (2)$$

Якщо обидва інтеграли з правої частини (2) є збіжними, то невластний інтеграл [3, 5]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (3)$$

називається *збіжним*. Якщо принаймні один із інтегралів з правої частини (2) є розбіжним, то невластний інтеграл (3) називається *розбіжним*.

Подібно визначається невластний інтеграл у випадку, коли таких особливих точок x_0 на проміжку $[a;b]$ є декілька.

Приклад 1. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$ є розбіжним, бо за означенням

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^4} + \int_0^1 \frac{dx}{x^4}, \text{ а останні два інтеграли є розбіжними.}$$

Інтегралом в розумінні головного значення функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в ∞ називається границя [3, 5]

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x) dx.$$

Інтегралом в розумінні головного значення функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $x_0 \in (a; b)$ називається границя [3, 5]

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Приклад 2. Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ є розбіжним як невласний

інтеграл, але

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) \Big|_{-\eta}^{\eta} = 0.$$

Приклад 3. Інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ є розбіжним як невласний інтеграл,

але

$$v.p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

Приклад 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ є розбіжним. Разом з цим,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\cos x \Big|_{-a}^a \right) = 0.$$

3.3.5. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку $[a; b)$.
2. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку $(a; b]$.
3. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку $[0; +\infty)$.
4. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку $(-\infty; 0]$.

5. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку $(-\infty; +\infty)$.
6. Сформулюйте означення невласного інтеграла на проміжку $[-1; 1]$ з особливою точкою $c = 0$.
7. Сформулюйте означення абсолютно збіжного невласного інтеграла.
8. Сформулюйте означення умовно збіжного невласного інтеграла.
9. Сформулюйте критерій Коші збіжності невласного інтеграла.
10. Сформулюйте теореми про збіжність невласного інтеграла невід'ємної функції.
11. Сформулюйте теорему про зв'язок між збіжністю та абсолютною збіжністю невласного інтеграла.
12. Сформулюйте ознаку Абеля збіжності невласного інтеграла.
13. Сформулюйте ознаку Діріхле збіжності невласного інтеграла.
14. Сформулюйте означення невласного інтеграла в розумінні головного значення в ∞ .
15. Сформулюйте означення невласного інтеграла в розумінні головного значення з особливими точками ∞ і 0 .

3.3.6. Вправи і задачі.

1. Знайдіть:

- | | |
|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|
| 1. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$. | 2. $\int_1^{+\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)^2} dx$. |
| 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{- x } \cos 2x dx$. | 4. $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{- x } \sin 3x dx$. |
| 5. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - 1}$. | 6. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}$. |
| 7. $\int_2^{+\infty} \frac{x}{x^3 - 1} dx$. | 8. $\int_3^{+\infty} \frac{x}{x^3 + 1} dx$. |
| 9. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)}$. | 10. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+3)}$. |
| 11. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx$. | 12. $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx$. |
| 13. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx$. | 14. $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx$. |
| 15. $\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{x^2 + 2x - 3}$. | 16. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}$. |

$$17. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\ln^2(x+3)}.$$

$$19. \int_0^{+\infty} (2x+3)e^{-x} dx.$$

$$21. \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\operatorname{arctg} x)}{x^2+1} dx.$$

$$23. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+9} dx.$$

$$25. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} dx.$$

$$27. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

$$29. \int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$$

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2+1)(x+1)}.$$

$$20. \int_0^{+\infty} (-x+3)e^{-x} dx.$$

$$22. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(-\operatorname{arctg} x)}{x^2+1} dx.$$

$$24. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$$

$$26. \int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$$

$$29. \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{|x|}}{(1+|x|)^2} dx.$$

$$30. \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$$

2. Знайдіть:

$$1. \int_0^3 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{9-x^5}}.$$

$$3. \int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$$

$$7. \int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{(\sqrt{1-x^2})^3}.$$

$$9. \int_{-1}^e \ln|x| dx.$$

$$11. \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x}}.$$

$$13. \int_0^e \ln^2 x dx.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

$$4. \int_0^3 \frac{x dx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

$$6. \int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x}.$$

$$8. \int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

$$10. \int_{-1}^e x \ln|x| dx.$$

$$12. \int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

$$14. \int_0^1 \ln \sqrt{x} dx.$$

$$15. \int_{-1}^2 \frac{x^3}{\sqrt{|x-1|}} dx.$$

$$17. \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx.$$

$$19. \int_{-1}^1 \frac{3x+1}{\sqrt{|x|}} dx.$$

$$21. \int_0^e x \ln x dx.$$

$$23. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}.$$

$$25. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

$$27. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$$

$$29. \int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}.$$

$$16. \int_{-1}^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{|x-2|}}.$$

$$18. \int_1^3 \frac{x dx}{\sqrt{|x-2|}}.$$

$$20. \int_{1/2}^2 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$22. \int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$$

$$24. \int_1^2 \frac{x dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

$$26. \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$$

$$28. \int_2^3 \frac{x}{\sqrt[4]{x^2-4}} dx.$$

$$30. \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x}} dx.$$

3. Знайдіть:

$$1. \text{ v.p. } \int_{-7}^7 \frac{dx}{1-x^2}.$$

$$3. \text{ v.p. } \int_0^5 \frac{dx}{x^2-5x+4}.$$

$$5. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx.$$

$$7. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

$$2. \text{ v.p. } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x-x^2}.$$

$$4. \text{ v.p. } \int_{-1}^2 \frac{dx}{x-x^2}.$$

$$6. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx.$$

$$8. \text{ v.p. } \int_{-\infty}^{+\infty} \arctg x dx.$$

4. Дослідіть на абсолютну і умовну збіжність інтеграли:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x} dx.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{1+x^3} dx.$$

$$6. \int_0^{+\infty} x^2 \cos e^x dx.$$

$$8. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx.$$

3.3.7. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть:

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^3} dx.$$

$$3. \int_{-\infty}^1 \frac{\exp(\operatorname{arctg}|x|)}{x^2+1} dx.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+x+1} dx.$$

$$7. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2+x} dx.$$

$$9. \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$$

$$11. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$$

$$13. \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx.$$

$$15. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^{3/2}} dx.$$

$$17. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx$$

$$19. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+2x+2)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

$$21. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}, n \in \mathbb{N}.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^4} dx.$$

$$4. \int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\operatorname{arccotg}|x|)}{x^2+1} dx.$$

$$6. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+5} dx.$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+4x+3} dx.$$

$$10. \int_0^{+\infty} (x+1)e^{-x} dx.$$

$$12. \int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln^2 \ln x} dx.$$

$$14. \int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx.$$

$$16. \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$18. \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x - 1)^2} dx.$$

$$20. \int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx, n \in \mathbb{N}.$$

$$22. \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}.$$

$$23. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$$

$$25. \int_0^e \ln x dx.$$

$$27. \int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$29. \int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

$$24. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}.$$

$$26. \int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx.$$

$$28. \int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$30. \int_0^3 \frac{x^5 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

3.4. Застосування визначеного інтеграла

За допомогою визначеного інтеграла можна знаходити площу, об'єм, роботу, масу, координати центра мас, статичні моменти, моменти інерції та багато інших характеристик геометричних, природничих та суспільних об'єктів і явищ. Тут ми ілюструємо основні ідеї, які лежать в основі відповідних застосувань.

3.4.1. Площа криволінійної трапеції. Якщо деяка плоска фігура є об'єднанням скінченної кількості попарно неперетинних многокутників (багатокутників), то її площа дорівнює сумі площ цих трикутників.

Криволінійною трапецією називається [3, 5] множина $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$, тобто це множина точок площини, яка обмежена лініями $x=a$, $x=b$, $y=0$ і $y=f(x)$, де $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ – невід'ємна функція на проміжку $[a; b]$.

Криволінійну трапецію не можна, взагалі кажучи, подати у вигляді об'єднання скінченного числа многокутників. Для знаходження площі криволінійної трапеції природно поступити так. Розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ на n частин (див. рис. 1). Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$, як на основі, побудуємо два прямокутники з висотами $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$ і $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$. Ці прямокутники будемо називати відповідно вхідними і вихідними. Площі k -го вхідного і вихідного прямокутників відповідно рівні $m_k \Delta x_k$ і $M_k \Delta x_k$. Суми площ вхідних і вихідних прямокутників відповідно

дорівнюють: $\underline{\sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$, $\bar{\sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$. Якщо $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{\sigma} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{\sigma} = P$, то число P приймають [3, 5] за площу криволінійної трапеції.

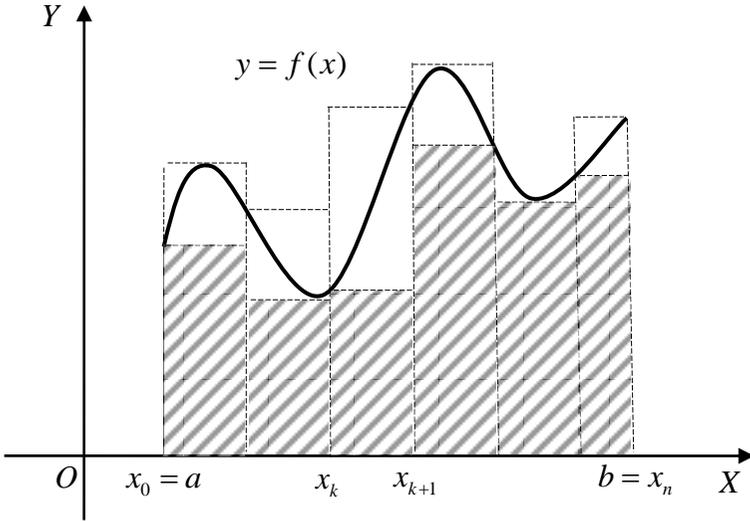


Рис. 1

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і неперервною на проміжку $[a; b]$, то криволінійна трапеція $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ має площу P і

$$P = \int_a^b f(x) dx. \quad (1)$$

З теореми 1 випливає такий геометричний зміст первісної F функції f : різниця $F(b) - F(a)$ дорівнює площі криволінійної трапеції.

Теорема 2 [3, 5]. Якщо функції $y_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $y_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними на проміжку $[a; b]$ і $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $x \in [a; b]$, то площа узагальненої криволінійної трапеції $E = \{(x; y) : y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$ знаходиться за формулою

$$P = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x)) dx.$$

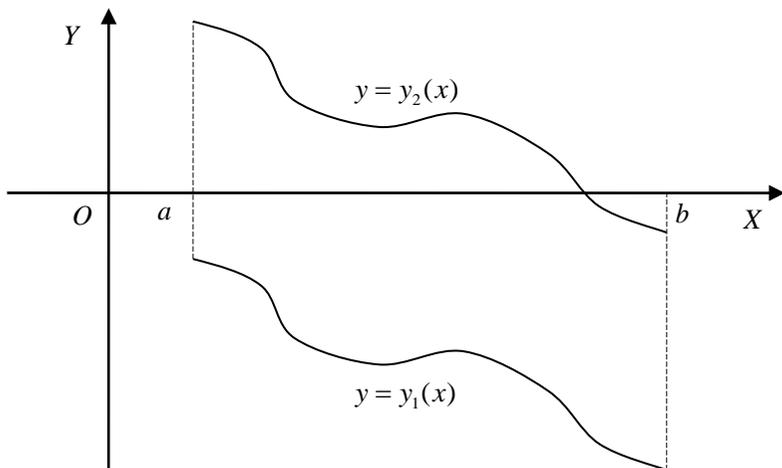


Рис. 2

Приклад 1. Якщо $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}$, то

$$P = \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Приклад 2. Якщо E – множина, обмежена кривими $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$, $y = e^x$ і $y = e^{-x}$, то

$$P = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 e^{-x} dx = 2 - \frac{2}{e}.$$

Приклад 3. Якщо E – множина, обмежена кривими $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$, то

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 4. Якщо E – множина, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,

то

$$P = 4 \int_0^a \sqrt{b^2 - b^2 \frac{x^2}{a^2}} dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

Зауваження 1. За допомогою інтеграла Рімана можна знаходити площі обмежених фігур. За допомогою невластних інтегралів можна знаходити площі необмежених фігур.

Приклад 5. Якщо $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq x^{-2}, 1 \leq x < +\infty\}$, то

$$P = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Зауваження 2 [3, 5]. Формула (1) придатна і для знаходження площі криволінійної трапеції $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$, якщо функція f задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta]. \end{cases}$$

В цьому випадку формула (1) приймає вигляд

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dx(t),$$

якщо функція $x : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[\alpha; \beta]$ і $x'(t) > 0$ для всіх $t \in [\alpha; \beta]$.

Приклад 6. Знаходячи площу фігури, яка обмежена віссю абсцис і однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

отримуємо

$$P = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt - \int_0^{2\pi} 2 \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 3\pi.$$

3.4.2. Полярні координати. Площа криволінійного сектора.

Кожній точці A площини з декартовими координатами $(x; y)$ можна поставити у відповідність полярні координати $(\varphi; \rho)$, де ρ – відстань від точки O (початку координат) до точки A , а φ – кут між вектором \overrightarrow{OA} і додатним напрямом осі OX (тобто вектором \vec{i}). Декартові координати $(x; y)$ і полярні координати $(\varphi; \rho)$ точки A площини пов'язані формулами [3, 5]:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

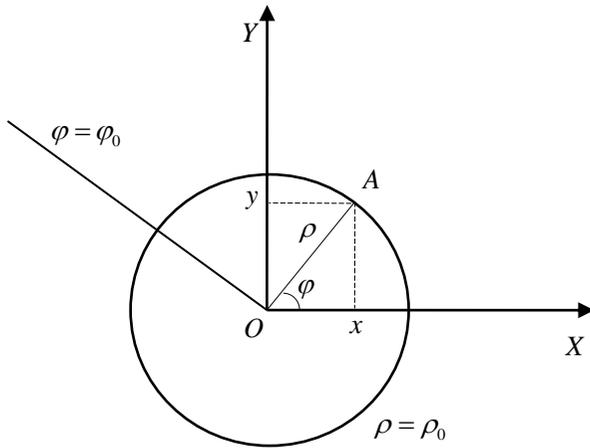


Рис.1

В полярній системі координат $\varphi = \varphi_0$ – це рівняння променя, а $\rho = \rho_0$ – рівняння кола. В полярній системі координат ρ – відстань і тому $\rho \geq 0$. Проте, інколи на формули (1) дивляться як на формули, що задають відображення однієї площини на іншу, і тоді ρ може бути і від’ємним. Відомо, що площа *кругового сектора* знаходиться за формулою $P = \frac{1}{2} R^2 \varphi$.

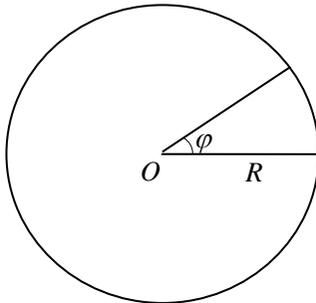


Рис.2

Криволінійним сектором називається задана в полярній системі координат множина $E = \{(\varphi; \rho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$, де $\rho : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка невід’ємна функція на проміжку $[\alpha; \beta]$. Іншими словами, криволінійний сектор – це фігура E , обмежена променями

$\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$ і деякою кривою, яка в полярній системі координат має рівняння $\rho = \rho(\varphi)$.

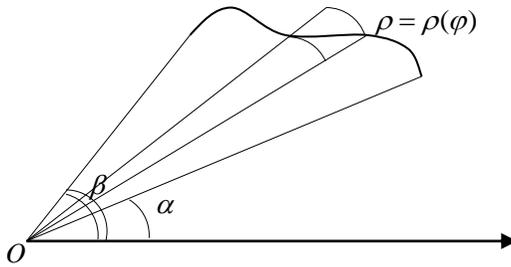


Рис.3

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція $\rho: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то площа криволінійного сектора $E = \{(\varphi; \rho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$ знаходиться за формулою

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Приклад 1. Якщо E – множина, обмежена кардіоїдою $\rho = 1 + \cos \varphi$, то $P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{3\pi}{2}$.

Приклад 2. Якщо $E = \{(\varphi; \rho) : 1 + \cos \varphi \leq \rho \leq 3 \cos \varphi\}$, то

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (3 \cos \varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos \varphi d\varphi + 4 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \pi. \end{aligned}$$

3.4.3. Довжина кривої (шляху). Кожна неперервна крива чи шлях γ задається параметрично

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta], \quad (1)$$

де $\gamma_1: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, неперервні на проміжку $[\alpha; \beta]$. Точку $A(\gamma_1(\alpha); \gamma_2(\alpha))$ називають початком шляху, а точку $B(\gamma_1(\beta); \gamma_2(\beta))$ – його кінцем. Для знаходження довжини [3, 5] шляху γ розглянемо розбиття $\tau = \{t_k : k \in \overline{0; n}\}$, $\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta$, проміжку

$[\alpha; \beta]$ (див. рис. 1). Нехай $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ і $\lambda = \max \{ \Delta t_k : k \in \overline{0; n-1} \}$. Точкам t_k на шляху відповідають точки $M_k(x_k; y_k)$, де $x_k = \gamma_1(t_k)$ і $y_k = \gamma_2(t_k)$. З'єднаємо послідовно точки M_k відрізками. Отримаємо ламану з довжиною $l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}$. Шлях γ називається *спрямлюваним*, якщо $\sup\{l_\tau : \tau\} = L < +\infty$. При цьому число L називається *довжиною спрямлюваного шляху* γ .

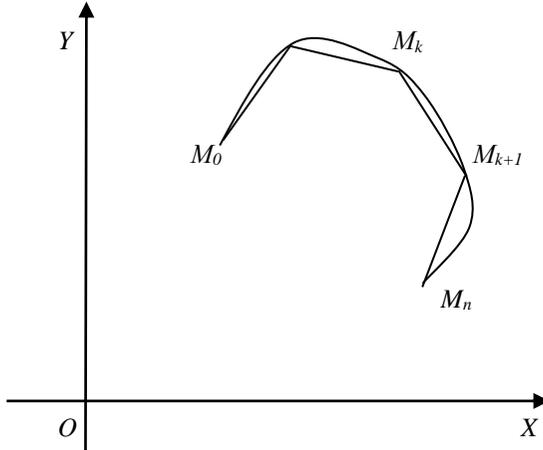


Рис. 1

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функції $\gamma_1 : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2 : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, то шлях, заданий системою (1), є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt.$$

Наслідок 1 [3, 5]. Якщо шлях γ заданий рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, і функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[a; b]$, то цей шлях є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Наслідок 2 [3, 5]. Якщо шлях γ , заданий в полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, і функція $\rho : [\alpha; \beta] \rightarrow [0; +\infty)$

є неперервно диференційовною і невід'ємною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то такий шлях є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi.$$

Якщо γ – спрямлюваний шлях, то його частина, що відповідає проміжку $[\alpha; t]$ також спрямлюваний шлях. Якщо функції $\gamma_1 : [\alpha; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2 : [\alpha; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, то довжина цієї частини шляху (він називається дугою) знаходиться за формулою [3, 5]

$$l = \int_{\alpha}^t \sqrt{\gamma_1'^2(\tau) + \gamma_2'^2(\tau)} d\tau.$$

Диференціал dl функції $l : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ називається диференціалом дуги, тобто $dl = \sqrt{\gamma_1'^2(\tau) + \gamma_2'^2(\tau)} d\tau$. Аналогічно, $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$ і $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$, якщо відповідний шлях заданий рівнянням $y = y(x)$ і $\rho = \rho(\varphi)$, відповідно.

Шлях γ в просторі \mathbb{R}^3 задається системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \gamma_3(t), \quad t \in [\alpha; \beta]. \end{cases} \quad (2)$$

Означення спрямлюваного шляху в \mathbb{R}^3 формулюється за аналогією.

Теорема 2 [3, 5]. Якщо функції $\gamma_1 : [\alpha; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma_2 : [\alpha; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_3 : [\alpha; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, то шлях γ , заданий системою (2), є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)} dt.$$

Приклад 1. Якщо γ – це астроида

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

то

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\cos^2 t \sin^4 t} dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6.$$

Приклад 2. Якщо γ – це частина параболи $y = x^2/2$, $x \in [0;1]$, то

$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2}-1).$$

Приклад 3. Якщо γ – це частина логарифмічної спіралі $\rho = e^\varphi$, $\varphi \in [0; \pi]$, то

$$L = \int_0^\pi \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^\pi e^\varphi d\varphi = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

Приклад 4. Якщо γ – це просторова крива

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2],$$

то

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+1} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} dt = \pi\sqrt{2}/2.$$

3.4.4. Площа поверхні обертання. Нехай крива γ задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. При обертанні навколо осі OX ця крива описує поверхню Δ , яка називається *поверхнею обертання*.

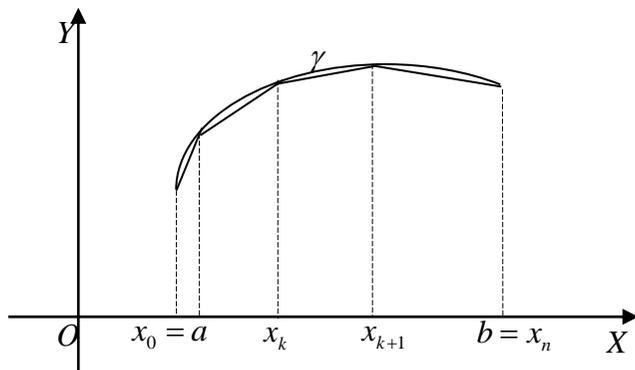


Рис.1

Для знаходження площі поверхні обертання розглянемо [3, 5] розбиття

$\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ на n частин. Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. Кожній точці x_k на кривій відповідає точка $M_k(x_k; y_k)$, де $y_k = f(x_k)$. З'єднаємо послідовно точки M_k . Отримаємо ламану. Ця ламана при обертанні опише фігуру з площею S_τ , яка є об'єднанням бічних поверхонь зрізаних конусів. Якщо існує скінченна границя $S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_\tau$, то ця границя називається *площею поверхні обертання*.

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[a; b]$, то поверхня, утворена обертанням кривої $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, навколо осі OX має площу, яку можна знайти за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (1)$$

Приклад 1. Якщо Δ – поверхня, утворена при обертанні навколо осі абсцис частини синусоїди $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$, то

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^\pi \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = -2\pi \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 x} d \cos x = \\ &= -\pi \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \Big|_0^\pi - \pi \ln \left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x} \right) \Big|_0^\pi = \\ &= 2\pi \sqrt{2} + \pi \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 2\pi \sqrt{2} + 2\pi \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Зауваження 1 [3, 5]. Оскільки $\sqrt{1 + y'^2} dx = dl$, то формулу (1) можна переписати у вигляді

$$S = 2\pi \int_a^b |y| dl.$$

За останньою формулою можна знаходити площу поверхні обертання і тоді, коли крива γ задана параметрично або в полярній системі координат

Приклад 2. Якщо Δ – поверхня, утворена при обертанні навколо осі абсцис лемніскати $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, то

$$S = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\varphi} dl = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = 2\pi(2 - \sqrt{2}).$$

3.4.5. Об'єм тіла обертання. Нехай $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$ – криволінійна трапеція і функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною на проміжку $[a; b]$. При обертанні навколо осі OX ця трапеція опише певну фігуру T , яка називається [3, 5] *тілом обертання*. Знайдемо його об'єм. Для цього розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ на n частин. Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$, як на основі, побудуємо два прямокутники з висотами $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$ і $M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$. Об'єм тіл (це циліндри), які опишуть відповідно k -й вхідний і k -й вихідний прямокутники рівні $\pi m_k^2 \Delta x_k$ і $\pi M_k^2 \Delta x_k$. Суми об'ємів всіх вхідних і вихідних циліндрів відповідно рівні $\underline{V} = \pi \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta x_k$ і $\overline{V} = \pi \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta x_k$. Якщо існують скінченні границі $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{V} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \overline{V} = V$, то число V приймають за об'єм тіла обертання [3, 5].

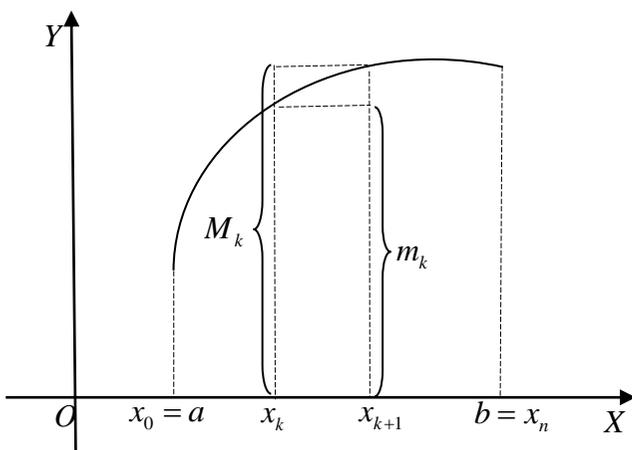


Рис.1

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a; b]$, то тіло, утворене при обертанні криволінійної трапеції $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ навколо осі

OX має об'єм i

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Теорема 2 [3, 5]. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a; b]$, то тіло, утворене при обертанні криволінійної трапеції $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ навколо осі OY має об'єм i

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x) dx.$$

Приклад 1. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис частини криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = \pi$, то

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Приклад 2. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = x^3$ і $y = x$, то

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{4\pi}{21}.$$

Приклад 3. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = -x$ і $x = 1$, то

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{3},$$

бо $x^3 \leq x$, якщо $x \in [0; 1]$.

Приклад 4. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями

$$y = 0, \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad x = \pi,$$

то

$$V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5\pi^2}{2}.$$

Приклад 5. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями, які задані в полярній системі координат рівняннями $\rho = e^{\varphi}$, $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$, то $x = \rho \cos \varphi = e^{\varphi} \cos \varphi$,

$$y = \rho \sin \varphi = e^\varphi \sin \varphi, \quad dx = e^\varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi$$

$$V = \pi \int_{\pi}^0 e^{3\varphi} \sin^2 \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{15} (e^{3\pi} + 1).$$

3.4.6. Знаходження об'єму за площею поперечного перерізу.

Теорема 1 [3, 5]. Нехай просторове тіло T розміщене між двома площинами $x=a$ та $x=b$ і при перетині його площиною π_x перпендикулярною до осі OX , яка проходить через точку осі OX з абсцисою x , утворює в перерізі фігуру з площею $P(x)$. Нехай ця функція $P:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a;b]$ і, крім цього, нехай будь-які два таких перерізи є такими, що їх проєкції на площину YOZ містяться один в одному. Тоді об'єм тіла T знаходиться за формулою

$$V = \int_a^b P(x) dx.$$

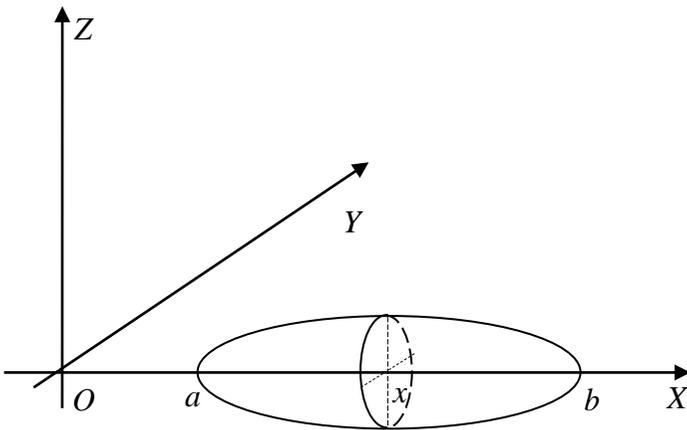


Рис.1

Приклад 1. Для знаходження об'єму еліпсоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

зауважимо, що це тіло T лежить між площинами $x=-a$ та $x=a$ і при перетині його площиною, перпендикулярною до осі OX , що проходить через точку цієї осі з абсцисою x , в перетині утворюється

еліпс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$, площа якого $P(x) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)$. Тому

$$V = \int_{-a}^a \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2) dx = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Приклад 2. Нехай T – піраміда з площею основи P_0 і висотою h . Нехай система координат $OXYZ$ вибрана так, що точка O є вершиною піраміди і висота піраміди лежить на осі OX . Якщо $P(x)$ – площа перерізу піраміди площиною перпендикулярною основі, яка проходить через точку з абсцисою x , то $\frac{P(x)}{P_0} = \frac{x^2}{h^2}$ і тому

$$P(x) = P_0 \frac{x^2}{h^2}. \text{ Отже,}$$

$$V = \int_0^1 P_0 \frac{x^2}{h^2} dx = P_0 / 3h^2,$$

– об'єм піраміди.

3.4.7. Запитання для самоконтролю.

1. Що приймають за площу криволінійної трапеції?
2. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі криволінійної трапеції.
3. Що приймають за площу криволінійного сектора?
4. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі криволінійного сектора.
5. Який шлях називають спрямлюваним?
6. Що називають довжиною спрямлюваного шляху?
7. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження довжини спрямлюваного шляху.
8. Що приймають за площу поверхні обертання?
9. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі поверхні обертання.
10. Що приймають за об'єм тіла обертання?
11. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження об'єму тіла обертання.

3.4.8. Вправи і задачі.

1. Знайдіть площу фігури, яка обмежена заданими кривими або задана іншими вказаними умовами:

1. $y = -x^2 - x + 2$, $y = x + 2$.

2. $y=1-x$, $y=e^{-x}$, $x=1$, $y=0$.
3. $y=-x^2+4x$, $y=-x+4$.
4. $y=2-x$, $y=x^2$.
5. $y=x^2$, $y=0$, $y=-3x+4$.
6. $y=(4-x^2)$, $y=x^2-2x$.
7. $y=x^2$, $x=0$, $y=-3x+4$.
8. $y=x^2$, $y=2x-1$, $x=0$.
9. $y=x^2$, $y=(x-2)^2$, $y=4$.
10. $y=(x+2)^2$, $y=0$, $x=0$.
11. $y^2+x^2=1$, $y+x=1$.
12. $y=x^2-2x$, $y=4-x^2$.
13. $y=-x^2$, $y=-(x-2)^2$, $y=-3$.
14. $y=-x^2$, $y=-2x-1$, $x=0$.
15. $y=2x-x^2+3$, $y=x^2-4x+3$.
16. $y^2=x+1$, $y^2=9-x$.
17. $y=(x-2)^2$, $y=0$, $x=0$.
18. $x=4-y^2$, $x=y^2-2y$.
19. $x=4-(y-1)^2$, $x=y^2-4y+3$.
20. $y=x^2$, $y+x=2$.
21. $y=2^x$, $y=2$, $x=2$.
22. $y^2=2x$, $x^2+y^2=4x$.
23. $y^2=x^3$, $y=4$, $x=0$.
24. $y=4-x^2$, $y=x^2-2x$.
25. $y=x^2-4x+7$, $y=x+3$.
26. $y=-x^2$, $x=0$, $y=-3x-4$.
27. $y=-x^2+4$, $y=x+2$.
28. $y=-3x^2+x+2$, $y=-x+1$.
29. $y^2=4x$, $4y=x^2$.

30. $xy = 6$, $y = -x + 7$.

2. Знайдіть площу фігури, яка обмежена заданими кривими або задана іншими вказаними умовами:

1. $y = |\lg x|$, $y = 0$, $x = 0,1$, $x = 10$.

2. $y = \arcsin|x|$, $y = \pi/3$.

3. $y = x \operatorname{arctg} x$, $y = 0$, $x = \sqrt{3}$.

4. $y = -x^2$, $y = 0$, $y = -3x - 4$.

5. $y = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln x}}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e^3$.

6. $y = -x^2$, $x = 0$, $y = -3x - 4$.

7. $y = x^2$, $y = (x-2)^2$, $x = 0$.

8. $y = 2 \operatorname{tg} x$, $y = \frac{4}{3} \cos x$.

9. $y = -x^2$, $y = -(x+2)^2$, $x = 0$.

10. $y = |\operatorname{arctg} x|$, $y = \pi/3$.

11. $y = e^{|x|}$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 1$.

12. $y = |\sin x|$, $y = 0$, $x = -\pi/4$, $x = \pi/4$.

13. $y = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$, $y = 0$.

14. $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = \frac{x^2}{2}$.

15. $y = \ln x$, $y = \ln^2 x$.

16. $y = |\ln x|$, $y = 1$.

17. $y = |\arcsin x|$, $y = \pi/3$.

18. $y = \arccos|x|$, $y = \pi/3$.

19. $y = |\operatorname{arctg} x|$, $y = \pi/4$.

20. $y = \frac{\ln x}{4x}$, $y = x \ln x$.

21. $y = |-x^2 - 4x|$, $y = 0$.

22. $x^2 + y^2 \leq 1$, $x^2 - 2y^2 \leq 1/4$.

23. $y = \arccos|x|$, $y = 1/2$.

24. $4y = 8x - x^2$, $4y = x + 6$.
25. $y = \sqrt{e^x - 1}$, $y = 0$, $x = \ln 2$.
26. $xy = 6$, $y = 7 - x$.
27. $y = |x - 2|$, $y = |x|$, $y = 0$.
28. $y = x - 1$, $y^2 = x + 1$.
29. $y = x^2 e^{-x}$, $y = 0$, $x = -1$.
30. $y = \sin x$, $y = \cos x$.
3. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими, заданими в полярній системі координат, або задана іншими вказаними умовами:
- $\rho = 1$, $\rho(\cos \varphi - \sin \varphi) = 1$.
 - $\rho = \sin \varphi$.
 - $\rho = \sin 2\varphi$.
 - $\rho = \frac{1}{2}$, $\rho = \cos 2\varphi$.
 - $\rho = 3 + \cos 4\varphi$.
 - $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi$.
 - $\rho = 3/2$, $\rho = 2 + \cos \varphi$.
 - $\rho = 2 \cos \varphi$, $\rho = 3 \cos \varphi$.
 - $\rho = 2 \sin \varphi$, $\rho = 4 \sin \varphi$.
 - $\rho = 3 + \cos 2\varphi$.
 - $\rho = 2$, $\rho = 3 - 2 \cos \varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$.
 - $\rho = \frac{1}{1 + 0,5 \cos \varphi}$.
 - $\rho = 4$, $\rho = 1 + \cos \varphi$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi/4$.
 - $\rho = \cos \varphi$, $\rho = 2 \cos \varphi$.
 - $\rho = 2 \sin \varphi$, $\rho = 4 \sin \varphi$.
 - $\rho = 3 + 2 \cos \varphi$.
 - $\rho^2 + \varphi^2 = 1$.
 - $\rho = \varphi$, $\varphi = 0$.
 - $\rho = 2 \sin 2\varphi$.
 - $\rho = \cos 5\varphi$.
 - $\rho = 2 + \cos 2\varphi$, $\rho = 2 + \sin \varphi$.
 - $\rho = 2 - \cos 4\varphi$, $\rho = 3 + \cos 4\varphi$.

23. $\rho = \operatorname{tg} \varphi, \varphi = \pi/4.$
24. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$
25. $(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x^2 + y^2 \geq 1/2.$
26. $\rho = \cos 4\varphi.$
27. $\rho = 1 + \sin 4\varphi.$
28. $x^4 + y^4 = xy.$
29. $x^4 + y^4 = x^2.$
30. $\rho = 1 + \cos 4\varphi.$

4. Знайдіть об'єм тіл, утворених при обертанні навколо осі OX плоских фігур, обмежених вказаними кривими:

1. $x^4 + y^4 = x^2.$
2. $y = 3\sin x, y = \sin x, x = \pi/2.$
3. $y = 2x - x^2, y = -x + 2.$
4. $y = \arccos \frac{x}{3}, y = \arccos x, y = 0.$
5. $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2).$
6. $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$
7. $y = \sin x, y = -x, x = \pi/2.$
8. $y = xe^x, y = 0, x = 1.$
9. $y = 2x - x^2, y = 0.$
10. $y = \operatorname{tg} x, y = -x, x = \pi/4.$
11. $y = \cos x, y = -x, x = \pi/4.$
12. $\rho = \varphi^2, \rho = 5.$
13. $y = \arcsin x, y = x, x = 1/2.$
14. $\varphi = (\rho + 1/\rho)/2, \rho = 1, \rho = 3.$
15. $y = \operatorname{arctg} x, y = x, x = 1.$
16. $x^4 + y^4 = xy.$
17. $y = \cos x, y = -x, x = \pi/2.$
18. $y = \arccos x, y = -x, x = 1.$
19. $y = \operatorname{arctg} x, y = -x, x = \sqrt{3}.$

$$20. (y-3)^2 + 3x = 0.$$

$$21. x^2 + xy + y^2 = 0.$$

$$22. \rho = \sin 2\varphi.$$

$$23. \rho = 1 + \cos \varphi.$$

$$24. y = 0, x = 3/2, x = 3, \begin{cases} x = 3(1 - \cos t), \\ y = 3(t - \sin t). \end{cases}$$

$$25. y = e^x, y = 1 + x, x = 1.$$

$$26. y = e^x, y = -1 - x, x = 0, x = 1.$$

$$27. y = \sin x, y = 2x/\pi, x = \pi/3, x = \pi/4.$$

$$28. \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

$$29. \rho = e^\varphi, \varphi = 0, \varphi = \pi.$$

$$30. y = \ln(1+x), y = -x, x = 1.$$

5. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі OY плоскої фігури, обмеженої вказаними кривими:

$$1. y = x^2, y = 4.$$

$$2. y = \sqrt{x}, y = x.$$

$$3. y = x^2, y = -x.$$

$$4. y = \sqrt{x}, y = -x, x = 1.$$

$$5. y = x^2, y = -x, x = 1.$$

$$6. y = e^x, y = -1 - x, x = 0, x = 1.$$

$$7. y = 2x - x^2, y = 0.$$

$$8. (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

3.4.9. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть площу фігури, яка обмежена заданими кривими або задана іншими вказаними умовами:

$$1. y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$2. y = x^2 - 4x + 4, y = x.$$

$$3. y = -x^2 + x + 2, y = -x + 2.$$

$$4. y = -x^2 - 4x, y = x + 4.$$

$$5. y = -x^2 + 4, y = -x + 2.$$

6. $y = -3x^2 - x + 2, y = x + 1.$
7. $y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1.$
8. $y^2 = -x + 1, y^2 = x - 1.$
9. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$
10. $\sqrt{y} = x, y = 2x, y = 2.$
11. $y = \arccos x, y = 0. x = 0.$
12. $y = x^2, y = (x - 2)^2, y = 4.$
13. $y = \frac{1}{1 + \cos x}, y = 0, x = -\pi/2, x = \pi/2.$
14. $y = \operatorname{arctg}|x|, y = \pi/3.$
15. $\frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \frac{x^2}{2} - y^2 \geq 1.$
16. $y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, y = 0, x = 1.$
17. $y = \arccos x, y = \arcsin x, y = 0.$
18. $y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arctg} x, x = 0.$
19. $\{(\rho; \varphi) : \rho \in [1; 4], \varphi \in [0; \pi]\}.$
20. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq 3 + 2\cos \varphi, \varphi \in [0; \pi/2]\}.$
21. $\{(\rho; \varphi) : \rho \geq \sqrt{\cos 2\varphi}, \rho \leq \sqrt{2}/2\}.$
22. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq 3 + 2\cos \varphi, \varphi \in [0; \pi/2]\}.$
23. $\rho = \cos \varphi.$
24. $\rho = 2 \sin \varphi.$
25. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \cos \varphi, \rho \geq \cos 2\varphi\}.$
26. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \sqrt{3} + 3\sin \varphi, \rho \geq \sin \varphi\}.$
27. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, y \geq x, y \leq -\sqrt{3}x.$
28. $(x^2 + y^2)^2 \leq 2xy.$
29. $x^4 + y^4 \leq x^2y.$
30. $\varphi = 4\rho - \rho^2, \varphi = 0.$

2. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими, заданими параметрично або іншими вказаними умовами:

1. $x \geq 0, \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$
3. (евольвента кола) $\begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi], \quad x = 2.$
4. $y \geq 0, \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$
5. $y \geq 0, \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t. \end{cases}$
6. $y \geq 0, \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
7. $x \geq 0, \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$
8. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$
9. $x \geq 0, \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$
10. $x = 0, \quad x = 1/2, \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$
11. $x = 0, \begin{cases} x = 4t^2 - 6t, \\ y = 2t. \end{cases}$
12. $\begin{cases} x = 3t/(1+t^3), \\ y = 3t^2/(1+t^3). \end{cases}$
13. $y = 0, \quad y = 3, \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$
14. $x = 0, \begin{cases} x = 4 \cos^4 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$

$$15. y \leq 0, \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$16. y \geq x, \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

$$18. (y - x)^2 = x^5.$$

$$19. y^2 = (1 - x^2)^3.$$

$$20. (\text{епіциклоїда}) \begin{cases} x = (R + r) \cos t - r \cos \frac{R+r}{r} t, \\ y = (R + r) \sin t - r \sin \frac{R+r}{r} t, \end{cases} \quad R > r > 0.$$

$$21. (\text{гіпоциклоїда}) \begin{cases} x = (R - r) \cos t - r \cos \frac{R-r}{r} t, \\ y = (R - r) \sin t - r \sin \frac{R-r}{r} t, \end{cases} \quad R > r > 0, \frac{R}{r} \in \mathbb{N}.$$

$$22. (\text{астроїда}) x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0.$$

$$23. \begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

$$24. (\text{кардіоїда}) \begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad a > 0.$$

$$25. (\text{трактриса}) x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad y \in (0; a) \quad (\text{указівка: } y = \sin t).$$

$$26. (\text{лист Декарта}) x^3 + y^3 = 3axy \quad (\text{указівка: } x = 3at/(1+t^3), y = 3at^2/(1+t^3)).$$

$$27. y \geq 0, \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x = t^2/(1+t^2), \\ y = (t-t^3)/(1+t^3). \end{cases}$$

$$29. y^2 = x(x-1)^2.$$

$$30. x=0, y=0, y=4, \begin{cases} x=4(t-\sin t), \\ y=4(1-\cos t). \end{cases}$$

3. Знайдіть об'єм тіла, яке обмежене поверхнями:

$$1. z=4x^2+y^2, z=2.$$

$$2. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, z=0, z=1.$$

$$3. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z=12.$$

$$4. x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = x.$$

$$5. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, z=0, z=1.$$

$$6. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2.$$

$$7. \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 6, \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

$$8. z = x^2 + 2y^2, x^2 + 2y^2 + z^2 = 1.$$

$$9. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z=0, z=1.$$

$$10. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, z=16.$$

$$11. \frac{x^2}{16} + y^2 - z^2 = 1, z=0, z=3.$$

$$12. y = 2\sqrt{1-x^2/3}, z = y\sqrt{3}, z=0.$$

$$13. z = 2x^2 + 8y^2, z=4.$$

$$14. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, z=12.$$

$$15. z = x^2 + 5y^2, z=5.$$

$$16. z = 2x^2 + 18y^2, z=6.$$

$$17. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, z=0, z=7.$$

$$18. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 0, z = 6.$$

$$19. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$$

$$20. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = 0, z = 2.$$

$$21. x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$$

$$22. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 0, z = 5.$$

$$23. \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$$

$$24. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$$

$$25. y = \sqrt{9 - x^2}, z = x, z = 0.$$

$$26. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4.$$

$$27. y = 4\sqrt{1 - x^2/9}, z = y\sqrt{3}, z = 0.$$

$$28. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 0, z = 3.$$

$$29. y = \sqrt{9 - x^2}, z = y, z = 0.$$

$$30. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 0, z = 4.$$

4. Знайдіть довжину кривої:

$$1. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

$$3. \rho = 5(1 - \cos \varphi), \varphi \in [-\pi/3; 0].$$

$$4. \rho = 2e^{3\varphi/3}, \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$5. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$6. \rho = 7(1 - \sin \varphi), \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

7.
$$\begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \quad t \in [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$
8.
$$\begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$
9.
$$\begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \quad t \in [0; 2\pi]. \end{cases}$$
10.
$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$
11.
$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \sin t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$
12.
$$\begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$
13.
$$\begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \quad t \in [\pi/2; \pi]. \end{cases}$$
14.
$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \quad t \in [0; \pi/2]. \end{cases}$$
15. $y = \ln x, \quad x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$
16. $y = \sqrt{1 - x^2} + \arccos x, \quad x \in [0; 8/9].$
17. $y = 2 + \operatorname{ch} x, \quad x \in [0; 1].$
18. $y = \arcsin x - \sqrt{1 - x^2}, \quad x \in [\ln \sqrt{15}; \ln \sqrt{24}].$
19. $y = 1 - \ln \sin x, \quad x \in [\pi/6; \pi/3].$
20. $y = 2 - e^x, \quad x \in [\ln \sqrt{3}; \ln \sqrt{8}].$
21. $y = \operatorname{ch} x + 3, \quad x \in [0; 1].$
22. $y = \ln \cos x + 2, \quad x \in [0; \pi/6].$
23. $y = \operatorname{sh} x + 3, \quad x \in [0; 2].$
24. $y = \ln \frac{5}{2x}, \quad x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$
25. $y = \ln(1 - x^2), \quad x \in [0; 1/4].$
26. $\rho = 3\varphi, \quad \varphi \in [0; 4/3].$

$$27. y = \sqrt{x - x^2} + \arcsin \sqrt{x}.$$

$$28. x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

$$29. y = \ln \sin x, \quad x \in [\pi/3; \pi/2].$$

$$30. \rho = 3e^{3\varphi/2}, \quad \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

5. Знайдіть площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі OX вказаної кривої:

$$1. y = x\sqrt{x}, \quad x \in [0; 1].$$

$$2. x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

$$3. y^2 = 2x, \quad x \in [0; 3].$$

$$4. y = \sin x, \quad x \in [0; \pi].$$

$$5. y = \operatorname{tg} x, \quad x \in [0; \pi/4].$$

$$6. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \quad t \in [0; \pi/2]. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

$$8. \rho = 2(1 + \cos \varphi).$$

$$9. \rho = \cos 2\varphi.$$

$$10. \rho = 2a \sin \varphi, \quad a > 0.$$

$$11. y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad x \in [0; a], \quad a > 0.$$

$$12. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0.$$

$$13. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad b > a > 0.$$

$$14. \begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \\ y = a \sin t. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$16. (y - a/2)^2 + x^2 = a^2, \quad a > 0.$$

$$17. y = \sqrt{a^2 - x^2}, \quad a > 0.$$

18. $y = x^2, x \in [0;1]$.
19. $y = a \cos \frac{\pi x}{2a}, x \in [-a;a], a > 0$.
20. $4x^2 + 3y^2 = 12$.
21. $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, x \in [1;e]$.
22. $y = \frac{1}{4} x^3, x \in [0;2]$.
23. $y = e^{-x}, x \in [0;+\infty)$.
24. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0$.
25. $x^2 + y^2 = y$.
26. $x^2 + y^2 = x$.
27. $y = 1 + \sqrt{4 - x^2}$.
28. $(y - 1/2)^2 + x^2 = 1$.
29. $y = \frac{1}{x}, x \in [1;e]$.
30. $y = \cos \frac{\pi x}{2}, x \in [-1;1]$.

Розділ 4. Ряди

4.1. Числові ряди

Поняття суми числового ряду є узагальненням поняття суми скінченного числа доданків на випадок, коли множина доданків є нескінченною. Це узагальнення можна здійснити багатьма способами. Найважливіший з них розглядається нижче.

4.1.1. Поняття числового ряду. Необхідна умова збіжності.

Нехай (a_k) – довільна послідовність дійсних чисел. Символ

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots \quad (1)$$

називається *числовим рядом* і позначається [3, 5]

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k . \quad (2)$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ називають членами ряду, відповідно першим, другим, \dots , k -им і т.д. Число a_k називають ще *загальним членом ряду*. Послідовність (S_n) , де

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots,$$

називається *послідовністю частинних сум ряду* (1). Ряд (1) називається *збіжним* в \mathbb{R} , якщо існує скінченна границя послідовності його частинних сум [3, 5]:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \neq \infty . \quad (3)$$

При цьому, число S називається *сумою ряду* (1) або сумою членів послідовності (a_k) і цей факт записують так:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k . \quad (4)$$

Ряд, який не є збіжним в \mathbb{R} , називається *розбіжним* в \mathbb{R} .

Якщо границя (3) існує, але дорівнює ∞ , то кажуть, що ряд (1) має *нескінченну суму*.

Із означення випливає, що зміна скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність, але впливає на його суму.

Теорема 1 (необхідна умова збіжності) [3, 5]. *Якщо ряд (1) є збіжним, то його загальний член прямує до нуля, тобто*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0 . \quad (5)$$

Таким чином, якщо умова (5) не виконується, то ряд (1) є розбіжним. Проте, якщо (5) виконується, то ряд (1) не обов'язково є

збіжним (див. далі).

Ряд

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$$

називають *залишком ряду* (1). Безпосередньо із означення випливає, що ряд (1) і його залишок є одночасно збіжними або розбіжними.

Теорема 2 [3, 5]. *Якщо ряд (1) є збіжним, то його залишок прямує до нуля, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.*

Зауваження 1. *Якщо ряд (1) є збіжним, то $S_n \rightarrow S$. Тоді $S \approx S_n$, абсолютна похибка цієї формули не перевищує $|r_n|$ і ця похибка прямує до нуля, якщо $n \rightarrow \infty$. Тому за допомогою формули $S \approx S_n$ можна знайти наближене значення суми збіжного ряду з наперед заданою точністю.*

$$\text{Зауваження 2. } \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} = \sum_{s=-1}^{\infty} a_{s+2} = \dots,$$

тобто індекс сумування є нічим: неважливо яким символом (k, n, i, \dots) його позначати, але важливо, в яких межах цей символ змінюється.

Приклад 1 (сума нескінченно спадної геометричної прогресії).

Послідовність (aq^{n-1}) називається *геометричною прогресією*. Якщо $|q| < 1$, то *геометрична прогресія називається нескінченно спадною*. Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії називається число

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

де $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$ – сума перших n її членів. Оскільки

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, якщо $|q| < 1$, то $S = \frac{a}{1 - q}$. Отже, сума нескінченно спадної

геометричної прогресії це сума ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{k-1} + \dots,$$

і вона дорівнює $\frac{a}{1 - q}$, тобто $\frac{a}{1 - q} = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$.

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ є розбіжним, бо не

виконується умова (5) (тут $a_k = (-1)^{k+1}$), ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1^{k-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$

також є розбіжним. Таким чином, зі сказаного вище випливає, що ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ є збіжним, якщо $|q| < 1$ і є розбіжним, якщо $|q| \geq 1$ (якщо $|q| > 1$,

то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$).

Приклад 3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, бо

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

При цьому, абсолютна похибка Δ наближеної формули

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \approx \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

дорівнює $\frac{1}{4}$, бо $\Delta = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{4}$.

Приклад 4. Оскільки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k^2 - k}{10k^2 + 9k + 1} = \frac{3}{10},$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 - k}{10k^2 + 9k + 1}$ є розбіжним.

Приклад 5. Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - 2/n^2)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left((1 - 2/n^2)^{-n^2/2} \right)^{-2n/n^2} = 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (1 - 2/n^2)^n$ є розбіжним.

Приклад 6.

$$0, (9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^k} + \dots = \frac{9}{10} \sum_{k=1}^{\infty} (1/10)^{k-1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - 1/10} = 1.$$

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k^2$ є розбіжним. Справді, припустимо

протилежне. Тоді $\sin k^2 \rightarrow 0$. Тому $\sin(k+1)^2 \rightarrow 0$. Але

$$\sin(k+1)^2 = \sin(k^2 + 2k + 1) = \sin k^2 \cos(2k+1) + \cos k^2 \sin(2k+1).$$

Звідси випливає, що $\sin(2k+1) \rightarrow 0$ і тому $\sin(2k+3) \rightarrow 0$. Але $\sin(2k+3) = \sin(2k+1)\cos 2 + \cos(2k+1)\sin 2$. Отже, $\cos(2k+1) \rightarrow 0$.

Таким чином, $\cos^2(2k+1) + \sin^2(2k+1) \rightarrow 0$. Суперечність.

Приклад 8. Якщо $|a_{k+1}|/|a_k| \geq 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то умова (5) не виконується і тому ряд (1) є розбіжним.

4.1.2. Дії над рядами. Критерій Коші збіжності ряду.

Теорема 1 [3, 5]. Якщо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

і має суму S , то для будь-якої сталої c є збіжним ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = ca_1 + ca_2 + \dots$$

і має суму $\hat{S} = cS$, тобто $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Теорема 2[3, 5]. Якщо збіжними є ряд (1) і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{2}$$

то збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots$$

і має суму $S^0 = S + S^*$, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

де S і S^* – суми рядів (1) і (2) відповідно.

Наступна теорема вказує на те, що для рядів справедливий аналог асоціативного закону додавання.

Теорема 3 [3, 5]. Нехай $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ – довільна підмножина натуральних чисел таких, що $1 = n_1 < n_2 < \dots$. Тоді, якщо збіжним є ряд (1), то збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=n_k}^{n_{k+1}-1} a_m = (a_{n_1} + \dots + a_{n_2-1}) + (a_{n_2} + \dots + a_{n_3-1}) + \dots$$

і має ту ж суму, що і ряд (1).

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{10^k} + \frac{7}{k(k+1)} \right)$ є збіжним, оскільки

збіжними є ряди $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k}$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$.

Теорема 4 (критерій Коші збіжності ряду) [3, 5]. Для того щоб ряд (1) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall p > 0): \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon.$$

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ є збіжним. Справді,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n-1} < \varepsilon.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [1/\varepsilon] + 2)(\forall n \geq n^*)(\forall p > 0): \left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| < \varepsilon,$$

і згідно з критерієм Коші розглядуваний ряд є збіжним. При цьому, абсолютна похибка Δ наближеної формули

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

не перевищує $\frac{1}{3}$, бо $\Delta = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{3}$.

Приклад 3. Гармонійний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \dots \quad (3)$$

є розбіжним. Справді,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Тому

$$(\exists \varepsilon = 1/2)(\forall n^*)(\exists n = n^*)(\exists p = n^* = n): \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon.$$

Отже, згідно з критерієм Коші розглядуваний ряд є розбіжним. Із (4) випливає, що залишок ряду (3) не прямує до нуля. Звідси також отримуємо розбіжність ряду (3). Зауважимо також, що в даному

випадку $a_k = 1/k$ і $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

4.1.3. Ознаки збіжності додатних рядів. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

називається *додатним*, якщо $(\forall k \in \mathbb{N}): a_k > 0$.

Теорема 1 (критерій збіжності додатного ряду) [3, 5]. Для того щоб додатний ряд (1) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність його частинних сум була обмеженою зверху.

Теорема 2 (ознака порівняння) [3, 5]. Нехай ряд (1) і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (2)$$

є додатними, та $(\forall k \in \mathbb{N}): a_k \leq b_k$. Тоді: а) якщо збіжним є ряд (2), то збіжним є ряд (1); б) якщо розбіжним є ряд (1), то розбіжним є ряд (2).

Наслідок 1 [3, 5]. Нехай ряди (1) і (2) є додатними та існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_k}{b_k} = \gamma.$$

Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$, то ряди (1) і (2) є одночасно збіжними або одночасно розбіжними; 2) якщо $\gamma = +\infty$ і ряд (2) є розбіжним, то розбіжним є ряд (1); 3) якщо $\gamma = 0$ і ряд (2) є збіжним, то збіжним є ряд (1).

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k^2 + 1}$ є додатним і розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k}{2k^2 + 1}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{5^k + 1}$ є додатним і збіжним, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$ і $\frac{9}{5^k + 1} \leq \frac{9}{5^k}$.

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{3^k - 2^k}$ є додатним і збіжним, бо збіжним є

$$\text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} (2/3)^k \text{ і } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+3}}{(2/3)^k} = 8.$$

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}$ є додатним і збіжним, бо збіжним є

$$\text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 \text{ і } (\forall k \in \mathbb{N}) : \sin \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Зауваження 1. Нема такого універсального числового ряду (2), щоб порівнявши з ним будь-який ряд (1), можна було б зробити висновок про збіжність чи розбіжність ряду (1) (див. нижче). Найчастіше

порівнюють заданий ряд з рядами $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\alpha k}$.

Теорема 3 (інтегральна ознака збіжності ряду) [3, 5]. Нехай ряд (1) є додатним і існує неперервна незростаюча на $[1; +\infty]$ функція $f : [1; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $(\forall k \in \mathbb{N}) : f(k) = a_k$. Тоді ряд (1) і інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

є одночасно збіжними або розбіжними.

Наслідок 2 [3, 5]. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha > 1$ і є

розбіжним, якщо $\alpha \leq 1$ і, зокрема, гармонійний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ є розбіжним.

Приклад 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3 + 1}$ є збіжним, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}$ і

$$\frac{1}{k^3 + 1} \leq \frac{1}{k^3} \text{ для всіх } k \in \mathbb{N}.$$

Приклад 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k} - 1}$ є розбіжним, бо розбіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1/2}} \text{ і } \frac{1}{2\sqrt{k} - 1} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}} \text{ для всіх } k \in \mathbb{N}.$$

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{k^3+2}$ є збіжним, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{2k+3}{k^3+2}}{\frac{1}{k^2}} = 2.$$

Наслідок 3 [3, 5]. Ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}$ є збіжним, якщо $\alpha > 1$ і є розбіжним, якщо $\alpha \leq 1$.

Приклад 8. Ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}$ є збіжним.

Приклад 9. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \ln(k+1)}$ є збіжним, бо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ і } \frac{1}{k^2 \ln(k+1)} \leq \frac{1}{k^2} \text{ для всіх } k \geq 1.$$

Приклад 10. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} \ln(k+1)}$ є розбіжним, бо розбіжним є

$$\text{ряд } \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \text{ і } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k} \ln(k+1)}}{\frac{1}{k \ln k}} = +\infty.$$

Приклад 11. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1} \ln^3(k+1)}$ є збіжним, бо збіжним є

$$\text{інтеграл } \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1) \ln^3(x+1)} dx, \text{ збіжним є ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \ln^3(k+1)} \text{ і}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1} \ln^3(k+1)}}{\frac{1}{(k+1) \ln^3(k+1)}} = 1.$$

Приклад 12. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \frac{k}{k^2+1} \sin \frac{1}{k}$ є збіжним, бо

$$0 < \cos \frac{k}{k^2+1} \leq 1, \quad 0 < \sin \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \cos \frac{k}{k^2+1} \sin \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad k \in \mathbb{N},$$

і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ є збіжним.

Приклад 13. Нехай існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k k^\alpha = \gamma$. Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha \leq 1$, то ряд (1) є розбіжним (потрібно врахувати, що із накладених умов випливає, що всі члени ряду (1), за винятком хіба-що скінченного числа, є додатними).

Приклад 14. Нехай

$$a_k = \frac{\gamma}{k^\alpha} + o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha \leq 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 15. Якщо $\alpha > 1$ і $a_k = O\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$, $k \rightarrow \infty$, то ряд (1) є збіжним.

Теорема 4 (ознака Коші) [3, 5]. Нехай ряд (1) є додатним і існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$. Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $q > 1$, то цей ряд є розбіжним.

Приклад 16. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1-1/k)^{k^2}$ є збіжним, оскільки тут

$$a_k = (1-1/k)^{k^2} \quad \text{і}$$

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(1-1/k)^{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1-1/k)^k = 1/e < 1.$$

Приклад 17. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + (3^k + (-3)^k)/2}$ є збіжним, бо збіжним є

$$\text{ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \quad \text{і} \quad \frac{1}{2^k + (3^k + (-3)^k)/2} \leq \frac{1}{2^k} \quad \text{для всіх } k \in \mathbb{N}. \quad \text{Проте,}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2}, \quad k = 2n + 1,$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{2^k + 3^k}} = \frac{1}{3} \sqrt[k]{\frac{1}{1 + (2/3)^k}}, \quad k = 2m.$$

Тому $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ не існує.

Теорема 4' (ознака Коші) [3, 5]. Нехай ряд (1) є додатним. Тоді: 1) якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q < 1$, то ряд є збіжним; 2) якщо $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q > 1$, то ряд є розбіжним.

Зауваження 2. Якщо $q = 1$ або границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q$ не існує, то ряд (1) може бути збіжним, а може бути і розбіжним. Для з'ясування цього потрібно скористатись іншими ознаками. Так, $q = 1$ для обох рядів $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, але перший з них є розбіжним, а другий – збіжним. Сказане тут стосується і наступної теореми.

Теорема 5 (ознака д'Аламбера) [3, 5]. Нехай ряд (1) є додатним і існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$. Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 18. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$ є збіжним, оскільки тут $a_k = \frac{k^2}{3^k}$,

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{3^{k+1}} \quad \text{і} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2 3^k}{3^{k+1} k^2} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 19. Для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ (тут і далі

$$(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k, \quad (2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1), \quad a_k = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},$$

$$a_{k+1} = \frac{(2k+2)!!}{(2k+3)!!} \quad \text{і} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+2)!!(2k+1)!!}{(2k+3)!!(2k)!!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+2}{2k+3} = 1. \quad \text{Тому}$$

ознака д'Аламбера не приводить до бажаного висновку про збіжність чи розбіжність ряду.

Теорема 5' (ознака д'Аламбера). Нехай ряд (1) є додатним.

Тоді: 1) якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q < 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо

$\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Зауваження 3. При дослідженні рядів часто буває корисною формула Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n (1 + \varepsilon_n),$$

де $\varepsilon_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Приклад 20. Згідно з формулою Стірлінга

$$\frac{(2k)!}{k^{2k}} = \sqrt{4\pi k} \frac{(2k/e)^{2k}}{k^{2k}} (1 + o(1)) = \sqrt{4\pi k} (2/e)^{2k} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty.$$

Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^{2k}}$ є збіжним.

Приклад 21. Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} &= \frac{((2k)!!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k} 2\pi k (k/e)^{2k}}{\sqrt{2\pi(2k+1)} ((2k+1)/e)^{2k+1}} (1 + o(1)) = \\ &= \frac{2^{2k} 2\pi k k^{2k} e}{\sqrt{2\pi(2k+1)} (2k+1)^{2k+1}} (1 + o(1)) = \frac{\pi e}{\sqrt{2\pi(2k+1)}} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ є розбіжним.

Зауваження 4. При дослідженні рядів часто буває корисною формула Тейлора з додатковим членом у формі Пеано.

Приклад 22. Згідно з формулою Тейлора

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}} + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)^3 \right)^2 = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k}} \right)^2$ є збіжним.

Приклад 23. За формулою Тейлора

$$\left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \right)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt[4]{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right)^2 \sim \frac{1}{4k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{k}} \right)^2$ є розбіжним.

Теорема 6 (Раабе) [3, 5]. Якщо ряд (1) є додатним і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = p,$$

то ряд (1) є збіжним, якщо $p > 1$ і є розбіжним, якщо $p < 1$.

Приклад 24. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k k!}{k^k}$ є розбіжним, бо

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{(k+1)^{k+1} e^k k!}{k^k e^{k+1} (k+1)!} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{(k+1)^k}{k^k e} - 1 \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{(1+1/k)^k}{e} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(e^{k \ln(1+1/k) - 1} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(e^{-\frac{1}{2k} + o(1/k)} - 1 \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(-\frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right) = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 25. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}}$ є розбіжним, бо

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\sqrt{\frac{(2k)!!(2k+3)!!}{(2k+1)!!(2k+2)!!}} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+2}} - 1 \right) = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \frac{\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+2}}{\sqrt{2k+2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{2k+2} (\sqrt{2k+3} + \sqrt{2k+2})} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Теорема 7 (Гаусса) [3, 5]. Якщо ряд (1) є додатним і

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

для деякого $\varepsilon > 0$ та деякої обмеженої послідовності (θ_n) , то ряд (1) є:

а) збіжним, якщо $\lambda > 1$ або $\lambda = 1$ і $\mu > 1$; б) розбіжним, якщо $\lambda < 1$ або $\lambda = 1$ і $\mu \leq 1$.

Приклад 26. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ є розбіжним, бо за ознакою Гаусса

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{a_{k+1}} &= \frac{(2k)!!(2k+3)!!}{(2k+1)!!(2k+2)!!} = \frac{2k+3}{2k+2} = 1 + \frac{1}{2k+2} = 1 + \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1+1/k} = \\ &= 1 + \frac{1}{2k} (1+1/k + o(1/k)) = 1 + \frac{1}{2k} + O(1/k^2), \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема 8 [3, 5]. Для кожного збіжного додатного ряду (1) існує

збіжний додатний ряд (2) такий, що $a_k / b_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Теорема 9 [3, 5]. Для кожного розбіжного додатного ряду (2) існує розбіжний додатний ряд (1) такий, що $a_k / b_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

4.1.4. Ознаки збіжності знакопосередних рядів. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \quad (1)$$

де $u_k > 0$, називають *знакопосередним*.

Теорема 1 (ознака Лейбніца) [3, 5]. Якщо $(\forall k \in \mathbb{N}): u_{k+1} \leq u_k$ і $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$, то знакопосередний ряд (1) є збіжним.

Наслідок 1 [3, 5]. Якщо виконуються умови теореми Лейбніца, то $|S - S_n| \leq |u_{n+1}|$, тобто абсолютна похибка наближеної формули $S \approx S_n$ не перевищує модуля першого відкинутого члена.

Наслідок 2. Якщо виконуються умови теореми Лейбніца, то

$$u_1 - u_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k \leq u_1,$$

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k \leq u_1 - u_2 + u_3,$$

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k \leq u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5,$$

....

Зауваження 1. Ознаку Лейбніца можна застосовувати і до ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots,$$

де $u_k > 0$, оскільки ряд (1) одержується з останнього ряду множенням його членів на число -1 .

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ є збіжним, бо $u_{k+1} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = u_k$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\arctg k}{k}$ є збіжним, бо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\arctg k}{k} = 0, \quad \left(\frac{\arctg k}{k} \right)' = \frac{\frac{k}{1+k^2} - \arctg k}{k^2} \leq 0 \text{ для достатньо}$$

великих k і тому $u_{k+1} = \frac{\arctg(k+1)}{k+1} < \frac{\arctg k}{k} = u_k$ для таких k (зміна скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність).

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k + \sqrt{k}}{k^2}$ є збіжним, бо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k + \sqrt{k}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}},$$

а останні два ряди є збіжними.

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2+(-1)^k}{k}$ є розбіжним, бо

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2+(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k \frac{2}{k} + \frac{1}{k} \right)$$

і в протилежному випадку ми приходимо до суперечливого висновку, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ є збіжним. Разом з

цим, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2+(-1)^k}{k} = 0$. Таким чином, вимога монотонності

послідовності (u_k) в теоремі Лейбніца є суттєвою.

Приклад 5. Абсолютна похибка наближеної формули

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \approx \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$$

не перевищує $\frac{1}{n+1}$. При цьому, ця похибка буде меншою за 10^{-2} , якщо $n=100$.

4.1.5. Ознаки збіжності рядів з довільними членами.

Теорема 1 (про перетворення Абеля) [3, 5]. Нехай (a_k) і (b_k) –

дві довільні послідовності, $A_0 = 1$ і $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, якщо $n > 1$. Тоді для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і $p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедлива формула Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1}.$$

Приклад 1 (лема Абеля). Якщо $t \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq M$ для всіх $k \in \overline{1; n}$ і $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0$, то $tb_1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq Mb_1$. Справді, нехай $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Тоді

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \dots + (s_n - s_{n-1}) b_n =$$

$$= (b_1 - b_2)s_1 + (b_2 - b_3)s_2 + \dots + (b_{n-1} - b_n)s_{n-1} + b_n s_n \leq \\ \leq (b_1 - b_2)M + (b_2 - b_3)M + \dots + (b_{n-1} - b_n)M + b_n M = b_1 M$$

i

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq \\ \geq (b_1 - b_2)m + (b_2 - b_3)m + \dots + (b_{n-1} - b_n)m + b_n m = b_1 m.$$

Теорема 2 (ознака Діріхле) [3, 5]. Якщо послідовність частинних сум ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

є обмеженою зверху, а послідовність (b_k) є монотонною і $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{2}$$

є збіжним.

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k}$ є збіжним, оскільки

$\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| \leq 1 + \sqrt{2}$, а послідовність $(1/k)$ є монотонною і $1/k \rightarrow 0$, якщо $k \rightarrow +\infty$.

Теорема 3 (ознака Абеля) [3, 5]. Якщо ряд (1) є збіжним, а послідовність (b_k) є монотонною і обмеженою, то ряд (2) є збіжним.

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k} \cdot \frac{2^k + 1}{2^k}$ є збіжним, оскільки збіжним є

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k}$, а послідовність $\left(\frac{2^k + 1}{2^k} \right)$ є монотонною і обмеженою.

Приклад 4. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln k]}}{k} \tag{3}$$

є розбіжним. Справді, якщо б ряд (3) був збіжним, то збіжним був би також ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=[e^{n-1}]}^{[e^n]-1} \frac{1}{k}. \quad (4)$$

Але

$$\sum_{k=[e^{n-1}]}^{[e^n]-1} \frac{1}{k} \geq \frac{[e^n] - [e^{n-1}]}{[e^n] - 1} = \frac{1 - \left[\frac{e^{n-1}}{e^n} \right]}{1 - \left[\frac{1}{e^n} \right]} \rightarrow 1 - \frac{1}{e}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Тому ряд (4) є розбіжним. Суперечність.

4.1.6. Абсолютно та умовно збіжні ряди. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

називається [3, 5] *абсолютно збіжним*, якщо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \quad (2)$$

Теорема 1. Якщо ряд (1) є абсолютно збіжним, то він є збіжним.

Ряд, який не є абсолютно збіжним, називається *абсолютно розбіжним*.

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ є збіжним абсолютно, оскільки

$$\left| (-1)^k \frac{1}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2} \text{ і ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ є збіжним.}$$

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ не є збіжним абсолютно, оскільки

$$\left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k} \text{ і ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ є розбіжним.}$$

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \left(\arcsin \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right)$ є збіжним абсолютно,

оскільки $\left| \sqrt{k} \left(\arcsin \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) \right| / \frac{1}{k\sqrt{k}} \rightarrow 0$, якщо $k \rightarrow \infty$, і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ є збіжним.

Приклад 4. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (3)$$

є додатним, збіжним і $(\forall k \in \mathbb{N}): |a_k| \leq b_k$, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Приклад 5. Нехай ряд (3) є додатним і існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|/b_k = \gamma$. Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$, то ряд (1) є збіжним абсолютно тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд (3); 2) якщо $\gamma = +\infty$ і ряд (3) є розбіжним, то ряд (1) не є збіжним абсолютно; 3) якщо $\gamma = 0$ і ряд (3) є збіжним, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Приклад 6. Нехай існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q$. Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 7. Оскільки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|(-1)^k k^3 / 2^k|} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt[k]{k} \right)^3 = \frac{1}{2},$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^3 / 2^k$ є збіжним абсолютно.

Приклад 8. Нехай існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}|/|a_k| = q$. Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 9. Нехай існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|/q^k = \gamma$. Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $0 < q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $0 < \gamma \leq +\infty$ і $q \geq 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 10. Оскільки $\left| \frac{1 + (-1)^k 2^k + 2^k}{3^k + (-1)^k 4^k + 4^k} \right| \leq \frac{1 + 2 \cdot 2^k}{3^k} \leq 4 \left(\frac{2}{3} \right)^k$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (2/3)^k$ є збіжним, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k 2^k + 2^k}{3^k + (-1)^k 4^k + 4^k}$ є збіжним абсолютно.

Приклад 11. Нехай $|a_k| = \frac{\gamma}{k^\alpha} + o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$, $k \rightarrow \infty$. Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha < 1$, то ряд (1) не є збіжним абсолютно.

Приклад 12. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \arcsin \frac{(-1)^k}{k}$ є збіжним абсолютно,

оскільки

$$\left| \frac{1}{k} \arcsin \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \left| \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \right| = \frac{1}{k\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ є збіжним.

Приклад 13. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(-1)^k k}{k+1} \arcsin \frac{(-1)^k}{k^2}$ є збіжним

абсолютно, оскільки

$$\left| \cos \frac{(-1)^k k}{k+1} \arcsin \frac{(-1)^k}{k^2} \right| \leq \left| \arcsin \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ є збіжним.

Приклад 14. Якщо $\alpha > 1$ і $|a_k| = O\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$, $k \rightarrow \infty$, то ряд (1) є

збіжним абсолютно.

Приклад 15. Якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$, то ряд (1) є збіжним

абсолютно. Якщо $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 16. Нехай $|a_k| = \gamma q^k + o(q^k)$, $k \rightarrow \infty$. Тоді: 1) якщо

$0 \leq \gamma < +\infty$ і $0 < q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо

$0 < \gamma \leq +\infty$ і $q \geq 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 17. Якщо $0 < q < 1$ і $|a_k| = O(q^k)$, $k \rightarrow \infty$, то ряд (1) є

збіжним абсолютно.

Приклад 18. Якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}|/|a_k| = q < 1$, то ряд (1) є збіжним

абсолютно. Якщо $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}|/|a_k| = q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^i, \quad (4)$$

який отримуємо з ряду (1) шляхом перестановки його членів, тобто зміною номерів його членів.

Теорема 2 [3, 5]. Якщо ряд (1) є збіжним абсолютно, то збіжним є також ряд (4) і має ту ж суму, що і ряд (1).

Отже, кожний абсолютно збіжний ряд є збіжним. Ряд (1) називається умовно збіжним, якщо він є збіжним, але не є абсолютно збіжним. Іншими словами можна сказати, що ряд (1) називається умовно збіжним, якщо він є збіжним, але ряд (2) є розбіжним.

Приклад 19. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ є збіжним умовно, оскільки він є збіжним, а ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ є розбіжним.

Приклад 20. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ є збіжним абсолютно (отже, є збіжним), бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Приклад 21. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right)$ є умовно збіжним.

Справді, $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$. Отже,

$$\ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) = \frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2} + o \left(\frac{1}{(k+1)^2} \right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Оскільки ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2(k+1)^2} + o \left(\frac{1}{(k+1)^2} \right) \right), \quad k \rightarrow \infty,$$

є збіжними, то збіжним є також розглядуваний ряд. Разом з цим,

$$\left| \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) \right| = \left| \frac{(-1)^k}{k+1} + o \left(\frac{1}{k} \right) \right| \sim \frac{1}{k}, \quad k \rightarrow \infty.$$

Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) \right|$ є розбіжним.

Приклад 22. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) \frac{k}{k+1}$ є збіжним умовно, оскільки $\left| \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) \frac{k}{k+1} \right| \sim \frac{1}{k}$, $k \rightarrow \infty$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right)$ є збіжним (див. приклад 21), а послідовність $\left(\frac{k}{k+1} \right)$ є монотонною і обмеженою.

Теорема 3 [3, 5]. Якщо ряд (1) є умовно збіжним, то множина $\{a_k^+\}$ його додатних членів і множина $\{a_k^-\}$ його від'ємних членів є нескінченними, ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ і $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ є розбіжними і мають суми $+\infty$ та $-\infty$ відповідно.

Теорема 4 (Рімана) [3, 5]. Якщо ряд (1) є умовно збіжним, то для кожного $A \in [-\infty; +\infty]$ можна так переставити його члени, що сума отриманого ряду буде дорівнювати A .

Наслідок 1. Якщо за будь-якої перестановки членів ряду (1) одержується збіжний ряд, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

4.1.7. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення збіжного ряду.
2. Сформулюйте означення суми ряду.
3. Для яких q є збіжним ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ і чому дорівнює його сума?
4. Сформулюйте теорему про необхідну умову збіжності ряду.
5. Наведіть приклад розбіжного ряду, загальний член якого прямує до нуля.
6. Чи існує збіжний ряд, загальний член якого не прямує до нуля?
7. Сформулюйте критерій Коші збіжності ряду.
8. Сформулюйте критерій збіжності додатного ряду.
9. Сформулюйте ознаку порівняння.
10. Сформулюйте інтегральну ознаку збіжності ряду.
11. Для яких α збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$?
12. Сформулюйте ознаку д'Аламбера збіжності ряду.
13. Сформулюйте ознаку Коші збіжності ряду.
14. Сформулюйте ознаку Лейбніца та наслідок з неї.
15. Сформулюйте теорему про перетворення Абеля.
16. Сформулюйте ознаку Абеля збіжності ряду.
17. Сформулюйте ознаку Діріхле збіжності ряду.
18. Сформулюйте означення абсолютно збіжного ряду.
19. Чи існує збіжний ряд, який не є абсолютно збіжним?
20. Сформулюйте теорему Рімана про умовно збіжні ряди.

4.1.8. Вправи і задачі.

1. Дослідіть на збіжність ряд:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{5k+4}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3}{5k^2-4}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{5k^2+4}$.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+3}{k^3+4}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2+1}$.
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$.
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^3+k+2}{k^5+k^2+1}$.
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^8+k+4}{5k^{13}+2k^3+1}$.
9. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/3k^2)^{-k^2-2}$.
10. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{k+2}$.
11. $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\sqrt{p}+1}$.
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{q\sqrt[3]{q}+1}$.
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2+3k+1}{6k^4+k^2+3k+1}$.
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4+3k+1}{10k^4+13k^2+1}$.
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$.
16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{k^3\sqrt[4]{k}+1}$.
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}+1}{k^2+3k+1}$.
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3+5}{k^5+4k^4+3}$.
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3}+1}{k\sqrt{k}+3k+1}$.
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3+5}{\sqrt{k^5}+4k^2+3}$.
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+1/k^2)$.
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k+3}$.
23. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1})$.
24. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.
25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{k(5^k\sqrt{k}+4)}$.
26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{k^2(\sqrt[k]{k}+10)}$.
27. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k^2} - \sqrt[3]{k^2-1})$.
28. $\sum_{k=1}^{\infty} (k^{3/2} - \sqrt{k^3-1})$.
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}$.
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

2. Дослідіть на збіжність ряд:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+3^k}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2^k}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k+3^{k-3}}$.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k+3^{k-4}}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{k}}}$.
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt[3]{k}}}$.
7. $\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{p} \sin \frac{1}{p(p+1)}$.
8. $\sum_{q=1}^{\infty} \sqrt[3]{3^q} \sin \frac{1}{2^{q-1}}$.
9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{2^n + 3^n}$.
10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + n}$.
11. $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln \ln k}{(2k+3)\ln^3(2k+1)}$.
12. $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln^4 \ln k}{(2k+3)\ln^3(2k+1)}$.
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^3(k+1)}$.
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} \ln(k+1)}$.
15. $\sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{k \ln \ln^5 k}$.
16. $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{\ln \ln^4 k}{k \ln^3 k}$.
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! e^k}{k^k}$.
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{3^{k-1} k^k}$.
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$.
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k)!}{(k+1)!^3}$.
21. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{k^2} / 4^k$.
22. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2k^2)^{-k^2} 5^k$.
23. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k(k-1)}$.
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^2} \right)^{k^2}$.
25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! e^k}{k^k}$.
26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{3^{k-1} k^k}$.
27. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{k^2} / 4^k$.
28. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2k^2)^{-k^2} 5^k$.
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k(k-1)}$.
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^2} \right)^{k^2}$.

3. З'ясуйте, для яких p , q та s збіжним є ряд:

$$1. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k}.$$

$$2. \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k \ln^s \ln k}.$$

$$3. \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln \ln^q k}.$$

$$4. \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k \ln \ln^s k}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{q^k}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k^q}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p + 2}{k^4 + 1}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 4}{2k^q + 1}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^p + 1}{k^q + 1}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 + 3k^q}{k^q + 3k^2 + 1}.$$

$$11. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln^q k}{k^2}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^q}{\ln^p k^5 + 3}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p + 1}{q^k}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k + 1}{k^q}.$$

4. Дослідіть на збіжність ряд:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{4k+1} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{2k} - \ln(1+1/2k) \right).$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{3k+2} \left(\operatorname{tg} \frac{3}{k} + \ln \left(1 - \frac{3}{k} \right) \right).$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k+1} \left(\sqrt{1+1/k} - \ln(1+1/k) \right).$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{3k} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{k} - \ln \left(1 + \frac{2}{k} \right) \right).$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{sh} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right).$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^3+1} \left(\operatorname{tg} \operatorname{sh}^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right).$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{arcsin} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right).$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^3+1} \left(\operatorname{tg} \operatorname{arcsin}^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right).$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{sh} \operatorname{tg} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right).$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{tg} \operatorname{sh} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right).$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \left(\operatorname{sh} \ln(1+1/k) - 1/k \right).$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \left(\operatorname{sh} \operatorname{arcsin} \frac{2}{k} - 2/k \right).$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\operatorname{sh} 1/k} - 1 - 1/k \right).$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\operatorname{arcsin} 1/k} - 1 - 2/k \right).$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\sin \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{6k^3} \right).$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} k \left(\cos \frac{3}{k} - 1 - \frac{9}{2k^2} \right)$$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\sqrt{k}+1} \left(\ln \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k} \right)$. 18. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\ln \frac{3\sqrt{k}+1}{3\sqrt{k}-1} - 1 \right)$.
19. $\sum_{k=1}^{\infty} k\sqrt{k^2+1} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} \right)$. 20. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^2+1} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2k^2} \right)$.
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{k} - \frac{2}{k} \right)$. 22. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k+1} \left(\operatorname{arcsin} \frac{3}{k} - \frac{2}{k} \right)$.
23. $\sum_{k=2}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \ln \frac{k+1}{k-1}$. 24. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt[4]{k^2+k+1})$.
25. $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{4/k} - 1 - 4/k)$. 26. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sin 4/k - 4/k)$.
27. $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{\sin 4/k} - 1 - 4/k)$. 28. $\sum_{k=1}^{\infty} (e^{\operatorname{tg} 4/k} - 1 - 4/k)$.
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k} \right)^{\sqrt{k}}$. 30. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln k}{k} \right)^k$.

5. Дослідіть ряд на абсолютну і умовну збіжність:

1. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{(k+1)(k-1)}$. 2. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{9\ln^2 k + 5}$.
3. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{9\ln^2 \ln k + 5}$. 4. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{18}{9k^2 + 21k - 8}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4+3k}{(k+1)k}$. 6. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{49k^2 - 14k - 48}$.
7. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{9\ln^2 k + 5}$. 8. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{36k^2 - 24k - 5}$.
9. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^k}{ke^k + 1}$. 10. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{ke^k}{-k^2 e^k + 1}$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{-5k^2 + k - 1}$. 12. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{-5k^3 + 3}{6 - k^5 - 4k^4}$.
13. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k^2 + 4k + 3}$. 14. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{2k^2 + k + 1}$.
15. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + \sin k}$. 16. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{-\sqrt{k^4 + 1} + \cos k}$.

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{1+k}.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{6 - \ln k + k}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^k}{k!}.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{(k+2)(k+3)}.$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 + (-2)^k}{3^k}.$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k \ln^2 k + 1}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{2\sqrt[4]{k^8 + 1}}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 + 2k}{\sqrt[3]{9k^6 + 1}}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{6 - \ln \ln k + k}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{-5k^3 + 3}{6 - k^5 + 4k^4}.$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{k}.$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2 + (-1)^k k}{4^k}.$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{\sqrt[3]{k^2 + 1}}.$$

4.1.9. Індивідуальні завдання.

1. Знайдіть суму ряду:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3-k}{(k+3)(k+1)k}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4-k}{(k+2)(k+1)k}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-k}{(k+3)(k+1)k}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2-k}{(k+2)(k+1)k}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-k}{(k+2)(k+1)k}.$$

$$11. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{-5-k}{(k+2)(k^2-1)}.$$

$$13. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{-2-k}{(k-2)(k-1)k}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{49k^2 + 7k - 12}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{49k^2 - 56k - 33}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{25k^2 - 5k - 6}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{49k^2 + 21k - 16}.$$

$$10. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k - 2}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 + 12k - 5}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{9k^2 + 6k - 8}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8+3k}{(k+2)(k+1)k}.$$

$$17. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{6}{(k-2)(k-1)k}.$$

$$19. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3k+1}{(k-2)(k-1)k}.$$

$$21. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(k+1)(k-1)k}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6+k}{(k+2)(k+1)k}.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4+3k}{(k+2)(k+1)k}.$$

$$27. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-2+5k}{(k-1)(k+2)k}.$$

$$29. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{5k-2}{(k+2)(k-1)k}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2+8k+3}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{9k^2+3k-2}.$$

$$20. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{7}{k^2+k-2}.$$

$$22. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{12}{9k^2-12k-5}.$$

$$24. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{9k^2+21k-8}.$$

$$26. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{21}{49k^2-14k-48}.$$

$$28. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{12}{36k^2-24k-5}.$$

$$30. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{16}{16k^2-8k-15}.$$

2. Дослідіть на збіжність ряд:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \arcsin \frac{1}{k}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{k}}} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[6]{k+1} \ln(1+1/k\sqrt{k}).$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k+\sqrt{k}}} \sin \frac{3}{k+7}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+3}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}+3} \arccos \frac{1}{5k+3}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{5k\sqrt{k+1}+1} \cos \frac{\sqrt{k}}{k^3+2k}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[6]{1+\sqrt{k}} \arcsin \frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} \cos \frac{1}{k^3}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[6]{k+\sqrt{k}} \arcsin \frac{1}{2k+\sqrt{k}}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \operatorname{arccotg} \frac{1}{2k+3}.$$

$$12. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{m}+3} \arccos \frac{1}{5m+3}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{5k^2+1} \operatorname{ctg} \frac{1}{k^3+2k}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{k} \right).$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5\sqrt{k}+4} \sin^3 \frac{k+1}{k\sqrt{k+2}}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)^{-2k}}{(k+1/k)^{-2k-1}(k+1)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{3^n + 4^n}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} k \ln \frac{k^3 + 2}{k^3 + 1}$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^3} \operatorname{arctg} \frac{k^3 + 2}{k^3 + 1}.$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{2k^3 - 4k}{6k^3 + 7k^2 + 1}.$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{3k^2 + 3k + 1}{6k^2 + k^2 + 3k + 1}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1/k)^k (k+1)}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{7\sqrt{k}+5} \arcsin^3 \frac{k+1}{k\sqrt{k+2}}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 8} \cos \frac{1}{k}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \arcsin^2 \frac{1}{k}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} \frac{k^3 + 2}{k^3 + 1}.$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 3}{2k^3 + 4} \sin \frac{\pi k}{4}.$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k^4 + 6k}{k^5 + 7k^2 + 3k + 1}.$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k^4 + 3k + 1}{10k^4 + 13k^2 + 1}.$$

3. Дослідіть на збіжність ряд:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{\sqrt{3^k}}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cos \frac{1}{3^k}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} e^k \ln(1 + 1/2^k).$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \sin e^{-\sqrt{k}}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} 2^{-\sqrt{k}}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}+3} \arccos 3^{-\sqrt{k}}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cos 4^{-k}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{3^k} \arcsin \frac{1}{3^k + 1}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{3^k}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cos \frac{1}{4^k}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}+3} \operatorname{arctg} e^{-\sqrt{k}}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}+3} \arcsin 3^{-\sqrt{k}}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} e^k \ln(1 + 1/3^k).$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \ln(1+2^k).$$

$$17. \sum_{n=1}^{\infty} 9^n \sin^3 \frac{1}{2^n}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln k + \sqrt[3]{k}}}.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2}{3^k + 4^k}.$$

$$23. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt[5]{n}}}.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln k \sqrt{\ln \ln(k+4)}}}.$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+5^k}.$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{6+5^{2k-4}}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \ln(1+e^k).$$

$$18. \sum_{m=1}^{\infty} 8^m \arcsin^3 e^{-m}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln k + \sqrt[4]{k}}}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 2}{3^k + 2^{\sqrt{k}}}.$$

$$24. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\sqrt[3]{m}}}.$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k + 5^k}.$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{4^k + 8}.$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{2k+3}}{2^k + 5^{k-1}}.$$

4. Дослідіть на збіжність ряд:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 2}{(k^4 + 1) \ln^4(2k + 1)}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^4 \ln(k^3 + 2)}{(k + 1) \ln^3(2k + 1)}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(3k^3 + 2) \ln^2 \ln(k + 1)}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3 + 1} \ln(k + 1)}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3 + 1} \ln^2 2k}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 1}{(k^3 + 3) \ln^2(k + 1)}.$$

$$2. \sum_{k=4}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 2) \ln \ln^2 k \ln k}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \ln(k^2 + 3)}{(k^3 + 2) \ln^2(k + 1)}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 3}{(k^2 + 2) \ln \ln^2(k + 1)}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k + 1) - \ln k}{\ln^2(k + 1)}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k + \sqrt{k}) \ln^2(k + 1)}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 1) \ln(k + 1)}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 2}{(k^4 + 1)\ln(2k + 1)}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(3k^3 + 2)\ln(k + 1)}.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3 + 1}\ln(k + 1)}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3 + 1}\ln 2k}.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 1}{(k^3 + 1)\ln(k + 1)}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3 + 1}\ln(k + 1)}.$$

$$25. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln \ln k}{k \ln^2 k}.$$

$$27. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 \ln k}.$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 1)\ln(k + 1)}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 2)\ln^2(k + 1)}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 3}{(k^2 + 2)\ln^2(k + 1)}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(2k^2 + 1)\ln^3(k + 1)}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(2k^2 + \sqrt{k})\ln(k + 1)}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{(k^4 + 1)\ln(k + 1)}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(2k^2 + 1)\ln^3(k + 1)}.$$

$$26. \sum_{k=12}^{\infty} \frac{\ln \ln k}{\sqrt{k} \ln k}.$$

$$28. \sum_{k=12}^{\infty} \frac{1}{k \ln \ln \ln^7 k}.$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k + 1)\ln^3(k + 1)}.$$

5. Дослідіть ряд на абсолютну і умовну збіжність:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{k^2 + 1}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k + 1}{(k^3 + 1)\ln(k + 1)}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos 2k}{k}.$$

$$7. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln k]}}{k + (-1)^k}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(3k^3 + 2)\ln(k + 1)}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 + 3}{(k^4 + 1)\ln(k + 1)}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin^2 k}{k}.$$

$$6. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi k^2}{k + 1}}{\ln^2 k}.$$

$$8. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}.$$

$$10. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 + \sin \frac{k\pi}{4}}.$$

$$11. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{\sqrt{k} + \sin \frac{k\pi}{4}}.$$

$$13. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\sqrt[k]{k^2} (k+1)}.$$

$$15. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k + 1}{3^k + 2^k}.$$

$$17. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2k^2 + 1}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{2k^3 + 1}.$$

$$21. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k \ln k}.$$

$$23. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln k}.$$

$$25. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln^2 k}.$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(k^3 + 3) \ln^2 (k+1)}.$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3 + 2}{(k^4 + 1) \ln(2k+1)}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+3}{(k^2 + 2) \ln^2 (k+1)}.$$

$$14. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\sqrt[k]{\ln k^2} (k+1)}.$$

$$16. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)} \cos \frac{1}{k}.$$

$$18. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2 + k}{2k^3 + 2}.$$

$$20. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2 + k}{7k^4 + 2}.$$

$$22. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k \ln \ln k}.$$

$$24. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln \ln k}.$$

$$26. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln k \ln^2 \ln k}.$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 1) \ln(k+1)}.$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 2) \ln^2 (k+1)}.$$

4.2. Функціональні ряди

Функціональні ряди відіграють дуже важливу роль в різних розділах математики та її застосуваннях. За допомогою таких рядів визначаються багато спеціальних функцій, знаходяться значення елементарних функцій, розв'язуються різні рівняння і т.д. Вивчення функціональних рядів відомим чином пов'язане з вивченням функціональних послідовностей. Найважливішими функціональними рядами є степеневі ряди та тригонометричні ряди.

4.2.1. Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей. Функціональною послідовністю називається така

функція, область визначення якої є множина всіх натуральних чисел, а множина значень належить множині всіх функцій із \mathbb{R} в \mathbb{R} . Щоб задати функціональну послідовність досить кожному натуральному числу k поставити у відповідність функцію $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Функціональні послідовності позначатимемо так: (f_k) або $(f_k(x))$. Для кожного конкретного x функціональна послідовність $(f_k(x))$ перетворюється в числову. Функціональна послідовність (f_k) називається збіжною в точці x , якщо збіжною в \mathbb{R} є числова послідовність $(f_k(x))$.

Приклад 1. Послідовність $(x^k) = (x; x^2; \dots)$ є функціональною. В даному випадку f_k – це функції, визначені формулою $f_k(x) = x^k$. Якщо $x = 1/2$, то ця функціональна послідовність перетворюється в числову послідовність $(1/2^k)$.

Приклад 2. Послідовність $(x + \sin kx) = (x + \sin x; x + \sin 2x; \dots)$ є функціональною. В даному випадку f_k – це функції, визначені формулою $f_k(x) = x + \sin kx$. Якщо $x = \pi/4$, то ця функціональна послідовність перетворюється в числову послідовність $(\pi/4 + \sin k\pi/4)$.

Приклад 3. Функціональна послідовність $(x^k) = (x; x^2; \dots)$ є збіжною в точці $x = 1/2$, бо збіжною в \mathbb{R} є числова послідовність $(1/2^k)$: $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/2^k = 0$.

Приклад 4. Кожна числова послідовність (a_k) є функціональною, оскільки в цьому випадку всі функції f_k є сталими функціями: $f_k(x) = a_k$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 5. Послідовність $(2/3^k)$ є функціональною, f_k є сталими функціями: $f_k(x) = 2/3^k$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Функціональна послідовність (f_k) називається [3, 5] збіжною до функції f на множині E або поточково збіжною до f на E , якщо для кожного $x \in E$ числова послідовність $(f_k(x))$ збігається в \mathbb{R} до числа $f(x)$:

$$(\forall x \in E) : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad (1)$$

тобто якщо

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*) : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Функціональна послідовність (f_k) називається [3, 5] *рівномірно збіжною* до функції f на множині E , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall x \in E): |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Різниця між (2) і (3) полягає в тому, що в (3) k^* залежить тільки від $\varepsilon > 0$, а в (2) k^* залежить від ε і точки $x \in E$. Можна сказати і так. Функціональна послідовність (f_k) називається *рівномірно збіжною* на множині E , якщо $\limsup_{k \rightarrow \infty} \{|f_k(x) - f(x)|: x \in E\} = 0$. Кожна рівномірно збіжна на E послідовність є збіжною на E поточково. Обернене твердження не обов'язково справедливе, що впливає із наступного прикладу. Число $\|f\|_E = \sup\{|f(x)|: x \in E\}$ називається [3, 5] *sup-нормою* функції f на множині $E \subset \mathbb{R}$. Кажуть, що послідовність (f_k) збігається до f за sup-нормою, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_E = 0$. Бачимо, що рівномірна збіжність послідовності (f_k) на множині E рівносильна її збіжності за sup-нормою на E . Коли кажуть, що функціональна послідовність збігається (рівномірно збігається) на множині E , то це означає, що існує функція, до якої вона збігається (рівномірно збігається) на E .

Приклад 6. Функціональна послідовність $(x^k + 2x)$ є збіжною до функції $f(x) = 2x$ на множині $E = (-1; 1)$. Справді, $\lim_{k \rightarrow \infty} (x^k + 2x) = 2x$, $x \in (-1; 1)$, бо $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0$, $|x| < 1$. Але ця послідовність не є рівномірно збіжною на $E = (-1; 1)$, бо $|x^k + 2x - 2x| = |x^k| = 1/2 > 1/3$, якщо $x = (\sqrt[k]{2})^{-1}$. Тому

$$(\exists \varepsilon = 1/3)(\forall k^*)(\exists k = k^*)(\exists x = 1/\sqrt[k]{2} \in (-1; 1)): |x^k + 2x - 2x| \geq \varepsilon.$$

Приклад 7. Функціональна послідовність $(x^k + 2x)$ є рівномірно збіжною на кожному проміжку $[-r; r]$, $0 < r < 1$. Справді, якщо $r^{-1} = 1 + \alpha$, то $r^{-k} = (1 + \alpha)^k \geq \alpha k$ і

$$|x^k + 2x - 2x| = |x^k| \leq r^k = \frac{1}{(1 + \alpha)^k} \leq \frac{1}{\alpha k} < \varepsilon, \quad k > 1/\alpha \varepsilon.$$

Отже,

$$(\forall r \in (0; 1))(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* = [1/\alpha \varepsilon] + 1)(\forall k \geq k^*)(\forall x \in [-r; r]):$$

$$|x^k + 2x - 2x| < \varepsilon. \quad (4)$$

Тому на проміжку $[-r; r]$ розглядувана послідовність є рівномірно збіжною. Зрозуміло, що в (4) k^* залежить від r , але не залежить від $x \in [-r; r]$.

Приклад 8. Оскільки

$$\sup_{x \in [0;1]} \left\{ \left| \frac{kx}{1+k+x} - x \right| \right\} \leq \frac{2}{k+1} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

то послідовність $f_k(x) = \frac{kx}{1+k+x} - x$ рівномірно збігається до 0 на $[0;1]$.

Приклад 9. Оскільки $((\forall x \in (0; +\infty)) : \lim_{k \rightarrow \infty} \arctg kx = \pi/2)$, то послідовність $f_k(x) = \arctg kx$ збігається на $(0; +\infty)$ поточково до $\pi/2$.

Але $\sup_{x \in (0; +\infty)} \{ |\arctg kx - \pi/2| \} = \pi/2$ і тому збіжність не є рівномірною.

Теорема 1 (критерій Коші рівномірної збіжності послідовності) [3, 5]. Для того щоб функціональна послідовність (f_k) рівномірно збігалась на множині E , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall p > 0)(\forall x \in E) : |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Приклад 10. Функціональна послідовність

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\cos jx^2}{j^2}$$

є рівномірно збіжною на \mathbb{R} , оскільки для всіх $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ та $p \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |f_{k+p}(x) - f_k(x)| &= \left| \sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{\cos jx^2}{j^2} \right| \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{1}{j(j-1)} = \\ &= \sum_{j=k+1}^{k+p} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+p} \leq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* = [1/\varepsilon] + 1)(\forall k \geq k^*)(\forall p > 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (критерій Коші рівномірної збіжності послідовності в термінах \sup -норми) [3, 5]. Для того щоб функціональна послідовність (f_k) рівномірно збігалась на множині E , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall n \geq k^*) : \|f_n - f_k\|_E < \varepsilon.$$

4.2.2. Функціональні ряди. Збіжність і рівномірна збіжність.

Нехай $(f_k(x))$ – функціональна послідовність. Ряд [3, 5]

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) + \dots \quad (1)$$

називається *функціональним рядом*. Для кожного конкретного x функціональний ряд (1) перетворюється в числовий ряд.

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ є функціональним рядом і $f_k(x) = x^k$.

Взявши $x = 1/2$, отримуємо числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k$, який є збіжним.

Функція [3, 5]

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

називається *n-ою частинною сумою* ряду (1). Ряд (1) називається *збіжним в точці x*, якщо збіжним в \mathbb{R} є відповідний числовий ряд. Ряд (1) називається *збіжним на множині E* або *поточково збіжним на множині E* до функції f , якщо до f на множині E збіжною є послідовність його частинних сум $(S_n(x))$, тобто якщо

$$(\forall x \in E) : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x).$$

При цьому $f(x)$ називається *сумою ряду* (1) і цей факт записується так:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Функція

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \quad (2)$$

називається *n-им залишком ряду*. Ряд (1) є збіжним на E тоді і тільки тоді, коли збіжним на E є кожний його залишок. При цьому

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x).$$

Множина E , на якій ряд (1) є збіжним (абсолютно збіжним), називається *множиною збіжності (абсолютної збіжності)* цього ряду.

Приклад 2. Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+1)^k}$. Нехай

$$f_k(x) = \frac{1}{k(x+1)^k}. \text{ Тоді}$$

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)(x+1)^{k+1}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f_{k+1}(x)|}{|f_k(x)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k|x+1|^k}{(k+1)|x+1|^{k+1}} = \frac{1}{|x+1|}.$$

Тому згідно з ознакою д'Аламбера для тих $x \in \mathbb{R}$, для яких $|x+1| > 1$, ряд є збіжним абсолютно, а для тих $x \in \mathbb{R}$, для яких $|x+1| < 1$, ряд є розбіжним. Якщо $|x+1| = 1$, то $x = 0$ або $x = -2$. В точці $x = 0$ наш ряд перетворюється в числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, який є розбіжним. В точці $x = -2$

наш ряд перетворюється в числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, який є збіжним умовно. Тому множина $(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$ є множиною збіжності ряду, а множина $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ є множиною абсолютної збіжності розгляданого ряду.

Означення збіжності ряду до функції f на множині E можна сформулювати так. Ряд (1) називається збіжним на множині E до функції f , якщо $(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*) : |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

Ряд (1) називається рівномірно збіжним на множині E до функції f , якщо на E до f рівномірно збігається послідовність його частинних сум, тобто якщо [3, 5]

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall x \in E) : |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Із (2) випливає, що ряд (1) рівномірно збігається на E тоді і тільки тоді коли на E його залишок рівномірно прямує до 0, тобто якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall x \in E) : |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду) [3, 5]. Для того щоб функціональний ряд (1) рівномірно збігався на множині E , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall p \geq 0)(\forall x \in E) : \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Наслідок 1. Якщо функціональний ряд (1) є рівномірно збіжним на множині E , то його загальний член рівномірно прямує до нуля, тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall x \in E) : |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (ознака Вейєрштрасса) [3, 5]. Якщо існує такий збіжний додатний числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$, що $(\forall x \in E)(\forall k) : |f_k(x)| \leq \alpha_k$, то функціональний ряд (1) є рівномірно і абсолютно збіжним на множині E .

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$, бо $\frac{1}{k^2 + x^2} \leq \frac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in (-\infty; +\infty)$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ є збіжним.

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kxe^{-k^5 x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $[0; +\infty)$, бо $\sup_{x \in [0; +\infty)} \left\{ kxe^{-k^5 x^2} \right\} = \frac{e^{-1/2}}{k\sqrt{2k}}$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ є збіжним.

Приклад 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k / k$ є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і $\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k / k| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ – розбіжний ряд. Тому умови теореми Вейєрштрасса не є необхідними.

Приклад 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k}$ є поточково збіжним на проміжку $(1; +\infty)$ і для інших $x \in \mathbb{R}$ він є розбіжним, бо $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$.

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k}$ є рівномірно збіжним на кожному проміжку $[\alpha; +\infty)$, $\alpha > 1$, бо цей ряд є додатним і $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k} \leq$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

Теорема 3 (Діріхле) [3, 5]. Нехай для кожного $x \in E$ послідовність $(b_k(x))$ є монотонною і рівномірно збіжною на множині E до нуля, а послідовність частинних сум ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ є рівномірно

обмеженою на E , тобто $(\exists c_1)(\forall x \in E) : \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq c_1$. Тоді ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ є рівномірно збіжним на E .

Теорема 4 (Абеля) [3, 5]. Нехай для кожного $x \in E$ послідовність $(b_k(x))$ є монотонною і рівномірно обмеженою на множині E . Тоді, якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ є рівномірно збіжним на E , то і

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)b_k(x)$ є рівномірно збіжним на E .

Приклад 8. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ є збіжним для всіх $x \in \mathbb{R}$. Справді, якщо $x = 2\pi t$, $t \in \mathbb{Z}$, то ряд є збіжним і його сума дорівнює нулеві. Якщо $x \in (0; 2\pi)$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin kx}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{\cos \left(k - \frac{1}{2} \right) x - \cos \left(k + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| = \\ &= \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| = \left| -\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1 - \cos \left(n + \frac{1}{2} \right) x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Звідси за теоремою Діріхле отримуємо, що цей ряд є збіжним на $(0; 2\pi)$ (а тому і на $(-\infty; +\infty)$) і є рівномірно збіжний на кожному замкненому проміжку $[a; b] \subset (0; 2\pi)$. Але

$$\begin{aligned} |S_{2n}(1/n) - S_n(1/n)| &= \left| \frac{\sin(n+1)\frac{1}{n}}{n+1} + \dots + \frac{\sin 2n\frac{1}{n}}{2n} \right| \geq \\ &\geq \frac{\sin(1+1/n) + \dots + \sin 2}{2n} \geq \frac{n \sin 1}{2n} = \frac{\sin 1}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Тому

$$\left(\exists \varepsilon = \frac{\sin 1}{2} \right) (\forall n') (\exists n = n') (\exists p = n') (\exists x = 1/n) : |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \geq \varepsilon.$$

Отже, згідно з критерієм Коші розглядуваний ряд не збігається рівномірно на $(0; 2\pi)$.

4.2.3. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.
Справедливими є наступні твердження [3, 5]:

1. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \overline{1; n}$, є диференційовними на $[a; b]$, то диференційовною на $[a; b]$ є їхня сума і

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^n f_k'(x).$$

2. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \overline{1; n}$, є інтегровними на $[a; b]$, то інтегровною на $[a; b]$ є їхня сума і

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx.$$

3. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \overline{1; n}$, є неперервними в точці x_0 , то неперервною в точці x_0 є також функція

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x).$$

Поняття суми ряду є узагальненням поняття суми скінченного числа доданків на випадок, коли множина доданків є нескінченною. Тому природним є питання про справедливість аналогів цих тверджень для рядів.

Теорема 1 (про неперервність суми функціонального ряду) [3, 5]. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними в точці $x_0 \in [a; b]$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \tag{1}$$

є рівномірно збіжним на проміжку $[a; b]$, то сума цього ряду функція

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \text{ є неперервною в точці } x_0.$$

Приклад 1. Функції $f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ є неперервними, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k} \text{ є збіжним на проміжку } (-\infty; +\infty), \text{ але його сума функція}$$

$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x=0, \\ 1, & \text{якщо } x \neq 0, \end{cases}$ не є неперервною. Отже, вимога рівномірної збіжності ряду в теоремі 1 є істотною.

Теорема 2 (Діні) [3, 5]. Нехай всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними і невід'ємними на проміжку $[a; b]$, ряд (1) є збіжним на проміжку $[a; b]$ і його сума f є функцією неперервною на $[a; b]$. Тоді ряд (1) збігається на $[a; b]$ рівномірно.

Теорема 3 (про граничний перехід під знаком ряду) [3, 5]. Якщо $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, – деякі функції, $x_0 \in [a; b]$, існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k$ і ряд (1) є рівномірно збіжним на проміжку $[a; b]$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$, і останній ряд є збіжним.

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$. Тому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Теорема 4 (про почленне інтегрування функціонального ряду) [3, 5]. Якщо всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a; b]$ і ряд (1) є рівномірно збіжним на $[a; b]$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Приклад 3. Ряд $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x \left(k^2 e^{-k^2 x^2} - (k-1)^2 e^{-(k-1)^2 x^2} \right)$ є збіжним на проміжку $[0; 1]$, $S_n(x) = x n^2 e^{-n^2 x^2}$, $f(x) = 0$ і $\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = 0$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x \left(k^2 e^{-k^2 x^2} - (k-1)^2 e^{-(k-1)^2 x^2} \right) dx = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(-e^{-k^2} + e^{-(k-1)^2} \right) = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx. \end{aligned}$$

Тому умова рівномірної збіжності ряду є істотною в теоремі 4.

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку

$(-\infty; +\infty)$. Тому

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{k^2 + x^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{k}.$$

Теорема 5 (про почленне диференціювання функціонального ряду) [3, 5]. Нехай функції f_k , $k \in \mathbb{N}$, є неперервно диференційовними на проміжку $[a; b]$, ряд (1) є збіжним на $[a; b]$ і на цьому ж проміжку рівномірно збіжним є також ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x). \quad (2)$$

Тоді для всіх $x \in [a; b]$ сума ряду (1) має похідну і

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x).$$

Приклад 5. Ряд $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (e^{-(k-1)^2 x^2} - e^{-k^2 x^2})$ є збіжним на

проміжку $[0; 1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ і

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) dx = 2 \sum_{k=1}^{\infty} x (k^2 e^{-k^2 x^2} - (k-1)^2 e^{-(k-1)^2 x^2}) = 0, \quad x \in [0; 1].$$

Тому умова рівномірної збіжності ряду (2) є істотною в теоремі 5.

Приклад 6. Ряд $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$, але ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kx}{k^2} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$$

є розбіжним в точках $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тому рівномірно збіжний ряд диференційовних функцій не можна, взагалі кажучи, почленно диференціювати.

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-kx}$ є збіжним на проміжку $(0; +\infty)$, а ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^4 e^{-kx}$ є рівномірно збіжним на кожному проміжку

$[a; b] \subset (0; +\infty)$. Тому $\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-kx} \right)' = -\sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-kx}$, $x \in (0; +\infty)$.

4.2.4. Степеневі ряди. Радіус і проміжок збіжності степеневого ряду. Властивості степеневих рядів. Степеневим рядом називається функціональний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_k(x-a)^k + \dots \quad (1)$$

Якщо $a=0$, то степеневий ряд має вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots \quad (2)$$

Останній ряд є завжди збіжним при $x=0$.

Теорема 1 (Абеля) [3, 5]. Якщо степеневий ряд (2) збігається в точці $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається в кожній точці x , для якої $|x| < |x_0|$.

Наслідок 1. Якщо ряд (2) є розбіжним в точці $x_0 \neq 0$, то він є розбіжним для всіх x , для яких $|x| > |x_0|$.

Число R таке, що ряд (2) є збіжним, якщо $|x| < R$, і є розбіжним, якщо $|x| > R$, називається *радіусом збіжності степеневого ряду* (2), а проміжок $(-R; R)$ – проміжком збіжності. Якщо $R=0$, то ряд (2) є збіжним тільки для $x=0$. Якщо $R=+\infty$, то ряд (2) є збіжним для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Якщо $0 < R < +\infty$, то ряд (2) є збіжним абсолютно для $x \in (-R; R)$ і є розбіжним для $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$. В точках $x=-R$ і $x=R$ ряд може бути збіжним, а може бути і розбіжним. Для з'ясування цього потрібно провести додаткові дослідження. Можна також сказати, що *радіус збіжності* степеневого ряду (2) – це точна верхня межа тих r , для яких ряд (2) є збіжним абсолютно, якщо $|x| \leq r$.

Теорема 2 (Коші-Адамара) [3, 5]. Радіус збіжності степеневого ряду знаходиться за формулою: $R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$.

Наслідок 2. Радіус збіжності степеневого ряду (2) можна знайти за формулою $R = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}$, якщо остання границя існує.

Наслідок 3. Радіус збіжності степеневого ряду (2) можна знайти за формулою $R = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1}/c_k|$, якщо остання границя існує.

Приклад 1. Для ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ маємо $c_k = \frac{1}{k!}$, $c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$ і

$$R = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1}/c_k| = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |k!/(k+1)!| = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |1/k+1| = +\infty.$$

Тому $R = +\infty$ і $(-\infty; +\infty)$ – проміжок збіжності.

Приклад 2. Для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{k} x^k$ маємо $c_k = \arcsin \frac{1}{k}$,

$$c_{k+1} = \arcsin \frac{1}{k+1} \text{ і}$$

$$R = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1}/c_k| = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \arcsin \frac{1}{k+1} / \arcsin \frac{1}{k} \right| = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |k/(k+1)| = 1.$$

Тому $R = 1$ і $(-1; 1)$ – проміжок збіжності.

Приклад 3. Для ряду $\sum_{k=0}^{\infty} (1-1/k)^{k^2} x^k$ маємо $c_k = (1-1/k)^{k^2}$ і

$$R = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} (1-1/k)^k = e.$$

Тому $R = e$ і $(-e; e)$ – проміжок збіжності.

Приклад 4. Для ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k$ маємо $c_k = \frac{1}{k+1}$, $c_{k+1} = \frac{1}{k+2}$,

$$R = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1}/c_k| = 1/\lim_{k \rightarrow \infty} |(k+1)/(k+2)| = 1. \text{ Тому } R = 1 \text{ і } (-1; 1) -$$

проміжок збіжності. Якщо $x = 1$, то ряд є розбіжним, бо розбіжним є

ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$. Якщо $x = -1$, то ряд є збіжним умовно, бо умовно збіжним

є ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$. Отже, $R = 1$ – радіус збіжності розглядуваного

ряду, $(-1; 1)$ – його проміжок збіжності, на проміжку $[-1; 1)$ ряд є збіжним, для $x \notin [-1; 1)$ він є розбіжним.

Приклад 5. Для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \arctg \frac{1}{k^2} x^k$ маємо $c_k = 2^k \arctg \frac{1}{k^2}$,

$$c_{k+1} = 2^{k+1} \arctg \frac{1}{(k+1)^2}, \quad R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \left| 2^{k+1} \arctg \frac{1}{(k+1)^2} / 2^k \arctg \frac{1}{k^2} \right| = 1/2.$$

Тому $R=1/2$ і $(-1/2; 1/2)$ – проміжок збіжності. Якщо $x=1/2$, то ряд є збіжним абсолютно, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{k^2}$. Якщо $x=-1/2$, то ряд є збіжним абсолютно, бо збіжним абсолютно є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \arctg \frac{1}{k^2}$. Отже, $R=1/2$ – радіус збіжності розглядуваного ряду, $(-1/2; 1/2)$ – його проміжок збіжності, на проміжку $[-1/2; 1/2]$ ряд є збіжним абсолютно, для $x \notin [-1/2; 1/2]$ ряд є розбіжним.

Теорема 3 (Абеля) [3, 5]. Якщо степеневий ряд (1) збігається в точні $x_0 \neq a$, то він абсолютно збігається для всіх таких x , для яких $|x-a| < |x_0-a|$.

Число R таке, що ряд (1) є збіжним, якщо $|x-a| < R$, і є розбіжним, якщо $|x-a| > R$, називається *радіусом збіжності* степеневого ряду (1), а проміжок $(a-R; a+R)$ – проміжком збіжності. Якщо $R=0$, то ряд (1) є збіжним тільки для $x=a$. Якщо $R=+\infty$, то ряд (1) є збіжним для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Якщо $0 < R < +\infty$, то ряд (1) є збіжним абсолютно для $x \in (a-R; a+R)$ і є розбіжним для $x \in (-\infty; a-R) \cup (a+R; +\infty)$. В точках $x=a-R$ і $x=a+R$ ряд (1) може бути збіжним, а може бути і розбіжним. Для з'ясування цього потрібно провести додаткові дослідження. Можна також сказати, що *радіус збіжності* степеневого ряду (1) – це точна верхня межа тих r , для яких ряд (1) є збіжним абсолютно, якщо $|x-a| \leq r$. Теорема 2 і наслідок 1 з неї (з тими ж формулюваннями) є справедливими і для ряду (1).

Приклад 6. Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x-1)^{2n}$ маємо

$$c_k = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{якщо } k = 2m, \\ 0, & \text{якщо } k = 2m+1. \end{cases}$$

Тому

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[2m]{|c_{2m}|}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[2m]{2^m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $R = 1/\sqrt{2}$ і $(1-1/\sqrt{2}; 1+1/\sqrt{2})$ – проміжок збіжності. Для $x \notin (1-1/\sqrt{2}; 1+1/\sqrt{2})$ розглядуваний ряд є розбіжним. Радіус збіжності можна знайти й так. Нехай $a_k = 2^k (x-1)^{2k}$. Тоді $a_{k+1} = 2^{k+1} (x-1)^{2(k+1)}$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1} |x-1|^{2(k+1)}}{2^k |x-1|^{2k}} = 2|x-1|^2.$$

Бачимо, що ряд є збіжним абсолютно, якщо $|x-1| < 1/\sqrt{2}$, і є розбіжним, якщо $|x-1| > 1/\sqrt{2}$. Отже, радіус збіжності ряду дорівнює $1/\sqrt{2}$. Якщо $x = 1+1/\sqrt{2}$, то ряд є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1^{2n}$. Якщо $x = 1-1/\sqrt{2}$, то ряд є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1$.

Отже, $R = 1/\sqrt{2}$ – радіус збіжності розглядуваного ряду, $(1-1/\sqrt{2}; 1+1/\sqrt{2})$ – його проміжок збіжності, для $x \notin (1-1/\sqrt{2}; 1+1/\sqrt{2})$ ряд є розбіжним.

Теорема 4 [3, 5]. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то він є рівномірно збіжним на кожному замкненому проміжку $[\alpha; \beta]$, який належить проміжку $(a-R; a+R)$ збіжності степеневого ряду.

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ має радіус збіжності $R = 1$, $(-1; 1)$ –

його проміжок збіжності і функція $f(x) = \frac{1}{1-x}$ є його сумою. При цьому,

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

і

$$\sup_{x \in (-1;1)} \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| = \sup_{x \in (-1;1)} \frac{x^n}{1-x} \geq \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{2e}, \quad n \geq n^*.$$

Тому заданий ряд на $(-1;1)$ не збігається рівномірно. Таким чином, степеневий ряд на проміжку збіжності не обов'язково збігається рівномірно.

Наслідок 4. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то його сума є функцією неперервною на проміжку збіжності.

Наслідок 5 [3, 5]. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то його можна почленно інтегрувати по будь-якому проміжку $[\alpha; \beta]$, який належить проміжку збіжності:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^k dx, \quad [\alpha; \beta] \subset (a-R; a+R).$$

Наслідок 6 [3, 5]. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то його сума функція f має похідну в кожній точці проміжку збіжності, ряд (1) можна почленно диференціювати на проміжку збіжності, тобто

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x-a)^{k-1},$$

і продиференційований степеневий ряд має такий же радіус збіжності, що і ряд (1).

Приклад 8. Оскільки $(-1;1)$ є проміжком збіжності ряду

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{і} \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \quad \text{якщо } x \in (-1;1), \text{ то}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}, \quad x \in (-1;1).$$

Наслідок 7 [3, 5]. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то його сума має на проміжку збіжності похідні всіх порядків і ці похідні можна знайти почленным диференціюванням ряду і продиференційовані ряди мають радіус збіжності R .

Приклад 9. Оскільки проміжок $(-1;1)$ є проміжком збіжності

$$\text{ряду } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{і} \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}, \quad \text{якщо } x \in (-1;1), \text{ то}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3}, \quad x \in (-1;1).$$

Приклад 10. Оскільки проміжок $(-1;1)$ є проміжком збіжності

$$\text{ряду } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{і} \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2},$$

якщо $x \in (-1;1)$, то $\int_0^x f'(x) dx = \arctg x$ і $f(x) - f(0) = \arctg x$, якщо

$x \in (-1;1)$. Проте $f(0) = 0$. Тому $f(x) = \arctg x$ і

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \arctg x, \quad x \in (-1;1).$$

Приклад 11. Оскільки проміжок $(-1;1)$ є проміжком збіжності

$$\text{ряду } \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ то}$$

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1;1).$$

Теорема 5 [3, 5]. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ і $f(x)$ – його сума, то для кожного $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + O(x-a)^{n+1}, \quad x \rightarrow a.$$

Наслідок 8 [3, 5]. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ і $f(x)$ – його сума, то для кожного $n \in \mathbb{N}_0$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + o(x-a)^n, \quad x \rightarrow a.$$

Приклад 12. Оскільки ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{(k+1)^k}$ має радіус

збіжності $R = +\infty$, то

$$f(x) = 1 + O(x+1), \quad x \rightarrow -1,$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + O(x+1)^2, \quad x \rightarrow -1,$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{9}(x+1)^2 + O(x+1)^3, \quad x \rightarrow -1,$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{9}(x+1)^2 + o(x+1)^2, \quad x \rightarrow -1.$$

4.2.5. Ряд Тейлора. Розвинення елементарних функцій у ряд Тейлора. Рядом Тейлора функції f в околі точки a називається степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots$$

Теорема 1 [3, 5]. Кожний степеневий ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$, який має радіус збіжності $R > 0$ є рядом Тейлора своєї суми, тобто його коефіцієнти c_k знаходяться за формулами

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}.$$

Якщо $a = 0$, то ряд Тейлора має вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \dots$$

Останній ряд часто називають рядом Маклорена.

Теорема 2 [3, 5]. Функція $f(x) = e^x$ розвивається в ряд Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Теорема 3 [3, 5]. Функція $f(x) = \sin x$ розвивається в ряд Тейлора

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Теорема 4 [3, 5]. Функція $f(x) = \cos x$ розвивається в ряд Тейлора

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Теорема 5 [3, 5]. Функція $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, розвивається в ряд Тейлора

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha-j+1)}{k!} x^k$$

на проміжку $(-1;1)$. Тут $\prod_{j=1}^0 (\alpha-j+1) := 1$. ►

Наслідок 1. Функція $f(x) = \frac{1}{1-x}$ розвивається в ряд Тейлора

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

на проміжку $(-1;1)$.

Наслідок 2. Якщо $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Наслідок 3.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Теорема 6 [3, 5]. Функція $f(x) = \ln(1+x)$ розвивається в ряд Тейлора

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

на проміжку $(-1;1]$.

Приклад 1. $\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-x)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x \in [-1;1).$

Приклад 2. $\ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in [-1;1).$

Приклад 3. Розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функцію

$$f(x) = \frac{1}{1+2x^2}. \text{ Маємо}$$

$$\frac{1}{1+2x^2} = \frac{1}{1 - (-\sqrt{2}x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-(\sqrt{2}x)^2 \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^{2k}, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Приклад 4. Розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $a=1$ функцію

$$f(x) = \frac{1}{3+x}. \text{ Маємо}$$

$$f(x) = \frac{1}{4 - (-(x-1))} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{4}\right)^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4^{k+1}} (x-1)^k, \quad |x-1| < 4.$$

Приклад 5. Розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функцію

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+1)}. \text{ Маємо}$$

$$\frac{1}{(x+2)(x+1)} = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) x^k, \quad |x| < 1.$$

Приклад 6. Розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функцію

$f(x) = \arcsin x$. Маємо

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\prod_{j=1}^k (-j+1/2)}{k!} x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! x^{2k}}{k! 2^k}.$$

Тому

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(2k-1)!! t^{2k}}{k! 2^k} dt = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! x^{2k+1}}{(2k+1)k! 2^k} =$$

$$= x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! x^{2k+1}}{(2k+1)(2k)!!}, \quad x \in (-1; 1).$$

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1/2}}{k!}$ є рівномірно збіжним на проміжку

$[0; 1]$. Тому

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}}{\sqrt{t}} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^{k-1/2}}{k!} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!(2k+1)}.$$

Приклад 8. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1/2}}{k!}$ є рівномірно збіжним на кожному проміжку $[a; b] \subset (-\infty; +\infty)$ і

$$\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)! \sqrt{t}} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{t^{2k+1/2}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+3/2}}{(2k+1)!(4k+3)}.$$

Тому функція

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+3/2}}{(2k+1)!(4k+3)}$$

є первісною функції $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Приклад 9. $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$, $x \in (0; +\infty)$.

Приклад 10. $x < \sin x < x - \frac{x^3}{3!}$, $x \in (-\infty; 0)$.

Приклад 11. $\left| \sin x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 12. $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 13. $\left| \cos x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 14. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $x \in (0; 1)$.

Приклад 15. $\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$, $x \in (-1; 1)$.

Приклад 16. Абсолютна похибка наближеної формули

$$\sin \frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^3$$

не перевищує 10^{-3} . Справді,

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^{2k+1}.$$

Останній ряд є знакопочередним. Тому розглядувана похибка Δ не перевищує

$$\frac{1}{5!} \cdot \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{32} \leq \frac{1}{3840} \leq \frac{1}{10^3}.$$

4.2.6. Границя послідовності і ряди з комплексними членами.

Послідовністю в \mathbb{C} називається така функція, область визначення якої є множина натуральних чисел, а множина значень належить \mathbb{C} . Загальний член послідовності (z_n) можна подати у вигляді $z_n = x_n + iy_n$, де $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Число $c = a + ib$ називається *границею послідовності* (z_n) , якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*): |z_n - c| < \varepsilon$.

Теорема 1 [3, 5, 6]. Для того щоб число $c = a + ib$ було границею в \mathbb{C} послідовності (z_n) , $z_n = x_n + iy_n$, необхідно і достатньо, щоб число a було границею в \mathbb{R} послідовності (x_n) , а число b було границею в \mathbb{R} послідовності (y_n) , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, якщо існує границя в лівій частині, або існують обидві граничі в правій частині цієї рівності.

Приклад 1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(k \sin \frac{2}{k} + i \sqrt[k]{2} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \sin \frac{2}{k} + i \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2} = 2 + i.$

Приклад 2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^2 + 3ik}{k^2 + i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + 3i/k}{1 + i/k^2} = 2.$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k, \quad w_k = u_k + iv_k, \quad (1)$$

називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності (S_n)

його частинних сум: $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A \neq \infty$, де $S_n := \sum_{k=1}^n w_k$. При цьому, число A

називається *сумою* ряду (2) і цей факт записують так: $A = \sum_{k=1}^{\infty} w_k$.

Теорема 2 [3, 5, 6]. Для того щоб ряд (1) був збіжним і мав суму $A = A_1 + iA_2$, необхідно й достатньо, щоб були збіжними ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{та} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k \quad \text{і мали суми} \quad A_1 \quad \text{та} \quad A_2 \quad \text{відповідно.}$$

Ряд (1) називається *абсолютно збіжним*, якщо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|.$$

Теорема 3 [3, 5, 6]. Якщо ряд (1) є абсолютно збіжним, то він є збіжним.

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_k(z-a)^k + \dots \quad (2)$$

називається *степеневим рядом*.

Теорема 4 (Абеля) [3, 5, 6]. Якщо степеневий ряд є збіжним у точці $z_0 \neq a$, то він є абсолютно збіжним для всіх z , для яких $|z-a| < |z_0-a|$.

Число R таке, що при $|z-a| < R$ ряд (2) є збіжним, а при $|z-a| > R$ є розбіжним, називається *радіусом збіжності* степеневого ряду, а круг $\{z: |z-a| < R\}$ – *кругом збіжності*.

Теорема 5 [3, 5, 6]. Радіус збіжності степеневого ряду (2) знаходиться за формулою: $R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}}$.

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2} + i \frac{1}{k} \right)$ є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{\sqrt{k^5+1}} + i \frac{1}{k^2} \right)$ є збіжним, бо збіжними є ряди $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^5+1}}$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Приклад 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^4+1}+i}{ik^2+1}$ є розбіжним, бо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k^4+1}+i}{ik^2+1} = -i \neq 0$.

Приклад 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+i}{ik^3+1}$ є збіжним абсолютно, бо $\left| \frac{k+i}{ik^3+1} \right| = \frac{|k+i|}{|ik^3+1|} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^6+1}}$ і є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^6+1}}$ є збіжним.

Приклад 7. Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{4^n}$ маємо

$$c_k = \begin{cases} 1/4^{k/3}, & \text{якщо } k = 3m, \\ 0, & \text{якщо } k \neq 3m. \end{cases}$$

Тому

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[3m]{|c_{3m}|}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[3m]{1/4^m}} = \sqrt[3]{4}.$$

Отже, $R = \sqrt[3]{4}$ – радіус збіжності і $\{z : |z| < \sqrt[3]{4}\}$ – круг збіжності розглядуваного степеневого ряду. Радіус збіжності можна знайти і так.

Нехай $w_n = \frac{|z|^{3n}}{4^n}$. Тоді $w_{n+1} = \frac{|z|^{3n+3}}{4^{n+1}}$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n |z|^{3n+3}}{4^{n+1} |z|^{3n}} = \frac{|z|^3}{4}.$$

Бачимо, що ряд є збіжним абсолютно, якщо $|z| < \sqrt[3]{4}$, і є розбіжним, якщо $|z| > \sqrt[3]{4}$. Отже, радіус збіжності ряду дорівнює $\sqrt[3]{4}$ і $\{z : |z| < \sqrt[3]{4}\}$ – круг збіжності.

4.2.7. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення функціональної послідовності.
2. Сформулюйте означення функціональної послідовності, збіжної в точці x .
3. Сформулюйте означення функціональної послідовності, збіжної на множині E до функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
4. Сформулюйте означення функціональної послідовності, рівномірно збіжної на множині E до функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
5. Сформулюйте означення \sup -норми.
6. Сформулюйте означення функціональної послідовності, збіжної за \sup -нормою на множині E до функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
7. Сформулюйте критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності.
8. Чи існує функціональна послідовність, яка на деякій множині E є збіжною рівномірно, але не є збіжною поточково?
9. Наведіть приклад послідовності, яка є поточково збіжною, але не є збіжною за \sup -нормою.

10. Який функціональний ряд називається поточково збіжним на множині E ?
11. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним на множині E ?
12. Сформулюйте критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.
13. Сформулюйте ознаку Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.
14. Сформулюйте ознаку Діріхле рівномірної збіжності функціонального ряду.
15. Сформулюйте ознаку Абеля рівномірної збіжності функціонального ряду.
16. Сформулюйте теорему про неперервність суми функціонального ряду.
17. Сформулюйте теорему про граничний перехід під знаком функціонального ряду.
18. Сформулюйте теорему про почленне інтегрування функціонального ряду.
19. Сформулюйте теорему про диференціювання функціонального ряду.
20. Сформулюйте означення степеневого ряду.
21. Сформулюйте означення проміжку і радіуса збіжності функціонального ряду.
22. Сформулюйте теорему про знаходження радіуса збіжності степеневого ряду.
23. Сформулюйте теорему про рівномірну збіжність степеневого ряду.
24. Чи існує степеневий ряд, для якого $R=1$ – радіус збіжності, $(-1;1)$ – проміжок збіжності і на проміжку $[-1;1]$ він збігається рівномірно?
25. Чи існує степеневий ряд, для якого $R=1$ – радіус збіжності, $(-1;1)$ – проміжок збіжності і в точці $x=-1$ він є розбіжним, а в точці $x=1$ є збіжним.
26. Чи існує степеневий ряд, для якого $R=1$ – радіус збіжності, $(-1;1)$ – проміжок збіжності і на проміжку $(-1;1)$ він не збігається рівномірно?
27. Чи існує степеневий ряд, для якого $R=1$ – радіус збіжності, $(-1;1)$ – проміжок збіжності і на деякому проміжку $[a;b] \subset (-1;1)$ він не збігається рівномірно?
28. Сформулюйте означення ряду Тейлора.
29. Сформулюйте теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = e^x$.

30. Сформулюйте теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = \sin x$.
31. Сформулюйте теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = \cos x$.
32. Сформулюйте теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = (1+x)^\alpha$.
33. Сформулюйте теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = \ln(1+x)$.

4.2.8. Вправи і задачі.

1. Знайдіть множину E , на якій поточково збіжною є функціональна послідовність (f_k) і функцію $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, яка є її границею:

- | | |
|-------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 1. $f_k(x) = \frac{x^k}{1+x^{2k}}$. | 2. $f_k(x) = \frac{(1+x)^k}{1+x^k}$. |
| 3. $f_k(x) = \frac{kx^k}{(k+1)(1+2x)^k}$. | 4. $f_k(x) = \frac{\ln(1+x^k)}{k^x}$. |
| 5. $f_k(x) = \frac{ x ^k}{1+x^{2k}}$. | 6. $f_k(x) = \frac{(1+ x)^k}{1+x^k}$. |
| 7. $f_k(x) = \frac{kx^k}{k^{2k}}$. | 8. $f_k(x) = \frac{k!(1+x)^k}{k^k}$. |
| 9. $f_k(x) = \frac{x^k}{(1+1/k)^{2k}}$. | 10. $f_k(x) = \frac{k!(1+x)^k}{2^{k^2}}$. |
| 11. $f_k(x) = \sqrt{x^2 + 1/k}$. | 12. $f_k(x) = k\left((1+1/k)^x - 1\right)$. |
| 13. $f_k(x) = \frac{\log_x(1+2^k)}{k}$. | 14. $f_k(x) = \frac{\ln(1+x/k)}{\sin x/k}$. |
| 15. $f_k(x) = \frac{k^2}{\sqrt{k^4 + 1}(1+x^{2k})}$. | 16. $f_k(x) = k \arcsin(1+x)^k$. |
| 17. $f_k(x) = \frac{2^k}{1+x^k}$. | 18. $f_k(x) = \frac{(1+x)^k}{2^k}$. |
| 19. $f_k(x) = \sin(\pi + x^k)$. | 20. $f_k(x) = x + \ln(2+x^k)$. |
| 21. $f_k(x) = e^{x^k}$. | 22. $f_k(x) = \operatorname{tg}\left(x + (1+x)^k\right)$. |
| 23. $f_k(x) = x^2 + k^{\sqrt{k}} x^k$. | 24. $f_k(x) = x + k^{-\sqrt{k}} x^k$. |

$$25. f_k(x) = \frac{\lg(1+x2^k)}{k}.$$

$$26. f_k(x) = \frac{\ln(k+x)}{\ln k}.$$

$$27. f_k(x) = \frac{x}{k} \ln \frac{x}{k}.$$

$$28. f_k(x) = \frac{\ln(1+x)^k}{1+x^k}.$$

$$29. f_k(x) = xk^3 e^{x-k}.$$

$$30. f_k(x) = x^k + (1-1/kx)^k.$$

2. Знайдіть множину точок збіжності і множину точок абсолютної збіжності ряду:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2}{k^2 x^{2k+1}}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(x+k)^k}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(x-k)^{k/2}}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(x-1)^k}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2-4)^k}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(x-k)(x+2k)}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k^2)(k+e^x)}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{|x|}}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} k^{|x-1|}}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2-1|^k}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2+1|^k}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{|x|}}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} k^{|x-1|}}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}(1+x^k)}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+|x|^k}.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\prod_{j=1}^k (1+x^j)}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^k)}{k^x}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} k(x^k + x^{-k} / k^3).$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}(x^k + x^{-k}k).$$

3. Дослідіть ряд на рівномірну збіжність на множині E :

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{x^k}{4^{2k}}, \quad E = [0; 3].$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{x^2 + k^2}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+x^{2k}}, E=(1;+\infty).$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+k)^2}{k^4}, E=[-4;4].$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{1+x+k^2}, E=[-1;3].$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+k)\cos kx}{1+k^3}, E=[1;3].$
7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+3^k}, E=(-3;+\infty).$
8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x+k^k}, E=(-1;+\infty).$
9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k^2+x^2)}, E=(-\infty;+\infty).$
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2xk}{1+k^2x^2}, E=(-\infty;+\infty).$
11. $\sum_{k=1}^{\infty} xe^{-kx}, E=[0;+\infty).$
12. $\sum_{k=1}^{\infty} x^2k^2e^{-kx^2}, E=[0;+\infty).$
13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+1+k)}, E=(0;+\infty).$
14. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right), E=(-1;1).$
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+\sqrt{k}}, E=(-\infty;+\infty).$
16. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}, E=(-\infty;+\infty).$
17. $\sum_{k=1}^{\infty} e^k \sin \frac{1}{x3^k}, E=(0;+\infty).$
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}, E=(-\infty;+\infty).$
19. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, E=(0;+\infty).$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{k} \rfloor}}{\sqrt{k(k+x)}}, E=[0;+\infty).$
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sin x+k}, E=[0;2\pi].$
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi k}{3}}{\sqrt{k^2+x^2}}, E=(-\infty;+\infty).$
23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin kx}{\sqrt{x+k}}, E=[0;+\infty).$
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}, E=(-\infty;+\infty).$
25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2+k}, E=(-\infty;+\infty).$
26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\cos x+\sqrt{k}}, E=[0;+\infty).$
27. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x} \sin(x^2\sqrt{k}), E=[0;+\infty).$
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-kx}}{\sqrt{k+x^2}}, E=[0;+\infty).$
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-x/k}^{x/k} \arctg t^2 dt, E=[0;3].$
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \int_{-x/k}^{x/k} \sin t^2 dt, E=[-2;2].$

4. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневого ряду:

1. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{2}x^k}{(k+1)(k-1)k}$.
2. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{12\sqrt{k}x^k}{9k^2-12k-5}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{6+\ln k}{(k+1)k} x^k$.
4. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k \ln^2 k}{9k^2+21k-8} x^{2k}$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+2)k} x^k$.
6. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{k}}}{49k^2-14k-48} x^k$.
7. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k+2)}{2^k k \sqrt{\ln k}} x^k$.
8. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{36k^2-24k-5}{k\sqrt[3]{3^{k+1}}}$.
9. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{5k-2}{\sqrt[3]{2^{k^2+k}}} x^{2k}$.
10. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2 \sqrt{2^{k^2+k}}}{k} x^{2k}$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k2^{3k+1}}{(2k+1)!} x^k$.
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(3k)!}}{5^k} x^k$.
13. $\sum_{k=1}^{\infty} (1-2/k)^{(k+1)^2} x^{2k}$.
14. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^{k+1} x^{2k}}{(1+1/\sqrt{k})^{\sqrt{k}}}$.
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! x^{2k+1}}{\sqrt{2^{k^2}}}$.
16. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^4 x^{2k+1}}{3^{k^2} \ln k}$.
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2)! x^k}{(4k)!}$.
18. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 (2k)!! x^k}{((2k+1)!!)^2}$.
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k+2^k}{6^k} x^{2k}$.
20. $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k} (1+4^k) x^k$.
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{\sqrt{k+1}}$.
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{3^k}$.
23. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{kx^{2k+1}}{3^k}$.
24. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1} x^{3k+1}}{k^2}$.
25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{k}}}{k} x^k$.
26. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\ln k}}{k+1} x^{2k}$.
27. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln^2 k}{\sqrt{k+1}} x^{2k}$.
28. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt{k+1} e^{\ln^3 k} x^k$.

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k^k}}{k!} x^k$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k}!} x^k.$$

5. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневому ряду та дослідіть степеневий ряд на збіжність на кінцях проміжку збіжності:

$$1. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{9 \ln^2 k + 5} (x-2)^k.$$

$$2. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k-1)} (x+2)^k.$$

$$3. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{9k^2 + 21k - 8} (x+2)^k.$$

$$4. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{9 \ln^2 \ln k + 5} (x-2)^k.$$

$$5. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2 + k + 1} (x-1)^k.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4+3k}{(k+1)k} (x-1)^k.$$

$$7. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{36k^2 - 24k - 5} (x+1)^k.$$

$$8. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{9 \ln \ln^2 k + 5} (x+1)^k.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{ke^k}{-k^2 e^k + 1} (x-2)^{2k}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^k}{ke^k + 1} (x+2)^{2k}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-5k^3 + 3}{6 - k^5 - 4k^4} (x+2)^{2k}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{-5k^2 + k - 1} (x-2)^{2k}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^2 + k + 1} (x-3)^{2k+1}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 + 4k + 3} (x-3)^{2k+1}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + \sin k} (x+3)^k.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-\sqrt{k^4 + 1} + \cos k} (x+3)^k.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2\sqrt[4]{k^8 + 1}} (x-3)^k.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}} (x-3)^k.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 + 2k}{\sqrt[3]{9k^6 + 1}} (x-4)^k.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{1+k} (x-4)^k.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6 - \ln \ln k + k} (x+4)^k.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{6 - \ln k + k} (x+4)^k.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{-5k^3 + 3}{6 - k^5 + 4k^4} (x-5)^{2k}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} (x-5)^k.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{k} (x+5)^k.$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+2)(k+3)} (x+5)^k.$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2 + (-1)^k k}{4^k} (x-6)^k .$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-2)^k}{3^k} (x-2)^k .$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{\sqrt[3]{k^2 + 1}} (x-7)^{2k} .$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt[3]{k^2 + 1}} (x-7)^{2k+1} .$$

6. Розв'яжіть функцію f в ряд Тейлора в околі точки a :

$$1. f(x) = \frac{1}{1-2x}, a=0.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{1+3x}, a=0.$$

$$3. f(x) = \ln \frac{1}{1+3x}, a=0.$$

$$4. f(x) = \ln(1-3x), a=0.$$

$$5. f(x) = \sin 2x, a=0.$$

$$6. f(x) = \cos 3x, a=0.$$

$$7. f(x) = e^{-x/2}, a=0.$$

$$8. f(x) = e^{-2x}, a=0.$$

$$9. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, a=0.$$

$$10. f(x) = \sqrt{1-x^2}, a=0.$$

$$11. f(x) = \frac{1}{1-x^2}, a=0.$$

$$12. f(x) = \frac{1}{1+x^2}, a=0.$$

$$13. f(x) = \frac{1}{2+x}, a=0.$$

$$14. f(x) = \frac{1}{-2+x}, a=0.$$

$$15. f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}, a=0.$$

$$16. f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+1)}, a=0.$$

$$17. f(x) = \sin^2 x, a=0.$$

$$18. f(x) = \cos^2 x, a=0.$$

$$19. f(x) = \frac{1}{2+x}, a=1.$$

$$20. f(x) = \frac{1}{-2+x}, a=-1.$$

$$21. f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}, a=1.$$

$$22. f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+1)}, a=2.$$

$$23. f(x) = \sin x, a=\pi/4.$$

$$24. f(x) = \cos x, a=-\pi/4.$$

$$25. f(x) = e^x, a=2.$$

$$26. f(x) = e^x, a=-2.$$

$$27. f(x) = e^x \sin x, a=0.$$

$$28. f(x) = e^x \cos x, a=0.$$

$$29. f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}, a=0.$$

$$30. f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}, a=0.$$

7. Написати перші три ненульові члени розвинення функції f в ряд Тейлора в околі точки a :

$$1. f(x) = \operatorname{tg} x, a = 0.$$

$$2. f(x) = \frac{1}{\cos x}, a = 0.$$

$$3. f(x) = e^{\sin x}, a = 0.$$

$$4. f(x) = e^{\cos x}, a = 1.$$

$$5. f(x) = \frac{1}{\sin x}, a = \pi/2.$$

$$6. f(x) = x^x, a = 1.$$

8. Знайдіть суми степеневих рядів:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^k.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k 2^k}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k (x-1)^k}{k}.$$

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{3^k}.$$

$$5. \sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} x^{2k}.$$

$$6. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^{-k} x^{2k}.$$

$$7. \sum_{k=0}^{\infty} k x^{k-1}.$$

$$8. \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) x^{k-2}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} k x^k.$$

$$10. \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) x^k.$$

$$11. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

$$12. \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^{2k-2}}{(2k)!} x^{2k}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}.$$

$$14. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

9. Знайдіть границю:

$$1. \lim_{k \rightarrow \infty} (k \ln(1 + 2/k) + i^k \sqrt{k}).$$

$$2. \lim_{k \rightarrow \infty} (k \operatorname{arctg}(2/k) + i^k \sqrt{\ln k}).$$

$$3. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k^2 + 2} + 3i\sqrt{k}}{\sqrt{4k^2 + 1} + ik}.$$

$$4. \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{k^6 + 2} + 3ik^2}{\sqrt[5]{k^{10} + 2} + ik}.$$

10. Дослідіть на збіжність ряд з комплексними членами:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + i}{k^2 - i}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + 1} + i}{\sqrt[4]{k^4 + 1} - i}$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + i}{k^4 - 4i}$$

$$4. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{i + n^2}$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k + i3^k}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{ki + 3^{k-4}}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 + i}{2^k k^{3k}}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 + (i)^k}{2^k (2k)!}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k + i}{k^2 + 1}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - i}{k + i}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{3\sqrt{k} + i}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt[3]{k} + i}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln k} - i}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln k} + i}.$$

11. Знайдіть радіус і круг збіжності степеневого ряду:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} (i)^k \frac{\ln k}{k + i} z^{2k}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} (i)^k \frac{k + i}{2^k + i} z^k.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k \frac{k^k + i}{\sqrt{k!}} z^k.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sqrt{k} - i}{k! + i} z^k.$$

$$5. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k + i} (z + i)^k.$$

$$6. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - i)^k}{2^k + i}.$$

$$7. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - 2i)^{2k}}{i + (2k)!}.$$

$$8. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i + k!}{2^k - i} (z - 3i)^k.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} (-2i)^k (1 + 1/k)^k (z + 1 + 2i)^k$$

$$10. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - 1 - 2i)^k}{2k + i2^k}.$$

4.2.9. Індивідуальні завдання.

1. З'ясуйте, чи послідовність (f_k) є рівномірно збіжною на множині E :

$$1. f_k(x) = x^k - x^{2k} + 2x, \quad E = [0; 1].$$

$$2. f_k(x) = \sqrt{x^2 + 1/k}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$3. f_k(x) = \sqrt{x^2 + k + 1} - \sqrt{x^2 + k}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$4. f_k(x) = \sqrt{x + 1/k^2}, \quad E = [0; 1].$$

$$5. f_k(x) = \frac{2xk}{1 + k^2 x^2}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$6. f_k(x) = \frac{1}{1 + xk}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$7. f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

8. $f_k(x) = 2x^k + x^2, \quad E = (-1; 1).$
9. $f_k(x) = \frac{kx + x^2 + k^2}{x^2 + k^2}, \quad E = [0; 1].$
10. $f_k(x) = (1-x)x^k, \quad E = [0; 1].$
11. $f_k(x) = \frac{x^k}{k^k}, \quad E = [0; +\infty).$
12. $f_k(x) = x^k - x^{k+2} + 2x, \quad E = [0; 1].$
13. $f_k(x) = \frac{x^{2k}}{k^{\sqrt{k}}}, \quad E = [0; 2).$
14. $f_k(x) = \frac{1}{x^2 + k}, \quad E = (-\infty; +\infty).$
15. $f_k(x) = \frac{kx}{x + k^2}, \quad E = [0; 1].$
16. $f_k(x) = \frac{x + k}{xk + k^2}, \quad E = [0; 1].$
17. $f_k(x) = \sqrt[k]{2^k + |x|^k}, \quad E = (-\infty; +\infty).$
18. $f_k(x) = \sqrt[k]{3^k + |x|^k}, \quad E = (-1; 1).$
19. $f_k(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{k^2 + x^2}, \quad E = (-\infty; +\infty).$
20. $f_k(x) = \arcsin \frac{x}{k^2 + x^2}, \quad E = (-\infty; +\infty).$
21. $f_k(x) = k \ln(1 + x^2/k), \quad E = (-\infty; +\infty).$
22. $f_k(x) = k^2(\sin(x + 1/k^2) - \sin x), \quad E = (-\infty; +\infty).$
23. $f_k(x) = k((1 + x^2/k)^{\sqrt{2}} - 1), \quad E = [0; 1].$
24. $f_k(x) = \frac{2x}{k^2 + x^2}, \quad E = [0; +\infty).$
25. $f_k(x) = \frac{2k}{k^2 + x^2}, \quad E = [0; +\infty).$
26. $f_k(x) = x^2 + \sin x^k, \quad E = (-1; 1).$
27. $f_k(x) = k \ln(1 + x^2/k), \quad E = (-1; 1).$
28. $f_k(x) = kxe^{-kx}, \quad E = [0; +\infty).$

$$29. f_k(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{1+xk}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$30. f_k(x) = \frac{kx + x^2}{x^2 + k^2}, \quad E = (-1; 1).$$

2. Дослідіть ряд на рівномірну збіжність на множині E :

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^k}, \quad E = [4; 5].$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 3)^k}, \quad E = (-\infty; -4).$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 + 2x|^k}, \quad E = (-\infty; -4).$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 - x|^k}, \quad E = [4; +\infty).$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k+1}}{k \ln^2(1+k)}, \quad E = [0; 2].$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2}{k^2 x^{2k+1}}, \quad E = [1; +\infty).$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(x+1)^{\sqrt{2k+1}}}, \quad E = [1; +\infty).$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(x-k)^{k/2}}, \quad E = (-\infty; 0).$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} kxe^{-kx}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \sin^2 kx}{k(2k-1)2^k}, \quad E = [-2; 2].$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{k^2}}{k^k}, \quad E = [-3; -1].$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{|x-1|}}{k^4}, \quad E = [0; 2].$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(k+e^x)}, \quad E = (-1; +\infty).$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+xk^2}, \quad E = [0; 1].$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 - 1|^k}, \quad E = [-1; -1/2].$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} k^{|x-1|}}, \quad E = [2; +\infty).$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2k-1} \cos^2 kx}{k^2 4^k}, \quad E = [-7; 3].$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{|x+1|}}, \quad E = (-\infty; -3).$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x\sqrt{k})}, \quad E = (2; +\infty).$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2 + |x|^k}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3k+1}}{k2^{k+1}}, \quad E = [1; 3/2].$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^k)}{k^2}, \quad E = [-1; 1].$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \left(\frac{x^k}{3^k} + x^{-k} \right), \quad E = (-2; -1).$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^k + \frac{1}{x^k 3^k} \right), \quad E = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right).$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k-1}}{2^k k}, E = (0; 1/2).$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}, E = (2; +\infty).$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2k}}}{2^k}, E = [-1; 1].$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}, E = [0; +\infty).$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(x-3)^k}, E = (-\infty; -1).$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^4 x^2}, E = (0; +\infty).$$

3. Знайдіть множину точок збіжності і множину точок абсолютної збіжності ряду:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^k.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k x^{2k-1}}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{x}{4^{2k}}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2k}}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{1+x^{2k}}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+x)^k}{1+x^k}.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{(k+1)(1+2x)^k}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(x+1) \cdot \dots \cdot (x+k)}.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^k x}{k^2}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} x^k \operatorname{tg} \frac{x}{2^k}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(x-3)^{3k+1}}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{e^{kx}}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{1+x^k}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x(k+x)}{k} \right)^k.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+x^{2k}}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+x^k}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^k}{k}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (2k-1)!! x^k}{(2k)!! (1+x^2)^k}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin^k x}{k^3}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arcsin^k x}{k}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arccos^k x}{k}.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k} \sin(x - \pi k)}{k}.$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^k}.$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 + 2x|^k}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg}^k x}{k}.$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k x^{4k} \sin(2x + \pi k)}{k}.$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 3)^k}.$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 - x|^k}.$$

4. Розв'яжіть функцію f в ряд Тейлора в околі точки a :

$$1. f(x) = \sin^3 x, a = 0.$$

$$2. f(x) = \cos^3 x, a = 0.$$

$$3. f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3), a = 0.$$

$$4. f(x) = \ln(1 - 3x), a = 0.$$

$$5. f(x) = (1 + x)\ln(1 + x), a = 0.$$

$$6. f(x) = \cos 3x, a = 0.$$

$$7. f(x) = \frac{x}{1 + x - 2x^2}, a = 0.$$

$$8. f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}, a = 0.$$

$$9. f(x) = x \arcsin x^3, a = 0.$$

$$10. f(x) = x \arcsin x^3, a = 0.$$

$$11. f(x) = 10^x, a = 0.$$

$$12. f(x) = 2^{-x}, a = 0.$$

$$13. f(x) = \operatorname{sh} x, a = 0.$$

$$14. f(x) = \operatorname{ch} x, a = 0.$$

$$15. f(x) = (1 + x)e^{-x}, a = 0.$$

$$16. f(x) = (1 + x)\sin x, a = 0.$$

$$17. f(x) = \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}, a = 0.$$

$$18. f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}, a = 0.$$

$$19. f(x) = \ln(10 + x), a = 0.$$

$$20. f(x) = \sqrt{3 - x}, a = -1.$$

$$21. f(x) = \ln(1 + x - 6x^2), a = 0.$$

$$22. f(x) = \ln(1 + 2x - 8x^2), a = 0.$$

$$23. f(x) = \frac{1}{x(x-1)}, a = -1.$$

$$24. f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, a = 1.$$

$$25. f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)}, a = 2.$$

$$26. f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+1)}, a = -2.$$

$$27. f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}, a = -2.$$

$$28. f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}, a = 2.$$

$$29. f(x) = \frac{1}{(1 - x^2)^3}, a = 0.$$

$$30. f(x) = \frac{1}{(1 + x^2)^3}, a = 0.$$

5. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневого ряду:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 (2k)!! (x-3)^{2k}}{((2k+1)!!)^2}$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{k} (x+2)^{2k}$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) (x-1)^k$.
4. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(1+1/2^k)}{9^k} (x-1)^k$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}) (x+2)^k$.
6. $\sum_{k=2}^{\infty} 2^{2k} \sin \frac{1}{\sqrt{3^k}} x^k$.
7. $\sum_{k=2}^{\infty} \cos k \sin \frac{1}{k(k+1)} (x+1)^k$.
8. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin e^{-\sqrt{k}}}{2^k} (x-2)^{2k}$.
9. $\sum_{k=3}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^k + 3} (x-2)^{2k}$.
10. $\sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^k \ln(1+1/3^k)}{k} x^{2k}$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k 2^{3k+1}}{(2k+1)!} (x+1)^k$.
12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(3k)!}}{5^k} (x+1)^k$.
13. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cos \frac{1}{3^k} (x-1)^{2k}$.
14. $\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \cos \frac{1}{2^k} (x+1)^k$.
15. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{2^k} - \sqrt[3]{2^{k-1}}) (x-1)^k$.
16. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k} (x+1)^k$.
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 8} \cos \frac{1}{k} (x+1)^k$.
18. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k^3 (x+1)^k}{\sqrt{k^5 + 4k^2 + 3}}$.
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^k} (x+1)^{2k}$.
20. $\sum_{k=1}^{\infty} k \ln \frac{3^k + 2}{3^k + 1} (x+1)^{2k}$.
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^k + 3} (x+1)^k$.
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin e^{-\sqrt{k}} (x+1)^{2k}$.
23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2k+3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+3} (x+3)^{2k}$.
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} 2^{-\sqrt{k}} (x-2)^k$.
25. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{1}{2^k + 2k} (x-2)^{3k}$.
26. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{-2}}{\ln(1+2^k)} (x+1)^k$.
27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 8} \cos \frac{1}{3^k} (x-1)^{2k}$.
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln k + k\sqrt{3}}} (x+1)^k$.
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \arcsin^2 \frac{1}{2^k} (x-2)^k$.
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 3^k}{2^k + 3^k} (x+2)^k$.

6. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневого ряду та дослідіть

степеневий ряд на збіжність на кінцях проміжку збіжності:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 + 3}{(k^4 + 1)\ln(k+1)} (x-2)^k$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{k^2 + 1} (x-2)^k$.
3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin^2 k}{k} (x+2)^k$.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^3 + 1)\ln(k+1)} (x+2)^k$.
5. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi k^2}{k+1}}{\ln^2 k} x^k$.
6. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos 2k}{k} x^k$.
7. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k} (x-1)^k$.
8. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln k]}}{k + (-1)^k} (x-1)^k$.
9. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 + \sin \frac{k\pi}{4}} (x+1)^k$.
10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(3k^3 + 2)\ln(k+1)} (x+1)^k$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+3}{(k^2 + 2)\ln^2(k+1)} (x-2)^k$.
12. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{\sqrt{k} + \sin \frac{k\pi}{4}} (x-2)^k$.
13. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\sqrt[k]{\ln k^2} (k+1)} (x+2)^k$.
14. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\sqrt[k]{k^2} (k+1)} (x+2)^k$.
15. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)} \cos \frac{1}{k} (x-3)^k$.
16. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k + 1}{3^k + 2^k} (x-3)^k$.
17. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3k^2 + k}{2k^3 + 2} (x+3)^{2k+1}$.
18. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2k^2 + 1} (x+3)^{2k}$.
19. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3k^2 + k}{7k^4 + 2} x^{2k}$.
20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k^3 + 1} x^k$.
21. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k \ln k} (x-2)^{2k+1}$.
22. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k \ln k} (x-2)^{2k}$.
23. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln k} (x-4)^k$.
24. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln k} (x-4)^k$.
25. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln k \ln^2 k} (x+4)^k$.
26. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln^2 k} (x+4)^k$.

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 1)\ln(k+1)} (x+5)^{2k}.$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^3 + 3)\ln^2(k+1)} (x+5)^{2k}.$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 2)\ln^2(k+1)} (x-5)^{2k}.$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 2}{(k^4 + 1)\ln(2k+1)} (x-5)^{2k}.$$

7. Знайдіть суми степеневих рядів:

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 - 1/k)x^k.$$

$$2. \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 9k + 5)x^{k+1}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} \right) x^k.$$

$$4. \sum_{k=0}^{\infty} (2k^2 + k + 1)x^{k+2}.$$

$$5. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2(2k-3)(k-1)}.$$

$$6. \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 6k + 5)x^{k+1}.$$

$$7. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{2k+1} x^{2k+2}.$$

$$8. \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - 2k - 2)x^{k+1}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} (2^k - (-1)^k / k)x^{2k}.$$

$$10. \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - 2k - 1)x^{k+1}.$$

$$11. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)x^{2k}}{2k+1}$$

$$12. \sum_{k=0}^{\infty} (2k^2 - 2k - 1)x^{k+1}.$$

$$13. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k(2k+1)}.$$

$$14. \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 4k + 3)x^{k+1}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{3^k} x^{2k}.$$

$$16. \sum_{k=0}^{\infty} (2k^2 - k - 2)x^{k+1}.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k}{6^k} x^{2k+1}.$$

$$18. \sum_{k=0}^{\infty} (3k^2 + 8k + 5)x^{k+2}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k} x^{2k}.$$

$$20. \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 5k + 3)x^k.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 - 1/k)x^{2k}.$$

$$22. \sum_{k=0}^{\infty} (4k^2 + 9k + 5)x^{k+2}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (-1)^k / k)x^{2k}.$$

$$24. \sum_{k=0}^{\infty} (2k^2 + 8k + 5)x^k.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} (1 - (-1)^k / k)x^{k-1}.$$

$$26. \sum_{k=0}^{\infty} (3k^2 + 7k + 5)x^k.$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k(2k-1)}.$$

$$28. \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + k + 1)x^k.$$

$$29. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)2(k+1)}.$$

$$30. \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k + 1)x^k.$$

4.3. Ряди Фур'є

Тригонометричні ряди були використані французьким математиком і фізиком Ж. Фур'є при вивченні поширення тепла. Пізніше ряди Фур'є використовувались при вивченні багатьох інших явищ природи. З часом була побудована розвинута теорія цих рядів, яка в свою чергу дала поштовх до розвитку нових розділів математики.

4.3.1. Тригонометрична система. Тригонометричний ряд. Функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається *періодичною*, якщо знайдеться таке число $T \neq 0$, що $(\forall x \in D(f)): f(x \pm T) = f(x)$. При цьому таке число $T \neq 0$ називається *періодом функції* f , а сама функція f називається T -періодичною. Похідна періодичної функції є періодичною функцією, а первісна не обов'язково є періодичною функцією. Докладніше про це сказано в наступних прикладах.

Приклад 1. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є інтегрованою на проміжку

$[0; T]$, періодичною і T – її період, то $\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx$ для кожного

$a \in \mathbb{R}$, бо

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^T f(x-T) dx = \\ &= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

Приклад 2. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є T -періодичною і диференційовною на \mathbb{R} , то функція f' є T -періодичною, бо

$$f'(x+T) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+T+\Delta x) - f(x+T)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Система

$$\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$$

називається [3, 5] *тригонометричною системою* або 2π -періодичною тригонометричною системою. Кожна функція цієї системи є 2π -

періодичною. Для будь-яких $n \in \mathbb{Z}$ і $m \in \mathbb{Z}$ виконується

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi, & n = m \neq 0, \\ 2\pi, & n = m = 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi, & n = m \neq 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0.$$

Система

$$\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$$

називається [3, 5] *комплексною тригонометричною системою* або комплексною 2π -періодичною тригонометричною системою. Кожна функція цієї системи є 2π -періодичною і для будь-яких $k \in \mathbb{Z}$ і $m \in \mathbb{Z}$ виконується

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 2\pi, & k = m. \end{cases}$$

Тригонометричним рядом або *рядом* за 2π -періодичною тригонометричною системою називають ряд [3, 5]

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (1)$$

Числа a_k і b_k називаються коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Теорема 1 [3, 5]. *Якщо тригонометричний ряд (1) є рівномірно збіжним на проміжку $[-\pi; \pi]$ і має суму $f(x)$, то цей ряд збігається рівномірно на \mathbb{R} , функція f є 2π -періодичною і неперервною на \mathbb{R} , і його коефіцієнти знаходяться за формулами*

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Ряд [3, 5]

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (2)$$

називається *комплексним тригонометричним рядом* на $[-\pi; \pi]$ або *рядом* за комплексною 2π -періодичною тригонометричною системою. Ряд (2) називається збіжним (у звичайному розумінні) на множині E , якщо на цій множині є збіжним кожний з рядів [3, 5]

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} e^{-imx}.$$

Теорема 2 [3, 5]. Якщо ряд (2) є рівномірно збіжним на проміжку $[-\pi; \pi]$, то його коефіцієнти c_k знаходяться за формулою

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 3. Згідно з ознакою Вейерштраса ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$

збігається рівномірно і абсолютно на \mathbb{R} .

Приклад 4. Оскільки

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}},$$

то згідно з ознакою Діріхле ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ для кожного $\varepsilon \in (0; \pi/2)$ на проміжку $(\varepsilon; \pi - \varepsilon)$ збігається рівномірно. Крім цього, якщо

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}, \text{ то}$$

$$|S_{2n}(1/n) - S_n(1/n)| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin k/n}{k} \right| \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin 1}{k} \geq \frac{\sin 1}{2}.$$

Тому згідно з критерієм Коші збіжності ряду на проміжку $(0; \pi)$ розглядуваний ряд збігається нерівномірно.

Приклад 5. Якщо $a \in (0; 1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$ і $q = ae^{i\varphi}$, то $|q| < 1$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \quad \text{і} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) = \frac{1 - a \cos \varphi + ia \sin \varphi}{|1-q|^2}.$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos kx = \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin kx = \frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2},$$

якщо $a \in (0; 1)$ і $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 6. Якщо $a \in (0; 1)$, $f(x) = \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$, то

$$f'(\varphi) = \frac{2a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin k\varphi,$$

$$f(x) - f(0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \int_0^x \sin k\varphi d\varphi = -2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\cos kx - 1}{k},$$

тобто

$$\begin{aligned} \ln(1 - 2a \cos x + a^2) - \ln(1 - 2a + a^2) &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\cos kx - 1}{k} = \\ &= -2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\cos kx}{k} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\ln(1 - 2a \cos x + a^2) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\cos kx}{k}, \quad a \in (0; 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.3.2. Тригонометричний ряд Фур'є на проміжку довжини 2π . Теорема Рімана-Лебега. Множину всіх функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, які є інтегровними за Ріманом на скінченному проміжку $[a; b]$ або абсолютно інтегровними в невластному розумінні на $[a; b]$ позначимо через $R_1[a; b]$. Тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ називається ряд (тут ми пишемо символ " \sim ", а не символ "=", оскільки не знаємо, чи сума ряду дорівнює $f(x)$) [3, 5]

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (2)$$

Числа $a_k = a_k(f)$ і $b_k = b_k(f)$ називаються коефіцієнтами Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ за тригонометричною системою. Сума $S(x)$ ряду (1) не обов'язково дорівнює $f(x)$ навіть, якщо ряд (1) є збіжним на $[-\pi; \pi]$. Більше того, існують поточково збіжні скрізь на \mathbb{R} тригонометричні ряди, які не є рядами Фур'є жодної функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$, тобто їхні коефіцієнти не можна знайти за формулою (2), в якій f – деяка функція з простору $R_1[-\pi; \pi]$. Якщо ряд (1) є рівномірно збіжним на проміжку $[-\pi; \pi]$ до функції f , то за теоремою 2 попереднього пункту він є рядом Фур'є своєї суми – функції f . Далі з'ясуємо, за яких умов і в якому розумінні $S(x) = f(x)$.

Комплексним тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ або рядом Фур'є за системою $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ називається ряд [3, 5]

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (3)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (4)$$

Числа $c_k = c_k(f)$ називаються коефіцієнтами Фур'є функції f на $[-\pi; \pi]$ або коефіцієнтами Фур'є функції f за системою $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[a; a+2\pi]$ на проміжку $[a; a+2\pi]$ називається ряд (1), в якому [3, 5]

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Зокрема, тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[0; 2\pi]$ на проміжку $[0; 2\pi]$ називається ряд (1), в якому [3, 5]

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Комплексним тригонометричним рядом Фур'є [3, 5] функції $f \in R_1[a; a+2\pi]$ на проміжку $[a; a+2\pi]$ називається ряд (3), в якому

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Зокрема, комплексним тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[0; 2\pi]$ на проміжку $[0; 2\pi]$ називається ряд (3), в якому [3, 5]

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Потрібно добре розуміти відмінність термінів “тригонометричний ряд” і “тригонометричний ряд Фур'є функції f ”.

Теорема 1 (Рімана-Лебега) [3, 5]. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$. Тоді

$$\int_a^b f(t) e^{-iyt} dt \rightarrow 0, \quad \mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty.$$

Наслідок 1 [3, 5]. Якщо $[a; b] \subset \mathbb{R}$ і $f \in R_1[a; b]$, то

$$\int_a^b f(t)e^{-iyt} dt \rightarrow 0, \mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty.$$

Наслідок 2 [3, 5]. Коефіцієнти Фур'є кожної функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ прямують до нуля: $a_k(f) \rightarrow 0$ і $b_k(f) \rightarrow 0$, якщо $\mathbb{N} \ni k \rightarrow \infty$, і $c_k(f) \rightarrow 0$, якщо $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty$.

Приклад 1. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-iyx} dx \rightarrow 0, \mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty.$

Приклад 2. $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx \rightarrow 0, \mathbb{N} \ni k \rightarrow \infty.$

Приклад 3. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx \rightarrow 0, \mathbb{N} \ni k \rightarrow \infty.$

Приклад 4. Якщо $f(x) = x$, то $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$ і

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = 0, k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, k \in \mathbb{N}.$$

Тому ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$$

є тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Приклад 5. Якщо $f(x) = x$, то

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}}{-2ik} + \frac{e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}}{2\pi k^2} = \frac{\cos k\pi}{-ik} + \frac{\sin k\pi}{i\pi k^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{ik}$$

для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, бо $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\cos k\varphi = \frac{e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}}{2}$ і

$\sin k\varphi = \frac{e^{ik\varphi} - e^{-ik\varphi}}{2i}$. Тому ряд

$$x \sim \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^{k+1}}{ik} e^{ikx}$$

є комплексним тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Приклад 6. Якщо $f \in R_1[-\pi; \pi]$ і f є 2π -періодичною, неперервно диференційовною функцією на проміжку $[-\pi; \pi]$, то інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx &= \frac{f(\pi) e^{-ik\pi} - f(-\pi) e^{ik\pi}}{-ik} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{2f(\pi) \sin k\pi}{ik} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = o(1/k), \quad \mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогічно, якщо $f \in R_1[-\pi; \pi]$, f є 2π -періодичною функцією і для деякого $m \in \mathbb{Z}$ функція $f^{(m-1)}$ є неперервною на проміжку $[-\pi; \pi]$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = o(1/k^m), \quad \mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty.$$

Приклад 7. Оскільки

$$\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}, \quad x \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\},$$

то згідно з ознакою Діріхле для кожного $x \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$ є збіжним.

Проте, можна переконатись, що він не є рядом Фур'є жодної функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$.

Приклад 8. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною і неперервно диференційовною функцією на проміжку $[-\pi; \pi]$, то формально продиференційований тригонометричний ряд Фур'є функції f є рядом Фур'є функції f' , бо інтегруючи частинами, отримуємо

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{-i}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = -\frac{i}{k} c_k(f').$$

Приклад 9. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною, неперервною на проміжку $[-\pi; \pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ і $F(x) = \int_{-\pi}^x f(x) dx$, то $c_k(F) = -ic_k(f)/k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, і $c_k(F) = o(1/k)$, якщо $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty$, бо інтегруванням частинами отримуємо

$$c_k(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = -ic_k(f)/k.$$

4.3.3. Збіжність середніх арифметичних та поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Теорема 1 [3, 5]. Нехай функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ належить до класу $R_1[-\pi; \pi]$ і є 2π -періодичною. Тоді

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt,$$

де

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

– n -а частинна сума ряду Фур'є функції f , а

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}$$

– ядро Діріхле.

Теорема 2 [3, 5]. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ належить до класу $R_1[-\pi; \pi]$ і є 2π -періодичною, то

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt,$$

де

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n},$$

а

$$F_n(t) = \frac{\sin^2(nt/2)}{2\pi n \sin^2(t/2)}$$

– ядро Фейєра.

Теорема 3 (Фейєра) [3, 5]. Для кожної неперервної 2π -періодичної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ виконується

$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ |f(x) - \sigma_n(x)| : x \in [-\pi; \pi] \} = 0$, тобто послідовність $(\sigma_n(x))$ рівномірно на $[-\pi; \pi]$ збігається до f .

Теорема 4 [3, 5]. Для кожної функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)| dx = 0.$$

Функція f називається *кусково диференційовною* на проміжку $[a; b]$, якщо знайдуться точки d_k , $k \in \overline{0; n}$, такі, що $a = d_0 < \dots < d_n = b$, на кожному проміжку $(d_k; d_{k+1})$ функція f є диференційовною і існують скінченні границі [3, 5]

$$f(d_k+) := \lim_{x \rightarrow d_k+} f(x), \quad f^{'+}(d_k) := \lim_{x \rightarrow d_k+} \frac{f(x) - f(d_k+)}{x - d_k}, \quad k \in \overline{0; n-1},$$

$$f(d_k-) := \lim_{x \rightarrow d_k-} f(x), \quad f'^-(d_k) := \lim_{x \rightarrow d_k-} \frac{f(x) - f(d_k-)}{x - d_k}, \quad k \in \overline{1; n}.$$

Приклад 1. Функція $f(x) = [x]$ є кусково диференційовною на кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

Приклад 2. Функція $f(x) = |x|$ є кусково диференційовною на кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

Теорема 5 [3, 5]. Якщо функція $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково диференційовною на проміжку $[-\pi; \pi]$, то її тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx,$$

збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є 2π -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$, в якій f є неперервною;
- б) $S(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$;

$$в) S(-\pi) = S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-))/2.$$

Теорема 6 [3, 5]. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною і кусково диференційовною на $[-\pi; \pi]$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума є 2π -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, в якій f є неперервною;

б) $S(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 7 (Діні) [3, 5]. Якщо функція $f \in \mathbb{R}_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною функцією, в точці $x \in \mathbb{R}$ є неперервною або x є точкою розриву першого роду і

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x+)|}{t} dt < +\infty, \quad \int_{-\pi}^0 \frac{|f(x+t) - f(x-)|}{t} < +\infty,$$

то в точці $x \in \mathbb{R}$ ряд Фур'є функції f є збіжним і його сума дорівнює $(f(x+) + f(x-))/2$.

Теорема 5-7 залишаються справедливими (з відповідними змінами у формулюваннях) і для тригонометричних рядів Фур'є на будь-якому проміжку $[a; a + 2\pi]$, а також для комплексних тригонометричних рядів. Обмежимося формулюванням двох теорем.

Теорема 8 [3, 5]. Якщо функція $f: [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково диференційовною на проміжку $[0; 2\pi]$, то її тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx,$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx,$$

збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є 2π -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (0; 2\pi)$, в якій f є неперервною;
 б) $S(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ в кожній точці $x \in (0; 2\pi)$;
 в) $S(0) = S(2\pi) = (f(0+) + f(2\pi-))/2$.

Теорема 9 [3, 5]. Якщо функція $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково диференційовною на проміжку $[-\pi; \pi]$, то її комплексний тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx},$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx,$$

збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є 2π -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$, в якій f є неперервною;
 б) $S(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$;
 в) $S(-\pi) = S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-))/2$.

Приклад 3. Якщо 2π -періодична функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ визначена на проміжку $[-\pi; \pi]$ рівністю

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = -\pi, \\ 1, & x \in (-\pi; 0), \\ -2, & x = 0, \\ 0, & x \in (0; \pi), \end{cases}$$

то

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos kx dx = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \in \mathbb{N}, \end{cases}, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin kx dx = \frac{\cos k\pi - 1}{k\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi},$$

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \sin kx = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{(2m-1)\pi} \sin(2m-1)x$$

і

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \sin kx = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{(2m-1)\pi} \sin(2m-1)x$$

– ряд Фур'є функції f за 2π -періодичною тригонометричною системою на проміжку $[-\pi; \pi)$. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in \mathbb{R} \setminus (\{-\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\})$,

$$\begin{aligned} S(-\pi + 2\pi k) &= S(\pi + 2\pi k) = (f(-\pi + 2\pi k+) + f(\pi + 2\pi k-)) / 2 \\ &= (1+0) / 2 = 1/2 \neq f(-\pi + 2\pi k) = f(\pi + 2\pi k) = 2, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$S(2\pi k) = (S(2\pi k+) + S(2\pi k-)) / 2 = (1+0) / 2 = 1/2 \neq f(2\pi k) = -2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{((2m-1)\pi)^2}, \quad \frac{1}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{((2m-1)\pi)^2},$$

тобто

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{((2m-1)\pi)^2} = \frac{1}{8}.$$

Приклад 4. Якщо $f(x) = x$, то $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$ і

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$, ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$$

є тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$. При цьому $S(x) = x$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$,

$$S(-\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (-\pi + \pi) / 2 = 0 \neq -\pi = f(-\pi),$$

$$S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (-\pi + \pi) / 2 = 0 \neq \pi = f(\pi),$$

$S(x) \neq x = f(x)$ в кожній точці $x \notin (-\pi; \pi)$ і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

тобто $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2/6$.

Приклад 5. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0], \\ 1, & x \in (0; \pi], \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx = \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ \frac{e^{-ik\pi} - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ \frac{\cos k\pi - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} = \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Тому

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} e^{ikx}$$

і

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} e^{ikx}$$

– ряд Фур'є функції f на проміжку $[-\pi; \pi]$ за комплексною 2π -періодичною тригонометричною системою. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\}$,

$$S(0) = (f(0-) + f(0+))/2 = (0+1)/2 = 1/2 \neq 0 = f(0),$$

$$S(-\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-))/2 = (0+1)/2 = 1/2 \neq 0 = f(-\pi),$$

$$S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-))/2 = (0+1)/2 = 1/2 \neq 1 = f(\pi),$$

$S(x) \neq f(x)$ в кожній точці $x \notin (-\pi; \pi) \setminus \{0\}$ і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^k - 1}{-2ki\pi} \right|^2,$$

тобто

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^k - 1}{-2ki\pi} \right|^2 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

4.3.4. Поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжках $[-l; l]$ та $[\alpha; \beta]$. Тригонометричним рядом Фур'є функції f на проміжку $[-l; l]$ називається ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

Тригонометричним рядом Фур'є функції f на $[-l; l]$ в комплексній формі називається ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{l} x},$$

де

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{k\pi}{l} t} dt.$$

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція $f \in R_1[-l; l]$ є кусково диференційовною на проміжку $[-l; l]$, то її тригонометричний ряд Фур'є (1) збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є $2l$ -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (-l; l)$, в якій f є неперервною;
- б) $S(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ в кожній точці $x \in (-l; l)$;
- в) $S(-l) = S(l) = (f(-l+) + f(l-))/2$.

Теорема 2 [3, 5]. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є $2l$ -періодичною і кусково диференційовною на $f \in R_1[-l; l]$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума є $2l$ -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, в якій f є неперервною;

б) $S(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 1. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-l; 0), \\ 0, & x \in [0; l], \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ik\pi x/l} dx = \frac{-1}{2l} \int_{-l}^0 e^{-ik\pi x/l} dx = \begin{cases} -1/2, & k=0, \\ \frac{e^{ik\pi} - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1/2, & k=0, \\ \frac{\cos k\pi - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} = \begin{cases} -1/2, & k=0, \\ \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Тому

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} e^{ik\pi x/l}$$

і

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} e^{ik\pi x/l}$$

– ряд Фур'є функції f на проміжку $[-l; l]$ за комплексною $2l$ -періодичною тригонометричною системою. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (-l; l) \setminus \{0\}$,

$$S(0) = (f(0-) + f(0+))/2 = (-1 + 0)/2 = -1/2 \neq 0 = f(0),$$

$$S(-l) = (f(-l+) + f(-l-))/2 = (-1 + 0)/2 = -1/2 \neq -1 = f(-l),$$

$$S(l) = (f(-l+) + f(l-))/2 = (-1 + 0)/2 = -1/2 \neq 0 = f(l),$$

$S(x) \neq f(x)$ в кожній точці $x \notin (-l; l) \setminus \{0\}$, і справедлива рівність

Парсеваля

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^0 dx = \frac{1}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} \right|^2,$$

тобто

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi i k} \right|^2 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Тригонометричним рядом Фур'є функції f на проміжку $[\alpha; \beta]$ називається ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} x, \quad (2)$$

де

$$a_k = \frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{\beta-\alpha} dx, \quad b_k = \frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{\beta-\alpha} dx.$$

Тригонометричним рядом Фур'є функції f на $[\alpha; \beta]$ в комплексній формі називається ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} x},$$

де

$$c_k = \frac{1}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{-i \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} t} dt.$$

Теорема 3 [3, 5]. Якщо функція $f \in R_1[\alpha; \beta]$ є кусково диференційовною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то її тригонометричний ряд Фур'є (2) збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є $\beta - \alpha$ -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (\alpha; \beta)$, в якій f є неперервною;
- б) $S(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ в кожній точці $x \in (\alpha; \beta)$;
- в) $S(\alpha) = S(\beta) = (f(\alpha+) + f(\beta-))/2$.

Теорема 4 [3, 5]. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є $\beta - \alpha$ -періодичною і кусково диференційовною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є $\beta - \alpha$ -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\beta-\alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, в якій f є неперервною;

б) $S(x) = (f(x+) + f(x-))/2$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

4.3.5. Ряд Фур'є по косинусах та синусах. Кожну функцію f , визначену на $[0; \pi]$, можна продовжити на $[-\pi; \pi]$ парним чином рівністю $f(x) = f(-x)$, $x \in [-\pi; 0]$. Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0.$$

Тому за виконання відповідних умов функцію $f \in R_1[0; \pi]$ можна розвинути на $[0; \pi]$ в ряд Фур'є по косинусах [3, 5]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

де

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

При цьому, *рівність Парсеваля* приймає вигляд [3, 5]

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Кожну функцію f , визначену на $[0; \pi]$, можна продовжити на $[-\pi; \pi]$ непарним чином рівністю $f(x) = -f(-x)$, $x \in [-\pi; 0]$. Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Тому за виконання відповідних умов функцію $f \in R_1[0; \pi]$ можна розвинути на $[0; \pi]$ в ряд Фур'є по синусах [3, 5]:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

При цьому, *рівність Парсеваля* приймає вигляд

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

Аналогічно за виконання відповідних умов кожна функцію $f \in R_1[0; \pi]$ можна розвинути на $[0; l]$ в ряд Фур'є по косинусах [3, 5]:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx,$$

та в ряд Фур'є по синусах [3, 5]:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

При цьому, рівність Парсеваля приймає відповідно вигляд [3, 5]

$$\frac{2}{l} \int_0^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2, \quad \frac{2}{l} \int_0^l |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

Приклад 1. Якщо $f(x) = x$, то парним продовженням цієї

функції є функція $\tilde{f}(x) = |x|$. При цьому, $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$ і

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = -\frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \cos kx = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)^2} \cos(2m+1)x,$$

ряд

$$x \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \cos kx$$

є тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[0; \pi]$ по косинусам. При цьому $S(x) = x$ в кожній точці $x \in (0; \pi)$,

$S(0) = 0 = \tilde{f}(0) = f(0)$, бо в точці 0 функція \tilde{f} є неперервною,

$$S(\pi) = (\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(\pi-)) / 2 = (\pi + \pi) / 2 = \pi = f(\pi),$$

$S(x) \neq x = f(x)$ в кожній точці $x \notin [0; \pi]$ і справедлива рівність Парсеваля

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \right|^2 \\ &= \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \right|^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2 (2m+1)^4}, \end{aligned}$$

тобто $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Приклад 2. Якщо $f(x) = x$, то непарним продовженням цієї функції є ця ж функція і

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$, ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$$

є тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[0; \pi]$.

При цьому, $S(x) = x$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$,

$$S(-\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (-\pi + \pi) / 2 = 0 \neq -\pi = f(-\pi),$$

$$S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (-\pi + \pi) / 2 = 0 \neq \pi = f(\pi),$$

$S(x) \neq x = f(x)$ в кожній точці $x \notin (-\pi; \pi)$ і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

тобто $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Приклад 3. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x \in (0; \pi/4), \\ 0, & x \in (\pi/4; \pi], \end{cases}$$

то парним продовженням цієї функції на проміжок $[-\pi; \pi]$ є функція

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x \in (-\pi/4; 0) \cup (0; \pi/4), \\ 0, & x \in [-\pi; -\pi/4) \cup (\pi/4; \pi]. \end{cases}$$

При цьому,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} 1 dx = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos kx dx = \frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$S(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4} \cos kx$$

i

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4} \cos kx$$

– ряд Фур'є функції f за тригонометричною системою на проміжку $[0; \pi]$ по косинусах. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (0; \pi/4) \cup (\pi/4; \pi]$, бо

$$S(0) = (\tilde{f}(0-) + \tilde{f}(0+))/2 = (1+1)/2 = 1 \neq 2 = f(0),$$

$$S(\pi) = (\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(\pi-))/2 = (0+0)/2 = 0 = f(\pi),$$

i справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} 1 dx = \frac{1}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4} \right)^2,$$

тобто

$$\frac{1}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Приклад 4. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x \in (0; \pi/4), \\ 0, & x \in (\pi/4; \pi], \end{cases}$$

то непарним продовженням цієї функції на проміжок $[-\pi; \pi]$ є функція

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2, & x \in \{0; -\pi\}, \\ 1, & x \in (0; \pi/4), \\ -1, & x \in (-\pi/4; 0), \\ 0, & x \in (-\pi; -\pi/4) \cup (\pi/4; \pi]. \end{cases}$$

При цьому,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sin kx dx = \frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4} \right) \sin kx$$

i

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4}\right) \sin kx$$

– ряд Фур’є функції f за тригонометричною системою на проміжку $[0; \pi]$ по синусах. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (0; \pi/4) \cup (\pi/4; \pi]$, бо

$$S(0) = \left(\tilde{f}(0-) + \tilde{f}(0+)\right)/2 = (-1+1)/2 = 0 \neq 2 = f(0),$$

$$S(\pi) = \left(\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(\pi-)\right)/2 = (0+0)/2 = 0 = f(\pi),$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} 1 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4}\right)\right)^2,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4}\right)\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

4.3.6. Ортонормована система. Ряд Фур’є за ортонормованою системою. В курсах алгебри і геометрії доводиться [3, 5], що якщо H – n -вимірний евклідов простір, $\{e_k : k \in \overline{1; n}\}$ – його ортонормований базис і $c_k := c_k(f) := \langle f; e_k \rangle$ – координати вектора f в цьому базисі, то $f = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n$ і $\|f\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$. Ми розглядатимемо аналог цього твердження для нескінченно вимірних просторів і числа c_k будемо називати не координатами вектора f , а його коефіцієнтами Фур’є. Нехай H – *передевклідов простір* [3, 5], тобто векторний простір, на якому задано передскалярний добуток $\langle \bullet; \bullet \rangle$, $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна система елементів простору H . Система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ називається *ортонормованою*, якщо

$$\langle e_k; e_m \rangle = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Числа $c_k := c_k(f) := \langle f; e_k \rangle$ називаються *коефіцієнтами Фур’є* елемента $f \in H$ за ортонормованою системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, а ряд [3, 5]

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \tag{1}$$

рядом Фур'є елемента f за цією системою. Елемент $S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k$ називають n -им поліномом Фур'є або n -ою частинною сумою ряду Фур'є (1), а елемент [3, 5]

$$Q_n = \sum_{k=1}^n q_k e_k, \quad (2)$$

де q_k – довільні числа (дійсні, якщо H – дійсний простір, комплексні, якщо H – комплексний), називають поліномом порядку n за системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Відхиленням полінома Q_n від елемента f називається число $\|f - Q_n\|$.

Приклад 1. Нехай $R_2[a; b]$ – простір всіх таких функцій $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, які є інтегровними за Ріманом на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$ або функція $|f|^2$ є інтегровною на $[a; b]$ в неласному розумінні. Множина $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ є ортонормованою, якщо

$$\int_a^b e_k(x) \overline{e_m(x)} dx = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Теорема 1 [3, 5]. Нехай $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормована система передевклідового простору H . Тоді серед всіх поліномів порядку n найменше відхилення від елемента $f \in H$ має n -ий поліном Фур'є елемента f .

Теорема 2 [3, 5]. Якщо $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормована система в передевклідовому просторі H , то для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і кожного

$f \in H$ виконується $\sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \|f\|^2 - \|f - S_n\|^2$, та справедлива нерівність

Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$, тобто $\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f; e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2$.

Множина $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ передевклідового простору H називається [3, 5] повною в H , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і кожного $f \in H$ знайдеться такий поліном Q_n виду (2), для якого $\|f - Q_n\| < \varepsilon$. Іншими словами, система $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ називається [3, 5] повною в H , якщо для кожного $f \in H$ знайдеться така послідовність (Q_n) поліномів вигляду (2), що $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - Q_n\| = 0$.

Теорема 3 [3, 5]. Нехай $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормована система передевклідового простору H . Тоді наступні умови є еквівалентними: 1) система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в H ; 2) ряд Фур'є за цією системою кожного елемента f простору H збігається в H до f ; 3) для кожного $f \in H$ справедлива рівність Парсеваля $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2$.

Зауваження 1 [3, 5]. Система елементів $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ передевклідового простору H називається базисом цього простору, якщо кожний елемент $f \in H$ єдиним чином розвивається у збіжний в H ряд $f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$. Безпосередньо з означення випливає, що кожний базис є повною системою. Можна довести, що кожна з умов 1)-3) теореми 3 еквівалентна наступній умові: 4) система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ є базисом простору H , а якщо простір H є евклідовим, то і наступній умові: 5) з виконання рівності $\langle x, e_k \rangle = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ випливає, що $x = 0$.

Зауваження 2 [3, 5]. Система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ називається ортогональною в передевклідовому просторі H , якщо

$$\langle e_k, e_m \rangle = \begin{cases} \delta_m \neq 0, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Числа $c_k = \langle f, e_k \rangle / \|e_k\|^2$ називаються коефіцієнтами Фур'є елемента $f \in H$ за ортогональною системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, а ряд $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ – рядом Фур'є. Якщо система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ є ортогональною в передевклідовому просторі H , то система $\{e_k / \|e_k\| : k \in \mathbb{N}\}$ є ортонормованою в H . Тому вивчення ортогональних систем зводиться до вивчення ортонормованих систем. Зокрема, рівність Парсеваля для ортоногальних систем має вигляд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|f\|^2$.

Приклад 2. Якщо множина $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ передевклідового простору H є такою, що для кожного вектора $f \in H$ і кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий елемент $e \in E$, що $\|f - e\| < \varepsilon$, то множина $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ є повною в просторі H .

Приклад 3. Якщо множина $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ передевклідового простору H є повною в H і $\{d_k : k \in \Omega\}$ – довільна множина чисел, відмінних від нуля, то система $\{d_k e_k : k \in \Omega\}$ також є повною в H .

Приклад 4. Якщо $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ – довільна множина (не обов'язково ортогональна) передевклідового простору H і кожний елемент $f \in H$ розвивається в збіжний в H ряд $f = \sum_{k \in \Omega} d_k e_k$, $d_k \in \mathbb{C}$, то система $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ є повною в H .

Приклад 5. Коефіцієнти Фур'є за ортонормованою системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ функції $f \in R_2[a; b]$ знаходяться за формулою $c_k = \int_a^b f(t) \overline{e_k(t)} dt$, а рівність Парсеваля записується у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

Приклад 6. Множина $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ є ортогональною, якщо

$$\int_a^b e_k(x) \overline{e_m(x)} dx = \begin{cases} \delta_m \neq 0, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Приклад 7. Коефіцієнти Фур'є за ортонормованою системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ функції $f \in R_2[a; b]$ знаходяться за формулою

$$c_k = \int_a^b f(t) \overline{e_k(t)} dt / \sqrt{\int_a^b |e_k(t)|^2 dt}, \quad \text{а рівність Парсеваля}$$

записується у вигляді

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \int_a^b |e_k(t)|^2 dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

Теорема 4 [3, 5]. Тригонометрична система

$$\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$$

є повною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.

Наслідок 1 [3, 5]. Тригонометрична система

$$\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$$

є повною і ортогональною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$, а система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[-\pi; \pi]$ розвивається в збіжний в $R_2[-\pi; \pi]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

При цьому, коефіцієнти a_k і b_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos ktdt, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin ktdt, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Наслідок 2 [3, 5]. Система

$$\left\{ \frac{1}{2}; \cos \frac{\pi t}{l}; \sin \frac{\pi t}{l}; \cos \frac{2\pi t}{l}; \sin \frac{2\pi t}{l}; \dots; \cos \frac{k\pi t}{l}; \sin \frac{k\pi t}{l}; \dots \right\}$$

(вона називається $2l$ -періодичною тригонометричною системою або тригонометричною системою на проміжку, довжини $2l$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[-l; l]$, а система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}; \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi t}{l}; \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi t}{l}; \dots; \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi t}{l}; \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi t}{l}; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[-l; l]$ розвивається в збіжний в $R_2[-l; l]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

за цією системою. При цьому, коефіцієнти a_k і b_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Наслідок 3 [3, 5]. Система

$$\left\{ \frac{1}{2}; \cos \frac{2\pi t}{\beta - \alpha}; \sin \frac{2\pi t}{\beta - \alpha}; \dots; \cos \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}; \sin \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}; \dots \right\}$$

(вона називається $\beta - \alpha$ -періодичною тригонометричною системою або тригонометричною системою на проміжку, довжини $\beta - \alpha$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[\alpha; \beta]$, а система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}}; \sqrt{\frac{2}{\beta - \alpha}} \cos \frac{2\pi t}{\beta - \alpha}; \dots; \sqrt{\frac{2}{\beta - \alpha}} \cos \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}; \sqrt{\frac{2}{\beta - \alpha}} \sin \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[\alpha; \beta]$ розвивається в збіжний в $R_2[\alpha; \beta]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x$$

за цією системою. При цьому, коефіцієнти a_k і b_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{\beta - \alpha} dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{\beta - \alpha} dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Наслідок 4 [3, 5]. Система $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ (вона називається

2π -періодичною комплексною тригонометричною системою або комплексною тригонометричною системою на проміжку, довжини 2π) є повною і ортогональною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$, а система

$\{e^{ikx} / \sqrt{2\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$ є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[-\pi; \pi]$ розвивається в збіжний в $R_2[-\pi; \pi]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

за цією системою. При цьому, коефіцієнти c_k знаходяться за формулами

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Наслідок 5 [3, 5]. Система

$$\left\{ e^{i \frac{k\pi}{l} x} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(вона називається $2l$ -періодичною комплексною тригонометричною системою або комплексною тригонометричною системою на проміжку, довжини $2l$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[-l; l]$, а система

$\left\{ e^{i \frac{k\pi}{l} x} / \sqrt{2l} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ є відповідною ортонормованою системою і кожна

функція $f \in R_2[-l; l]$ розвивається в збіжний в $R_2[-l; l]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{l} x}$$

за цією системою. При цьому, коефіцієнти c_k знаходяться за формулами

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{k\pi}{l} t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Наслідок 6 [3, 5]. Система

$$\left\{ e^{i \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} x} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(вона називається $\beta - \alpha$ -періодичною комплексною тригонометричною системою або комплексною тригонометричною

системою на проміжку, довжини $\beta - \alpha$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[\alpha; \beta]$, а система

$$\left\{ e^{i \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x} / \sqrt{\beta - \alpha} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[\alpha; \beta]$ розвивається в збіжний в $R_2[\alpha; \beta]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x}$$

за цією системою. При цьому, коефіцієнти c_k за формулами

$$c_k = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{-i \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Зокрема, система

$$\left\{ e^{i \frac{2k\pi}{T} x} / \sqrt{T} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

є ортонормованою в просторі $R_2[0; T]$.

Наслідок 7 [3, 5]. Система

$$\{1/2; \cos t; \cos 2t; \dots; \cos nt; \dots\}$$

(вона називається системою косинусів або системою косинусів на проміжку, довжини π) є повною і ортогональною в просторі $R_2[0; \pi]$, а система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t; \dots; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[0; \pi]$ розвивається в збіжний в $R_2[0; \pi]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

за цією системою. При цьому, коефіцієнти a_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Наслідок 8 [3, 5]. Система $\{\sin t; \sin 2t; \dots; \sin nt; \dots\}$ (вона називається системою синусів або системою синусів на проміжку, довжини π) є повною і ортогональною в просторі $R_2[0; \pi]$, а система

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t; \dots; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[0; \pi]$ розвивається в збіжний в $R_2[0; \pi]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx$$

за цією системою. При цьому, коефіцієнти b_k знаходяться за формулами

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

Наслідок 9 [3, 5]. Система

$$\left\{ 1/2; \cos \frac{\pi t}{l}; \cos \frac{2\pi t}{l}; \dots; \cos \frac{k\pi t}{l}; \dots \right\}$$

(називається системою косинусів на проміжку $[0; l]$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[0; l]$, а система

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{l}}; \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi t}{l}; \dots; \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi t}{l}; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[0; l]$ розвивається в збіжний в $R_2[0; l]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти a_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{l} \int_0^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Наслідок 10 [3, 5]. Система

$$\left\{ \sin \frac{\pi t}{l}; \sin \frac{2\pi t}{l}; \dots; \sin \frac{k\pi t}{l}; \dots \right\}$$

(називається системою синусів на проміжку $[0; l]$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[0; l]$, а система

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi t}{l}; \dots; \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi t}{l}; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[0; l]$ розвивається в збіжний в $R_2[0; l]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

за цією системою. При цьому, коефіцієнти a_k знаходяться за формулами

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{l} \int_0^l |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

4.3.7. Рівномірна і абсолютна збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$. В попередніх пунктах вказані умови поточної збіжності ряду Фур'є та збіжності цього ряду в просторі. Часто важливо знати, чи збігається ряд в іншому розумінні. Наприклад, чи збігається він абсолютно, рівномірно і т.д.

Теорема 1 [3, 5]. Якщо функція f' є неперервною, кусково диференційовною на проміжку $[-\pi; \pi]$ і $f(-\pi) = f(\pi)$, то її тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad (2)$$

збігається на проміжку $[-\pi; \pi]$ рівномірно і абсолютно.

Теорема 2 [3, 5]. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty$, то тригонометричний ряд Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ збігається на \mathbb{R} абсолютно і рівномірно.

Теорема 3 [3, 5]. Якщо функція $f \in R_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною, неперервною і для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in [-\pi; \pi]$

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt < \varepsilon,$$

то на проміжку $[-\pi; \pi]$ ряд Фур'є функції f є збіжним рівномірно.

Наслідок 1 [3, 5]. Якщо функція $f \in R_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною функцією і задовольняє умову Гельдера, тобто

$$(\exists c_1 > 0)(\exists \alpha \in (0; 1])(\forall x_1 \in \mathbb{R})(\forall x_2 \in \mathbb{R}) : |f(x_2) - f(x_1)| \leq c_1 |x_2 - x_1|^\alpha,$$

то ряд Фур'є функції f є збіжним на \mathbb{R} рівномірно.

Приклад 1. Якщо ряд тригонометричний ряд Фур'є (1) є збіжним рівномірно на $[-\pi; \pi]$, то він є рівномірно збіжним на $(-\infty; +\infty)$, бо члени ряду (1) є 2π -періодичними функціями.

Приклад 2. Якщо ряд (1) є збіжним рівномірно на $(-\infty; +\infty)$ до функції $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то функція S є 2π -періодичною і неперервною на $(-\infty; +\infty)$, бо члени ряду (1) є неперервними 2π -періодичними функціями.

Приклад 3. Якщо ряд (1) є збіжним рівномірно на $[-\pi; \pi]$ до функції S , то він є збіжним до цієї ж функції і в просторі $R_2[-\pi; \pi]$, бо функція S є неперервною і

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=1}^n u_m(x) - S(x) \right|^2 dx \leq \left(\sup \left\{ \left| \sum_{m=1}^n u_m(x) - S(x) \right| : x \in [-\pi; \pi] \right\} \right)^2 2\pi \rightarrow 0.$$

Приклад 4. Тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x) = \sin^3 x$

збігається до неї на \mathbb{R} рівномірно і абсолютно в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.

Приклад 5. Тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x) = x$ збігається в просторі $R_2[-\pi; \pi]$ до f , є поточково збіжним на $(-\infty; +\infty)$, але не збігається рівномірно на $[-\pi; \pi]$, бо функція f не є 2π -періодичною.

Приклад 6. Тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ збігається в просторі $R_2[-\pi; \pi]$ до f , є поточково збіжним на $(-\infty; +\infty)$, але не збігається рівномірно на $[-\pi; \pi]$, бо функція f не є перервною.

4.3.8. Інтегральна формула Фур'є. Поняття про перетворення Фур'є. Згідно з теорією рядів Фур'є за виконання відповідних умов функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ подається у вигляді [3, 5]

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{i\pi kx/l} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\pi kt/l} dt \cdot e^{i\pi kx/l}.$$

Перейшовши в останній рівності до границі ($l \rightarrow +\infty$) можна знайти умови, за яких справедливою є формула [3, 5]

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy. \quad (1)$$

Ця формула називається *інтегральною формулою Фур'є*. Її можна розглядати як тригонометричний ряд Фур'є на $(-\infty; +\infty)$. Нехай

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt. \quad (2)$$

Тоді формулу (1) можна переписати так [3, 5]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy. \quad (3)$$

Оператор F , який функції f ставить у відповідність функцію \hat{f} за формулою (2) називається *оператором Фур'є*, а функція \hat{f} – *перетворенням Фур'є* або образом Фур'є функції f . Формулу (2) можна переписати у вигляді [3, 5]

$$\hat{f} = F(f). \quad (4)$$

Оператор F^{-1} , який функції \hat{f} ставить у відповідність функцію f за формулою (3) називається *оберненим оператором Фур'є*. Формулу (2) можна переписати у вигляді [3, 5]

$$f = F^{-1}(\hat{f}), \quad (5)$$

а формулу (1) – у вигляді

$$f = F^{-1}(F(f)). \quad (6)$$

Обернене перетворення Фур'є функції f будемо позначати через \check{f} . Отже [3, 5],

$$\check{f}(y) = \hat{f}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt.$$

В ряді просторів оператор F^{-1} і справді є оберненим оператором оператора F , що і пояснює його назву та позначення. Формули (2)-(5) справедливі за різних умов і в різних розуміннях. Оскільки

$$e^{iy(x-t)} = \cos y(x-t) + i \sin y(x-t)$$

і функція $\sin y(x-t)$, як функція змінної y є непарною, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt \right) dy. \quad (7)$$

Функція $\cos y(x-t)$, як функція змінної y є парною. Тому [3, 5]

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt \right) dy. \quad (8)$$

Але $\cos y(x-t) = \cos yx \cos yt + \sin yx \sin yt$. Тому маємо і наступну формулу [3, 5]

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (a(y) \cos yx + b(y) \sin yx) dy, \quad (9)$$

де $a(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ytdt$, $b(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ytdt$. Якщо функція f є парною, то формула (8) приймає вигляд [3, 5]

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos yx \left(\int_0^{+\infty} f(t) \cos ytdt \right) dy.$$

Якщо ж функція f є непарною, то формула (8) приймає вигляд [3, 5]

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin yx \left(\int_0^{+\infty} f(t) \sin ytdt \right) dy.$$

Функції

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos yt dt \quad \text{та} \quad f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin yt dt$$

називаються [3, 5] відповідно *косинус-перетворенням* та *синус-перетворенням* Фур'є функції f .

Теорема 1 [3, 5]. *Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково диференційовною на кожному скінченному проміжку і належить до класу $R_1(\mathbb{R}) \cap R_2(\mathbb{R})$, то в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справедлива формула*

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy$$

і має місце рівність Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy.$$

Приклад 1. *Якщо*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \sigma, \\ 0, & |x| > \sigma, \end{cases}$$

то

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-iyt} dt = \frac{e^{iy\sigma} - e^{-iy\sigma}}{iy\sqrt{2\pi}} = \begin{cases} \frac{\sqrt{2/\pi} \sin i\sigma y}{iy}, & y \neq 0, \\ \sigma\sqrt{2/\pi}, & y = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. *Для кожної функції $f \in R_1(\mathbb{R})$ і кожного $y_0 \in \mathbb{R}$ виконується: $\hat{f}(y - y_0) = e^{iy_0 t} f(t)$. Справді,*

$$\hat{f}(y - y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(y-y_0)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy_0 t} e^{-iyt} dt.$$

Приклад 3. *Для кожної функції $f \in R_1(\mathbb{R})$ і кожного $t_0 \in \mathbb{R}$ виконується $f(t - t_0) = e^{-it_0 y} \hat{f}$. Справді,*

$$\begin{aligned} f(t - t_0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-iyt} dt = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iy(u+t_0)} du = e^{-iyt_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iyu} du. \end{aligned}$$

4.3.9. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення тригонометричної системи.

2. Сформулюйте означення тригонометричного ряду.
3. Сформулюйте означення тригонометричного ряду Фур'є на $[-\pi; \pi]$.
4. Поясніть суть термінів “тригонометричний ряд” і “тригонометричний ряд Фур'є функції f ”.
5. Сформулюйте означення комплексного тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.
6. Запишіть формулу для знаходження частинних сум тригонометричного ряду Фур'є і доведіть її.
7. Запишіть формулу для знаходження середніх арифметичних частинних сум тригонометричного ряду Фур'є і доведіть її.
8. Сформулюйте теореми Фейєра та Діні.
9. Сформулюйте теорему Вейерштрасса.
10. Сформулюйте теорему про поточкову збіжність ряду Фур'є.
11. Запишіть рівність Парсеваля для тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.
12. Сформулюйте означення перетворення Фур'є.
13. Сформулюйте означення оберненого перетворення Фур'є.
14. Запишіть інтегральну формулу Фур'є.

4.3.10. Вправи і задачі.

1. Подайте функцію f у вигляді суми парної і непарної функцій:
 1. $f(x) = x - 1$.
 2. $f(x) = e^x$.
 3. $f(x) = x^2 + 1$.
 4. $f(x) = \sin x$.
2. Вкажіть парну функцію f_1 , що є продовженням звуження функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на множину A :
 1. $f(x) = x$, $A = [0; +\infty)$.
 2. $f(x) = x + 1$, $A = [0; +\infty)$.
 3. $f(x) = \sin x$, $A = [0; \pi/2]$.
3. Вкажіть непарну функцію f_1 , що є продовженням звуження функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на множину A :
 1. $f(x) = x^2$, $A = [0; +\infty)$.
 2. $f(x) = \cos x$, $A = [0; +\infty)$.
 3. $f(x) = x + 3$, $A = [0; +\infty)$.
 4. $f(x) = \arccos x$, $A = [0; 1]$.
4. Вкажіть T -періодичне продовження звуження функції f на множину A :

1. $f(x) = x^2$, $T = 1$, $A = [0; 1]$.
2. $f(x) = \sin x$, $T = \frac{\pi}{2}$, $A = [0; \pi/2]$.
3. $f(x) = e^x$, $T = 2$, $A = [0; 2]$.

5. Переконайтесь, що тригонометричний ряд є рядом Фур'є своєї суми на проміжку Δ :

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos kx}{k^3 + 1}$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} e^{ikx}}{\sqrt{k^4 + 1}}$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.
3. $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{ke^k \cos kx}{ke^k \ln k \ln^2 \ln k + 1}$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2 \ln^2(k+1)}$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{2^k} \cos kx + \frac{k+1}{k^3 \ln(k+1)} \sin kx$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^3 k^4}{k^2} \cos kx + \frac{\ln \ln^5 k}{k \ln^2(k+1)} \sin kx$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.

6. Для функції f знайдіть тригонометричний ряд Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$, запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$:

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} -\pi, & x \leq 0, \\ \pi, & x > 0. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin [-2; 2], \\ 0, & x \in [-2; 2]. \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$
5. $f(x) = x$.

6. $f(x) = \pi^2 - x^2$.
7. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.
8. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$.
9. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.
10. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

7. Знайдіть тригонометричний ряд Фур'є функції f на вказаному проміжку Δ , запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$:

1. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $\Delta = [0; \pi]$ (по косинусах).
2. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, $\Delta = [0; \pi]$ (по синусах).
3. $f(x) = x^2$, $\Delta = [0; 2\pi]$.
4. $f(x) = |x|$, $\Delta = [-l; l]$.
5. $f(x) = 1$, $\Delta = [0; l]$ (по синусах).
6. $f(x) = x$, $\Delta = [0; l]$ (по косинусах).

8. Напишіть комплексний тригонометричний ряд Фур'є функції f на вказаному проміжку Δ , запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$:

1. $f(x) = \cos x$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.
2. $f(x) = \sin x$, $\Delta = [-l; l]$.
3. $f(x) = x$, $\Delta = [0; 2l]$.
4. $f(x) = \sin x$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.

9. Для функції f знайдіть її ряд Фур'є за системою E на проміжку Δ , запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$:

1. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = x - [x]$.
2. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \sin 2x$.
3. $\Delta = [0; \pi/2]$, $E = \{1/2; \cos 2x; \cos 4x; \dots\}$, $f(x) = \sin 2x$.
4. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{e^{ikx} : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = e^x$.

5. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = e^x$.
6. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = e^{-x}$.
7. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = [\sin x]$.
8. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arcsin[\sin x]$.
9. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = [\cos x]$.
10. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arccos[\cos x]$.
11. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arccos[\sin x]$.
12. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = [\cos x]$.
13. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arcsin[\cos x]$.

4.3.11. Індивідуальні завдання.

1. Для функції f знайдіть її ряд Фур'є за системою E на проміжку Δ , запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$:

1. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$
2. $\Delta = [-\pi/2; \pi/2]$, $E = \{1/2; \cos 2x; \sin 2x; \cos 4x; \sin 4x; \dots\}$,
 $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$
3. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \cos 2x; \dots\}$, $f(x) = \pi$.
4. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = \begin{cases} -\pi, & x \leq 0, \\ \pi, & x > 0. \end{cases}$
5. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$
6. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 2]. \end{cases}$

7. $\Delta = [0; 2\pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \cos 2x; \dots\}$, $f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$
8. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = x$.
9. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = x^2$.
10. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = |x|$.
11. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \pi^2 - x^2$.
12. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \cos ax$,
 $a \in \mathbb{R}$.
13. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \sin ax$,
 $a \in \mathbb{R}$.
14. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = |\cos x|$.
15. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = |\sin x|$.
16. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \cos 2x; \dots\}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.
17. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arcsin(\sin x)$.
18. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$.
19. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \cos 2x; \dots\}$, $f(x) = \arcsin \cos x$.
20. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \frac{\pi - x}{4} - \frac{x}{2}$.
21. $\Delta = [0; \pi/2]$, $E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = -x(x - \pi/2)$.
22. $\Delta = [0; 2\pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$,
 $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \frac{\pi - x}{4} - \frac{x}{2}$.
23. $\Delta = [0; 2l]$, $E = \{e^{ikx/l} : k \in \mathbb{Z}\}$, $f(x) = x^2$.
24. $\Delta = [-l; l]$, $E = \left\{1/2; \cos \frac{\pi x}{l}; \sin \frac{\pi x}{l}; \cos \frac{2\pi x}{l}; \sin \frac{2\pi x}{l}; \dots\right\}$,
 $f(x) = |x|$.
25. $\Delta = [0; 2l]$, $E = \left\{1/2; \cos \frac{\pi x}{l}; \sin \frac{\pi x}{l}; \cos \frac{2\pi x}{l}; \sin \frac{2\pi x}{l}; \dots\right\}$,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 2l], \\ -1, & x \notin [0; 2l]. \end{cases}$$

$$26. \Delta = [0; l], E = \left\{ \sin \frac{k\pi t}{l} : k \in \mathbb{N} \right\}, f(x) = 1.$$

$$27. \Delta = [0; l], E = \left\{ \cos \frac{k\pi t}{l} : k \in \mathbb{N} \right\}, f(x) = x.$$

$$28. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{e^{ikx} : k \in \mathbb{N}\}, f(x) = \cos x.$$

$$29. \Delta = [-l; l], E = \{e^{ikx/l} : k \in \mathbb{Z}\}, f(x) = \sin x.$$

$$30. \Delta = [0; 2l], E = \{e^{ikx/l} : k \in \mathbb{Z}\}, f(x) = x.$$

2. Не знаходячи коефіцієнтів Фур'є вясніть, чи тригонометричний ряд Фур'є функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ збігається: а) в просторі $R_2[-\pi; \pi]$; б) поточково на \mathbb{R} ; в) рівномірно на \mathbb{R} :

$$1. f(x) = xe^x + x^3.$$

$$2. f(x) = \cos(x/3).$$

$$3. f(x) = \sin(x/4).$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \cos^3 2x + \sin^3 4x.$$

$$6. f(x) = \cos 3x + \sin^4 5x.$$

$$7. f(x) = \cos(x/2) + \sin(x/3).$$

$$8. f(x) = \cos \sqrt{2}x.$$

$$9. f(x) = x - [x].$$

$$10. f(x) = e^x + x.$$

$$11. f(x) = \sin 2x.$$

$$12. f(x) = x + \sin 2x.$$

$$13. f(x) = x^2.$$

$$14. f(x) = \begin{cases} -\pi, & x \leq 0, \\ \pi, & x > 0. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$$

16. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$
17. $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$
18. $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \leq 0, \\ \cos 3x, & x > 0. \end{cases}$
19. $f(x) = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x .$
20. $f(x) = \cos|x| .$
21. $f(x) = \sin|x| .$
22. $f(x) = \cos^2|x| .$
23. $f(x) = \sin^2|x| .$
24. $f(x) = xe^{-x} + x^2 .$
25. $f(x) = x \cos x .$
26. $f(x) = x \sin x .$
27. $f(x) = e^x \sin x .$
28. $f(x) = e^{|x|} \cos x .$
29. $f(x) = \cos^4 x + \sin^3 4x .$
30. $f(x) = \cos 6x + \sin 4x .$

3. Знайдіть перетворення Фур'є функції f і напишіть інтегральну формулу Фур'є:

1. $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \in [-2\pi; -\pi), \\ \cos x, & x \in [-\pi; 0], \\ 0, & x \notin [-2\pi; 0]. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ 2, & x \in (1; 2), \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup (1; 2). \end{cases}$

$$4. \quad f(x) = \begin{cases} 3, & x \in (-1; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin (-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$5. \quad f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$6. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ -x, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$7. \quad f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$8. \quad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ -x^2, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$9. \quad f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \in [-2; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$10. \quad f(x) = \begin{cases} e^{i2x}, & x \in (-2; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin (-2; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$11. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [-2; -1), \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-2; -1) \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$12. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-i2x}, & x \in (-2; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin (-2; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi; 0], \\ -1, & x \in [\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (-\pi; 0], \\ -1, & x \in [\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (-\pi; 0], \\ -\sin x, & x \in (\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; 0] \cup (\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi; 0], \\ -\cos x, & x \in [\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x \in (-\pi; 0), \\ 1, & x \in [\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; 0) \cup [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} \cos^2 x, & x \in (-\pi; 0), \\ 1, & x \in (\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi). \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi; 0), \\ \sin^2 x, & x \in [\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; 0) \cup [\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0), \\ \cos^2 x, & x \in (\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi). \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \in [-1; 0], \\ e^{-ix}, & x \in (0; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}$$

- $$22. f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [-1; 0), \\ e^{ix}, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}$$
- $$23. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (-\pi; 0], \\ \sin x, & x \in (0; \pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; \pi]. \end{cases}$$
- $$24. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi; 0], \\ \cos x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x \notin [-\pi; \pi]. \end{cases}$$
- $$25. f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \in (-\pi; 0], \\ \sin x, & x \in (0; \pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; \pi]. \end{cases}$$
- $$26. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (-\pi; 0], \\ e^{ix}, & x \in (0; \pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; \pi]. \end{cases}$$
- $$27. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0; \pi], \\ e^{-ix}, & x \in (\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin (0; 2\pi]. \end{cases}$$
- $$28. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0; \pi), \\ e^{-ix}, & x \in [\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin [0; 2\pi). \end{cases}$$
- $$29. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 2]. \end{cases}$$
- $$30. f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Додатки. Основні формули

1. Тригонометричні функції

1. Основні тригонометричні тотожності:

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Формули додавання і віднімання тригонометричних функцій:

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \alpha + \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}, \alpha - \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3. Формули подвійних і потрійних аргументів:

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2\sin^2 \alpha.$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2\operatorname{ctg} \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.$$

$$6. \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

$$7. \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

4. Формулы половинного аргументу:

$$1. \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$2. \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \alpha \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi(2n+1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

5. Формули перетворення суми або різниці тригонометричних функцій у добуток:

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$2. \sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$5. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

$$6. \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

$$7. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$12. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

13. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$
14. $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$
15. $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$
16. $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$
17. $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$
18. $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$
19. $1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
20. $1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
21. $1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
22. $1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
23. $1 + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
24. $1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
25. $1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
26. $\operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}, \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
27. $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \alpha, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$
28. $\operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$

29. $\operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha$, $\alpha \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму:

1. $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$.

2. $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$.

3. $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$.

4. $\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma))$.

5. $\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma))$.

6. $\sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma))$.

7. $\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma))$.

7. Формули зниження степеня тригонометричних функцій:

1. $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$.

2. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$.

3. $\sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}$.

4. $\cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}$.

8. Формули зведення:

1. $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

2. $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$.

3. $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha$.

4. $\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha$.

$$5. \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha .$$

$$6. \sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha .$$

$$7. \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha .$$

$$8. \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha .$$

$$9. \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha .$$

$$10. \cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha .$$

$$11. \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha .$$

$$12. \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha .$$

$$13. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha .$$

$$14. \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha .$$

$$15. \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha .$$

$$16. \operatorname{tg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha .$$

$$17. \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha .$$

$$18. \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha .$$

$$19. \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha .$$

$$20. \operatorname{ctg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha .$$

9. Значення тригонометричних функцій деяких основних кутів:

$f(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	0	-	0
$\operatorname{ctg} x$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	-	0	-

10. Обернені тригонометричні функції:

$$1. \sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

$$2. \arcsin(-x) = -\arcsin x .$$

$$3. \arcsin(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} .$$

$$4. \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1 .$$

5. $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
6. $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
7. $\cos(\arccos x) = x, -1 \leq x \leq 1$.
8. $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
9. $\arccos(\cos x) = x, 0 \leq x \leq \pi$.
10. $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1$.
11. $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
12. $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.
13. $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, -\infty < x < +\infty$.
14. $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$.
15. $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.
16. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$.
17. $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$.
18. $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1$.
19. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, -\infty < x < +\infty$.
20. $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$.
21. $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, 0 < x < \pi$.
22. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0$.
23. $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1$.
24. $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1$.

$$25. \arcsin x = \begin{cases} -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$26. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$27. \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$28. \arccos x = \begin{cases} \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \arcsin \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$29. \arccos x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$30. \arccos x = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$31. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$32. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$33. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} - \pi, & x < 0, \\ \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$34. \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

$$35. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$36. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$37. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$38. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$39. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

$$40. \arcsin x + \arcsin y = \begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & xy < 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \\ -\arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) - \pi, & x^2 + y^2 > 1, \quad x < 0, \quad y < 0, \\ -\arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) + \pi, & x^2 + y^2 > 1, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

$$41. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} - \pi, & xy > 1, \quad x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \pi, & xy > 1, \quad x > 0. \end{cases}$$

$$42. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{1-xy}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$43. \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$44. \operatorname{arccctg} x + \operatorname{arccctg} y = \operatorname{arccctg} \frac{xy-1}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

2. Гіперболічні функції

$$1. \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

$$2. \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

$$3. \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$4. \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$5. e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x.$$

$$6. e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

$$7. \operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}.$$

$$8. \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}.$$

$$9. \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

$$10. \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x.$$

$$11. \operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}.$$

$$12. \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}.$$

$$13. \operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2\operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2\operatorname{sh}^2 x.$$

$$14. \operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y.$$

$$15. \operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y.$$

$$16. \operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}.$$

$$17. \operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}.$$

$$18. \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2\operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$$

$$19. \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2\operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}.$$

$$20. \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}.$$

$$21. \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}.$$

$$22. \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

$$23. \operatorname{arch}_+ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$24. \operatorname{arch}_- x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1}).$$

$$25. \operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$26. \operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}, \quad x \in (1; +\infty).$$

3. Основні границі

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a \in (0; +\infty).$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, \quad |q| < 1.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty, \quad |q| > 1.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n!} = 0, \quad p \in \mathbb{R}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad a \in (1; +\infty).$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0, \quad p \in \mathbb{R}, \quad a \in (1; +\infty).$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0, \quad a \in (1; +\infty).$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a, \quad a \in (0; +\infty).$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x = e.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}, \quad a \in (0; +\infty).$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} x \log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\ln a}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \ln a, \quad a \in (0; +\infty).$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\varepsilon} = 0, \beta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0; +\infty).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0, \beta \in \mathbb{R}, a \in (1; +\infty).$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1.$$

4. Таблица основних похідних

1. $(c)' = 0.$
2. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \mu \in \mathbb{R}.$
3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$
4. $(e^x)' = e^x.$
5. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0.$
6. $(\ln x)' = 1/x.$
7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1.$
8. $(\sin x)' = \cos x.$
9. $(\cos x)' = -\sin x.$
10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$
11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$
12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$
15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$
16. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$
17. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$
18. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$
19. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$
20. $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$
21. $(\operatorname{arch}_+ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$
22. $(\operatorname{arch}_- x)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$
23. $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$
24. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0.$
25. $([x])' = 0, x \neq k \in \mathbb{Z}.$
26. $(|x|)' = \operatorname{sgn} x, x \neq 0.$

5. Таблица основних інтегралів

1. $\int 0 dx = C.$
2. $\int dx = x + C.$

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$
4. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$
6. $\int e^x dx = e^x + C.$
7. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$
8. $\int \cos x dx = \sin x + C.$
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$
11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$
12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$
13. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$
14. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln|\operatorname{tg} x| + C.$
15. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$
16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$
17. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$
18. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$
19. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$
20. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

21. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$
22. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, a > 0.$
24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a \neq 0.$
25. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0.$
26. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0.$
27. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0.$
28. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a > 0.$

Список використаних джерел

1. Алексєєва І.В., Гайдей В.О., Диховичний О.О., Федорова Л.Б. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. К.: НТУУ «КПІ», 2015. 249 с.
2. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. Ч.1. Дрогобич: РВВ ДДПУ ім. І. Франка, 2013. 503 с.
3. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. Ч.2. Дрогобич: РВВ ДДПУ ім. І. Франка, 2013. 484 с.
4. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. Ч.1. 2-ге вид., доп. та перероб. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2021. 517 с.
5. Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л., Хаць Р.В. Математичний аналіз функцій однієї змінної: навчальний посібник. У 2-х ч. Ч.2. 2-ге вид., доп. та перероб. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2021. 511 с.
6. Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шепарович І.Б. Основи одновимірного комплексного аналізу: навчально-методичний посібник. Дрогобич: Швидкодрук, 2012. 273 с.
7. Грималюк В.П., Кухарчук М.М., Ясінський В.В. Вища математика. У 2-х ч.: навчальний посібник. К.: Віпол, 2004. Ч. 1. 376 с.
8. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч. К.: Вища шк., 1990. Ч.1. 380 с.; Ч.2. 1991. 365 с.; Ч.3. 1992. 360 с.
9. Денисьєвський М.О., Курченко О.О., Нагорний В.Н., Нестеренко О.Н., Петрова Т.О., Чайковський А.В. Збірник задач з математичного аналізу. Ч.1. Функції однієї змінної. К.: ВПЦ «Київський університет», 2005. 257 с.
10. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч. К.: Либідь, 1993. Ч.1. 320 с.; Ч.2. 299 с.
11. Дрогомирецька Х.Т., Каленюк П.І., Клапчук М.І., Понеділок Г.В. Математичний аналіз функцій однієї дійсної змінної. Львів: Вид-во НУ«Львівська політехніка», 2016. 589 с.
12. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика. Збірник задач: навчальний посібник. К.: А.С.К., 2005. 648 с.
13. Дубчак В.М., Новицька Л.І. Математичний аналіз: навчальний посібник. Вінниця: ВНАУ, 2022. 186 с.

14. Дюженкова Л.І., Дюженкова О.Ю., Михалін Г.О. Вища математика: Приклади і задачі. К.: Видавничий центр «Академія», 2002. 624 с.
15. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. К.: Вища шк., 2002. Ч.1. 463 с; Ч.2. 2003. 470 с.
16. Дюженкова Л.І., Носаль Т.В. Вища математика: Практикум. К.: Вища шк., 1991. 407 с.
17. Заболоцький М.В., Сторож О.Г., Тарасюк С.І. Математичний аналіз. К.: Знання, 2008. 421 с.
18. Заболоцький М.В., Федіяк С.І., Філевич П.В., Червінка К.А. Практикум з математичного аналізу: навчальний посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2009. 312 с
19. Звоздецький Т.І., Карлова О.О., Михайлюк В.В., Оніпа Д.П., Фотій О.Г. Математичний аналіз: означення, теореми та практика. Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича, 2025. 192 с.
20. Клепко В.Ю., Голець В.Л. Вища математика в прикладах і задачах: навчальний посібник. 2-ге видання. К.: Центр учбової літератури, 2009. 594 с.
21. Курпа Л.В., Лінник Г.Б., Шматко Т.В. Математичний аналіз у прикладах і задачах: навчальний посібник. Ч.1. Х.: НТУ «ХПР», 2024. 209 с.
22. Лиман Ф.М., Власенко В.Ф., Петренко С.В. Вища математика. Суми: Університетська книга, 2012. 614 с.
23. Лісовська В.П., Перестюк М.О. Вища математика. Практикум: У 2-х ч. К.: КНЕУ, 2009. Ч.1. 2009. 706 с.; Ч.2. 2012. 748 с.
24. Лютий О.І., Макаренко О.І. Збірник задач з вищої математики. К.: КНЕУ, 2003. 305 с.
25. Ляшко І.І., Смельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: У 2-х ч. К.: Вища шк., 1992. Ч.1. 495 с.; Ч.2. 1993. 375 с.
26. Михайленко В.М., Федоренко Н.Д. Збірник прикладних задач з вищої математики. Київ: Вид-во Європ. ун-ту, 2004. 121 с.
27. Пак В.В., Носенко Ю.Л. Вища математика. К.: Либідь, 1996. 440 с.
28. Панасенко Є.В., Красікова І.В., Д'яченко Н.М. Математичний аналіз: навчальний посібник: Запорізький національний університет, 2025. 93 с.
29. Пастушенко С.М., Підченко Ю.П. Вища математика: Довідник. К.: Діал, 2003. 461 с.
30. Стрижак Т.Г., Коновалова Н.Р. Математичний аналіз: приклади і задачі: навчальний посібник. К.: Либідь, 1995. 240 с.
31. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.2. Інтегральне числення функцій однієї

- змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних. Х.: ХНУРЕ, 2002. 440 с.
32. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г., Кривошеєва Г.М. та ін. Вища математика у прикладах та задачах. Ч.3. Диференціальні рівняння. Ряди. Функції комплексної змінної. Операційне числення. Х.: ХНУРЕ, 2002. 596 с.
 33. Тевяшев А.Д., Литвин О.Г. Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. 2-ге вид. доп. і доопр. Х.: Рубікон, 1999. 320 с.
 34. Тріщ Б.М. Основи вищої математики. Теореми, приклади і задачі. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2008. 403 с.
 35. Тріщ Б.М. Вища математика. Збірник індивідуальних завдань: навчальний посібник. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2020. 149 с.
 36. Хаць Р.В. Асимптотичні оцінки та їх застосування: навчальний посібник. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2023. 130 с.
 37. Хаць Р.В. Вища математика в прикладах і задачах. Ч.1. Лінійна та векторна алгебра. Аналітична геометрія: навчально-методичний посібник. Дрогобич: ДДПУ ім. І. Франка, 2025. 181 с.
 38. Чікіна Н.О., Антонова І.В., Балака Л.О. та ін. Збірник розрахунково-графічних завдань з вищої математики: У 2-х ч. Ч.1. Х.: Підручник НТУ «ХП», 2012. 224 с.
 39. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. К.: Вища шк., 2005. Ч.1. 447 с.; Ч. 2. 510 с.
 40. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: Елементи аналітичної геометрії. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. К.: Вища шк., 1984. 391 с.
 41. Шкіль М.І., Колесник Т.В., Котлова В.М. Вища математика: визначений інтеграл, функції багатьох змінних, диференціальні рівняння, ряди. К.: Вища школа, 1986. 512 с.
 42. Щерба А.І., Нестеренко А.М., Мірошкіна І.В., Щерба В.О. Математичний аналіз: навчальний посібник. Черкас. держ. технол. ун-т. Черкаси. ЧДТУ, 2023. 513 с.
 43. Adams R.A., Essex C. Calculus: Complete course. 10th edition. Toronto: Pearson Canada, 2021. 1200 p.
 44. Guichard D. Calculus: Early transcendentals. Calgary: Lyryx Learning Inc., 2021. 610 p.
 45. Howard A., Bivens I., Stephen D. Calculus. 12th edition. Wiley: John Wiley & Sons, Inc., 2022. 1152 p.
 46. Khats' R.V. Selected topics of the theory of functions: Lecture texts, practical and individual tasks. Drohobych: Drohobych Ivan Franko State Pedagogical University, 2025. 177 p.

Електронне навчально-методичне видання

**Богдан Винницький, Олександр Шаповаловський,
Володимир Шаран, Руслан Хаць**

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ: ПРИКЛАДИ І ЗАДАЧІ

Навчально-методичний посібник
для студентів спеціальностей
А4.04 «Середня освіта (Математика)», Е7 «Математика»

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

В авторській редакції

**Технічний редактор
Руслан Хаць**

Здано до набору 02.03.2026. Формат 60x90/16. Гарнітура Times. Ум. друк. арк. 24,63. Зам. 10.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 5140 від 01.07.2016 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 31.