

**Дрогобицький державний педагогічний університет  
імені Івана Франка**

**Б.В. Винницький, О.В. Шаповаловський,  
В.Л. Шаран, Р.В. Хаць**

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ  
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, Ч. 1**

Навчальний посібник  
для студентів фізико-математичних спеціальностей  
вищих навчальних закладів

**Дрогобич – 2013**

УДК 517.5(075)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів  
(лист №1/11-19869 від 17.12.13)

**Рецензенти:**

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка»;

Заболоцький М.В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка;

Лазурчак І.І., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри інформатики та обчислювальної математики Дрогобицького педагогічного університету імені Івана Франка.

**Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л, Хаць Р.В.**  
Математичний аналіз функцій однієї змінної: У 2-х ч. Частина I. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Дрогобич: ДДПУ, 2013. 503 с.

Курс побудовано за модульним принципом, він є початковим курсом і розрахований для тих спеціальностей, навчальними планами яких передбачено вивчення математичного аналізу в об'ємі 600-800 годин (15-23 залікових кредитів). Він включає лекційний матеріал, завдання для самостійного вивчення, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи та модульного контролю.

*Відповідальний за випуск  
Володимир Дільний*

© Редакційно-видавничий відділ  
Дрогобицького державного педагогічного  
університету імені Івана Франка, 2013

# Зміст

<b>Основні позначення.....</b>	<b>8</b>
<b>Вступ.....</b>	<b>9</b>
<b>Розділ 1. Множини і функції.....</b>	<b>15</b>
1. Множини.....	15
2. Відповідності.....	18
3. Поняття функції.....	18
4. Логічна символіка: висловлення, предикати, квантори.....	23
5. Множина натуральних чисел.....	30
6. Біном Ньютона.....	32
7. Множина цілих чисел.....	33
8. Множина раціональних чисел.....	34
9. Множина дійсних чисел. Принцип вкладених проміжків.....	36
10. Модуль дійсного числа.....	39
11. Скінченні і обмежені числові множини.....	40
12. Межі числових множин. Теореми про існування точної верхньої і точної нижньої меж.....	41
13. Еквівалентні множини.....	45
14. Зліченні і незліченні множини.....	45
15. Зауваження про аксіоматичну побудову математичних теорій.....	47
16. Аксіоматичне означення множини натуральних чисел.....	49
17. Поняття про конструктивну побудову множини раціональних чисел.....	50
18. Зауваження про побудову множини дійсних чисел як прорізів в множині раціональних чисел.....	51
19. Аксіоматичне означення множини дійсних чисел.....	52
20. Запитання для самоконтролю.....	55
21. Вправи і задачі теоретичного характеру.....	57
22. Вправи і задачі розрахункового характеру.....	64
23. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.....	91
<b>Розділ 2. Границя послідовності.....</b>	<b>93</b>
1. $\varepsilon$ -окіл точки.....	93

2. Послідовність.....	95
3. Означення границі послідовності. Границя сталої послідовності.....	97
4. Єдиність границі.....	102
5. Обмеженість збіжної послідовності.....	103
6. Підпослідовність.....	104
7. Граничний перехід в нерівностях.....	104
8. Нескінченно малі послідовності.....	106
9. Нескінченно великі послідовності. Нескінченні границі.....	108
10. Границі суми, добутку і частки.....	109
11. Границя монотонної послідовності. Теорема Вейерштрасса.....	115
12. Число $e$ .....	118
13. Теорема Больцано-Вейерштрасса.....	121
14. Часткова границя послідовності. Верхня і нижня границі послідовності.....	122
15. Критерій Коші збіжності послідовності.....	130
16. Зауваження про побудову множини дійсних чисел як класів фундаментальних послідовностей раціональних чисел.....	132
17. Сума членів послідовності.....	133
18. Множина десяткових дробів.....	133
19. Зображення дійсних чисел у вигляді нескінченних десяткових дробів...	135
20. Запитання для самоконтролю.....	137
21. Вправи і задачі теоретичного характеру.....	140
22. Вправи і задачі розрахункового характеру.....	146
23. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.....	163
<b>Розділ 3. Границя функції в <math>\mathbb{R}</math>.....</b>	<b>164</b>
1. Функції в $\mathbb{R}$ і їх способи задання.....	164
2. Знаходження області визначення функції.....	168
3. Звуження і продовження функцій.....	168
4. Композиція функцій.....	169
5. Елементарні функції.....	169
6. Парні і непарні функції.....	171
7. Періодичні функції.....	173
8. Монотонні функції.....	174
9. Обмежені і необмежені функції.....	176
10. Означення границі функції. Границя сталої функції.....	176
11. Теорема про еквівалентність означень границі функції на мові	

“ $\varepsilon - \delta$ ” і на мові послідовності.....	180
12. Перша важлива (визначна) границя.....	181
13. Єдиність границі функції.....	183
14. Обмеженість функції, яка має границю.....	184
15. Перехід до границі в нерівностях.....	184
16. Нескінченно малі функції.....	185
17. Нескінченно великі функції. Нескінченні границі.....	187
18. Границя суми, добутку і частки функцій.....	188
19. Однобічні границі.....	189
20. Границя в $\infty$ .....	191
21. Границя композиції функцій.....	194
22. Друга важлива (визначна) границя.....	197
23. Існування границі монотонної функції.....	201
24. Часткова границя функції. Верхня і нижня границі функції.....	202
25. Критерій Коші існування границі функції.....	205
26. Гранична точка множини. Границя функції за множиною.....	207
27. Границя по базі.....	211
28. Запитання для самоконтролю.....	212
29. Вправи і задачі теоретичного характеру.....	213
30. Вправи і задачі розрахункового характеру.....	222
31. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.....	262
<b>Розділ 4. Неперервність функції в <math>\mathbb{R}</math>.....</b>	<b>265</b>
1. Неперервність в точці функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Неперервність суми, добутку і частки.....	265
2. Неперервність композиції функцій. Граничний перехід під знаком неперервної функції.....	268
3. Однобічна неперервність. Точки розриву та їх класифікація.....	269
4. Неперервність функції за множиною.....	272
5. Неперервність функції на множині.....	275
6. Точна верхня межа функції.....	275
7. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку.....	276
8. Обернена функція.....	282
9. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора.....	286
10. Натуральний степінь дійсного числа. Неперервність одночленів, багаточленів і раціональних функцій.....	288
11. Існування кореня $n$ -го степеня. Функція $y = \sqrt[n]{x}$ , $n \in \mathbb{N}$ .....	290
12. Означення степеня з довільним раціональним показником.....	292
13. Означення степеня з довільним дійсним показником.....	292

14. Показникова функція і її неперервність.....	293
15. Існування логарифма дійсного числа. Логарифмічна функція.....	294
16. Загальна степенева функція.....	295
17. Функція $\sin$ .....	296
18. Функція $\cos$ .....	297
19. Функція $\operatorname{tg}$ .....	298
20. Функція $\operatorname{ctg}$ .....	298
21. Функція $\operatorname{arcsin}$ .....	299
22. Функція $\operatorname{arccos}$ .....	299
23. Функція $\operatorname{arctg}$ .....	300
24. Функція $\operatorname{arcctg}$ .....	301
25. Багатозначні (многозначні) функції.....	301
26. Функціональні рівняння.....	303
27. Запитання для самоконтролю.....	307
28. Вправи і задачі теоретичного характеру.....	311
29. Вправи і задачі розрахункового характеру.....	317
30. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.....	329
<b>Розділ 5. Похідна функції в <math>\mathbb{R}</math> .....</b>	<b>332</b>
1. Означення похідної. Неперервність функції, яка має похідну.....	332
2. Дотична до графіка функції. Геометричний зміст похідної.....	335
3. Механічний зміст похідної.....	338
4. Похідна сталої, суми, добутку і частки.....	339
5. Таблиця похідних основних елементарних функцій.....	342
6. Похідна композиції.....	342
7. Похідні показниково-степеневих функцій. Логарифмічна похідна.....	345
8. Похідна оберненої функції.....	346
9. Диференціал.....	348
10. Геометричний зміст диференціала. Диференціал як головна частина приросту функції.....	350
11. Інваріантність форми першого диференціала.....	351
12. Похідні вищих порядків.....	352
13. Диференціали вищих порядків.....	356
14. Параметрично задані функції та їхні похідні.....	358
15. Теореми про середнє для функцій, які мають похідну.....	360
16. Правила Лопіталя.....	363
17. Формула Тейлора для багаточлена.....	367

---

18. Формула Тейлора для довільної функції.....	369
19. Умови постійності функцій.....	375
20. Умови монотонності функцій.....	375
21. Екстремум. Необхідна умова екстремуму.....	379
22. Достатні умови екстремуму.....	381
23. Найбільше і найменше значення функції на замкненому проміжку. Глобальний максимум і глобальний мінімум.....	385
24. Опуклість і точки перегину.....	386
25. Асимптоти.....	392
26. Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків.....	393
27. Порівняння функцій. $O$ -символіка.....	396
28. Використання формули Тейлора з додатковим членом у формі Пеано для знаходження границь та асимптотичних формул.....	399
29. Поняття про наближені методи розв'язування рівнянь.....	402
30. Знаходження асимптотики обернених функцій та коренів рівнянь.....	404
31. Інтерполяція.....	409
32. Запитання для самоконтролю.....	410
33. Вправи і задачі теоретичного характеру.....	413
34. Вправи і задачі розрахункового характеру.....	427
35. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.....	470
<b>Додатки. Основні формули.....</b>	<b>479</b>
<b>Література.....</b>	<b>490</b>
<b>Іменний покажчик.....</b>	<b>494</b>
<b>Предметний покажчик.....</b>	<b>495</b>

### Основні позначення

1.  $\mathbb{N}$  – множина всіх натуральних чисел.
2.  $\mathbb{Z}$  – множина всіх цілих чисел.
3.  $\mathbb{N}_0$  або  $\mathbb{Z}_+$  – множина всіх цілих невід’ємних чисел.
4.  $\overline{n; m}$  – множина всіх цілих чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $n \leq x \leq m$ .
5.  $\mathbb{Q}$  – множина всіх раціональних чисел.
6.  $\mathbb{R}$  – множина всіх дійсних чисел.
7.  $\overline{\mathbb{R}}$  – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символами “ $-\infty$ ” і “ $+\infty$ ”.
8.  $\overline{\mathbb{R}}_0$  – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символом “ $\infty$ ”.
9.  $(a; b)$  або  $]a; b[$  – відритий проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $a < x < b$ .
10.  $[a; b]$  – замкнений проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $a \leq x \leq b$ .
11.  $(a; b]$  або  $]a; b]$  – напіввідкритий проміжок з включеним правим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $a < x \leq b$ .
12.  $[a; b)$  або  $[a; b[$  – напіввідкритий проміжок з включеним лівим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $a \leq x < b$ .
13.  $U(a; \varepsilon)$  –  $\varepsilon$ -окіл точки  $a$ , тобто  $U(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ , якщо  $a \in \mathbb{R}$ ,  
 $U(a; \varepsilon) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}_0 : |x| > \varepsilon\}$ , якщо  $a = \infty$ ,  $U(a; \varepsilon) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > \varepsilon\}$ , якщо  $a = +\infty$ , і  
 $U(a; \varepsilon) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < -\varepsilon\}$ , якщо  $a = -\infty$ .
14.  $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon)$  – проколений  $\varepsilon$ -окіл точки  $a$ , тобто  $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = U(a; \varepsilon) \setminus \{a\}$ .
15.  $f : H_1 \rightarrow H_2$  – функція або відповідність, область визначення якої належить множині  $H_1$ , а множина значень – множині  $H_2$ .
16.  $D(f)$  – область (множина) визначення функції  $f : H_1 \rightarrow H_2$ .
17.  $E(f)$  – множина значень функції  $f : H_1 \rightarrow H_2$ .
18.  $(H_1)^{(H_2)}$  – множина всіх функцій  $f : H_1 \rightarrow H_2$ .
19.  $\blacktriangleright$  – кінець доведення.
20.  $:=$  – рівне за означенням.

## Вступ

Математика розвивалась і розвивається разом з розвитком людського суспільства. Запити повсякденного життя ставили перед математиками нові проблеми, що сприяло розвитку математики. З іншого боку, нові досягнення в математиці часто ставали поштовхом до технічного та суспільного прогресу. В розвитку математики можна виділити три періоди: 1) до XVI століття; 2) XVI століття-середина XX століття; 3) друга половина XX століття по даний час. Математику першого періоду можна охарактеризувати як математику сталих величин. Математику другого періоду можна назвати математикою змінних величин. Нарешті третій період характеризується розвитком обчислювальної техніки і проникненням математики майже в усі науки і сфери життя. Сучасна математика – це сукупність ряду математичних дисциплін: геометрії, алгебри, топології, математичної логіки, математичного аналізу та інших. В математиці дуже багато ще нерозв'язаних проблем: великих і малих. Чим ближче до основ математики, тим складніші проблеми. Складають проблему відповіді на такі фундаментальні запитання, як “що таке означення?”, “що таке доведення?”, “які основні принципи лежать в основі математики?”, “чи можна використовувати нескінченні множини?” та інші. Складність відповідей на подібні запитання дає підстави не абсолютизувати математичну строгість і розглядати цю строгість як історичну категорію. З деякими менш глобальними проблемами ми стикнемося в процесі вивчення математичного аналізу. Більше того, кожен день практика ставить перед математиками нові проблеми, які часто математики не вміють розв'язати. Тому математика бурхливо розвивається. Кожного року в світі друкується тисячі статей, в яких доводиться тисячі нових теорем і нових формул. Зрозуміло, що таку кількість

теорем запам'ятати одна людина не може. В цьому зв'язку природним є питання: “що означає знати математику?” Відповідь на це питання залежить від того, кому воно адресоване. Для студента вузу на це питання можна відповісти так. Знати математику – означає: 1) засвоїти матеріал в об'ємі, який передбачений програмою своєї спеціальності; 2) вміти самостійно вивчати нові розділи математики і застосовувати їх до розв'язування практичних задач; 3) вміти використовувати сучасні комп'ютерні технології до розв'язування математичних задач. Для студентів-математиків до цього можна додати ще й таке: 4) вміти сформулювати нову математичну проблему і знайти підходи до її розв'язання. Видається, що в наш час для математика важливо також навчитися вловлювати та використовувати цілі математичні теорії, не знаючи часто їхніх деталей, тобто мислити цілими математичними теоріями як аксіомами. Взагалі, якщо в процесі вивчення математики студент дійшов до такого стану, що Сократове “я знаю, що я нічого не знаю” йому не чуже, то рівень підготовки такого студента є належним.

Характерною особливістю математики є її абстрактний характер. Завдяки цьому одні і ті ж математичні методи можна використовувати в різних науках.

Опишемо схематично взаємодію математики і інших наук. Нехай, наприклад, фізик вивчає певний фізичний процес, який характеризується величиною  $x$ . Застосувати математику до вивчення цього фізичного процесу часто означає на основі спостережень і аналізу фізичних законів прийти до висновку, що ця фізична величина  $x$  повинна задовольняти рівняння

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Якщо таке рівняння написано, то кажуть, що побудовано математичну модель розглядуваного фізичного процесу. Далі потрібно це рівняння проаналізувати, дослідити його розв'язки. Розв'язки можуть підказати нові відкриття (згадаємо про відкриття планети Нептун і позитрона). Рівняння (1) може виявитись таким, що на даний час математики не вміють його розв'язувати. В результаті виникає нова математична проблема. Може статися, що розв'язки рівняння (1) не узгоджуються з експериментами. Тоді або рівняння (1) слід замінити іншим, або піддати критичному аналізу ті фізичні принципи, які лежать в основі написання рівняння (1), або вдосконалювати експерименти.

Математичний аналіз – це розділ математики, який вивчає властивості функцій за допомогою границь. Він зародився в XVII столітті в роботах Ньютона і Лейбніца під впливом фізичних та інших задач. Розглянемо деякі ідеї, які лежать в основі математичного аналізу. Якщо матеріальна точка,

рухаючись рівномірно і прямолінійно, за час  $t$  пройшла шлях  $S$ , то її швидкість в будь-який момент часу є сталою і  $v = S/t$ . Якщо ж матеріальна точка, рухаючись прямолінійно і нерівномірно, тобто з прискоренням, за час  $t$  пройшла шлях  $S(t)$ , то її швидкість не буде сталою і для знаходження швидкості в якийсь момент часу  $t_0$  природно поступити так. Візьмемо малий проміжок часу  $\Delta t$ . За проміжок часу від  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  матеріальна точка пройде шлях  $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$ . Якщо  $\Delta t$  є малим, то приблизно можна вважати, що на проміжку часу від  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  точка рухалась прямолінійно і рівномірно і її швидкість приблизно рівна  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ . Ми знайдемо швидкість в момент часу  $t_0$  тим точніше, чим меншим є  $\Delta t$ . Тому за швидкість матеріальної точки в момент часу  $t_0$  приймають величину, до якої наближається частка  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ , коли  $\Delta t$  наближається до нуля. Так ми приходимо до поняття границі і похідної – основних понять математичного аналізу. Якщо ми б захотіли знайти пройдений матеріальною точкою шлях за її швидкістю, то ми б прийшли до поняття інтеграла. Це ще одне поняття, яке вивчається в математичному аналізі.

Математичний аналіз є досить складним розділом математики. Його складність пов'язана в значній мірі з тим, що він має справу з нескінченними процесами, для освоєння яких потрібні певні навички. Часто математичний аналіз називають численням нескінченно малих. Ця назва віддзеркалює основний метод математичного аналізу, суть якого можна описати так. Для вивчення складного процесу його розбивають на "дуже" малі частинки (явища, об'єкти), після вивчення яких висновок про властивості вихідного об'єкту отримують, використовуючи властивості границь та сум.

Можна також сказати, що математичний аналіз – це наука про дійсні числа. Проте починати вивчення математичного аналізу з побудови завершеної теорії дійсних чисел нам видається недоцільним. Разом з цим, в ході вивчення математичного аналізу, студент повинен отримати досить повну уяву про можливі підходи до побудови теорії дійсних чисел.

Цей курс побудовано за модульним принципом, він є початковим курсом і розрахований для тих спеціальностей, навчальними планами яких передбачено вивчення математичного аналізу в об'ємі 600-800 годин (15-23 залікових кредитів). Він включає лекційний матеріал, завдання для самостійного вивчення, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи та модульного контролю і є

результатом досвіду роботи за кредитно-модульною системою. Ми вважаємо, що можливими є декілька підходів до контролю знань. Один з них передбачає, що з кожного модуля студент здає і захищає індивідуальні завдання, які містять як задачі теоретичного характеру, так і задачі розрахункового характеру, пише математичний диктант, в результаті якого перевіряється володіння основними поняттями і фактами розділу, пише модульну контрольну роботу. Другий з них передбачає, що протягом семестру студент пише лише три-чотири модульні контрольні роботи і при цьому не може користуватись даним підручником. За третього підходу протягом семестру студент пише лише три-чотири модульні контрольні роботи і при цьому може користуватись даним підручником. Можливими є різні поєднання цих підходів. Перший підхід передбачає, що студент повинен відносно мало пам'ятати, проте повинен бути знайомий з багатьма курсами і вміти самостійно розбиратись в них. Другий підхід є традиційним в нас і орієнтований на відтворення прослуханого. Третій підхід не передбачає, що студент повинен щось завчати на пам'ять. Він орієнтований на вміння використовувати відомий метод до розв'язування модифікованої проблеми. Найкращим на наш погляд є перший підхід, проте в наших умовах із-за великого навчального навантаження викладачів його здійснити важко. Ми, однак, зорієнтовані більше на нього. Проте, курс написано так, що в рамках нього можна здійснити кожен з цих підходів. При цьому на початку кожного семестру студент повинен бути ознайомлений з правилами гри та з переліком тих задач і теорем, які він повинен знати. В курсі досить багато задач. Задачі теоретичного характеру можна використати як індивідуальні завдання або як завдання для модульної контрольної роботи за третього підходу до контролю. Вправи і задачі розрахункового характеру розбиті на групи. Якщо у відповідній групі є більше тридцяти задач, то на перші тридцять ми дивимось як на індивідуальні завдання або як на завдання для модульної контрольної роботи (**в аудиторії потрібно починати розв'язувати з № 31**). За допомогою сучасних комп'ютерних математичних пакетів можна розв'язувати різноманітні рівняння, знаходити границі, інтеграли, суми рядів, будувати графіки функцій та багато іншого. Без володіння такими технологіями не можливе нове математичне творення сучасного рівня. Тому вміння користуватись ними повинно включатись в оцінку знань студентів. Це можна робити, наприклад, вимагаючи, щоб разом з індивідуальними завданнями студент подав комп'ютерну версію розв'язання задачі.

Термін “математичний аналіз” вживається в широкому розумінні та в вузькому розумінні. В широкому розумінні він включає і такі математичні дисципліни як теорія множин, функціональний аналіз, диференціальні та

інтегральні рівняння, варіаційне числення, топологія, диференціальна геометрія, комплексний аналіз та інші. У вузькому розумінні – це диференціальне та інтегральне числення функцій однієї і багатьох дійсних змінних. Даний курс стосується математичного аналізу у вузькому розумінні. Проте вивчення математичного аналізу в вузькому розумінні не можливе без наведення мостів до згаданих вище розділів математики та врахування їхніх інтересів.

При побудові курсу математичного аналізу хочеться почати з основ математики, теорії множин, математичної логіки і, особливо, ґрунтовно викласти теорію дійсних чисел. Але дійшовши до теорем Геделя починаєш розуміти, що математику не можна побудувати на основі скінченної кількості аксіом та правил виводу, а викласти на початку курсу достатньо повну теорію дійсних чисел не можливо, оскільки математичний аналіз в значній мірі і є теорією дійсних чисел, а для викладу теорії дійсних чисел потрібно добре володіти методами математичного аналізу. Тому на початковому етапі вивчення предмету доцільніше, на наш погляд, вважати, що студент вчився в школі і щось про дійсні числа знає, доповнити його знання принципом вкладених проміжків і на основі цього освоювати основні методи математичного аналізу, в процесі чого вказувати на можливі підходи до принципів, які лежать в основі предмету, надіючись, що в кінці курсу студент зрозуміє якою насправді повинна бути правильна послідовність, якщо така існує, вивчення понять предмету.

Часто можна почути думку проте, що в підручнику повинно бути тільки те, що студент повинен здавати. З такою думкою важко погодитись повністю. Справді, студент повинен чітко знати, що йому потрібно здавати (перелік теорем, типів прикладів, пунктів, розділів і т.д.). Але при вивченні будь-якого предмету слід дбати про формулювання фактів в найзагальнішому вигляді, широкий світогляд, взаємозв'язки з іншими розділами математики та її застосуваннями. Подібні речі важко викладати і важко здавати, але можна засвоїти їх на рівні: чув, десь бачив, зумів використати до розв'язування задачі користуючись книжкою тощо. Взагалі, те що повинен засвоїти студент на такому рівні повинно значно переважати те, що він повинен засвоїти на рівні пам'ятати, а при викладі будь-якого предмету не варто забувати Ньютонове висловлення про те, що при вивченні наук приклади корисніші правил.

Декілька зауважень стосовно позначень та термінології. Ми надаємо перевагу зручності перед правильністю при використанні позначень, особливо це стосується позначень для функцій. Ми використовуємо крапку з комою замість коми, як це в основному прийнято, для запису множин та

проміжків (один зі співавторів у свій час мав серйозні проблеми записавши множину розв'язків рівняння правильно у вигляді  $\{3,5,5\}$ , тобто  $\{3,5;5\}$ , а потім прочитавши неправильно  $\{3;5,5\}$ ). Через  $\overline{n;m}$  позначаємо множину всіх цілих чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $n \leq x \leq m$ , і пишемо у відповідних місцях  $i \in \overline{n;m}$ , а не  $i = \overline{n;m}$ , як це часто буває. Якщо  $f: H_1 \rightarrow H_2$  – функція, то ми не вважаємо, що її область визначення  $D(f)$  необов'язково співпадає з  $H_1$ , тобто включення  $D(f) \subset H_1$  може бути строгим. Функцію  $y = ax + b$  ми називаємо, як це прийнято в геометрії, афінною, а не лінійною, як це часто буває (вона ж не володіє властивостями лінійного відображення), а функцію  $y = ax$  називаємо лінійною. Ми старались розділити поняття границі і неперервності функції (границі і неперервності по множині  $\mathbb{R}$ ) і границі та неперервності по деякій множині  $H$  (інколи відсутність вказівок про множину  $H$  веде до непорозумінь). Ми розрізняємо, проте не дуже афішуємо, поняття границі і числа, яке є границею (без такого розділення можна зауважити деяку незручність в означенні похідної, інтеграла та й при розгляді самих границь). При виборі означень, ми надаємо часто перевагу доступності перед правильністю і свідомі того, що всі потрібні означення сформулювати неможливо, як і неможливо довести всі потрібні теореми.

Курс поділено на розділи, а розділи на пункти. Ті пункти, назви яких набрано похилим шрифтом, доцільно, на наш погляд, вивчати на оглядовому рівні, якщо мова йде про початковий курс.

Ми передбачили можливу критику за спосіб використання логічних символів. Ця критика пом'якшується зручністю і відповідними домовленостями. Підставою для критики може бути спосіб введення точок розриву, використання означення границі за множиною  $\mathbb{R}$  як основного, ряд моментів, пов'язаних з введенням дійсних чисел, хаотичність вправ теоретичного характеру тощо. Проте поле для критики не обмежується цим і є дуже багатим. Ми б були дуже вдячні за відповідні критичні думки.

Адреса для зв'язку: 82100, Львівська обл., м. Дрогобич, вул. Стрийська 3, Інститут фізики, математики та інформатики, кафедра математичного аналізу.

E-mail: [math\\_analysis@ukr.net](mailto:math_analysis@ukr.net)

## Розділ 1. Множини і функції

Математичний аналіз (в широкому розумінні цього терміну) як наука включає в себе багато розділів і, зокрема, теорію дійсних чисел і теорію множин. Більше того, ці важкі з філософської точки зору розділи лежать в основі математичного аналізу як науки. З іншого боку, методи математичного аналізу використовуються для обґрунтування властивостей множин і, зокрема, множини дійсних чисел, чому і присвячений даний і в значній мірі наступний розділ. Тому на першому етапі вивчення математичного аналізу як предмету доцільно вивчати його не в зовсім природній послідовності, що можна помітити нижче. Проте сподіваємось, що оволодівши методами математичного аналізу читач з викладеного нижче отримає достатнє уявлення про факти, які лежать в основі предмету, про методи, їх обґрунтування та багатогранні зв'язки з іншими розділами науки.

**1. Множини.** Множина – це первісне математичне поняття в так званій наївній теорії множин і йому означення не дається. Множину уявляють собі як сукупність елементів певної природи. Множини позначають, як правило, великими латинськими літерами:  $A, B, C, \dots$ . Деякі множини мають спеціальні позначення:  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  – це множини відповідно натуральних, цілих, раціональних, дійсних і комплексних чисел. Множина складається з певних елементів. Якщо множина  $A$  складається з елементів  $a, b, c$ , то це записується так:  $A = \{a; b; c\}$ . Якщо множина  $A$  складається з елементів  $x$ , які мають властивість  $p(x)$ , то це записують так:  $A = \{x : p(x)\}$ . Наприклад,  $A = \{x : x^2 - 4 > 0\}$ . Якщо ж множина  $A$  складається з елементів  $x$  множини  $H$ , які мають властивість  $p(x)$ , то це записують так:  $A = \{x \in H : p(x)\}$ . Наприклад,

$A = \{x \in [0;1] : x^2 - 4 > 0\}$ . Множина  $\emptyset$ , яка не містить жодного елемента, називається порожньою. Якщо елемент  $x$  належить множині  $A$ , то це записують так:  $x \in A$ . Якщо елемент  $x$  не належить множині  $A$ , то це записують так:  $x \notin A$  або  $x \bar{\in} A$ . Якщо кожний елемент множини  $A$  є і елементом множини  $B$ , то множина  $A$  називається підмножиною  $B$  і це записують так:  $A \subset B$  або  $B \supset A$ . Дві множини називаються рівними, якщо вони складаються з однакових елементів. Множина  $A \cap B$ , яка складається з всіх спільних елементів множин  $A$  і  $B$  називається перетином множин  $A$  і  $B$ . Множину  $A \cup B$ , яка складається з тих елементів, які належать принаймні одній з множин  $A$  і  $B$ , називають об'єднанням множин  $A$  і  $B$ . Множина  $A \setminus B$ , яка складається з тих елементів множини  $A$ , які не належать множині  $B$ , називається різницею множин  $A$  і  $B$ . Якщо  $a \in A$  і  $b \in B$ , то пару елементів  $a$  і  $b$ , записану у вигляді  $(a;b)$  називають упорядкованою парою і при цьому пари  $(a_1;b_1)$  і  $(a_2;b_2)$  називають рівними, якщо  $a_1 = a_2$  і  $b_1 = b_2$ . Множина, елементи якої є всі упорядковані пари  $(a;b)$ , де  $a \in A$  і  $b \in B$ , називається декартовим або прямим добутком множин  $A$  і  $B$  і позначають  $A \times B$ .

Добуток  $A \times A$  називають декартовим квадратом множини  $A$  і позначають через  $A^2$ . Зокрема,  $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  – це множина усіх упорядкованих пар  $(x;y)$  дійсних чисел, тобто  $\mathbb{R}^2 = \{(x;y) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ . Аналогічно визначається множина  $\mathbb{R}^3 = \{(x;y;z) : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$  – це множина усіх упорядкованих трійок  $(x;y;z)$  дійсних чисел і множина  $\mathbb{R}^n = \{(x_1;x_2;\dots;x_n) : x_1 \in \mathbb{R}; \dots; x_n \in \mathbb{R}\}$  – множина всіх упорядкованих наборів із  $n$  дійсних чисел. Множина, елементами якої є числа (дійсні чи комплексні) називається числовою множиною. Множина, яка складається з нескінченної кількості елементів, називається нескінченною.

Сумою двох числових множин  $A$  і  $B$  називається множина  $A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$ . Сумою числової множини  $A$  і числа  $a$  називається множина  $A + a = \{x + a : x \in A\}$ , тобто  $A + a = A + \{a\}$ . Добутком двох числових множин  $A$  і  $B$  називається множина  $A \cdot B = \{xy : x \in A, y \in B\}$ . Добутком числа  $a$  і числової множини  $A$  називається множина  $a \cdot A = \{ax : x \in A\}$ , тобто  $a \cdot A = \{a\} \cdot A$ .

**Зауваження 1.** Якщо  $A$  – числова множина, то інколи через  $A^2$  позначають також множину  $A^2 = \{a^2 : a \in A\}$ , тобто множину, яка складається з всіх квадратів елементів множини  $A$ . Використовується

також позначення  $A^2 = A \cdot A$ . Останнє зустрічається, зокрема, в комплексному аналізі. Зрозуміло, що  $A \cdot A \neq A \times A$ ,  $A \cdot A \neq \{a^2 : a \in A\}$  і  $A \times A \neq \{a^2 : a \in A\}$ .

**Приклад 1.**  $A \cup B = B \cup A$ .

**Приклад 2.**  $A \cap B = B \cap A$ .

**Приклад 3.**  $A \cup \emptyset = A$ .

**Приклад 4.**  $A \cap \emptyset = \emptyset$ .

**Приклад 5.**  $A \subset B$  і  $B \subset A$ , то  $A = B$ .

**Приклад 6.**  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ . Справді, якщо  $x \in A \cup (B \cup C)$ , то  $x \in A$  або  $x \in B \cup C$ . Якщо  $x \in A$ , то  $x \in A \cup B$  і тому  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Якщо  $x \in B \cup C$ , то  $x \in B$  або  $x \in C$ . Якщо  $x \in B$ , то  $x \in A \cup B$  і тому  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Якщо  $x \in C$ , то  $x \in (A \cup B) \cup C$ . Тому  $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$ . Якщо  $x \in (A \cup B) \cup C$ , то  $x \in C$  або  $x \in A \cup B$ . Якщо  $x \in C$ , то  $x \in B \cup C$  і тому  $x \in A \cup (B \cup C)$ . Якщо  $x \in A \cup B$ , то  $x \in A$  або  $x \in B$ . Якщо  $x \in A$ , то  $x \in A \cup (B \cup C)$ . Якщо  $x \in B$ , то  $x \in B \cup C$  і  $x \in A \cup (B \cup C)$ . Тому  $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ . Таким чином,  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ . Подібно доводяться інші формули.

**Приклад 7.** Якщо  $A = \{2; 4; c\}$  і  $B = \{1; 4; c; 5\}$ , то  $A \cup B = \{1; 2; 4; c; 5\}$ ,  $A \cap B = \{4; c\}$ ,  $A \setminus B = \{2\}$  і  $B \setminus A = \{1; 5\}$ .

**Приклад 8.** Якщо  $A = \{3; 5\}$  і  $B = \{1; 2; 3\}$ , то  $A \times B = \{(3; 1); (3; 2); (3; 3); (5; 1); (5; 2); (5; 3)\}$ ,  $A \cdot B = \{3; 6; 9; 5; 10; 15\}$  і  $A + B = \{4; 5; 6; 7; 8\}$ .

**Приклад 9.** Якщо  $A = \{4; 6\}$ , то  $3 \cdot A = \{12; 18\}$ .

**Зауваження 2.** Упорядкованою парою  $(a_1; a_2)$ , де  $a_1 \in H_1$  і  $a_2 \in H_2$  називається множина  $\{\{a_1\}; \{a_1; a_2\}\}$ . Упорядкованою трійкою  $(a_1; a_2; a_3)$ , де  $a_1 \in H_1$ ,  $a_2 \in H_2$  і  $a_3 \in H_3$  називається множина  $\{\{a_1\}; \{a_1; a_2\}; \{a_1; a_2; a_3\}\}$ . Аналогічно визначається упорядкований набір  $(a_1; a_2; \dots; a_n)$  з  $n$  елементів  $a_j \in H_j$ .

**Зауваження 3.** Говорячи вище про множини, ми знаходились в рамках наївної теорії множин, тобто в тому підході, в якому поняттю множини не

дається означення, а тільки роз'яснюється на прикладах. Насправді, є різні аксіоматичні теорії множин, в яких поняття множини визначається. При цьому виявляється, що не кожен сукупність елементів можна вважати множиною. Наприклад, такою є множина всіх множин.

**2. Відповідності.** Елементам однієї множини  $H_1$  можна різними способами ставити у відповідність елементи іншої множини  $H_2$ . Відповідністю  $f: H_1 \rightarrow H_2$  або відношенням, або багатозначною функцією з множини  $H_1$  в  $H_2$  називається будь-яка не порожня множина  $f$  упорядкованих пар  $(x; y)$ , де  $x \in H_1$  і  $y \in H_2$ . Якщо  $(x; y) \in f$ , то кажуть, що елемент  $y \in H_2$  відповідає елементу  $x \in H_1$  або є образом елемента  $x \in H_1$ . При цьому елемент  $x \in H_1$  називається прообразом елемента  $y \in H_2$ . Образ  $x$  позначається через  $f(x)$ , а прообраз  $y$  через  $f^{-1}(y)$ . Якщо  $H_1 = H_2 = H$ , то відповідність  $f: H \rightarrow H$  називають відповідністю в  $H$ .

**Приклад 1.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  дійсне число  $y$ , для якого  $y^2 = x$ . Отримаємо відповідність в  $\mathbb{R}$ . При цьому, кожному  $x \in (0; +\infty)$  відповідає два  $y \in \mathbb{R}$ ,  $x = 0$  відповідає одне  $y \in \mathbb{R}$  і кожному  $x \in (-\infty; 0)$  не відповідає жодне  $y \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 2.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  дійсне число  $y$ , для якого  $x = \sin y$ , отримаємо відповідність в  $\mathbb{R}$ . При цьому, кожному  $x \in [-1; 1]$  відповідає нескінченна кількість  $y \in \mathbb{R}$  і кожному  $x \notin [-1; 1]$  не відповідає жодне  $y \in \mathbb{R}$ .

**3. Поняття функції.** Розглядаючи різні відповідності бачимо, що деяким елементам множини  $H_1$  може відповідати один або більше елементів множини  $H_2$  і можуть бути такі елементи множини  $H_1$ , яким не відповідає жодний елемент множини  $H_2$ . Функцією з множини  $H_1$  в множину  $H_2$  називається така відповідність з множини  $H_1$  в множину  $H_2$ , за якої кожному елементу множини  $H_1$  відповідає не більше одного елемента множини  $H_2$ . Таким чином, функція з множини  $H_1$  в множину  $H_2$  – це така непорожня множина  $f$  упорядкованих пар  $(x; y)$ , де  $x \in H_1$  і  $y \in H_2$ , що з умов  $(x_1; y_1) \in f$  і  $(x_1; y_2) \in f$  випливає, що  $y_1 = y_2$ . Функції з  $H_1$  в  $H_2$  позначають символами  $f: H_1 \rightarrow H_2$ ,  $H_1 \xrightarrow{\psi} H_2$ ,  $\gamma: H_1 \rightarrow H_2$  або коротше  $f$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $x \rightarrow f(x)$  і т.д. Сукупність  $D(f)$  тих елементів множини  $H_1$ , яким відповідає один елемент множини  $H_2$  називається множиною або областю визначення функції  $f$ , а сукупність  $E(f)$

тих елементів множини  $H_2$ , які відповідають принаймні одному елементу множини  $H_1$ , називається множиною значень функції  $f$ . Таким чином,  $f(x)$  – це значення функції  $f: H_1 \rightarrow H_2$  в точці  $x$ . Інколи пишуть  $fx$  або  $f(t)|_{t=x}$  замість  $f(x)$ . Якщо  $f: H_1 \rightarrow H_2$  – деяка функція і  $y = f(x)$ , то  $y$  називається образом елемента  $x$ , а  $x$  прообразом елемента  $y$ . Упорядковані пари  $(x; y)$ , де  $x \in D(f)$  і  $y = f(x)$ , називають точками функції  $f: H_1 \rightarrow H_2$ . Якщо  $f: H_1 \rightarrow H_2$  – деяка функція і  $E_1 \subset H_1$ , то  $f(E_1)$  – це образ множини  $E_1$ , тобто  $f(E_1) = \{y \in H_2 : y = f(x), x \in E_1\}$ . Якщо  $f: H_1 \rightarrow H_2$  – деяка функція і  $E_2 \subset H_2$ , то  $f^{-1}(E_2)$  – це прообраз множини  $E_2$ , тобто  $f^{-1}(E_2) = \{x \in H_1 : y = f(x) \in E_2\}$ . Кажуть, що функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  відображає множину  $E_1 \subset H_1$  в множину  $E_2 \subset H_2$ , якщо  $f(E_1) \subset E_2$ . Кажуть, що функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  відображає множину  $E_1 \subset H_1$  на множину  $E_2 \subset H_2$ , якщо  $f(E_1) = E_2$ . Терміни “функція”, “відображення”, “оператор” – це синоніми. Якщо  $E(f)$  – числова множина, то таку функцію  $f$  називають числовою функцією або функціоналом. Функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  називається сур’єкцією або накриттям, якщо  $E(f) = H_2$ . Функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  називається оборотною (однолистою, ін’єкцією), якщо образами різних елементів із  $H_1$  є різні елементи множини  $H_2$ . Інакше можна сказати, що функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  називається оборотною, якщо для кожного  $y \in E(f)$  рівняння  $f(x) = y$  має єдиний розв’язок  $x \in D(f)$ , тобто якщо з рівності  $f(x_1) = f(x_2)$  випливає, що  $x_1 = x_2$ . Взаємо однозначною відповідністю між множинами  $H_1$  і  $H_2$  або бієкцією між  $H_1$  і  $H_2$  називається така оборотна функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$ , для якої  $D(f) = H_1$  і  $E(f) = H_2$ . Функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  є бієкцією між  $H_1$  і  $H_2$  тоді і тільки тоді, коли вона є сур’єкцією, ін’єкцією і  $D(f) = H_1$ . В математичному аналізі вивчаються різні інші класи функцій: послідовності, тобто функції  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , дійсні функції однієї дійсної змінної, тобто функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , дійсні функції двох дійсних змінних, тобто функції  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , дійсні функції трьох дійсних змінних, тобто функції  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ , дійсні функції  $n$  дійсних змінних, тобто функції  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , векторні функції  $n$  дійсних змінних, тобто функції  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  і т.д. Такі ж функції з іншої точки зору вивчаються в геометрії (рівняння кривих та поверхонь задаються такими функціями), в алгебрі (рівняння і системи рівнянь задаються такими ж функціями) та в інших розділах математики. Графіком функції  $f: H_1 \rightarrow H_2$  в множині  $H_1 \times H_2$  називається упорядкована пара  $\text{graf}(f) = (f; H_1 \times H_2)$ . Коли

вживають терміни “графік функції”, то мають на увазі певне геометричне зображення точок функції. Наприклад, функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  часто зображають точками евклідової площини у відповідній системі координат.

**Зауваження 1.** Ще раз підкреслимо, що  $f(x)$  – це образ елемента  $x$ . Коли кажуть “розглянемо функцію  $f(x)$ ” або “розглянемо функцію  $y = f(x)$ ”, то це слід розуміти так. Розглядається така функція, для якої образом елемента  $x \in$  елемент  $y = f(x)$ . Наприклад, якщо говорити, що розглянемо функцію  $y = \sin(x)$ , то розуміємо, що розглядається функція  $\sin: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої образом кожного дійсного числа  $x \in$  число  $y = \sin(x)$ .

**Зауваження 2.** Згідно з означенням, якщо задана функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$ , то задано множини  $H_1$  і  $H_2$ , множину визначення функції  $D(f) \subset H_1$  і її множину значень  $E(f) \subset H_2$ . Проте, в дійсності так буває рідко. Частіше в математичному аналізі функція  $f$  задається деякою формулою  $y = f(x)$  і її множина визначення складається, якщо не вказано на інше, з тих  $x$ , для яких ця формула має зміст. При цьому множину визначення і множину значень функції потрібно знаходити. Для цього, потрібно провести дослідження функції. Розробка методів дослідження функцій є одним із основних завдань математичного аналізу. Якщо деяка функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  задана формулою  $y = f(x)$ , то  $x$  називають інколи незалежною змінною або аргументом функції, а  $y$  – залежною змінною. Інколи при розгляді функції  $f: H_1 \rightarrow H_2$ , визначеної формулою  $y = f(x)$ , множина  $H_1$  вказується. Від вибору множин  $H_1$  в значній мірі залежать властивості такої функції  $f$ .

**Приклад 1.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  дійсне число  $x^2$ . Така відповідність  $f: x \rightarrow x^2$  є функцією із  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , тобто є функцією в  $\mathbb{R}$ . Її позначають  $f(x) = x^2$  або  $y = x^2$ . Ця функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не є оборотною, оскільки  $f(-2) = f(2) = 4$ . Разом з цим, функція  $f$ , визначена формулою  $y = x^2$ , є оборотною як функція з  $[0; +\infty)$  в  $\mathbb{R}$ . Для неї  $D(f) = E(f) = [0; +\infty)$ .

**Приклад 2.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  дійсне число  $y$ , яке є розв’язком рівняння  $y^2 = x$ . Така відповідність не є функцією в  $\mathbb{R}$ . Проте, така відповідність є функцією в  $[0; +\infty)$ . Її позначають  $f(x) = \sqrt{x}$  або  $y = \sqrt{x}$ . Для неї  $D(f) = E(f) = [0; +\infty)$ .

**Приклад 3.** Кожному дійсному числу  $x$  поставимо у відповідність число  $y$ , яке розв'язком рівняння  $\sin y = x$ . Така відповідність не є функцією в  $\mathbb{R}$ , але є функцією з  $\mathbb{R}$  в  $[-\pi/2; \pi/2]$ .

**Приклад 4.** Кожному дійсному числу  $x$  поставимо у відповідність число  $y = \sin x$ . Така відповідність є функцією в  $\mathbb{R}$ . При цьому,  $\sin(\mathbb{R}) = [-1; 1]$  і  $\sin^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .

**Приклад 5.** Кожному дійсному числу  $x$  поставимо у відповідність число  $y = \sqrt[4]{x}$ . Така відповідність  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є функцією в  $\mathbb{R}$ . При цьому,  $D(f) = E(f) = [0; +\infty)$ ,  $f(\mathbb{R}) = [0; +\infty)$  і  $f^{-1}(\mathbb{R}) = [0; +\infty)$ .

**Приклад 6.** Функції  $y = 2x$  та  $y = e^x$ , як функції з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , є оборотними.

**Приклад 7.** Функції  $y = \operatorname{tg} x$  та  $y = \sin x$ , як функції з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , не є оборотними.

**Приклад 8.** Функція  $y = \sin x$ , як функція з  $[-\pi/2; \pi/2]$  в  $\mathbb{R}$ , є оборотною.

**Приклад 9.** Функція  $y = \operatorname{tg} x$ , як функція з  $(-\pi/2; \pi/2)$  в  $\mathbb{R}$ , є оборотною.

**Приклад 10.** Якщо  $f(x) = 2x$ , то  $f([0; 3)) = [0; 6)$ .

**Приклад 11.** Якщо  $f(x) = 2\sin x$ , то  $f([-\pi/2; 7\pi/2)) = [-2; 2]$ .

**Приклад 12.** Формула  $z = x^2 + y^2$  задає функцію двох дійсних змінних, тобто функцію з  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 13.** Формула  $u = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$  задає функцію трьох дійсних змінних, тобто функцію з  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 14.** Формула  $y = x_1 + x_2 + \dots + x_n$  задає функцію  $n$  дійсних змінних, тобто функцію з  $\mathbb{R}^n$  в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 15.** Кожному прямому прямокутному паралелепіпеду (множину таких паралелепіпедів позначимо через  $H_1$ ) з ребрами  $x$ ,  $y$  та  $z$  поставимо у відповідність його об'єм  $V = xyz$ . Отримаємо функцію  $f: H_1 \rightarrow \mathbb{R}$ . Разом з

цим формула  $V = xyz$  задає функцію трьох дійсних змінних, тобто функцію з  $\mathbb{R}^3$  в  $\mathbb{R}$ .

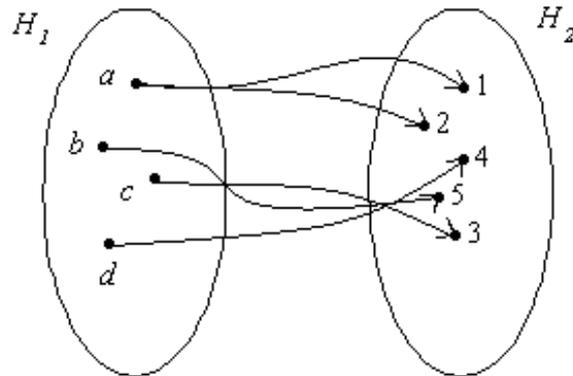


Рис. 1.

**Приклад 16.** Відповідність  $f: H_1 \rightarrow H_2$ , зображена на рисунку 1, не є функцією з  $H_1$  в  $H_2$ .

**Приклад 17.** Відповідність  $f: H_1 \rightarrow H_2$ , зображена на рисунку 2, є функцією з  $H_1$  в  $H_2$ . Для неї  $D(f) = \{a; b; d\}$  і  $E(f) = \{1; 4\}$ .

**Зауваження 3.** Поняття функції відображає факт залежності одних величин від інших. Проте, є певні труднощі з вибором кращого означення цього поняття. Щоб задати функцію  $f: H_1 \rightarrow H_2$  досить вказати її область визначення  $D(f)$  та правило, за яким кожному  $x \in D(f)$  ставиться у відповідність елемент  $y \in H_2$ . Приведене вище означення не є загально прийнятим. В літературі зустрічаються і інші.

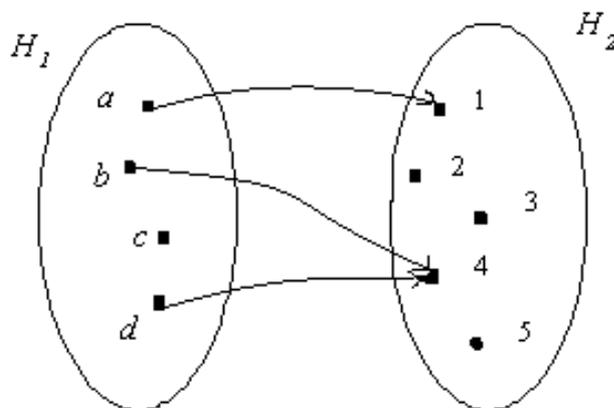


Рис. 2.

**Приклад 18.** Нехай в декартовій системі координат  $XOY$  на площині зображено графік функції в  $\mathbb{R}$ , заданої формулою  $y = f(x)$ . Тоді для отримання графіка функції: 1)  $y = f(x) + A$ , де  $A > 0$ , потрібно перенести по осі  $OY$  графік функції  $y = f(x)$  на  $A$  одиниць уверх; 2)  $y = f(x) - A$ , де  $A > 0$ , потрібно перенести по осі  $OY$  графік функції  $y = f(x)$  на  $A$  одиниць униз; 3)  $y = -f(x)$  потрібно здійснити симетрію графіка функції  $y = f(x)$  відносно осі  $OX$ ; 4)  $y = |f(x)|$  потрібно здійснити симетрію частини графіка функції  $y = f(x)$ , яка лежить під віссю  $OX$ , відносно осі  $OX$ ; 5)  $y = kf(x)$ , де  $k > 1$ , потрібно розтягнути в  $k$  раз графік функції  $y = f(x)$  вздовж осі  $OY$  відносно осі  $OX$ ; 6)  $y = kf(x)$ , де  $0 < k < 1$ , потрібно стиснути в  $k$  раз графік функції  $y = f(x)$  вздовж осі  $OY$  відносно осі  $OX$ ; 7)  $y = f(x - b)$ , де  $b > 0$ , потрібно перенести по осі  $OX$  графік функції  $y = f(x)$  на  $b$  одиниць вправо; 8)  $y = f(x + b)$ , де  $b > 0$ , потрібно перенести по осі  $OX$  графік функції  $y = f(x)$  на  $b$  одиниць вліво; 9)  $y = f(-x)$  потрібно здійснити симетрію графіка функції  $y = f(x)$  відносно осі  $OY$ ; 10)  $y = f(|x|)$  потрібно зобразити частину графіка  $y = f(x)$ , яка відповідає додатному  $x$ , а потім додати до неї ще її симетрію відносно осі  $OY$ ; 11)  $y = f(kx)$ , де  $k > 1$ , потрібно стиснути в  $k$  раз графік функції  $y = f(x)$  вздовж осі  $OX$  відносно осі  $OY$ ; 12)  $y = f(kx)$ , де  $0 < k < 1$ , потрібно розтягнути в  $k$  раз графік функції  $y = f(x)$  вздовж осі  $OX$  відносно осі  $OY$ ; 13)  $y = f(k(x + b/k))$ , зобразити графік функції  $y = f(kx)$ , а потім його зсунути вздовж осі  $OX$  на  $-b/k$  одиниць.

**4. Логічна символіка: висловлення, предикати, квантори.** Для скорочення запису математичних текстів зручно використовувати певні символи. Ці символи докладніше вивчаються в інших курсах (математичній логіці, аксіоматичній теорії множин, основах математики). Наш спосіб використання розглядуваних символів є дещо формальним, але він є зручним, відповідає живій мові, а відповідними домовленостями його можна узгодити з правильним використанням.

Висловлення – це твердження  $p$ , про яке можна говорити, що воно є істинним або є хибним. При цьому пишуть, що  $p = 1$ , якщо  $p$  є істинним, і  $p = 0$ , якщо  $p$  є хибним. Запереченням висловлення  $p$  називають таке висловлення  $\bar{p}$ , яке є істинним тоді, коли  $p$  є хибним і є хибним, коли  $p$  є істинним.

**Приклад 1.** Твердження “Хай буде дощ” не є висловленням.

**Приклад 2.** Твердження “Вчора я ходив на стадіон” є висловленням. Його запереченням є висловлення “Вчора я не ходив на стадіон”.

**Приклад 3.** Якщо  $p = (2 < 3)$ , то  $\bar{p} = (2 \geq 3)$ . При цьому,  $(2 < 3) = 1$  і  $(2 \geq 3) = 0$ .

**Приклад 4.** Якщо  $p = (2 = 3)$ , то  $\bar{p} = (2 \neq 3)$ . При цьому  $p = 0$  і  $\bar{p} = 1$ .

Предикатом називається таке твердження, яке містить змінну і яке перетворюється у висловлення для кожного конкретного значення змінної. Змінна  $x$  приймає значення з деякої множини  $E$ . Таким чином, предикат – це функція  $P: E \rightarrow V$ , де  $E$  – деяка множина і  $V$  – множина всіх висловлень.

**Приклад 5.** Твердження  $P(x) = (x \leq 3)$  є предикатом, висловлення  $P(1) = (1 \leq 3)$  є істинним, висловлення  $P(7) = (7 \leq 3)$  є хибним.

Запереченням предиката  $P(x)$  називають такий предикат  $\overline{P(x)}$ , який є істинним висловленням для тих значень змінної  $x$ , для яких  $P(x)$  є хибним висловленням, і який є хибним висловленням для тих значень змінної  $x$ , для яких  $P(x)$  є істинним висловленням.

**Приклад 6.** Якщо  $P(x) = (x < 3)$ , то  $\overline{P(x)} = (x \geq 3)$ .

Предикат може містити і декілька змінних. Предикат називається одномісним, якщо він містить одну змінну. Предикат називається  $n$ -місним, якщо він містить  $n$  змінних. Проте, цей поділ чисто формальний, оскільки дослідження  $n$ -місного предиката можна звести до дослідження одномісного шляхом вибору нової змінної.

**Приклад 7.** Твердження  $P(z; y) = (z^2 + y^2 < 1)$  є двохи́сним предикатом. Якщо ввести позначення  $x = (z; y)$  і  $\|x\| = \sqrt{z^2 + y^2}$ , то  $P(z; y) = \tilde{P}(x)$ , де  $\tilde{P}(x) = (\|x\| < 1)$ .

Для скорочення записів часто використовуються символи (квантори)  $\forall$  (квантор загальності) і  $\exists$  (квантор існування). Квантор  $\forall$  читається так: „для всіх”, „кожний”, „будь-який” і т.д. Квантор  $\exists$  читається так: „існує”, „знайдеться”, „для деякого” і т.д. За допомогою кванторів і предиката можна побудувати висловлення:

а)  $(\forall x \in E) : P(x)$  – для всіх елементів  $x$  множини  $E$  виконується  $P(x)$ ;

б)  $(\exists x \in E) : P(x)$  – існує елемент  $x$  множини  $E$ , для якого виконується  $P(x)$ .

Заперечення цих висловлень будуються відповідно так:

$$a_1) \overline{(\forall x \in E) : P(x)} = (\exists x \in E) : \overline{P(x)};$$

$$б_1) \overline{(\exists x \in E) : P(x)} = (\forall x \in E) : \overline{P(x)}.$$

Таким чином, щоб сформулювати заперечення висловлення, побудованого за допомогою кванторів і предикату, потрібно квантори загальності замінити кванторами існування і навпаки.

**Приклад 8.**  $\overline{(\forall x)(\exists y) : x^2 + y^2 = 1} = ((\exists x)(\forall y) : x^2 + y^2 \neq 1)$ .

**Приклад 9.**  $\overline{(\forall \varepsilon > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n') : |x_n - a| < \varepsilon}$   
 $= ((\exists \varepsilon > 0)(\forall n' \in \mathbb{N})(\exists n \geq n') : |x_n - a| \geq \varepsilon)$ .

**Приклад 10.**  $\overline{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon}$   
 $= ((\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - A| \geq \varepsilon)$ .

В подібних записах символ „:” відділяє квантори від предиката (все, що написано після двох крапок, є одним предикатом) і його озвучують словами „виконується”, „таке, що”, „для якого” і т.д. Щоб за допомогою кванторів і предикату побудувати висловлення предикату повинно передувати стільки кванторів, скільки змінних він містить. Інколи предикату може передувати більше кванторів, ніж він містить змінних. В таких випадках деякі квантори є зв’язаними і їх можна замінити меншою кількістю.

**Приклад 11.** У висловленні  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n') : |x_n - 1| < \varepsilon$  предикат  $P(n; \varepsilon) = (|x_n - 1| < \varepsilon)$  є двохмісним і йому передують три квантори, але два останні квантори можна замінити одним:  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists U_n) : |x_n - 1| < \varepsilon$ , де  $U_n = \mathbb{N} \setminus \{1; 2; \dots; n\}$  і  $(x_n)$  – послідовність.

**Приклад 12.** У висловленні

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - 1| < \delta) : |f(x) - \sqrt{2}| < \varepsilon$$

предикат  $P(x; \varepsilon) = (|f(x) - \sqrt{2}| < \varepsilon)$  є двохмісним і йому передують три квантори, але два останні можна замінити одним:  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists U(1; \delta) : f(U(1; \delta)) \subset U(\sqrt{2}; \varepsilon)$ , де  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка функція і  $U(a; \sigma) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \sigma\}$ .

Однотипні квантори, які написані один за одним, можна переставляти місцями.

$$\begin{aligned} \text{Приклад 13. } & ((\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)(\exists v)(\exists w) : P(x; y; z; u; v; w)) \\ & = ((\forall y)(\forall x)(\exists z)(\forall u)(\exists w)(\exists v) : P(x; y; z; u; v; w)). \end{aligned}$$

Щоб показати, що якесь твердження є хибним (справедливим не для всіх значень змінної) досить побудувати приклад (вказати значення змінної), для якого воно не виконується.

**Приклад 14.** Твердження “для всіх натуральних чисел  $x$  число  $x^2 + 1$  є простим” є хибним, оскільки число  $x = 3$  є натуральним, а число  $x^2 + 1 = 10$  не є простим.

Диз’юнкцією двох висловлень  $p$  і  $q$  називається висловлення  $p \vee q$ , яке є істинним у випадку, коли є істинним принаймні одне з висловлень  $p$  та  $q$ , і є хибним висловленням, коли  $p$  та  $q$  є хибними. Кон’юнкцією двох висловлень  $p$  і  $q$  називається висловлення  $p \wedge q$ , яке є істинним у випадку, коли є істинними обидва висловлення  $p$  та  $q$ , і є хибним висловленням в інших можливих випадках. За аналогією дається означення диз’юнкції та кон’юнкції двох предикатів.

$$\text{Приклад 15. } \overline{\overline{p}} = p.$$

$$\text{Приклад 16. } (p \vee \overline{p}) = 1.$$

$$\text{Приклад 17. } (p \vee p) = p.$$

$$\text{Приклад 18. } (p \wedge p) = p.$$

$$\text{Приклад 19. } (p \vee 1) = 1.$$

**Приклад 20.**  $(p \vee 0) = 1$ .

**Приклад 21.**  $(p \wedge 0) = 0$ .

**Приклад 22.**  $\overline{(p \vee p)} = (\bar{p} \wedge \bar{p})$ .

**Приклад 23.**  $\overline{(p \wedge p)} = (\bar{p} \vee \bar{p})$ .

**Приклад 24.**  $(p \Rightarrow q) = (\bar{p} \vee q)$ .

Теорема – це істинне висловлення, хоч в їх формулюваннях на це не завжди вказується. Більшість теорем математичного аналізу мають форму імплікації: якщо виконується  $\alpha$ , то виконується  $\beta$ . Коротко таку теорему записують так:  $\alpha \Rightarrow \beta$ . При цьому  $\alpha$  називають умовою теореми, а  $\beta$  – її висновком. Висловлення  $\alpha$  називають достатньою умовою для виконання  $\beta$ , а висловлення  $\beta$  називають необхідною умовою для виконання  $\alpha$ . Часто теорему формулюють так: “Нехай  $E$  – деяка множина, а  $E_1$  і  $E_2$  – дві її підмножини. Якщо  $x \in E_1$ , то  $x \in E_2$ ”. Символічно її можна записати у вигляді імплікації  $(x \in E_1) \Rightarrow (x \in E_2)$ . Цю ж теорему можна сформулювати і так:  $(\forall x \in E_1) : (x \in E_2)$ . Якщо  $P(x) = (x \in E_2)$ , то розглядувану теорему можна сформулювати ще й так:  $(\forall x \in E_1) : P(x)$  (правильніше було б писати  $(\forall x)((x \in E_1) \Rightarrow (x \in E_2))$ , але подібні записи є громіздкими і не зовсім узгоджуються з живою мовою). Інколи зустрічаються теореми, які мають форму існування: “Знайдеться такий елемент множини  $E$ , який має властивість  $P(x)$ ”. Символічно її можна записати так:  $(\exists x \in E) : P(x)$ .

**Приклад 25.** Якщо  $|x| < 1$ , то  $|x|^2 < 1$ . Таке твердження є теоремою. В даному випадку  $\alpha = (\text{число } x \text{ є дійсним і } |x| < 1)$  і  $\beta = (\text{число } x \text{ є дійсним і } |x|^2 < 1)$ .

Кожне висловлення  $\alpha \Rightarrow \beta$ , в якому  $\alpha$  є хибним висловленням, є теоремою, тобто є істинним висловленням.

**Приклад 26.** Якщо  $|x| + 1 < 0$ , то  $x^2 + 1 < 0$ . Таке твердження є теоремою. Її можна сформулювати у формі імплікації  $\alpha \Rightarrow \beta$ , де  $\alpha = (\text{для дійсного } x \text{ виконується } |x| + 1 < 0)$  – хибне висловлення і  $\beta = (\text{для дійсного } x \text{ виконується } |x| + 1 < 0)$  – хибне висловлення.

**Приклад 27.** Якщо  $|x|+1 < 0$ , то  $x^2+1 > 0$ . Таке твердження є теоремою. Її можна сформулювати у формі імплікації  $\alpha \Rightarrow \beta$ , де  $\alpha =$  (для дійсного  $x$  виконується  $|x|+1 < 0$ ) – хибне висловлення і  $\beta =$  (для дійсного  $x$  виконується  $x^2+1 > 0$ ) – істинне висловлення.

**Приклад 28.** Для всіх дійсних чисел виконується  $x^2+1 \geq 2x$ . Таке твердження є теоремою. Її можна сформулювати у формі:  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x^2+1 \geq 2|x|$ . Її можна сформулювати у формі імплікації  $(x \in \mathbb{R}) \Rightarrow (x^2+1 \geq 2x)$ .

**Приклад 29.** Теорему “Площа трикутника знаходиться за формулою  $S = ah_a / 2$ ” можна сформулювати так: “Нехай  $E$  – множина всіх багатокутників,  $E_1$  – множина всіх трикутників,  $E_2$  – множина всіх багатокутників, площа яких знаходиться за формулою  $S = ah_a / 2$ , де  $a$  – довжина однієї з сторін багатокутника, а  $h_a$  – довжина висоти, опущеної на цю сторону з однієї з вершин. Тоді  $(x \in E_1) \Rightarrow (x \in E_2)$ ”.

**Приклад 30.** Твердження “ $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2+1 \leq 2x$ ” є теоремою.

**Приклад 31.** Теорему “Якщо  $a \neq 0$  і дискримінант  $D$  квадратного рівняння  $at^2+bt+c=0$  є більшим за 0, то це рівняння має два дійсні різні корені” можна сформулювати так: “Нехай  $E$  – множина всіх квадратних рівнянь  $at^2+bt+c=0$ ,  $E_1$  – квадратне рівняння, для якого  $a \neq 0$  і  $D > 0$ ,  $E_2$  – квадратне рівняння, яке має два дійсні корені. Тоді  $(x \in E_1) \Rightarrow (x \in E_2)$ ”.

При розгляді кожної теореми “ $\alpha \Rightarrow \beta$ ” виникає питання про її покращуваність, завершеність, узагальнення тощо. Зокрема, питання про можливість заміни її умови  $\alpha$  загальнішою умовою  $\tilde{\alpha}$ , яку б задовольняв ширший клас розглядуваних об’єктів, ніж умову  $\alpha$ . Ідеальною є така теорема, в якій таку заміну зробити не можна і, отже, твердження “ $\beta \Rightarrow \alpha$ ” також є теоремою. В цьому випадку теорема “ $\alpha \Rightarrow \beta$ ” називається прямою, а теорема “ $\beta \Rightarrow \alpha$ ” – її оберненою теоремою. Часто пряму і обернену теорему об’єднують в одну. В результаті одержують теореми, які називають критеріями або необхідними і достатніми умовами. Такі теореми мають формулювання: “Для того щоб виконувалось  $\alpha$ , необхідно і достатньо, щоб виконувалось  $\beta$ ”, “ $\beta$  виконується тоді і тільки тоді, коли виконується  $\alpha$ ” і т.д. Символічно таку теорему формулюють у вигляді еквіваленції “ $\alpha \Leftrightarrow \beta$ ”. Разом з твердженням “

$\alpha \Rightarrow \beta$ ” та “ $\beta \Rightarrow \alpha$ ” часто варто розглядати твердження “ $\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha}$ ” та “ $\bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\beta}$ ”. Теорема “ $\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha}$ ” називається протилежною до прямої теореми “ $\alpha \Rightarrow \beta$ ”, а теорема “ $\bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\beta}$ ” називається протилежною до оберненої. При цьому,  $(\alpha \Rightarrow \beta) = (\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha})$  і  $(\beta \Rightarrow \alpha) = (\bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\beta})$ . Формулювання оберненої, протилежної та протилежної до оберненої теорем інколи складає значні труднощі, бо формальний запис умов  $\alpha$  і  $\beta$  може бути досить складним.

**Приклад 32.** Якщо “ $\alpha \Rightarrow \beta$ ” = “якщо  $a \neq 0$  і дискримінант  $D$  квадратного рівняння  $at^2 + bt + c = 0$  є більшим за 0, то це рівняння має два дійсні різні корені”, то обернене твердження “ $\beta \Rightarrow \alpha$ ” = “якщо корені квадратного рівняння  $at^2 + bt + c = 0$  є дійсними різними, то  $a \neq 0$  і дискримінант  $D$  квадратного рівняння  $at^2 + bt + c = 0$  є більшим за 0”, протилежне до прямого твердження “ $(\bar{\beta} \Rightarrow \bar{\alpha})$ ” = “якщо корені квадратного рівняння  $at^2 + bt + c = 0$  не є дійсними різними, то або  $a = 0$ , або дискримінант  $D$  квадратного рівняння  $at^2 + bt + c = 0$  не є більшим за 0” та “ $\bar{\alpha} \Rightarrow \bar{\beta}$ ” = “якщо  $a = 0$  або дискримінант  $D$  квадратного рівняння  $at^2 + bt + c = 0$  не є більшим за 0, то це рівняння не має два дійсні різні корені” є теоремами.

На властивостях логічних операцій побудований метод доведення теорем від супротивного.

**Приклад 33.** Хочемо довести теорему “ $\alpha \Rightarrow \beta$ ”, тобто, що  $(\alpha \Rightarrow \beta) = 1$ . Припустимо, що це не так, тобто що справедливим є висловлення:  $\overline{(\alpha \Rightarrow \beta)} = 1$ . Далі, виходячи з цього припущення, прийнятими в математиці міркуваннями приходимо до висновку, що істинним мусить бути деяке хибне висловлення або хибним мусить бути деяке істинне висловлення. В результаті отримуємо суперечність. Тому  $\overline{(\alpha \Rightarrow \beta)} = 0$ . Отже,  $(\alpha \Rightarrow \beta) = 1$ .

**Зауваження 1.** Метод доведення від супротивного в значній мірі базується на формулах  $(p \vee \bar{p}) = 1$  та  $(p \wedge \bar{p}) = 0$ , які виражають те, що в математиці прийнята двохзначна логіка. Ця логіка відповідає реаліям світу. Таку логіку можна порівняти з киданням п’яти копійок на підлогу, в наслідок чого можна отримати лише два результати. Але якщо будемо кидати п’ять копійок в пісок, то результатів може бути нескінченна кількість. Кожен результат характеризується кутом входження монети в пісок. Тому реальними виглядають теорії, які побудовані на інших логіках і такі науки існують.

**5. Множина натуральних чисел.** Множина натуральних чисел позначається через  $\mathbb{N}$  і складається із цілих додатних чисел. Отже,  $\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots\}$ . Два натуральних числа можна додавати, множити і порівнювати. При цьому сума і добуток двох натуральних чисел є числом натуральним. Проте різниця і частка двох натуральних чисел не обов'язково є числом натуральним. Важливу властивість натуральних чисел виражає принцип математичної індукції, суть якого можна сформулювати так. Якщо твердження  $p(n)$  про натуральні числа є істинним для  $n=1$  і з припущенням, що воно істинне для  $n=k$ , де  $k$  – довільне натуральне число, впливає його істинність для  $n=k+1$ , то твердження  $p(n)$  є істинним для будь-якого натурального числа  $n$ . Другу важливу властивість натуральних чисел виражає основна теорема арифметики, яка формулюється так. Кожне натуральне число  $n$  допускає єдине подання у вигляді добутку простих чисел:

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k,$$

де  $p_1, p_2, \dots, p_k$  – прості натуральні числа.

Множина  $\mathbb{N}$ , до якої додано ще елемент 0 позначається через  $\mathbb{N}_0$  або  $\mathbb{Z}_+$ , тобто  $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ .

Суму  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  коротко записують так:  $\sum_{j=1}^n a_j$ . Отже,

$\sum_{j=1}^n a_j = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . При цьому,

$$\sum_{j=1}^n a_j = \sum_{k=1}^n a_k = \sum_{m=2}^{n+1} a_{m-1} = \sum_{j=3}^{n+2} a_{j-2} = \dots$$

Добуток  $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$  коротко записують так:  $\prod_{j=1}^n a_j$ . Отже,

$\prod_{j=1}^n a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$ . За означенням

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n, \quad 0! = 1, \quad 1! = 1, \quad (2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n,$$

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1), \quad \prod_{j=1}^0 a_j = 1.$$

**Приклад 1.**  $\sum_{j=1}^3 j^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14.$

**Приклад 2.**  $\sum_{j=1}^4 2 = 2 + 2 + 2 + 2 = 8.$

**Приклад 3.**  $\sum_{j=3}^1 a_j = 0.$

**Приклад 4.**  $\sum_{k=1}^n k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)^3.$

**Приклад 5.**  $\sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2}, n \in \mathbb{N}.$  Справді, якщо  $n=1$ , то  $\sum_{j=1}^n j = \sum_{j=1}^1 j = 1$  і

$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1(1+1)}{2} = 1.$  Отже, для  $n=1$  розглядувана рівність є справедливою. Припустимо, що ця рівність є справедливою для  $n=k$ , тобто

$$\sum_{j=1}^k j = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Тоді, використовуючи останню рівність, отримуємо

$$\sum_{j=1}^{k+1} j = \sum_{j=1}^k j + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

тобто розглядувана рівність є справедливою і для  $n=k+1$ . Тому на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що наше твердження справедливо для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 6.**  $\sum_{j=1}^n q^{j-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, n \in \mathbb{N}, q \neq 1.$  Справді, якщо  $n=1$ , то

$\sum_{j=1}^n q^{j-1} = \sum_{j=1}^1 q^{j-1} = q^0 = 1$  і  $\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1-q^1}{1-q} = 1.$  Отже, для  $n=1$  розглядувана

рівність є справедливою. Припустимо, що ця рівність є справедливою для  $n=k$ , тобто  $\sum_{j=1}^k q^{j-1} = \frac{1-q^k}{1-q}.$  Тоді, використовуючи останню рівність, отримуємо

$$\sum_{j=1}^{k+1} q^{j-1} = \sum_{j=1}^k q^{j-1} + q^k = \frac{1-q^k}{1-q} + q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q},$$

тобто розглядувана рівність є справедливою і для  $n = k + 1$ . Тому на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що наше твердження справедливе для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 7.**  $(1-q) \sum_{j=1}^n q^{j-1} = 1 - q^n, n \in \mathbb{N},$  тобто

$1 - q^n = (1-q)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})$ . Позначивши  $q = x/a$ , отримуємо

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + xa^{n-2} + a^{n-1}), n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 8 (нерівність Бернуллі).**  $(1+x)^n \geq 1 + nx, n \in \mathbb{N}, x \geq -1$ . Справді, якщо  $n = 1$ , то нерівність є справедливою. Припустимо, що ця нерівність є справедливою для  $n = k$ , тобто

$$(1+x)^k \geq 1 + kx.$$

Тоді, використовуючи останню нерівність, отримуємо

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k(1+x) \geq (1+kx)(1+x) = 1 + (k+1)x + kx^2 \geq 1 + (k+1)x,$$

тобто розглядувана нерівність є справедливою і для  $n = k + 1$ . Тому на основі принципу математичної індукції робимо висновок, що наше твердження справедливе для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 9.**  $\prod_{k=1}^4 \sqrt{k} = \sqrt{1}\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{4} = 2\sqrt{6}.$

**Приклад 10.**  $\prod_{k=1}^5 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 32.$

**Приклад 11.**  $\prod_{k=4}^2 k = 1.$

**6. Біном Ньютона.** Добре відомими є формули:

$$(a+x)^1 = a+x, (a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2, (a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Ці формули можна узагальнити наступним чином.

**Теорема 1.**  $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall a \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}) :$

$$(a + x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k a^{m-k} x^k, \quad (1)$$

де

$$C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!} = \frac{\prod_{j=m-k+1}^m j}{k!}.$$

Формулу (1), яка називається формулою бінома Ньютона, можна переписати так:

$$\begin{aligned} (a + x)^m &= a^m + mxa^{m-1} + \frac{m(m-1)}{2!}x^2a^{m-2} \\ &+ \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}x^ka^{m-k} + \dots + x^m. \end{aligned}$$

Довести цю формулу можна методом математичної індукції. Ми отримаємо її пізніше іншим методом. Числа  $C_m^k$  називають біноміальними коефіцієнтами.

Використовується часто позначення  $C_m^k = \binom{m}{k}$  і  $\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\dots(m-k+1)}{k!}$ .

**Приклад 1.**  $(1 + x)^m = \sum_{k=0}^m C_m^k x^k.$

**Приклад 2.**  $\sum_{k=0}^m C_m^k = (1 + 1)^m = 2^m.$

**Приклад 3.**  $(1 + x)^4 = \sum_{k=0}^4 C_4^k x^k = C_4^0 + C_4^1 x^k + C_4^2 x^k + C_4^3 x^k + C_4^4 x^k$

$$= 1 + 4x + \frac{4 \cdot 3}{2!} x^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} x^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{4!} x^4 = 1 + 4x + 6x^2 + 4x^3 + x^4.$$

**7. Множина цілих чисел.** Множина цілих чисел – це така множина  $\mathbb{Z}$ , яка складається з всіх натуральних чисел, числа 0 і елементів (від’ємних цілих чисел)  $-1, -2, -3, \dots$ , які називаються протилежними, відповідно, до чисел  $1, 2, 3, \dots$ . Кожний елемент множини  $\mathbb{Z}$  називається цілим числом. Отже,  $\mathbb{Z} = \{\dots, -n; \dots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; \dots; n; \dots\}$ . Будь-які два цілі числа можна

порівнювати, додавати, віднімати, множити і в результаті цих операцій одержуємо ціле число. Частка двох цілих чисел не обов'язково є цілим числом. Множину цілих невід'ємних чисел позначають через  $\mathbb{N}_0$  або через  $\mathbb{Z}_+$ ). Множину всіх цілих чисел, які задовольняють нерівність  $n \leq k \leq m$  позначаємо через  $\overline{n; m}$ . Отже,  $\overline{n; m} = \{k \in \mathbb{Z} : n \leq k \leq m\}$ .

**Приклад 1.**  $-3 < 2$ .

**Приклад 2.**  $-4 + 3 = -1$ .

**Приклад 3.**  $-4 \cdot (-5) = 20$ .

**Приклад 4.** Для кожного натурального числа  $n$  знайдуться такі натуральні числа  $p$ ,  $q$  і ціле невід'ємне число  $r \in \overline{0; p}$ , що  $n = pq + r$ .

**Приклад 5.** Для кожного натурального числа  $n$  знайдуться такі числа  $m \in \mathbb{N}_0$  і  $a_j \in \overline{0; 9}$ ,  $j \in \overline{0; m}$ , що  $n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \dots + a_m 10^m$ .

**Приклад 6.** Для кожного натурального числа  $n$  і кожного  $q \in \overline{2; 9}$  знайдуться такі числа  $m \in \mathbb{N}_0$  і  $a_j \in \overline{0; q}$ ,  $j \in \overline{0; m}$ , що  $n = a_0 q^0 + a_1 q^1 + \dots + a_m q^m$ .

**Приклад 7.** Для кожного натурального числа  $n$  знайдуться такі числа  $m \in \mathbb{N}_0$  і  $a_j \in \overline{0; 1}$ ,  $j \in \overline{0; m}$ , що  $n = a_0 + a_1 + \dots + a_m$ . Можна взяти, зокрема,  $m = n$  і  $a_j = 1$  для всіх  $j \in \overline{0; m}$ .

**8. Множина раціональних чисел.** Множина раціональних чисел позначається через  $\mathbb{Q}$ . Множина  $\mathbb{Q}$  складається зі всіх звичайних дробів  $a = \frac{p}{q}$ , де  $p \in \mathbb{Z}$  і  $q \in \mathbb{N}$ . Кожне раціональне число можна подати у вигляді нескінченного періодичного десяткового дробу  $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \dots$ , де  $a_0 \in \mathbb{N}_0$ ,  $a_j \in \{0; 1; \dots; 9\}$ ,  $\beta_i \in \{0; 1; \dots; 9\}$ ,  $i \in \overline{1; m}$ ,  $j \in \overline{1; n}$ . В періодичному десятковому дробі число  $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m$  весь час повторюється. Воно називається періодом десяткового дробу. Періодичний десятковий дріб записується так:  $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m)$ . Щоб перетворити звичайний дріб  $a = \frac{p}{q}$  у періодичний потрібно поділити  $p$  на  $q$  в стовпчик.

**Приклад 1.**  $\frac{12}{55} = 0,2181818\dots = 0,2(18).$

**Приклад 2.**  $2 = 2,0000\dots = 2,(0) = 2,0(0).$

**Приклад 3.**  $\frac{2}{3} = 0,6666\dots = 0,6(6) = 0,(6).$

Кожне ціле число є раціональним, бо його можна подати у вигляді звичайного дробу.

**Приклад 4.**  $3 = \frac{3}{1}.$

Деякі раціональні числа зображаються двома способами у вигляді нескінченних періодичних дробів.

**Приклад 5.**  $1 = 1,0000\dots = 0,9999\dots$

З двох звичайних додатних дробів з однаковими чисельниками більшим є той дріб, знаменник якого є меншим. З двох звичайних додатних дробів з однаковими знаменниками більшим є той дріб, чисельник якого є більшим. Це часто використовується для доведення різних нерівностей.

**Приклад 6.**  $\frac{3n+5}{n+2} \leq \frac{3n+6}{n+2} = 3.$

**Приклад 7.**  $\frac{n^2+n}{n+1} \leq \frac{n^2+n}{n} = n+1.$

Кожний десятковий дріб можна перетворити у звичайний (спосіб такого перетворення вкажемо пізніше). Тому множина раціональних чисел  $\mathbb{Q}$  – це множина всіх періодичних десяткових дробів. Будь-які два раціональні числа можна порівнювати, додавати, віднімати, ділити, множити і в результаті цих операцій одержується раціональне число. Виключення становить ділення на нуль, яке в множині раціональних чисел не має змісту. Кожному раціональному числу на числовій прямій відповідає точка. Між двома різними раціональними числами  $a$  і  $b$  завжди лежить третє раціональне число  $c$  (наприклад,  $c = (a+b)/2$ ). Тому якщо б на числовій прямій вдалося відмітити точками всі раціональні числа, то для ока здавалось би, що вся числова пряма заповнена раціональними числами і для інших чисел на числовій прямій не залишилось точок. Але це не так.

**Теорема 1.** Число  $\sqrt{2}$  не є раціональним числом.

**Доведення.** Справді, припустимо, що  $\sqrt{2}$  – це раціональне число, тобто  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ , де  $\frac{p}{q}$  – нескоротний дріб і  $p \in \mathbb{N}$  і  $q \in \mathbb{N}$ . Тоді  $2 = \frac{p^2}{q^2}$  і  $p^2 = 2q^2$ . Отже, число  $p^2$  є парним. Тому парним є і число  $p$ . Отже,  $p = 2k$ , де  $k \in \mathbb{N}$ . Тому,  $4k^2 = 2q^2$ . Звідси  $q^2 = 2k^2$ . Тому число  $q$  є парним, тобто  $q = 2m$ , де  $m \in \mathbb{N}$ . Таким чином,  $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2m}$ . Отже, дріб  $\frac{p}{q}$  є скоротним, що суперечить припущенню. Тому число  $\sqrt{2}$  не є раціональним. ►

Отже, на числовій прямій є точки, які не відповідають жодному раціональному числу. Таким чином, для практичних цілей множину раціональних чисел потрібно розширити так, щоб кожній точці числової прямої відповідало певне число.

**9. Множина дійсних чисел. Принцип вкладених проміжків.** Раціональні числа зображаються у вигляді нескінченних періодичних десяткових дробів. Ірраціональні числа – це числа, які зображаються у вигляді нескінченних неперіодичних десяткових дробів  $a = \pm a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ , де  $a_0 \in \mathbb{N}_0$ , і  $a_j \in \{0; 1; \dots; 9\}$ .

**Приклад 1.** Число  $\sqrt{2} = 1,41\dots$  є ірраціональним.

**Приклад 2.** Число  $\pi = 3,14\dots$  є ірраціональним.

**Приклад 3.** Число  $\gamma = 1,101001000100001\dots$  є ірраціональним.

Ірраціональні числа не можна подати у вигляді звичайного дроби  $a = \frac{p}{q}$ , де  $p \in \mathbb{Z}$  і  $q \in \mathbb{N}$ . Множина всіх дійсних чисел позначається через  $\mathbb{R}$  і складається із всіх раціональних та ірраціональних чисел. Іншими словами, множина  $\mathbb{R}$  – це множина всіх нескінченних десяткових дробів:  $a = \pm a_0, a_1, a_2 \dots a_n \dots$ . Сума, добуток, частка і різниця двох дійсних чисел є дійсним числом. Виключення становить ділення на нуль, яке в  $\mathbb{R}$  не має змісту. Кожному дійсному числу на числовій прямій відповідає одна точка. Навпаки, кожній точці числової прямої відповідає єдине дійсне число. Тому множину дійсних чисел називають інколи числовою прямою або числовою віссю, а самі дійсні числа називають точками.

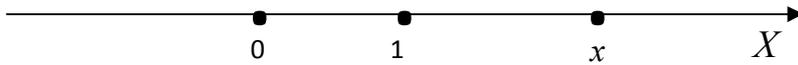


Рис.1.

Між двома різними дійсними числами лежить принаймні одне раціональне число і принаймні одне ірраціональне число. Множина раціональних чисел і множина ірраціональних чисел є нескінченними, проте з подальшого буде випливати, що ірраціональних чисел є в певному розумінні значно більше, ніж раціональних.

Множини  $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$  і  $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$  називаються відповідно замкненим і відкритим проміжками, а множини  $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$  і  $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$  називаються відповідно лівим та правим напіввідкритими проміжками.

Нескінченна система (тобто множина) замкнених проміжків

$$\{[a_n; b_n] : n \in \mathbb{N}\} = \{[a_1; b_1]; [a_2; b_2]; \dots; [a_n; b_n]; \dots\} \quad (1)$$

називається системою замкнених вкладених проміжків, якщо

$$[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$$

Важливу властивість дійсних чисел виражає наступне твердження, яке називається аксіомою Кантора або аксіомою неперервності множини дійсних чисел.

**Принцип вкладених проміжків Кантора.** Для будь-якої нескінченної системи (1) замкнених вкладених проміжків існує принаймні одне дійсне число, яке належить всім проміжкам цієї системи.

Вважають, що довжини проміжків системи (1) прямують до нуля, якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $n' \in \mathbb{N}$ , що для всіх  $n \geq n'$  виконується  $b_n - a_n < \varepsilon$ .

**Наслідок 1.** Для будь-якої нескінченної системи (1) замкнених вкладених проміжків, довжини яких прямують до нуля, існує тільки одне дійсне число, що належить всім проміжкам цієї системи.

**Доведення.** Припустимо, що таких чисел є два:  $x$  і  $y$ . Тоді одне з цих чисел є більше за друге. Нехай  $x < y$ . Тоді число  $\varepsilon = y - x$  є додатним, тобто  $\varepsilon > 0$ . Отже, за умовою теореми для цього  $\varepsilon$  знайдеться таке  $n \in \mathbb{N}$ , що  $b_n - a_n < \varepsilon$ . Але  $a_n \leq x \leq b_n$  і  $a_n \leq y \leq b_n$ . Тому  $y - x \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , тобто  $\varepsilon < \varepsilon$ . Суперечність. ►

**Приклад 4.** Нехай  $(a_n; b_n) = (0; 1/n)$ . Тоді  $(a_1; b_1) \supset (a_2; b_2) \supset \dots \supset (a_n; b_n) \supset \dots$  і перетин всіх цих проміжків  $(a_n; b_n)$  є порожнім. Тому не існує дійсного числа, яке б належало всім проміжкам  $(a_n; b_n)$ . Тому вимога, щоб всі проміжки були замкненими в принципі вкладених проміжків є істотною.

**Приклад 5.** Нехай  $[a_n; b_n] = [-1 - 1/n; 1 + 1/n]$ . Тоді  $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$  і перетин всіх цих проміжків  $[a_n; b_n]$  є проміжок  $[-1; 1]$ . Тому вимога, щоб всі довжини проміжків прямували до нуля в наслідку 1 є істотною.

Десятковим наближенням з недостачею порядку  $n$  дійсного невід'ємного числа  $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$  називається раціональне число  $a_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ , а число  $\bar{a}_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n + 10^{-n}$  називається десятковим наближенням з надлишком порядку  $n$  цього дійсного числа  $a = a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ . Якщо  $a < 0$ , тобто  $a = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n \dots$ , то його відповідним десятковим наближенням називаються раціональні числа:  $\underline{a}_n = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n - 10^{-n}$  і  $\bar{a}_n = -a_0, a_1 a_2 \dots a_n$ . Для будь-якого  $a \in \mathbb{R}$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}_0$  виконується  $a_n \leq a \leq \bar{a}_n$  і  $0 \leq \bar{a}_n - a_n \leq 10^{-n}$ . Через десяткові наближення дійсних чисел можна знаходити їх суму, добуток, частку. Наприклад, сума  $a + b$  двох дійсних чисел  $a$  і  $b$  – це є єдине дійсне число  $a + b$ , яке для всіх  $n \in \mathbb{Z}_+$  задовольняє нерівність  $\underline{a}_n + \underline{b}_n \leq a + b \leq \bar{a}_n + \bar{b}_n$ . Нагадаємо, що числа  $\underline{a}_n$ ,  $\underline{b}_n$ ,  $\bar{a}_n$  та  $\bar{b}_n$  є раціональними.

**Зауваження 1.** Теорію множини дійсних чисел можна побудувати: 1) доповнюючи множину раціональних чисел ще певними елементами, наприклад, нескінченними неперіодичними десятковими дробами; 2) за Дедекіндом як прорізи в множині раціональних чисел; 3) за Кантором як класи фундаментальних послідовностей раціональних чисел; 4) аксіоматично. Про кожний з названих підходів ми скажемо у відповідному місці згодом. В залежності від такого підходу наведені вище властивості дійсних чисел формулюються у вигляді аксіом або доводяться. Для математичного аналізу

особливо важливими є ті властивості, які пов'язані з принципом вкладених проміжків.

**Зауваження 2.** Для практики (вимірювань, обчислень і т.д.) достатньо раціональних чисел, оскільки кожне ірраціональне число можна з наперед заданою точністю наблизити раціональним.

**10. Модуль дійсного числа.** Модулем дійсного числа  $x$  називають невід'ємне число  $|x|$ , визначене формулою

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

**Приклад 1.**  $|0| = 0.$

**Приклад 2.**  $\left|\frac{-1}{2}\right| = \frac{1}{2}.$

**Приклад 3.**  $|3,4| = 3,4.$

**Теорема 1.** Для будь-яких дійсних чисел  $x$  та  $y$  виконується:

а)  $|x| \geq 0$ ; б)  $|x| = |-x|$ ; в)  $|xy| = |x||y|$ ; г)  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ ; д)  $x \leq |x|$ ;

е)  $-x \leq |x|$ ; е)  $|x+y| \leq |x|+|y|$ ; ж)  $||x|-|y|| \leq |x-y|$ .

**Доведення.** Властивості а)-е) випливають безпосередньо з означення. За означенням модуля

$$|x+y| = \begin{cases} x+y, & \text{якщо } x+y \geq 0, \\ -x-y, & \text{якщо } x+y < 0. \end{cases}$$

Але  $x \leq |x|$ ,  $y \leq |y|$ ,  $-x \leq |x|$ ,  $-y \leq |y|$ . Тому  $|x+y| \leq |x|+|y|$  і властивість е) доведено. Використовуючи е) і б), отримуємо  $|x| = |x-y+y| \leq |x-y|+|y|$  і  $|y| = |y-x+x| \leq |y-x|+|x| = |x-y|+|x|$ . Тому  $|x|-|y| \leq |x-y|$  і  $-(|x|-|y|) \leq |x-y|$ , звідки випливає ж). ►

**Приклад 4.**  $|-\sqrt{2}| = \sqrt{2}.$

**Приклад 5.**  $|0| = 0$ .

**Приклад 6.**  $|-2| = |2| = 2$ .

**Приклад 7.**  $|x - y| = |y - x|$ , бо  $|x - y| = |-1(y - x)| = |-1||y - x| = |y - x|$ .

**Приклад 8.**  $|x - y| \leq |x| + |y|$ , бо  $|x - y| = |x + (-y)| \leq |x| + |-y| = |x| + |y|$ .

**Приклад 9.** Нерівність  $|x| < \alpha$  рівносильна подвійній нерівності  $-\alpha < x < \alpha$ .

**Приклад 10.** Розв'язком нерівності  $|x| < 1$  є проміжок  $(-1; 1)$ .

**Приклад 11.** Нерівність  $|x - a| < \varepsilon$  рівносильна подвійній нерівності  $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ .

**Приклад 12.** Розв'язком нерівності  $|x - 2| < 1$  є проміжок  $(1; 3)$ .

**Приклад 13.** Розв'язком нерівності  $0 < |x - 3| < 1$  є множина  $(2; 4) \setminus \{3\}$ , тобто множина  $(2; 3) \cup (3; 4)$ .

**Приклад 14.**  $d(x; y) = d(y; x)$ ,  $d(x; y) \leq d(x; z) + d(z; y)$ ,  $d(x; y) \geq 0$  і  $d(x; y) = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $x = y$ , якщо  $d(x; y) = |x - y|$ .

**Приклад 15.**  $\sqrt{x^2} = |x|$  для кожного дійсного числа  $x$ .

**11. Скінченні і обмежені числові множини.** Множина  $H \subset \mathbb{R}$  називається обмеженою, якщо

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : |x| \leq K. \quad (1)$$

Таким чином, множина  $H \subset \mathbb{R}$  є обмеженою, якщо модулі всіх чисел  $x$ , які їй належать, не перевищують деякого додатного числа  $K$ , незалежного від  $x$ . Множина  $H \subset \mathbb{R}$  називається скінченною, якщо вона складається з скінченної кількості елементів.

**Приклад 1.** Множина  $\{10; 1000; 100000000\}$  є скінченною і є обмеженою.

**Приклад 2.** Кожна скінченна множина є обмеженою.

**Приклад 3.** Множина  $[0; 1]$  є обмеженою і є нескінченною.

**Приклад 4.** Множина  $[0; +\infty)$  є необмеженою і є нескінченною.

**Приклад 5.** Множина  $\mathbb{N}$  є необмеженою і є нескінченною.

**Приклад 6.** Множина  $E = \left\{ \frac{n^2}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$  є нескінченною і є

необмеженою, бо  $\frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2-1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = n-1 + \frac{1}{n+1} \geq n-1$ .

**Приклад 7.** Множина  $E = \left\{ \frac{2n+3}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$  є нескінченною і є обмеженою,

бо  $0 \leq \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2n+2}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 2 + \frac{1}{n+1} \leq 3$ .

**Приклад 8.** Якщо

$$(\exists K_1 \in (0; +\infty))(\forall x \in H) : x \leq K_1 \quad (2)$$

і

$$(\exists K_2 \in (0; +\infty))(\forall x \in H) : -K_2 \leq x, \quad (3)$$

то виконується (1) і можна взяти  $K = \max\{K_1; K_2\}$ . Навпаки, якщо виконується (1), то виконується (2) і (3), і можна взяти  $K_1 = K_2 = K$ .

**Зауваження 1.** В реальному житті ми стикаємось тільки з скінченними множинами. Розгляд нескінченних множин як даних об'єктів створює проблеми для побудови математичних теорій. В теорії множин та основах математики є напрями, в яких такі множини не розглядаються як наперед задані об'єкти.

**12. Межі числових множин.** Теорема про існування точної верхньої і точної нижньої меж. Верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається таке число  $K \in \mathbb{R}$ , що

$$(\forall x \in H) : x \leq K.$$

Множина, яка має верхню межу називається обмеженою зверху. Іншими словами множину  $H \subset \mathbb{R}$  називають обмеженою зверху, якщо

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : x \leq K.$$

Таким чином, множина  $H \subset \mathbb{R}$  є обмеженою зверху, якщо всі числа  $x$ , які їй належать, не перевищують деякого дійсного числа  $K$ , незалежного від  $x$ . Якщо множина  $H$  має верхню межу  $K$ , то вона має нескінченну кількість верхніх меж.

**Приклад 1.** Якщо  $H = [0; 1]$ , то верхніми межами цієї множини є, зокрема, числа  $K = 1$ ,  $K = 1,5$ ,  $K = 1 + \sqrt{2}$ ,  $K = 3$ ,  $K = 10 + \sqrt{2}$  і т.д. Точною верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається найменша з її верхніх меж. Точна верхня межа множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається ще супремумом множини  $H$  і позначається так:  $M_0 = \sup H$ . Означення точної верхньої межі можна дати і іншим чином. Власне, точною верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається таке число  $M_0 \in \mathbb{R}$ , для якого виконуються дві умови:

$$1) (\forall x \in H) : x \leq M_0;$$

$$2) (\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' > M_0 - \varepsilon.$$

Ці два означення є еквівалентними, бо умова 1) означає, що  $M_0$  є верхньою межею, а умова 2) означає, що жодне менше число не може бути верхньою межею. Тому, якщо число  $M_0$  є точною верхньою межею множини  $H$  в розумінні першого означення, то воно є точною верхньою межею множини  $H$  в розумінні другого означення і навпаки.

Серед скінченного числа дійсних чисел завжди є найменше із них. Але серед нескінченної кількості дійсних чисел не завжди є найменше. Тому природним є питання про існування точної верхньої межі.

**Приклад 2.** Множина  $H = (0; 5]$  не має найменшого числа, бо  $0 \notin H$ .

**Приклад 3.** Множина  $H = \{1 - 1/n : n \in \mathbb{N}\}$  не має найбільшого елемента, бо  $1 \notin H$ .

**Теорема 1.** Якщо множина  $H \subset \mathbb{R}$  є непорожньою і обмеженою зверху, то вона має точну верхню межу (скінченну).

**Доведення.** Оскільки множина  $H$  є непорожньою, то вона містить принаймні один елемент  $a_0$ . Оскільки  $H$  є обмеженою зверху, то  $(\exists b_0 \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : x \leq b_0$ . Поділимо проміжок  $[a_0; b_0]$  точкою  $\frac{a_0 + b_0}{2}$  на два проміжки однакової довжини: лівий і правий. Якщо правий проміжок містить принаймні один елемент множини  $H$ , то позначаємо його через  $[a_1; b_1]$ , а якщо

не містить, то через  $[a_1; b_1]$  позначаємо лівий проміжок. В обох випадках проміжок  $[a_1; b_1]$  містить принаймні один елемент множини  $H$ ,  $[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1]$ ,  $(\forall x \in H) : x \leq b_1$  і  $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ . Далі аналогічно будуюмо проміжок  $[a_2; b_2]$  ділячи проміжок  $[a_1; b_1]$  точкою  $\frac{a_1 + b_1}{2}$  на два проміжки. Продовжуючи цей процес одержимо нескінченну систему замкнених проміжків

$$\{[a_0; b_0], [a_1; b_1], \dots, [a_n; b_n], \dots\}$$

з властивостями:

а)  $[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset [a_n; b_n] \supset \dots$ ;

б) довжини  $b_n - a_n = \frac{b_0 - a_0}{2^n}$  прямують до нуля;

в)  $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in H) : x \leq b_n$ ;

г) кожний проміжок  $[a_n; b_n]$  містить хоч-би один елемент множини  $H$ .

За наслідком 1 з принципу вкладених проміжків існує єдине число  $M_0$  таке, що для всіх  $n \in \mathbb{N}_0$  виконується  $a_n \leq M_0 \leq b_n$ . Покажемо, що  $M_0 = \sup H$ . Переконаємося, що виконується 1). Припустимо, що 1) не виконується, тобто  $(\exists x \in H) : x > M_0$ . Тоді число  $\varepsilon = x - M_0$  є додатним. Завдяки б)  $(\exists n \in \mathbb{N}) : b_n - a_n < \varepsilon$ , тобто  $b_n < x - (M_0 - a_n)$ . Але  $M_0 - a_n \geq 0$ . Тому  $b_n < x$ , а це суперечить в). Отже 1) виконується. Покажемо, що 2) виконується. Візьмемо довільне  $\varepsilon > 0$ . Враховуючи б), робимо висновок, що:  $(\exists n \in \mathbb{N}) : b_n - a_n < \varepsilon$ . Завдяки г)  $(\exists x' \in H) : a_n \leq x' \leq b_n$ . Але  $a_n \leq M_0 \leq b_n$ . Тому  $M_0 - x' \leq b_n - a_n < \varepsilon$ , звідки  $x' > M_0 - \varepsilon$ , а це означає, що число  $M_0$  задовольняє і умову 2), і тому теорема 1 доведена. ►

Нижньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається таке число  $K \in \mathbb{R}$ , для якого  $(\forall x \in H) : x \geq K$ . Точною нижньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається найбільша її нижня межа. Точна нижня межа називається інфімумом і позначається так:  $m_0 = \inf H$ .

Можна дати і наступне еквівалентне означення точної нижньої межі. Число  $m_0$  називається точною нижньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо воно задовольняє умови:

$$3) (\forall x \in H) : x \geq m_0;$$

$$4) (\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' < m_0 - \varepsilon.$$

**Теорема 2.** Якщо множина  $H \subset \mathbb{R}$  є непорожньою і обмеженою знизу, то вона має точну нижню межу (скінченну).

**Доведення** цієї теореми таке ж, як і теореми 1. ►

Найбільший елемент множини  $H$  позначають так:  $M = \max H$ . Якщо множина має найбільший елемент, то  $M = M_0$ . Найменший елемент множини  $H$  позначаються так:  $m = \min H$ . Якщо множина  $H$  має найменший елемент, то  $\inf H = \min H$ .

**Приклад 4.** Якщо  $H = (-1; 2)$ , то  $\sup H = 2$  і  $\inf H = -1$ ,  $\min H$  не існує і  $\max H$  – не існує.

**Приклад 5.** Якщо  $H = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$ , то  $\inf H = 0$ ,  $\sup H = \max H = 1$ , а  $\min H$  не існує.

Істотна різниця між найбільшим елементом множини і її точною верхньою межею полягає в тому, що найбільший елемент множини належить цій множині, а точна верхня межа не обов'язково їй належить.

Інколи вважають, що якщо множина є необмеженою зверху, то  $\sup H = +\infty$ , а якщо множина  $H$  є необмеженою знизу, то  $\inf H = -\infty$ .

**Приклад 6.** Якщо  $H = \mathbb{N}$ , то  $\inf H = \min H = 1$ ,  $\sup H = +\infty$ , а  $\max H$  не існує.

**Наслідок 1 (принцип Архімеда).** Для будь-якого дійсного числа  $a$  існує таке натуральне число  $n$ , що  $a < n$ .

**Доведення.** Припустимо протилежне, тобто що існує таке дійсне число  $a$ , що для кожного натурального числа  $n$  виконується  $n \leq a$ . Тоді множина  $\mathbb{N}$  є обмеженою зверху. Тому існує  $\sup \mathbb{N} = M_0 \in \mathbb{R}$ . Згідно з означенням точної верхньої межі існує натуральне число  $n > M_0 - 1$ . Звідки випливає, що  $n + 1 > M_0$ . Число  $n + 1$  є натуральним. Тому маємо суперечність. ►

**13. Еквівалентні множини.** Дві скінченні множини порівнюють за кількістю елементів. Тому щоб з'ясувати, яка з двох скінченних множин містить більше елементів досить елементи цих множин перерахувати. Але

можна цієї ж мети досягти, встановивши між елементами множин однозначну відповідність. Наприклад, щоб з'ясувати кого чи чого в аудиторії більше, студентів чи крісел, досить запропонувати кожному студентові сісти на крісло. Перший спосіб підходить тільки для скінченних множин, а другий – і для нескінченних. Дві множини  $A$  і  $B$  називаються еквівалентними або рівнопотужними (пишуть  $A \sim B$ ), якщо між ними існує взаємно однозначна відповідність, тобто існує така оборотна функція  $\phi: A \rightarrow B$ , що  $D(\phi) = A$  і  $E(\phi) = B$ .

**Приклад 1.** Множини  $A = \{1; 2; 3; \dots\}$  і  $B = \{2; 4; 6; \dots\}$  є еквівалентними. Взаємно однозначною відповідністю між ними є функція  $y = 2x$ .

**Приклад 2.** Множини  $A = [-1; 0]$  і  $B = [0; 1]$  є еквівалентними. Взаємно однозначною відповідністю між ними є функція  $y = x + 1$ .

**Приклад 3.** Дві скінченні множини є еквівалентними тоді і тільки тоді, коли вони складаються з однакової кількості елементів.

**Приклад 4.** Для будь-яких  $a \in \mathbb{R}$  і  $b \in \mathbb{R}$ ,  $a < b$ , множини  $[0; 1]$  і  $[a; b]$  є еквівалентними. Справді, взаємно однозначною відповідністю між  $[0; 1]$  і  $[a; b]$  є функція  $\phi(x) = a + (b - a)x$ .

**Приклад 5.** Множини  $(-\infty; +\infty)$  і  $(0; 1)$  є еквівалентними. Справді, взаємно однозначною відповідністю між множинами  $(-\infty; +\infty)$  і  $(0; 1)$  є функція  $y = (\operatorname{arctg} x + \pi / 2) / \pi$ .

**14. Зліченні і незліченні множини.** Множину  $A$  називають зліченною, якщо вона є еквівалентною множині натуральних чисел. Інакше можна сказати, що множина  $A$  є зліченною, якщо між множинами  $\mathbb{N}$  і  $A$  існує взаємно однозначна відповідність.

**Приклад 1.**  $A = \{2; 4; 6; \dots; 2n; \dots\}$ , тобто множина всіх парних натуральних чисел, є зліченною, бо функція  $\phi(x) = 2x$  є взаємно однозначною відповідністю між  $\mathbb{N}$  і  $A$ .

**Приклад 2.**  $A = \{(n; m) : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ , тобто множина всіх точок площини з натуральними координатами, є зліченною. Справді, взаємно однозначну відповідність між  $\mathbb{N}$  і  $A$  встановлюємо наступним чином

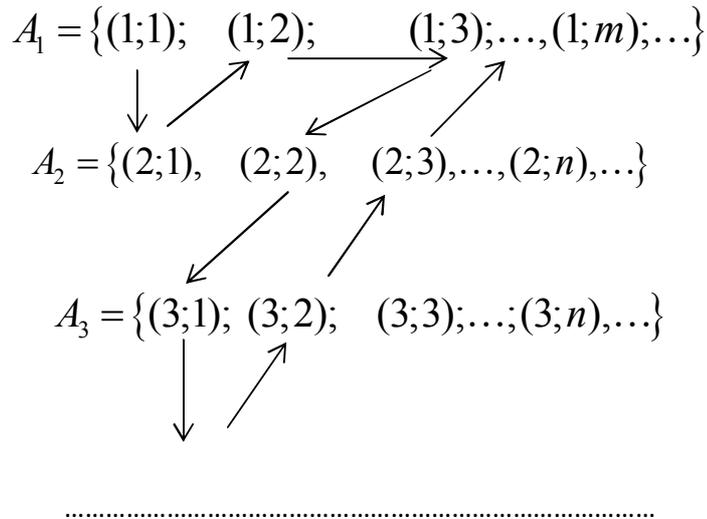


Рис.1

**Теорема 1.** Множина всіх раціональних чисел є зліченною.

**Доведення.** Справді, раціональні числа – це нескоротні дроби  $r = p/q$ , де  $p \in \mathbb{Z}$  і  $q \in \mathbb{N}$ . Висотою дроби  $r = p/q$  називають число  $h = |p| + q$ . Розмістимо раціональні числа в порядку неспадання їх висоти

$$\frac{0}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{-1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{-2}{1}, \dots$$

Отже, множина раціональних чисел є зліченною. ►

Нескінченна множина, яка не є еквівалентною множині натуральних чисел, називається незліченною. Множину, яка є еквівалентною множині  $[0;1]$ , називають множиною потужності континууму.

**Теорема 2.** Множина  $[0;1]$  є незліченною.

**Доведення.** Припустимо протилежне. Тоді всі числа з  $[0;1]$  є членами деякої послідовності  $(x_n)$ . Проміжок  $[0;1]$  поділимо на три рівні проміжки. Один з отриманих проміжків, який не містить  $x_1$ , позначимо через  $[a_1; b_1]$ . Поділимо  $[a_1; b_1]$  на три рівні проміжки і той з отриманих проміжків, який не містить  $x_2$ , позначимо через  $[a_2; b_2]$ . Продовжуючи цей процес, отримаємо послідовність  $[a_k; b_k]$  замкнених проміжків із властивостями: 1)  $[a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots$ ; 2)  $b_n - a_n \rightarrow 0$ ; 3)  $(\forall n): x_n \notin [a_n; b_n]$ . Тоді  $(\exists c)(\forall n): c \in [a_n; b_n]$ . З іншого боку,  $(\exists k): x_k = c$ . Маємо суперечність з 3). ►

Робимо висновок, що множини раціональних і ірраціональних чисел є нескінченними, але ірраціональних чисел є значно більше, ніж раціональних. При цьому між двома різними раціональними числами лежить нескінченна кількість раціональних чисел і нескінченна кількість ірраціональних чисел. Між двома різними ірраціональними числами також лежить нескінченна кількість раціональних чисел і нескінченна кількість ірраціональних чисел. Над цими фактами варто добре задуматись.

### **15. Зауваження про аксіоматичну побудову математичних теорій.**

Математичні теорії прийнято будувати або конструктивно на основі вже побудованих теорій (дивись нижче побудову теорії множини дійсних чисел за Дедекіндом та побудову множини раціональних чисел), або аксіоматично (дивись нижче аксіоматику натуральних чисел та аксіоматику дійсних чисел). Кожна теорія вивчає властивості своїх понять. Нові поняття вводяться на основі раніше уведених. Процес зведення нових до уже введених не може бути нескінченним. Ми з необхідністю приходимо до понять, яким означення дати не можемо на основі уже введених. Такі поняття називаються первісними. Вибір первісних понять для однієї і тієї ж теорії може бути різним.

*Приклад 1. Діаметр кола – це хорда кола, яка має найбільшудовжину. Хорда кола – це відрізок прямої, якій належать дві точки кола. Відрізок – це множина точок прямої, які лежать між двома її точками.*

Властивості понять формулюються у вигляді істинних висловлень, які називаються теоремами. Справедливість кожної теореми обґрунтовують на основі вже відомих теорем шляхом логічних міркувань, які називають доведеннями. Процес зведення одних теорем до інших не може бути нескінченним, оскільки на певному етапі приходимо до висловлень, обґрунтування істинності яких не можна звести до вже доведених теорем. Висловлення, істинність яких приймаються без доведення, називаються аксіомами або постулатами відповідної теорії.

Аксіоматичний метод побудови відповідної теорії зводиться до наступного: 1) складається список первісних понять, яким означення не даються (в первісні поняття не вкладається жодного конкретного змісту, ними можуть бути об'єкти довільної природи); 2) формулюються аксіоми, які описують співвідношення між первісними поняттями (аксіоми – це істинні висловлення, істинність яких приймається без доведення, вони, фактично, замінюють означення первісних понять); 3) на основі первісних понять і раніше уведених понять вводяться нові поняття; 4) істинність або хибність

висловлень про введені поняття або про первісні поняття, які не містяться в аксіомах, доводяться на основі аксіом і раніше доведених теорем, які б очевидними ці висловлення не були.

*Приклад 2.* В аксіоматичній теорії Пеано натуральних чисел (дивись далі) є чотири аксіоми і первісним поняттям є поняття слідування.

Основні вимоги до системи аксіом: а) несуперечливість; б) незалежність; в) повнота. Основною вимогою є несуперечливість. Вона полягає в тому, що серед теорем та аксіом аксіоматичної теорії не повинно бути таких висловлень  $p$ , що  $p=1$  і  $\bar{p}=1$ , тобто в теорії не повинно бути суперечливих тверджень. Основним методом дослідження несуперечливості теорії є побудова моделі, тобто вибір понять іншої за первісні поняття розглядуваної. Тоді аксіоми останньої стають теоремами в моделі. Якщо аксіоматика була б суперечливою, то ми б отримали в інтерпретації дві суперечливі теореми. З'ясування несуперечливості багатьох аксіоматичних теорій можна звести до несуперечливості теорії натуральних чисел, а останню залишається прийняти несуперечливою як таку, що не суперечить практиці.

*Приклад 3.* Модель аксіоматичної теорії дійсних чисел можна побудувати у вигляді нескінченних десяткових дробів, у вигляді прорізів в множині раціональних чисел, у вигляді певних класів фундаментальних послідовностей раціональних чисел та у вигляді інших об'єктів. Всі ці моделі ізоморфні, тобто між ними існує певна взаємно однозначна відповідність.

Вимога незалежності полягає в тому, що жодну з аксіом не можна було б довести як теорему на основі інших аксіом.

Вимога повноти полягає в тому, щоб в рамках розглядуваної аксіоматичної теорії можна довести істинність чи хибність будь-якого твердження, яке стосується понять теорії. Проте Гедель довів, що засобами кожної достатньо багатой аксіоматичної теорії можна сформулювати твердження істинність чи хибність якого в рамках цієї теорії довести не можна (в деяких випадках таким твердженням є твердження про несуперечливість теорії). В цьому розумінні кожна аксіоматична теорія є неповною. В зв'язку з цим, повноту систем аксіом часто розуміють інакше. Власне, система аксіом називається повною, якщо між будь-якими її моделями існує взаємно однозначна відповідність.

**Зауваження 1.** Наведене вище трактування аксіоматичної теорії є досить вільним і широким. В такій трактовці вона впершебула здійснена Евклідом при побудові аксіоматичної теорії класичної геометрії. В кінці дев'ятнадцятого століття основи математики піддавались серйозному аналізу в зв'язку з труднощами наївної теорії множин, які до певної міри були зумовлені розглядом нескінченних множин як даних об'єктів і довільним перенесенням на нескінченні множини прийомів, придатних для скінченних множин. До таких труднощів відносилось саме поняття множини через наявність парадоксів (поняття множини всіх множин, множина всіх множин, які не є підмножинами самої себе та інші є суперечливими). Аналіз цієї проблеми привів до переосмислення поняття аксіоматичної теорії. Виявилось, що при побудові аксіоматичних теорій слід звертати увагу на алфавіт, мову, спосіб утворення нових понять і на те, що таке доведення. Вперше в такому розумінні аксіоматичну теорію (аксіоматичну теорію евклідової геометрії) побудував Гільберт. В такому розумінні аксіоматична теорія є частиною логіки і одним з основних моментів такої теорії є дослідження її повноти та несуперечливості. Гільберт висунув програму побудови такої аксіоматичної теорії всієї математики. Проте теорема Геделя про неповноту показала, що всю математику не можна звести до логіки.

**16. Аксіоматичне означення множини натуральних чисел.** Множиною натуральних чисел називається така непорожня множина  $\mathbb{N}$ , на якій задано поняття слідування " $x'$ " так, що істинними є наступні твердження.

1. Існує елемент множини  $\mathbb{N}$ , який не слідує за жодним елементом множини  $\mathbb{N}$  (цей елемент позначається через 1 і називається одиницею).

2. За кожним елементом  $x \in \mathbb{N}$  слідує єдиний елемент множини  $\mathbb{N}$  (цей елемент позначається через  $x+1$ , тобто  $x' = x+1$ , елемент, який слідує за 1 позначається через 2, елемент, який слідує за 2 позначається через 3 і т. д).

3. Якщо  $x' = y'$ , то  $x = y$ .

4. Якщо  $A$  підмножина множини  $\mathbb{N}$  така, що  $1 \in A$  і з включення  $m \in A$  випливає, що  $m+1 \in A$ , то  $A = \mathbb{N}$ .

Кожний елемент множини  $\mathbb{N}$  називається натуральним числом.

Твердження 1-4 називаються аксіомами Пеано. Аксіома 4 називається аксіомою математичної індукції. На основі цих аксіом можна отримати всі відомі властивості натуральних чисел. Деякі елементи відповідних означень та теорем містяться в наступних прикладах.

**Приклад 1.** Якщо  $x \neq y$ , то  $x' \neq y'$ . Справді, якщо  $x' = y'$ , то за аксіомою 3  $x = y$ .

**Приклад 2.** Якщо  $x' \neq x$ . Справді, нехай  $A$  – множина тих  $x$ , для яких  $x' \neq x$ . За першою аксіомою  $1 \in A$ . Згідно з попереднім прикладом  $(x')' \neq x'$ , якщо  $x \in A$ , тобто  $x+1 \in A$ . За аксіомою 4  $A = \mathbb{N}$ , тобто  $x' \neq x$  для кожного  $x \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 3.** Для будь-яких  $x \in \mathbb{N}$  і  $y \in \mathbb{N}$  існує елемент  $x+y \in \mathbb{N}$ , для якого  $x+y' = (x+y)'$  (цей елемент  $x+y$  називається сумою елементів  $x$  та  $y$ ). Справді, нехай  $A$  – множина тих  $x$ , для яких  $x+y' = (x+y)'$  для всіх  $y \in \mathbb{N}$ . Тоді  $1 \in A$ , бо елемент  $x+y = y'$  потрібною властивістю володіє. Нехай  $x \in A$ . Тоді  $x+y' = (x+y)'$  для всіх  $y \in \mathbb{N}$ . Тому  $x'+y' = (x+y)' = ((x+y))' = (x'+y)'$ , тобто  $x+1 \in A$ . Тому  $A = \mathbb{N}$  згідно з аксіомою 4.

**17. Поняття про конструктивну побудову множини раціональних чисел.** Якщо множини натуральних і цілих чисел уже введені, то множину  $\mathbb{Q}$  всіх раціональних чисел можна визначити наступним чином. Нехай  $\mathbb{Q}$  – множина всіх упорядкованих пар  $x = (p; q)$ , де  $p \in \mathbb{Z}$  і  $q \in \mathbb{N}$ . Дві упорядковані пари  $(p; q)$  і  $(\tilde{p}; \tilde{q})$  називаються рівними, якщо  $p\tilde{q} = \tilde{p}q$ . Сумою двох упорядкованих пар  $x = (p; q)$  і  $(\tilde{p}; \tilde{q})$  називається упорядкована пара  $(p\tilde{q} + \tilde{p}q; pq)$ . Добутком двох упорядкованих пар  $(p; q)$  і  $(\tilde{p}; \tilde{q})$  називається упорядкована пара  $(\tilde{p}\tilde{q}; pq)$ . Пару  $(p; 1)$  будемо позначати через  $p$ , а пару  $(1; q)$  – через  $\frac{1}{q}$ :  $p = (p; 1)$ ,  $\frac{1}{q} = (1; q)$ . Тоді кожне раціональне число  $x = (p; q)$  можна записати у вигляді  $x = (p; 1)(1; q) = p \frac{1}{q} = \frac{p}{q}$ , тобто у вигляді звичайного дроби  $x = \frac{p}{q}$ . Переконаємось, що введені вище операції додавання і множення узгоджуються з відомими операціями над звичайними дробами.

**18. Зауваження про побудову множини дійсних чисел як прорізів в множині раціональних чисел.**

**Приклад 1.** Число  $\sqrt{2}$  ділить множину раціональних чисел на два класи  $(-\infty; \sqrt{2}) \cap \mathbb{Q}$  і  $[\sqrt{2}; +\infty) \cap \mathbb{Q}$ . При цьому в першому класі нема найбільшого раціонального числа, а в другому нема найменшого раціонального числа.

**Приклад 2.** Число 2 ділить множину раціональних чисел на два класи  $(-\infty; 2) \cap \mathbb{Q}$  і  $[2; +\infty) \cap \mathbb{Q}$ . При цьому в першому класі нема найбільшого раціонального числа, а в другому є найменше раціональне число.

**Приклад 3.** Число 3 ділить множину раціональних чисел на два класи  $(-\infty; 3] \cap \mathbb{Q}$  і  $(3; +\infty) \cap \mathbb{Q}$ . При цьому в першому класі є найбільше раціональне число, а в другому нема найменшого раціонального числа.

На цих спостереженнях базується один із способів (спосіб Р.Дедекінда) уведення множини дійсних чисел, про який будемо говорити нижче. З точки зору розглядуваного питання два останні приклади нічим не відрізняються. Тому можна обмежитись розглядом одного з них. При цьому слід уявити, що термін “дійсне число” нам не знайомий. Припустимо, що раціональні числа певним чином уведені і основні їхні властивості встановлені.

Прорізом в множині раціональних чисел будемо називати упорядковану пару  $(X_- | X_+)$ , множин  $X_-$  і  $X_+$  раціональних чисел, якщо виконуються три умови: 1) кожне раціональне число міститься в одній і тільки в одній з множин  $X_-$  або  $X_+$ ; 2) кожне число множини  $X_-$  є меншим за кожне число множини  $X_+$ ; 3) або а) в класі  $X_-$  є найбільше раціональне число, а в класі  $X_+$  нема найменшого раціонального числа, або б) в класі  $X_-$  нема найбільшого раціонального числа і в класі  $X_+$  нема найменшого раціонального числа  $X_+$ .

При цьому множину  $X_-$  називають нижньою множиною прорізу, а множину  $X_+$  верхньою множиною прорізу. Два прорізи  $(X_- | X_+)$  і  $(Y_- | Y_+)$  називаються рівними, якщо  $X_- = Y_-$  і  $X_+ = Y_+$ .

Дійсним числом називається будь-який проріз  $x = (X_- | X_+)$  в множині раціональних чисел. Між множиною всіх раціональних чисел і множиною всіх прорізів, які задовольняють умову 3)а), існує взаємно однозначна відповідність. Тому дійсні числа, які задовольняють умову 3)а) називаються раціональними. Дійсні числа, які задовольняють умову 3)б) називаються ірраціональними. Виходячи з цього означення можна отримати основні властивості множини дійсних чисел. Деякі відповідні означення і теореми наведені нижче в прикладах.

**Приклад 4.** Дійсні числа  $x = (X_- | X_+)$  і  $y = (Y_- | Y_+)$  називаються рівними, якщо  $X_- = Y_-$  і  $X_+ = Y_+$ .

**Приклад 5.** Якщо  $x = y$  і  $y = z$ , то  $x = z$ .

**Приклад 6.** Кажуть, що  $x < y$ , якщо  $X_- \subset Y_-$ .

**Приклад 7.** Якщо  $x < y$  і  $y < z$ , то  $x < z$ .

**Приклад 8.** Якщо  $x < y$ , то існує раціональне число  $z$ , для якого  $x < z < y$ .

**19. Аксиоматичне означення множини дійсних чисел.** Множиною дійсних чисел називається така непорожня множина  $\mathbb{R}$ , на якій задано операцію додавання двох елементів, тобто функцію  $+: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , операцією множення двох елементів, тобто функцію  $\cdot: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , а також поняття відношення порядку  $\leq$ , тобто відповідність  $\leq: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  так, що мають місце такі твердження.

**1 (аксіоми додавання).** 1а. Для будь-яких елементів  $a \in \mathbb{R}$  і  $b \in \mathbb{R}$  виконується  $a + b = b + a$  (комутативність додавання). 1б. Для будь-яких  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  і  $c \in \mathbb{R}$  виконується  $a + (b + c) = (a + b) + c$  (асоціативність додавання). 1в. Існує елемент  $0 \in \mathbb{R}$ , який називається нулем, такий, що для кожного елемента  $a \in \mathbb{R}$  виконується  $a + 0 = a$ . 1г. Для кожного  $a \in \mathbb{R}$  існує елемент  $-a \in \mathbb{R}$ , який називається протилежним до  $a$ , такий, що  $a + (-a) = 0$ .

**2 (аксіоми множення).** 2а. Для будь-яких елементів  $a \in \mathbb{R}$  і  $b \in \mathbb{R}$  виконується  $a \cdot b = b \cdot a$  (комутативність множення). 2б. Для будь-яких елементів  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  і  $c \in \mathbb{R}$  виконується  $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$  (асоціативність множення). 2в. Для будь-яких  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  і  $c \in \mathbb{R}$  виконується  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$  (дистрибутивність множення відносно додавання). 2г. Існує елемент  $1 \in \mathbb{R}$ , який називається одиницею, такий, що  $1 \neq 0$  і для будь-якого елемента  $a \in \mathbb{R}$  виконується  $a \cdot 1 = a$ . 2д. Для кожного  $a \in \mathbb{R} / \{0\}$  існує елемент  $\frac{1}{a} \in \mathbb{R}$ , який називається оберненим до  $a$ , такий, що  $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ .

**3 (аксіоми порядку).** 3а. Для кожного  $a \in \mathbb{R}$  виконується  $a \leq a$ . 3б. Якщо  $a \leq b$  і  $b \leq a$ , то  $a = b$ . 3в. Якщо  $a \leq b$  і  $b \leq c$ , то  $a \leq c$ . 3г. Якщо  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $c \in \mathbb{R}$  і  $a \leq b$ , то  $a + c \leq b + c$ . 3д. Якщо  $0 \leq a$  і  $0 \leq b$ , то  $0 \leq a \cdot b$ .

**4 (аксіома неперервності Кантора).** Для будь-якої нескінченної системи замкнених вкладених проміжків існує принаймні одне дійсне число, яке належить всім проміжкам цієї системи.

Елементи множини  $\mathbb{R}$  називаються дійсними числами. Число  $1+1$  позначають через 2, число  $2+1$  позначають через 3 і т.д. Числа 1, 2, 3, ... називаються натуральними. Числа 0, 1,  $-1$ , 2,  $-2$  і т.д. називаються цілими.

Числа  $p \cdot \frac{1}{q}$ , де  $p \in \mathbb{Z}$  і  $q \in \mathbb{N}$  називаються раціональними і їх позначають  $\frac{p}{q}$ .

На основі цих аксіом можна отримати всі відомі властивості дійсних чисел. Деякі елементи відповідних означень та теорем містяться в наступних прикладах, а деякі будуть наведені пізніше.

**Приклад 1.** Різницею  $a - b$  дійсних чисел  $a$  і  $b$  називається таке число  $c$ , що  $b + c = a$ .

**Приклад 2.** Для будь-яких двох дійсних чисел  $a$  і  $b$  різниця  $a - b$  існує і  $a - b = a + (-b)$ . Справді, згідно з аксіомами додавання  $b + (a + (-b)) = b + a + (-b) = b + (-b) + a = 0 + a = a$ .

**Приклад 3.** В множині дійсних чисел існує єдиний нуль. Справді, припустимо, що в множині дійсних чисел існує два таких нулі  $0$  і  $\tilde{0}$ . Тоді  $\tilde{0} + 0 = \tilde{0}$  і  $0 + \tilde{0} = 0$ . Тому  $0 = \tilde{0}$ . Суперечність.

**Приклад 4.** Для кожного дійсного числа  $a$  існує єдине протилежне число. Справді, припустимо, що для деякого дійсного числа  $a$  існує два протилежні числа  $-a$  і  $-\tilde{a}$ . Тоді  $a + (-a) + (-\tilde{a}) = 0 + (-\tilde{a})$  і  $-\tilde{a} = -a$ . Суперечність.

**Приклад 5.**  $-(-a) = a$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,  $a = a + 0 = a + (-a - (-a)) = -(-a)$ .

**Приклад 6.**  $a - a = 0$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,  $a - a = a + (-a) = 0$ .

**Приклад 7.** Часткою  $a : b$  двох дійсних чисел  $a$  і  $b$  називається таке число  $c$ , що  $b \cdot c = a$ .

**Приклад 8.** Для будь-яких двох дійсних чисел  $a$  і  $b$  частка  $a : b$  існує і  $a : b = a \cdot \frac{1}{b}$ .

**Приклад 9.** Для кожного дійсного числа  $a$  існує єдине обернене число.

**Приклад 10.** Кажуть, що  $a < b$ , якщо  $a \leq b$  і  $a \neq b$ .

**Зауваження 1.** З аксіом 1-3 послідовно отримуємо основні властивості арифметичних операцій. Далі вводимо поняття степеня з натуральним показником і на основі цих же аксіом обґрунтовуємо його відомі зі шкільного курсу математики властивості. Доводимо теорему про існування точної верхньої і точної нижньої меж. Потім вводимо поняття границі

послідовності, суми ряду та покажемо, що кожне дійсне число є границею послідовності раціональних чисел і між множиною всіх дійсних чисел і множиною всіх нескінченних десяткових дробів існує взаємно однозначна відповідність, якщо не розглядати періодичних десяткових з періодом 9. Далі вводимо поняття границі функції і поняття неперервної функції і встановлюємо їхні властивості, вводимо поняття степеня з раціональним показником і обґрунтовуємо його властивості, вводимо поняття степеня з довільним дійсним показником і обґрунтовуємо його властивості, вводимо поняття логарифма і обґрунтовуємо його властивості, вводимо поняття синуса і косинуса як суми рядів

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

і обґрунтовуємо їхні властивості. Після цього ми можемо розглядати відповідні приклади на дослідження функцій та їхніх границь. Така приблизно повинна бути послідовність вивчення математичного аналізу і цей курс написаний так, що його можна читати в такій послідовності. Проте реально здійснити це при першому етапі вивчення предмету важко.

**Зауваження 2.** Вище було доведено, що з принципу вкладених проміжків випливає, що кожна не порожня і обмежена зверху множина має точну верхню межу. Можна довести і обернене твердження: якщо кожна не порожня і обмежена зверху множина має точну верхню межу, то для кожної нескінченної системи замкнених вкладених проміжків, існує точка, яка належить всім проміжкам цієї системи. Тому в наведеній вище системі аксіом множини дійсних чисел аксіому неперервності Кантора можна замінити наступною аксіомою

**4' (аксіома існування точної верхньої межі).** Кожна непорожня і обмежена зверху множина має точну верхню межу.

## 20. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення об'єднання двох множин.
2. Сформулюйте означення перетину двох множин.
3. Сформулюйте означення функції.
4. Сформулюйте означення оборотної функції.
5. Чи є функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  оборотною, якщо знайдеться таке число  $b \in \mathbb{R}$ , що рівняння  $f(x) = b$  має нескінченну кількість розв'язків?
6. Сформулюйте означення взаємно однозначної відповідності.
7. Наведіть три приклади ірраціональних чисел.

8. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, сума яких є раціональним числом.
9. Наведіть приклад двох ірраціональних чисел, добуток яких є раціональним числом.
10. Наведіть приклад раціонального числа, яке належить проміжку  $(\sqrt{2}; \sqrt{3})$ .
11. Чи існують такі два різні раціональні числа  $a$  і  $b$ , що проміжок  $(a; b)$  не містить жодного ірраціонального числа?
12. Серед чисел  $1, (0); 0,9; \sqrt{2}; \sqrt{4}$  виберіть натуральні.
13. Серед чисел  $2; 1,2(7); \sqrt{9}; \sqrt{3}; e; \pi$  виберіть раціональні.
14. Запишіть комутативний закон додавання дійсних чисел.
15. Запишіть асоціативний закон додавання дійсних чисел.
16. Запишіть комутативний закон множення дійсних чисел.
17. Запишіть асоціативний закон множення дійсних чисел.
18. Запишіть дистрибутивний закон множення дійсних чисел.
19. Завершіть написання формули  $\sqrt{x^2} =$ .
20. Порівняйте числа  $|x + y|$  і  $|x| + |y|$ .
21. Порівняйте числа  $||x| - |y||$  і  $|x - y|$ .
22. Порівняйте числа  $|y| - |x|$  і  $|x - y|$ .
23. Порівняйте числа  $||a| - |b||$  і  $|a + b|$ .
24. Порівняйте числа  $|x + y|$  і  $|x - y|$ .
25. Чи правильне твердження: множина всіх раціональних чисел є еквівалентною множині всіх натуральних чисел?
26. Наведіть приклад ірраціонального числа, яке належить проміжку  $(1; \sqrt{3})$ .
27. Що можна сказати про дійсні числа  $x$  і  $y$ , якщо:  $(\forall \varepsilon > 0): |x - y| < \varepsilon$ ?
28. Що можна сказати про дійсні числа  $x$  і  $y$ , якщо:  $(\forall \varepsilon > 0): |x - y| \leq \varepsilon$ ?
29. Що можна сказати про дійсні числа  $x$  і  $y$ , якщо:  $|x - y| = 0$ ?
30. Що можна сказати про дійсні числа  $x$  і  $y$ , якщо:  $(\exists \varepsilon > 0): |x - y| < \varepsilon$ ?
31. Що можна сказати про дійсні числа  $x$  і  $y$ , якщо:  $(\exists \varepsilon > 0): |x - y| \leq \varepsilon$ ?
32. Сформулюйте принцип вкладених проміжків.
33. Сформулюйте означення обмеженої множини.
34. Наведіть приклад нескінченної обмеженої множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
35. Наведіть приклад нескінченної необмеженої множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
36. Сформулюйте означення обмеженої зверху множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
37. Сформулюйте означення верхньої межі множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
38. Сформулюйте два означення точної верхньої межі множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
39. Сформулюйте означення обмеженої знизу множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
40. Сформулюйте означення нижньої межі множини  $H \subset \mathbb{R}$ .
41. Сформулюйте два означення точної нижньої межі множини  $H \subset \mathbb{R}$ .

42. Наведіть приклад множини  $H \subset \mathbb{R}$ , яка є обмеженою зверху і необмеженою знизу.
43. Наведіть приклад множини  $H \subset \mathbb{R}$ , яка є необмеженою зверху і обмеженою знизу.
44. Чи є множина  $H \subset \mathbb{R}$  обмеженою зверху, якщо  $(\forall x \in H)(\exists K \in \mathbb{R}) : x \leq K$  ?
45. Чи є число  $M_0$  точною верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо виконуються наступні дві умови: 1)  $(\forall x \in H) : x \leq M_0$ ; 2)  $(\exists x' \in H)(\forall \varepsilon > 0) : x' > M_0 - \varepsilon$  ?
46. Чи є число  $M_0$  точною верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо виконуються наступні дві умови: 1)  $(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in H) : x \leq M_0 + \varepsilon$ ; 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' > M_0 - \varepsilon$  ?
47. Чи є число  $M_0$  точною верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо виконуються наступні дві умови: 1)  $(\forall x \in H) : x \leq M_0$ ; 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' \geq M_0 - \varepsilon$  ?
48. Чи є число  $m_0$  точною нижньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо виконуються наступні дві умови: 1)  $(\forall x \in H) : x \geq m_0$ ; 2)  $(\exists x' \in H)(\forall \varepsilon > 0) : x' < m_0 + \varepsilon$  ?
49. Чи є число  $m_0$  точною нижньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо виконуються наступні дві умови: 1)  $(\forall x \in H) : x \geq m_0$ ; 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' \leq m_0 + \varepsilon$  ?
50. Чи є множина  $H \subset \mathbb{R}$  обмеженою знизу, якщо:  $(\forall x \in H)(\exists K \in \mathbb{R}) : x \geq K$  ?
51. Чи є число  $M_0$  точною верхньою межею множини  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо виконуються наступні дві умови: 1)  $(\exists x \in H) : x \leq M_0$ ; 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in H) : x' > M_0 - \varepsilon$  ?
52. Сформулюйте і доведіть теорему про існування точної верхньої межі.
53. Наведіть приклад такої множини  $H \subset \mathbb{R}$ , що вона не має найменшого елемента, має найбільший елемент,  $\inf H = -4$  і  $\max H = -2$ .
54. Сформулюйте означення еквівалентних множин.
55. Сформулюйте означення зліченної множини.
56. Доведіть, що множина всіх раціональних чисел є зліченною.
57. Доведіть, що множина всіх натуральних чисел є зліченною.
58. Доведіть, що множина всіх дійсних чисел є незліченною.
59. Наведіть приклад зліченної множини.
60. Наведіть приклад незліченної множини.
61. Чи існує скінченна множина, яка є зліченною?

## 21. Вправи і задачі теоретичного характеру.

### 1. Доведіть твердження

- $C_n^k = C_n^{n-k}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \overline{1; n}$ .
- $C_n^k + C_n^{k-1} = C_{n+1}^k$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \overline{1; n}$ .

$$3. \sum_{k=0}^n (-1)^k k C_n^k = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$4. \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$5. \sum_{k=0}^n \frac{C_n^k}{n+1} = \frac{1}{n+1} (2^{n+1} - 1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$6. \sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$7. x^{2n+1} + a^{2n+1} = (x+a)(x^{2n} - x^{2n-1}a + \dots + (-1)^k x^{2n-k} a^k + \dots + xa^{2n} - a^{2n+1}), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$8. \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$9. \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$10. \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$11. \sum_{j=1}^n j^3 = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$12. \sum_{j=1}^n j^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$13. \sum_{j=1}^n j^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{30}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$14. \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{1}{d} \left( \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_{n+1}} \right), \quad \text{для кожної арифметичної прогресії } (a_k) \text{ з відмінними від нуля членами } a_k \text{ і різницею } d \text{ та кожного } n \in \mathbb{N}.$$

$$15. \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2}} = \frac{1}{2d} \left( \frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2}} \right), \quad \text{для кожної арифметичної прогресії } (a_k) \text{ з відмінними від нуля членами } a_k \text{ і різницею } d \text{ та кожного } n \in \mathbb{N}.$$

$$16. \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k a_{k+1} a_{k+2} a_{k+3}} = \frac{1}{3d} \left( \frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \frac{1}{a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3}} \right), \quad \text{для кожної арифметичної прогресії } (a_k) \text{ з відмінними від нуля членами } a_k \text{ і різницею } d \text{ та кожного } n \in \mathbb{N}.$$

$$17. \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$18. \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right) = \frac{n+2}{2n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$19. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \prod_{m=0}^{k-1} \left(1 - \frac{m}{n}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$20. \left| \prod_{k=1}^n a_k - \prod_{k=1}^n b_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \left| \prod_{i=k+1}^n a_i \right| \left| \prod_{i=1}^{k-1} b_i \right| |b_k - a_k|, \quad a_i \in \mathbb{R}, \quad b_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$21. \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n |a_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n |a_k|^2} \leq \sum_{k=1}^n |a_k|, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$22. \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

23.  $[\mu_1 x + \lambda_1] = [\mu_1 x]$  виконується для всіх  $x \in \mathbb{R}$  для тих і тільки тих упорядкованих пар  $(\mu_1; \lambda_1)$  дійсних чисел для яких  $\mu_1 = 0$  або  $\lambda_1 = 0$ .

24.  $[\lambda_1 + \lambda_2] = [\lambda_1] + [\lambda_2]$  тоді і тільки тоді, коли  $[\lambda_1] + [\lambda_2] = 0$

25. Якщо  $\sum_{k=1}^n [\mu_k x + \lambda_k] = \left[ \sum_{k=1}^n \mu_k x + \lambda_k \right]$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , то  $\sum_{k=1}^n [\lambda_k] = \left[ \sum_{k=1}^n \lambda_k \right]$ .

$$26. 3 + 33 + \dots + 333\dots3 = \frac{10^{n+1} - 9n - 10}{27}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$27. \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{2}}}} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$28. \sum_{k=1}^n k!k = (n+1)! - 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$29. \sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^n \cos kx = \sin \frac{(n+1)x}{2} \cos \frac{nx}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$30. \sin \frac{x}{2} \sum_{k=0}^n \sin kx = \sin \frac{(n+1)x}{2} \sin \frac{nx}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

31.  $\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right) \left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right) - \sum_{1 \leq i < k \leq n} (a_i b_k - a_k b_i)$  (рівність Лагранжа) для будь-яких дійсних чисел  $a_j, b_j$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

$$32. (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$33. (a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$34. (a+b+c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2c + b^2a + c^2a + c^2b) + 6abc, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

$$35. (x_1 + x_2 + \dots + x_p)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_p=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_p!} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_p^{k_p} \quad \text{для всіх } p \in \mathbb{N}, \quad x_i \in \mathbb{R} \text{ і}$$

$n \in \mathbb{N}$ , де сумування ведеться за всіма такими цілими невід'ємними  $k_i$ , для яких  $k_1 + k_2 + \dots + k_p = n$ .

36. Для кожного натурального числа  $n$  знайдуться такі натуральні числа  $p$ ,  $q$  і ціле невід'ємне число  $r \in \overline{0; p}$ , що  $n = pq + r$ .

37.  $\sqrt{3}$  – ірраціональне число.

**2. Доведіть твердження**

1.  $a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

2.  $a^n + b^n \geq a^k b^{n-k} + a^{n-k} b^k$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \overline{1; n}$ .

3.  $a^n + b^n \leq (a+b)^n$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

4.  $(a+b)^n \leq 2^{n-1}(a^n + b^n)$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

5.  $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < 1/\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

6.  $1/\sqrt{n} < 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

7.  $\frac{2+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}} + \frac{3+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \geq 2$ .

8.  $\frac{1-|\cos x|}{1+|\cos x|} \leq \sin^2 x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

9.  $\sin^6 x + \cos^6 x \geq \frac{1}{4}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

10.  $\frac{\sin^4 x + \cos^4 x}{2 + \cos x} \geq \frac{1}{2}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

11.  $(2n)! \leq 2^{2n} (n!)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

12.  $(1+b)^n \geq 1 + C_n^k b^k$ ,  $b \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \overline{1; n}$ .

13.  $(1+1/n)^n < (1+1/(n+1))^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

14.  $(1-1/n)^n < (1-1/(n+1))^{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

15.  $(1+1/n)^n < (1+1/2n)^{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

16.  $2 < (1+1/n)^n < 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

17.  $\sqrt[n]{n} < 1 + 2/\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

18.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

19.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k} \geq \frac{1}{2}$ .

20.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k+1}} > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

21.  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} < 3$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

$$22. \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k} \leq \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{n}, \quad a_k \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$23. n^p < \frac{(n+1)^{p+1} - n^p}{p+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p > 0.$$

$$24. \frac{(n+1)^{p+1} - n^p}{p+1} < (n+1)^{p+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p > 0.$$

$$25. \sum_{k=1}^{n-1} k^p < \frac{n^p}{p+1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p > 0.$$

$$26. \frac{n^p}{p+1} < \sum_{k=1}^n k^p, \quad n \in \mathbb{N}, \quad p > 0.$$

$$27. \left| \sin \sum_{k=1}^n \alpha_k \right| \leq \sum_{k=1}^n \sin \alpha_k, \quad \alpha_k \in [0; \pi], \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$28. \left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n b_k^2 \right) \quad (\text{нерівність Шварца, Коші-Буняковського}) \text{ для}$$

будь-яких дійсних чисел  $a_j, b_j$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

29. Об'єднання зліченної кількості скінченних множин є або скінченною множиною або зліченною множиною.

30. Об'єднання зліченної кількості злічених множин є зліченною множиною.

**3. Доведіть твердження ( $A \Delta B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ )**

1.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

2.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

3.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

4.  $A \subset B$ , якщо  $A \cap B = A$ .

5.  $A \cap B = A$ , якщо  $A \subset B$ .

6.  $A \subset B$ , якщо  $A \cup B = B$ .

7.  $A \cup B = B$ , якщо  $A \subset B$ .

8.  $A \subset B \cup (A \setminus B)$ .

9. Існують такі множини  $A$  і  $B$ , що  $A \neq B \cup (A \setminus B)$ .

10.  $A \setminus B \subset C$ , якщо  $A = B \cup C$ .

11. Існують такі множини  $A, B$  і  $C$ , що  $(B \cup C) \setminus B \neq C$ .

12.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ .

13.  $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$ .

14. Існують такі множини  $A, B$  і  $C$ , що  $(A \cup B) \setminus C \neq A \cup (B \setminus C)$ .

15.  $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$ .

16. Існують такі множини  $A_1, A_2, B_1$  і  $B_2$ , що

$$(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \neq (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2).$$

17.  $C \subset (A \cap B)$ , якщо  $C \subset A$  і  $C \subset B$ .

18.  $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ .
19.  $A \cup (B \setminus A) = B$ , якщо  $A \subset B$ .
20.  $A \cup (A \cap B) = A$ .
21.  $A \cup ((B \setminus A) \cap B) = A \cup B$ .
22.  $H \setminus \bigcup_a A_a = \bigcap_a (H \setminus A_a)$ .
23.  $H \setminus \bigcap_a A_a = \bigcup_a (H \setminus A_a)$
24.  $A \cup C \subset B \cup C$ , якщо  $A \subset B$ .
25.  $A \cap C \subset B \cap C$ , якщо  $A \subset B$ .
26.  $(A_1 \setminus A_2) \setminus A_3 = (A_1 \setminus A_3) \setminus (A_2 \setminus A_3)$ .
27.  $A \cup A = A$ .
28.  $A \cap A = A$
29.  $A \cap (B \setminus A) = \emptyset$ , якщо  $A \subset B$ .
30.  $(A \cup B) \subset C$ , якщо  $A \subset C$  і  $B \subset C$ .
31.  $A_1 \cap A_2 = A_1 \setminus (A_1 \setminus A_2)$ .
32.  $A \cup (B \setminus A) = B$ , якщо  $A \subset B$ .
33.  $B \setminus (B \setminus A) = A$ , якщо  $A \subset B$ .
34.  $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = A_1 \cup \left( \bigcup_{k=2}^{\infty} (A_k \setminus A_{k-1}) \right)$ .
35.  $\bigcap_{k=1}^{\infty} B_k = B_1 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_1 \setminus B_k)$ .
36.  $A \Delta B = B \Delta A$ .
37.  $A \Delta \emptyset = A$ .
38.  $A \Delta A = \emptyset$ .
39.  $A \setminus B = A \Delta (A \cap B)$ .
40.  $A \cap B = A \Delta (A \setminus B)$ .
41.  $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$ .
42.  $A \cap B = (A \cup B) \setminus (A \Delta B)$ .
43.  $A \subset B \cup (A \Delta B)$ .
44.  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ .
45.  $A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C$ .
46.  $\left( \bigcap_k A_k \right) \Delta \left( \bigcap_k B_k \right) \subset \bigcup_k (A_k \Delta B_k)$ .
47.  $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$ .
48.  $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$ .
49.  $(A_1 \cup A_2) \Delta (B_1 \cup B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ .
50.  $(A_1 \setminus A_2) \Delta (B_1 \setminus B_2) \subset (A_1 \Delta B_1) \cup (A_2 \Delta B_2)$ .

$$51. \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \right) \Delta \left( \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \right) \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \Delta B_k).$$

4. Доведіть твердження ( $f : H_1 \rightarrow H_2$  – деяка функція,  $A \subset H_1$ ,  $B \subset H_1$ ,  $C \subset H_2$ ,  $D \subset H_2$ )

1.  $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ .

2.  $f(A \cap B) \subset (f(A) \cap f(B))$ .

3. Існують такі множини  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $A \subset H_1$ ,  $B \subset H_1$  і функція  $f : H_1 \rightarrow H_2$ , що  $f(A \cap B) \neq (f(A) \cap f(B))$ .

4.  $f(A \cap B) = (f(A) \cap f(B))$ , якщо функція  $f : H_1 \rightarrow H_2$  є оборотною.

5.  $f(H_1 \setminus B) \subset f(H_1) \setminus f(B)$ .

6. Існують такі множини  $H_1$ ,  $H_2$ ,  $B \subset H_1$  і функція  $f : H_1 \rightarrow H_2$ , що  $f(H_1 \setminus B) \neq f(H_1) \setminus f(B)$ .

7.  $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$ .

8.  $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ .

9.  $f^{-1}(H_2 \setminus C) = H_1 \setminus f^{-1}(C)$ .

5. Доведіть твердження

1.  $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

2.  $\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt{ab}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ .

3.  $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ .

4.  $a + \frac{1}{a} \geq 2$ ,  $a \geq 0$ .

5. Якщо  $a + \frac{1}{a} = 2$ , то  $a = 1$ .

6.  $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$ ,  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$ .

7. Якщо  $\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2}$ , то  $a \geq 0$ ,  $b \geq 0$  і  $a = b$ .

8.  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \geq \sqrt{4}$ .

9.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \geq \sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

10.  $\left| \sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2} \right| \leq |b - b_1|$ ,  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ,  $b_1 \in \mathbb{R}$ .

11.  $\sum_{k=1}^{20} 3 = 60$ .

$$12. \sum_{k=4}^2 k = 0.$$

$$13. \sum_{k=1}^{1002} k^{10} = \sum_{k=0}^{1001} (k+1)^{10}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{1000} k^{11} = 1 + \sum_{k=1}^{999} (k+1)^{11}.$$

$$15. \sum_{k=1}^n (a_{k+1} - a_k) = a_{n+1} - a_1, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_k \in \mathbb{R}.$$

$$16. \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$17. \sum_{j=0}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$18. \sum_{k=1}^n a_k = n \frac{a_1 + a_n}{2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_k = a_1 + (k-1)d, \quad d \in \mathbb{R}.$$

$$19. \sum_{k=1}^n q^{k-1} = \frac{1-q^n}{1-q}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{R}, \quad q \neq 1.$$

$$20. \sum_{k=0}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$21. \prod_{k=1}^3 2 = 8, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$22. \prod_{k=4}^2 2 = 1.$$

$$23. \prod_{k=1}^n \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{n+1}}{a_1}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a_k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$$24. \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} \leq \frac{1}{\sqrt{2n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$25. n! \geq 2^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$26. 2^n \geq n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$27. \prod_{k=1}^n (1+x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^n x_k, \quad x_k \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$28. n^{n+1} \geq (n+1)^n, \quad n \geq 3, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$29. (n!)^2 \geq n^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$30. n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

31. Якщо  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $(\forall \varepsilon > 0): |\alpha - \beta| < \varepsilon$ , то  $\alpha = \beta$ .

32. Якщо  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$  і  $(\forall \varepsilon > 0): |\alpha - \beta| \leq \varepsilon$ , то  $\alpha = \beta$ .

33. Якщо  $d(x, y) = |x - y|$ , то  $a_3) d(x, y) = 0$  тоді і тільки тоді, коли  $x = y$ ;  $b_3)$   
 $(\forall x, y) : d(x, y) = d(y, x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$  і  $y \in \mathbb{R}$ ;  $v_3) d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$   
 для всіх  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  і  $z \in \mathbb{R}$ .
34. Існує необмежена зверху множина  $H$ , для якої  $(\forall x \in H)(\exists K \in \mathbb{R}) : x \leq K$ .
35. Існує необмежена знизу множина  $H$ , для якої  $(\forall x \in H)(\exists K \in \mathbb{R}) : x > K$ .
36.  $\sup\{H_1 + H_2\} = \sup H_1 + \sup H_2$ , якщо  $H_1 \subset \mathbb{R}$  і  $H_2 \subset \mathbb{R}$ .
37.  $\inf\{H_1 + H_2\} = \inf H_1 + \inf H_2$ , якщо  $H_1 \subset \mathbb{R}$  і  $H_2 \subset \mathbb{R}$ .
38.  $\sup\{H_1 \cdot H_2\} = \sup H_1 \cdot \sup H_2$ , якщо  $H_1 \subset [0; +\infty)$  і  $H_2 \subset [0; +\infty)$ .
39.  $\inf\{H_1 \cdot H_2\} = \inf H_1 \cdot \inf H_2$ , якщо  $H_1 \subset [0; +\infty)$  і  $H_2 \subset [0; +\infty)$ .
40. Якщо  $\lambda \geq 0$ , то  $\sup(\lambda H) = \lambda \sup H$ .
41. Якщо  $\lambda \leq 0$ , то  $\sup(\lambda H) = \lambda \inf H$ .  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
42.  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
43.  $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 5} + \frac{17}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{2n^2 - 1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{n^2}{2n+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
44. Об'єднання двох злічених множин є зліченною множиною.
45. Об'єднання скінченної кількості злічених множин є зліченною множиною.

## 22. Вправи і задачі розрахункового характеру.

1. Вкажіть множини  $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$ , яким належить число  $x$

1.  $x = \frac{8}{4}$ . 2.  $x = \frac{2}{3}$ . 3.  $x = 0,3333\dots$  4.  $x = 0,2022022202222\dots$

5.  $x = \sqrt{2}$ . 6.  $x_6 = -\sqrt{2} + 4$ . 7.  $x_7 = \pi + 4$ . 8.  $x_8 = 2\pi$ .

2. Наведіть приклади раціонального та ірраціонального чисел, які належать множині  $H$

1.  $H = (0, 3; 2)$ .

2.  $H = (3; 4)$ .

3.  $H = (0; 1/3)$ .

4.  $H = (0, 3; 1/3)$ .

5.  $H = \{1; 2\}$ .

3. Скільки (цілих, раціональних, ірраціональних) чисел належать множині  $A$ ?

1.  $A = \{0; 2\}$ .

2.  $A = \{x : |x + 2| < 3\}$ .

3.  $A = [0; 2]$ .

4.  $A = \{x \in \mathbb{R} : 2 < |x - 5| < 8\}$ .

5.  $A = (0; 2]$

6.  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\}$ .

7.  $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 9 > 0\}$ .

**4. Подайте у вигляді суми**

1.  $(1+x)^5$ .

2.  $(2-x)^6$ .

3.  $(2x-1)^4$ .

4.  $(a-b)^5$ .

**5. Доведіть нерівність**

1.  $(1+n)^5 \geq 10n^2, n \in \mathbb{N}$ .

2.  $(1+\sqrt{n})^6 \geq 20n\sqrt{n}, n \in \mathbb{N}$ .

3.  $3^n \geq 2n(n-1), n \in \mathbb{N}$ .

4.  $(1+1/\sqrt{n})^n \geq \frac{n+1}{2}, n \in \mathbb{N}$ .

**6. Розв'яжіть рівняння**

1.  $\sqrt{x^2-2} = \sqrt{x}$ .

2.  $\sqrt{x-6} = \sqrt{4-x}$ .

3.  $5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140$ .

4.  $x - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ .

5.  $x - 2\sqrt{-x} + 1 = 0$ .

6.  $7^{x+2} - 4 \cdot 7^{x-1} = 347$ .

7.  $|x| - 2\sqrt{|x|} + 1 = 0$ .

8.  $|x| - 2\sqrt{x} + 1 = 0$ .

9.  $|x| - 2\sqrt{-x} + 1 = 0$ .

10.  $\sqrt[3]{x} - 2\sqrt[6]{x} + 1 = 0$ .

11.  $\sqrt{x} - 5\sqrt[4]{x} + 6 = 0$ .

12.  $\sqrt[4]{x} - 2\sqrt[8]{x} - 3 = 0$ .

13.  $2\sqrt[3]{x} + \sqrt[6]{x} - 1 = 0$ .

14.  $\sqrt{x^2-4x-1} = 2$ .

15.  $x + \sqrt{x+1} = 5$ .

16.  $\sqrt{x}\sqrt{2-x} = 2x$ .

17.  $2^{x-1} - 8 \cdot 2^{\sqrt{x}} = 0$ .

18.  $\sqrt{2-x} + \sqrt{x-1} = 7$ .

19.  $4^{\sqrt{x-2}} - 2^{\sqrt{x-2}} = 0$ .

20.  $\log_2 x^2 = 3$ .

21.  $2 \cdot 3^{x+1} - 3^x = 15$ .

22.  $x^2 + 3x + \sqrt{x^2 + 3x} - 6 = 0$ .

23.  $\frac{|x+2| - 3(x+2)^{2/3}}{1 - |x+2|^{1/3}} = 1$ .

24.  $(2^{|x|} + 1)(\ln|x| - 1) = 0$ .

25.  $(2^x + 1)(|\ln x| - 1) = 0.$

26.  $\sqrt{2x+1} - \sqrt{x-3} = \sqrt{x}.$

27.  $(2^{\sqrt{x}} - 1)\ln x = 0.$

28.  $(2^x - 3^x)(\ln x + 1) = 0.$

29.  $(2^{|\ln x|} - 2)(\ln x - 1) = 0.$

30.  $(2^x + 3)(|\ln x| + 1) = 0.$

31.  $\sqrt[3]{x} = 3.$

32.  $x^2 + 1 = 0.$

33.  $\sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{10}.$

34.  $\sqrt{x} = x - 2.$

35.  $|x^2 + 3x| - 6 = 0.$

36.  $|x| + |x - 1| = 3.$

37.  $4^{x-1} - 2 = 0.$

38.  $\sqrt{2^x} \sqrt{3^x} = 36.$

39.  $4^{5-2x} = 0,25.$

40.  $2^x = 3.$

41.  $10^x = 5.$

42.  $3^{x+2} + 3^{x+1} = 28.$

43.  $2^{x+2} - 2^x = 96.$

44.  $5^{x+1} - 5^{x-1} = 24.$

45.  $x - 2\sqrt{|x|} + 1 = 0.$

46.  $\sqrt{x-2} - x + 8 = 0.$

47.  $\frac{x+1}{\sqrt{2x-1}} = \sqrt{x-1}.$

48.  $x - \sqrt{x+1} = 5.$

49.  $\log_2 x = 3.$

50.  $\lg x = 10^{\lg 3} - 1.$

51.  $\lg x = 2 - \lg 5.$

52.  $\lg x = 10^{\lg 3} - 3.$

53.  $\log_2 x = 3 - \log_2 7.$

54.  $\sqrt{\lg^2 x^{-2}} = 1.$

55.  $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-2} = 2.$

56.  $\sqrt{x+2} + \sqrt{x-1} = 1.$

7. Розв'яжіть рівняння

1.  $|\cos x| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$

2.  $\cos|x| = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

3.  $|\cos|x|| = \frac{1}{2}.$

4.  $\operatorname{tg}|x| = \sqrt{3}/3.$

5.  $|\operatorname{tg} x| = -\sqrt{3}/3.$

6.  $|\operatorname{tg}|x|| = -1.$

7.  $(|\sin x| - 1)(\sin x - 1/3) = 0$ .

8.  $\sin|x| = -1/2$ .

9.  $(\sin|x| - 1/2)(\sin x - \sqrt{10}/3) = 0$ .

10.  $|\sin|x|| = \sqrt{3}/2$ .

11.  $\sin x + \sin 2x = 0$ .

12.  $1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2}$ .

13.  $\cos x - 1 + 2 \sin x \operatorname{tg} x = 0$ .

14.  $\cos^2 x - 2 \cos x - 3 = 0$ .

15.  $2 \cos^2 x - 5 \cos x - 3 = 0$ .

16.  $4 \cos^2 x - 7 \sin 2x - 2 = 0$ .

17.  $\sin^2 x - 4 \sin x + 3 = 0$ .

18.  $2 \sin^2 x + 3 \sin x - 2 = 0$ .

19.  $3 \cos 2x = 7 \sin x$ .

20.  $\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 = 0$ .

21.  $\sqrt{3} \operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$ .

22.  $\frac{10}{\operatorname{tg} x + 2} = 3 - \operatorname{ctg} x$ .

23.  $3(1 + \cos 2x) + 11 \sin x - 10 = 0$ .

24.  $\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x = 0$ .

25.  $\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = \frac{1}{2}$ .

26.  $\sin x + \cos 2x = 0$ .

27.  $\cos 2x - \cos 6x = 0$ .

28.  $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$ .

29.  $\cos \frac{\pi}{3} \sin x + \sin \frac{\pi}{3} \cos x = -\frac{1}{2}$ .

30.  $\operatorname{tg}^2 x - 4 \operatorname{tg} x + 3 = 0$ .

31.  $\left(\cos^2 x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) = 0$ .

32.  $\left(\sin|x| - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\sin x + \sqrt{3}\right) = 0$ .

33.  $(|\operatorname{ctg} x| - \sqrt{3})(\operatorname{ctg} x + 5) = 0$ .

34.  $(|\operatorname{ctg}|x|| - 1)(\operatorname{ctg} x - 2) = 0$ .

35.  $\sin^2 x + 2|\sin x| = 0$ .

36.  $\cos^2 x + 2|\cos x| = 0$ .

37.  $\sin x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**8. Розв'яжіть нерівності**

1.  $|x^2 - 5| \geq 2$ .

2.  $|x^2 + 4| < 2$ .

3.  $|x^2 + 1| > 2$ .

4.  $|x^2 + 1| \leq 4$ .

5.  $x^2 + 2x + 1 > 0$ .

6.  $x^2 + x + 8 < 0$ .

7.  $x^2 - 2x + 1 \geq 0$ .

8.  $x^2 - 4x + 4 \leq 0$ .

9.  $|x - 1| - 2x \leq 7$ .

10.  $16 < x^2 < 25$ .

11.  $\left| \frac{x}{x+1} \right| \leq 1$ .

12.  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| \leq 1$ .

13.  $x - |x| < 2$ .

14.  $0 < |x| + x < 2$ .

15.  $|x| + x > 4$ .

16.  $1 < (x-1)^2 < 4$ .

17.  $x^2 - x + 1 \geq 0$ .

18.  $|x| > x$ .

19.  $|x| \geq -x$ .

20.  $(x^2 + 1)(x^2 + x + 1) \leq 0$ .

21.  $0 < x^2 < 9$ .

22.  $0 < (x-2)^2 < 16$ .

23.  $|x+1| + |x| > 1$ .

24.  $|x-1| + |x| \leq 1$ .

25.  $x^2 - 5x + 4 \geq 0$ .

26.  $x^2 + 3x + 2 \leq 0$ .

27.  $0 < |x-1| + |x| < 4$ .

28.  $-2x^2 + 6x - 4 \geq 0$ .

29.  $-2x^2 - 10x - 8 > 0$ .

30.  $(x^2 + 1)(x - 2) \geq 0$ .

31.  $(x-1)(x+2) < 0$ .

32.  $(x+1)(x-2) \geq 0$ .

33.  $\frac{x-1}{x+3} \geq 0$ .

34.  $\frac{x+1}{x-3} < 0$ .

35.  $\frac{1}{x+3} \geq 6$ .

36.  $\frac{6}{x-3} < 2$ .

37.  $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ .

38.  $x^2 + 5x + 4 \leq 0$ .

39.  $x^2 - x + 2 \geq 0$ .

40.  $x^2 + x + 4 \leq 0$ .

41.  $-2x^2 + x + 1 \geq 0$ .

42.  $-2x^2 + x - 1 \geq 0$ .

43.  $|x| < 4$ .

44.  $|x| \geq 2$ .

45.  $x^2 > 4$ .

46.  $x^2 < 9$ .

47.  $0 < x^2 < 16$ .

48.  $|x - 2| > 0,1$ .

49.  $|x + 2| < 0,1$ .

50.  $|x - 5| < 1$ .

51.  $0 < |x - 1| < 4$ .

52.  $0 < |x + 1| < 1$ .

53.  $|x^2 - 4| \leq 2$ .

54.  $||x + 1| - |x - 1|| \leq 1$ .

55.  $|x^2 + 5| > 2$ .

56.  $|x - 1| - |x| \leq 0$ .

57.  $|x + 1| - |x| \leq 0$ .

58.  $0 < |x - 1| + |x| < 4$ .

**9. Розв'яжіть нерівності**

1.  $\sqrt{x+1}\sqrt{x-2} > -1$ .

2.  $\sqrt{x} \leq x - 2$ .

3.  $\sqrt{x^2 - 2} \geq \sqrt{x}$ .

4.  $x - 1 < \sqrt{7 - x}$ .

5.  $x + 3 < \sqrt{x + 33}$ .

6.  $x + 3 < \sqrt{2x + 14}$ .

7.  $\sqrt{11 - 5x} > x - 1$ .

8.  $x - 1 < \sqrt{7 + x}$ .

9.  $4 - x < \sqrt{x^2 - 2x}$ .

10.  $0,4^{2x+1} > 0,16$ .

11.  $3^{4x+2} < (1/9)^{x^2/2}$ .

12.  $(0,2)^{\frac{x-1}{x+1}} < \frac{1}{125}$ .

13.  $\sqrt{2^x}\sqrt{3^x} < 36$ .

14.  $4^x - 2^x < 0$ .

15.  $\log_{0,5} x \geq -3$ .

16.  $\log_{1/2} x < -1$ .

17.  $\log_{0,5}(x + 3) < -1$ .

18.  $\log_2 x < 3 - \log_2 7$ .

19.  $\lg x > 2 - \lg 5$ .

20.  $\log_2 x^2 \leq 3$ .

21.  $\sin x \geq 1/2$ .

22.  $\cos x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .

23.  $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$ .

24.  $\operatorname{tg} x \leq -\sqrt{3}$ .

25.  $|\sin|x|| < \sqrt{3}/2$ .

26.  $|\cos x| > \sqrt{2}/2$ .

27.  $|\cos x| \geq -\sqrt{2}/2.$

28.  $|\cos|x|| \leq \sqrt{3}/2.$

29.  $\sqrt{x^2 - 6x + 9} \leq -x.$

30.  $\sqrt{x^2 - 4x + 4} \leq -x.$

31.  $\sqrt{x} \geq -x.$

32.  $\sqrt{x} \leq x.$

33.  $\sqrt{x^2} \leq -x.$

34.  $\sqrt{x^2} \geq x.$

35.  $\sqrt{x+1} > 1.$

36.  $\sqrt{x+1} > -1.$

37.  $\cos x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}.$

38.  $|\sin x| > \sqrt{2}/2.$

39.  $\operatorname{tg}|x| \geq \sqrt{3}.$

40.  $\cos|x| \geq -\sqrt{2}/2.$

41.  $\ln x < 1.$

42.  $\ln x < -1.$

43.  $\lg|x| > 1.$

44.  $\lg|x| < 0.$

45.  $|\log_2 x| < 2.$

46.  $|\log_{0,2} x| < 2.$

47.  $2^{x^2} > (0,5)^{2x-3}.$

48.  $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-x} < \frac{1}{9}.$

49.  $\sqrt{x^2} - x > 1.$

**10.** Знайдіть  $A \times B$ ,  $A \cdot B$ ,  $A + B$ ,  $a \cdot A$

1.  $A = \{2; 4\}$ ,  $B = \{2; 3; 4; 5\}$ ,  $a = -2$ .      2.  $A = \{1; 3; 4\}$ ,  $B = \{3; 4; 5\}$ ,  $a = 3$ .

**11.** Знайдіть  $A \cup B$ ,  $A \cap B$ ,  $A \setminus B$

1.  $A = \{x : (x+1)^2 < 9\}$ ,       $B = \{x : 0 < |x| < 1\}$ .

2.  $A = \{x : x^2 > 4\}$ ,       $B = \{x : x^2 + 2x + 1 > 0\}$ .

3.  $A = \{x : x^2 + x + 4 > 0\}$ ,       $B = \{x : 0 < |x-1| < 4\}$ .

4.  $A = \{x : x^2 + x + 3 < 0\}$ ,       $B = \{x : 1 < |x+1| < 2\}$ .

5.  $A = \{x : |x| > 3\}$ ,       $B = \{x : x^2 + 1 < 0\}$ .

6.  $A = \{x : 0 < |x| < 2\}$ ,       $B = \{x : x^2 > 1\}$ .

7.  $A = \{x : |x-1| > 1\}$ ,       $B = \{x : x^2 + 6x + 9 \leq 0\}$ .

8.  $A = \{x : |x-1| \leq 1\}$ ,       $B = \{x : x^2 + 2x + 1 < 0\}$ .

9.  $A = \{x : x^2 + 2x + 1 \leq 0\}$ ,       $B = \{x : |x-1| < 0,1\}$ .

10.  $A = \{x : (x+1)^2 \leq 4\}$ ,

$B = \{x : |x| > 1\}$ .

11.  $A = \{x : (x-1)^2 \geq 1\}$ ,

$B = \{x : |x+1| \leq 2\}$ .

12.  $A = \{x : x^2 - 10x + 25 \leq 0\}$ ,

$B = \{x : 4 < x^2 \leq 9\}$ .

13.  $A = \{x : x^2 + x > 0\}$ ,

$B = \{x : |x+2| > 1\}$ .

14.  $A = \{x : x^2 - x < 0\}$ ,

$B = \{x : 0 < |x+2| \leq 1\}$ .

15.  $A = \{x : |x-1| + |x+2| > 1\}$ ,

$B = \{x : x^2 > 4\}$ .

16.  $A = \{x : |x+1| + |x-1| > 2\}$ ,

$B = \{x : x^2 \leq 4\}$ .

17.  $A = \{x : |x-1| + |x-2| \leq 1\}$ ,

$B = \{x : |x| > 1\}$ .

18.  $A = \{x : |x| + |x-2| > 1\}$ ,

$B = \{x : x^2 + x > 0\}$ .

19.  $A = \{x : |x| + |x+2| > 1\}$ ,

$B = \{x : x^2 + x \leq 0\}$ .

20.  $A = \{x : |x| + |x-1| > 2\}$ ,

$B = \{x : x^2 - x \geq 0\}$ .

21.  $A = \{x : |x| + |x-1| \leq 1\}$ ,

$B = \{x : x^2 - x < 0\}$ .

22.  $A = \{x : |x| + |x+1| > 1\}$ ,

$B = \{x : x^2 < 9\}$ .

23.  $A = \{x : |x| + |x+1| \leq 1\}$ ,

$B = \{x : x^2 \geq 9\}$ .

24.  $A = \{x : |x| > |x+2|\}$ ,

$B = \{x : 0 < x^2 \leq 4\}$ .

25.  $A = \{x : |x| \leq |x+2|\}$ ,

$B = \{x : (x-1)^2 > 4\}$ .

26.  $A = \{x : |x| \leq x\}$ ,

$B = \{x : |x| = 1\}$ .

27.  $A = \{x : x^2 \leq x\}$ ,

$B = \{x : |x| \leq 1\}$ .

28.  $A = \{x : \sqrt{x^2} \leq x\}$ ,

$B = \{x : |x| \geq 1\}$ .

29.  $A = \{x : \sqrt{(x-1)^2} \leq 1\}$ ,

$B = \{x : |x-1| \geq 1\}$ .

30.  $A = \{x : \sqrt{(x-1)^2} > 1\}$ ,

$B = \{x : |x-1| > 0\}$ .

31.  $A = \{x : \sqrt{(x-1)^2} < 1\}$ ,

$B = \{x : |x+2| < 1\}$ .

32.  $A = \{x : x^2 + x + 1 > 0\}$ ,

$B = \{x : |x-2| < 1\}$ .

33.  $A = \{x : |x-1| + |x| < 2\}$ ,

$B = \{x : |x^2 + 2| < 1\}$ .

34.  $A = \{x : |x+1| + |x| \geq 1\}$ ,

$B = \{x : |x-1| + |x| - |x+1| = 1\}$ .

12. Знайдіть  $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$ ,  $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$

1.  $A_k = (0; 1/k)$ .

2.  $A_k = [0; 1/k]$

3.  $A_k = (0; 1 + 1/k]$ .

4.  $A_k = [0; 2 + 1/k)$ .

5.  $A_k = [-1/k; 3 + 1/k)$ .

6.  $A_k = [2 - 1/k^2; 4 + 1/k^2]$ .

7.  $A_k = (2 - 1/k; 4 + 1/k)$ .

8.  $A_k = [2 - 1/k; 4 + 1/k)$ .

9.  $A_k = (2 - 1/k; 4 + 1/k]$ .

13. З'ясуйте, чи істинним є висловлення

1.  $(\forall x \in \mathbb{R}) : (x-1)^2 > 0$ .

2.  $(\forall x \in \mathbb{R}) : x + 7 > x^2$ .

3.  $(\exists x \in \mathbb{R}) : x^2 - 2x + 1 < 0$ .

4.  $(\forall n \in \mathbb{N}) : n^3 \geq 2^n$ .

5.  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=1}^n k^2 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2$ .

6.  $(\exists n \in \mathbb{N}) : \sum_{k=1}^n k^2 = \left( \sum_{k=1}^n k \right)^2$ .

14. Вкажіть множину (область) визначення і множину значень функції

1.  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ .

2.  $f(x) = \ln \sqrt{x}$ .

3.  $f(x) = \sin \sqrt{x}$ .

4.  $f(x) = \cos \sqrt{x}$ .

5.  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ .

6.  $f(x) = \arccos \sqrt{x}$ .

7.  $f(x) = \ln \sin x$ .

8.  $f(x) = \ln \cos x$ .

9.  $f(x) = \ln \arcsin x$ .

10.  $f(x) = \ln \arccos x$ .

11.  $f(x) = \ln \operatorname{tg} x$ .

12.  $f(x) = \ln \operatorname{ctg} x$ .

13.  $f(x) = \ln \operatorname{arctg} x$ .

14.  $f(x) = \ln \operatorname{arcctg} x$ .

15.  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

16.  $f(x) = \sqrt[3]{\ln x}$ .

17.  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ .

18.  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

19.  $f(x) = \frac{1}{\arcsin x}$ .

20.  $f(x) = \frac{1}{\arccos x}$ .

21.  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ .

22.  $f(x) = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ .

23.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ .

24.  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ .

25.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg} x}$ .

26.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{arcctg} x}$ .

27.  $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$ .

28.  $f(x) = \sqrt{\arccos x}$ .

29.  $f(x) = \sqrt{e^x}$ .

30.  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

31.  $f(x) = 2x$ .

32.  $f(x) = x^2$ .

33.  $f(x) = e^x$ .

34.  $f(x) = \ln x$ .

35.  $f(x) = \sin x$ .

36.  $f(x) = \cos x$ .

37.  $f(x) = \arcsin x$ .

38.  $f(x) = \arccos x$ .

39.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

40.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ .

41.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

42.  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ .

43.  $f(x) = \sqrt{x}$ .

44.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ .

45.  $f(x) = \frac{1}{|x|}$ .

46.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

47.  $f(x) = \frac{1}{\ln x}$ .

48.  $f(x) = \frac{1}{\ln x^2}$ .

49.  $f(x) = \frac{1}{\ln|x|}$ .

50.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln|x|}}$ .

51.  $f: \mathbb{R}^2 \ni (x; y) \rightarrow \sqrt{x+y}$ .

52.  $f: \mathbb{R}^2 \ni (x; y) \rightarrow \sqrt{1-x^2-y^2}$ .

**15. Зобразіть графік функції**

1.  $y = -(x+1)^2 - 2$ .

2.  $y = -(x+1)^2 + 2$ .

3.  $y = x^2 - x$ .

4.  $y = -x^2 - 2|x| + 4$ .

5.  $y = x^2 - 2|x| + 4$ .

6.  $y = -(|x|-1)^2$ .

7.  $y = x^2 - 2x + 4$ .

8.  $y = -x^2 + x$ .

9.  $y = (|x|+1)^2$ .

10.  $y = |x^2 - 1|$ .

11.  $y = x^2 - |x|$ .

12.  $y = 2|x| + 2$ .

13.  $y = |4x^2 - 8x + 8|.$

14.  $y = -(|x| + 1)^2.$

15.  $y = |-x^2 + 1|.$

16.  $y = |x - 1|.$

17.  $y = |x| + 1.$

18.  $y = -|x + 2|.$

19.  $y = -|x - 1| + 1.$

20.  $y = |x^2 - 2x + 4|.$

21.  $y = -x^2 + |x|.$

22.  $y = -x^2.$

23.  $y = (|x| - 1)^2.$

24.  $y = (x - 1)^2.$

25.  $y = -(x - 1)^2.$

26.  $y = (x + 1)^2.$

27.  $y = -(x + 1)^2.$

28.  $y = x^2 + 1.$

29.  $y = -x^2 + 1.$

30.  $y = (x + 1)^2 - 2.$

31.  $y = x.$

32.  $y = -x.$

33.  $y = x + 1.$

34.  $y = 1.$

35.  $y = 0.$

36.  $y = -x^2 - 2x + 4.$

37.  $y = 4x^2 - 8x + 8.$

38.  $y = |x^2|.$

39.  $y = (x - 1)^2.$

40.  $y = |1 - x^2|.$

41.  $y = |x|.$

42.  $y = -|x|.$

43.  $y = x^2.$

44.  $y = |-(x + 1)^2 - 2|.$

45.  $y = |-(x + 1)^2 + 2|.$

46.  $y = |x^2 - x|.$

47.  $y = |-x^2 + x|.$

48.  $y = |(x + 1)^2 - 2|.$

49.  $y = |-x^2 - 2x + 4|.$

**16. Зобразіть графік функції**

1.  $y = -(x - 1)^3.$

2.  $y = -(x + 1)^3.$

3.  $y = x^3 + 1.$

4.  $y = -x^3 + 1.$

5.  $y = \frac{1}{x-1} + 1.$

6.  $y = \frac{x+1}{x-1}.$

7.  $y = \frac{1-x}{x+1}.$

8.  $y = \frac{1}{|x|} + 1.$

9.  $y = \frac{1}{|x-1|}.$

10.  $y = \frac{1}{|x-1|} + 1.$

11.  $y = \frac{1}{(x-1)^2}.$

12.  $y = -\frac{1}{x^2} + 1.$

13.  $y = \frac{1}{x^2} - 1.$

14.  $y = \frac{1}{(x-1)^3}.$

15.  $y = -\frac{1}{x^3} + 1.$

16.  $y = \frac{1}{x^3} - 1.$

17.  $y = \sqrt{x-2}.$

18.  $y = 2 + \sqrt{x}.$

19.  $y = \sqrt{x} - 2.$

20.  $y = \sqrt{-x} + 2.$

21.  $y = 2 - \sqrt{-x}.$

22.  $y = \sqrt{-x+1}.$

23.  $y = \sqrt{-x-2}.$

24.  $y = \sqrt{|x|+1}.$

25.  $y = \sqrt{x^2 - 2|x| + 1}.$

26.  $y = \sqrt[4]{(x^2 - 2|x| + 1)^4}.$

27.  $y = 2 + \sqrt[3]{x}.$

28.  $y = \sqrt[3]{x} - 2.$

29.  $y = (x+1)^4.$

30.  $y = x^5 + 1.$

31.  $y = -\frac{1}{x}.$

32.  $y = \frac{1}{|x|}.$

33.  $y = \frac{1}{x^2} + 1.$

34.  $y = -\frac{1}{x^2}.$

35.  $y = \frac{1}{(x-1)^3}$ .

36.  $y = -\frac{1}{(x+1)^3}$ .

37.  $y = \sqrt[3]{x}$ .

38.  $y = -\sqrt[3]{x}$ .

39.  $y = 1 + \sqrt{x}$ .

40.  $y = -\sqrt{x+1}$ .

41.  $y = \sqrt{1-x}$ .

42.  $y = -\sqrt{-x}$ .

43.  $y = 1 + x^4$ .

44.  $y = -1 - x^4$ .

45.  $y = x^5 - 1$ .

46.  $y = 1 - x^6$ .

47.  $y = (x-1)^4$ .

48.  $y = -(x-1)^6$ .

49.  $y = \sqrt{x+1}$ .

50.  $y = \sqrt[3]{x+1}$ .

51. 
$$y = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & x < 0, \\ \sqrt[3]{|x|}, & x \geq 0. \end{cases}$$

**17.Зобразіть графік функції**

1.  $y = 2^x + 1$ .

2.  $y = 2^{x+1}$ .

3.  $y = 2^{x-1} - 1$ .

4.  $y = 3^{-x} - 3$ .

5.  $y = |2^{|x|}|$ .

6.  $y = |2^{-x}|$ .

7.  $y = |2^{-|x|}|$ .

8.  $y = 2 \lg x$ .

9.  $y = \lg 10x$ .

10.  $y = -\lg x$ .

11.  $y = -\log_{0,5} x$ .

2.  $y = \log_3(x+1)$ .

13.  $y = 2 + \log_3 x$ .

14.  $y = \log_{0,5}(x-3)$ .

15.  $y = 3 - \log_{0,5} x$ .

16.  $y = 2 + \log_3(x+1)$ .

17.  $y = |\lg_{1/2} 2x|$ .

18.  $y = -\lg|x|$ .

19.  $y = 2 + \lg|x|$ .

20.  $y = \lg_{1/2}|x|$ .

21.  $y = |\lg|x||.$

22.  $y = -|\lg|x||.$

23.  $y = 2 + |\lg|x||.$

24.  $y = |\lg_{1/3}|x||.$

25.  $y = |\lg 10x|.$

26.  $y = \frac{\lg x^2}{2 \lg x}.$

27.  $y = \frac{\log_2 x}{|\log_2 x|}.$

28.  $y = \sqrt{\lg^2(x-1)}.$

29.  $y = \sqrt{\lg^2|x-1|}.$

30.  $y = 3^{2 \log_3 \sqrt{x}}.$

31.  $y = 2^x.$

32.  $y = 3^x.$

33.  $y = 2^{-x}.$

34.  $y = 3^{-x+1}.$

35.  $y = 2^{-|x|}.$

36.  $y = 2^{|x|}.$

37.  $y = \lg x.$

38.  $y = \log_{1/2} x.$

39.  $y = \lg|x|.$

40.  $y = |\log_{1/2} x|.$

41.  $y = 3^{\log_3 x}.$

42.  $y = 3^{-\log_3 x}.$

43.  $y = 9^{\log_3 x}.$

44.  $y = x^{\log_x 2}.$

45.  $y = x^{|\log_x 2|}.$

46.  $y = x^{\log_x \sin x}.$

47.  $y = x^{\log_x |\sin x|}.$

48.  $y = 2^{|x|} + 2^{\lg x} - x^{\lg 2}.$

49.  $y = 1 + x^{\sqrt{\log_x 3}} - 3^{\sqrt{\log_3 x}}.$

50.  $y = 4^{-4 \log_2 \sqrt{x}}.$

51.  $y = 9^{-9 \log_3 \sqrt{\log_3 \sqrt{x}}}.$

52.  $y = \frac{4^{\log_2 x} - 1}{2^{\log_2 - 1}}.$

53.  $y = 2^{|x-1|+x-1}.$

54.  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x \leq 0, \\ 2^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

55.  $f(x) = \begin{cases} |x|, & x < 0, \\ x^2, & x \geq 0. \end{cases}$

56.  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ |\sin x|, & x \geq 0. \end{cases}$

**18. Зобразіть графік функції**

1.  $y = 1 + \sin x$ .
2.  $y = \sin 2x$ .
3.  $y = \operatorname{tg}(-x)$ .
4.  $y = 3 \sin 2x$ .
5.  $y = -\sin x$ .
6.  $y = \sin(-x)$ .
7.  $y = -\sin 2x$ .
8.  $y = \sin^4 x + \cos^4 x + \frac{1}{2} \sin^2 2x$ .
9.  $y = -|\sin x|$ .
10.  $y = \sin|x|$ .
11.  $y = 1 + \sin|x|$ .
12.  $y = -\sin|x|$ .
13.  $y = |\sin|x||$ .
14.  $y = \operatorname{ctg}(-x)$ .
15.  $y = \sin x + |\sin x|$ .
16.  $y = \sqrt{\sin^2 x} - \sin x$ .
17.  $y = |\operatorname{ctg} x|$ .
18.  $y = \operatorname{ctg}|x|$ .
19.  $y = 2 + \cos x$ .
20.  $y = -\operatorname{tg} x$ .
21.  $y = \cos x - 1$ .
22.  $y = \cos(-x)$ .
23.  $y = 1 + \cos(x + \pi / 4)$ .
24.  $y = 2 \cos(x + \pi / 4)$ .
25.  $y = |\operatorname{tg}|x||$ .
26.  $y = -|\cos x|$ .
27.  $y = \cos|x|$ .
28.  $y = |\cos|x||$ .
29.  $y = \frac{|\cos x|}{\cos x}$ .
30.  $y = -|\operatorname{tg} x|$ .
31.  $y = \sin x$ .
32.  $y = \cos x$ .
33.  $y = 2 \cos x$ .
34.  $y = \cos 2x$ .
35.  $y = |\sin x|$ .
36.  $y = |\cos x|$ .
37.  $y = \sin(2x + \pi / 3)$ .
38.  $y = \cos(2x + \pi / 3)$ .
39.  $y = -\cos x$ .
40.  $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ .

41.  $y = \operatorname{tg} x$ .

42.  $y = 2 + \operatorname{tg} x$ .

43.  $y = \operatorname{tg} 2x$ .

44.  $y = \operatorname{tg}(x + \pi / 4)$ .

45.  $y = |\operatorname{tg} x|$ .

46.  $y = \operatorname{tg}|x|$ .

47.  $y = 2 \operatorname{tg} x$ .

48.  $y = -\operatorname{ctg} x$ .

49.  $y = \operatorname{ctg} 2x$ .

50.  $y = \operatorname{ctg} x - 2$ .

51.  $y = \operatorname{ctg}(x - \pi / 3)$ .

52.  $y = \operatorname{ctg} x$ .

53.  $y = |\operatorname{ctg}|x||$ .

54.  $y = \operatorname{ctg}(x + \pi / 3)$ .

55.  $y = \sqrt[4]{\operatorname{tg}^4 x} + \operatorname{tg} x$ .

56.  $y = |\operatorname{ctg} x|$ .

57.  $y = \sin \frac{|x| - x}{2}$ .

58.  $y = \sqrt{\sin^2 x - 2|\sin x| + 1}$ .

59.  $y = \sqrt{\sin^2 x + 2|\sin x| + 1}$ .

60.  $y = \sqrt[4]{\operatorname{tg}^4 x} - \operatorname{tg} x$ .

61.  $y = \cos(x + \pi / 4)$ .

62.  $y = \sqrt[4]{\operatorname{ctg}^4 x} + \operatorname{ctg} x$ .

**19. Зобразіть графік функції**

1.  $y = -\arcsin x$ .

2.  $y = -\arccos x$ .

3.  $y = \arcsin(-x)$ .

4.  $y = \arccos(-x)$ .

5.  $y = -\operatorname{arctg} x$ .

6.  $y = -\operatorname{arcctg} x$ .

7.  $y = \operatorname{arctg}(-x)$ .

8.  $y = \operatorname{arcctg}(-x)$ .

9.  $y = 1 + \arcsin x$ .

10.  $y = 1 + \arccos x$ .

11.  $y = -1 - \operatorname{arctg} x$ .

12.  $y = 1 - \operatorname{arcctg} x$ .

13.  $y = 2 \arcsin x$ .

14.  $y = 0,5 \arccos x$ .

15.  $y = 0,5 \arcsin x$ .

16.  $y = 2 \arccos x$ .

17.  $y = 2 \operatorname{arctg} x$ .

18.  $y = 0,5 \operatorname{arcctg} x$ .

19.  $y = 0,5 \operatorname{arctg} x$ .

20.  $y = 2 \operatorname{arcctg} x$ .

21.  $y = \arcsin(x-1)$ .

22.  $y = \arccos(x+1)$ .

23.  $y = \arcsin(1-x)$ .

24.  $y = \arccos(1-x)$ .

25.  $y = -|\arctg x|$ .

26.  $y = -\text{arcctg}|x|$ .

27.  $y = \arctg|x|$ .

28.  $y = -|\text{arcctg}|x||$ .

29.  $y = |\arcsin x|$ .

30.  $y = |\arccos x|$ .

31.  $y = \arcsin x$ .

32.  $y = \arccos x$ .

33.  $y = \arccos|x|$ .

34.  $y = |\arccos x|$ .

35.  $y = \arccos 2x$ .

36.  $y = \arcsin 2x$ .

37.  $y = \arctg x$ .

38.  $y = \text{arcctg} x$ .

39.  $y = \arcsin|x|$ .

40.  $y = |\text{arcctg}|x||$ .

**20. Доведіть рівності**

1.  $\sin(\text{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$ .

2.  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, x \in [-1;1]$ .

3.  $\cos(\arctg x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$ .

4.  $\cos(\text{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}$ .

5.  $\text{tg}(\text{arcctg} x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

6.  $\text{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1)$ .

7.  $\text{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1;1] \setminus \{0\}$ .

8.  $\text{ctg}(\arctg x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

9.  $\text{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1;1] \setminus \{0\}$ .

10.  $\text{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1)$ .

$$11. \arcsin x = -\arccos \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 0].$$

$$12. \arcsin x = \arccos \sqrt{1-x^2}, x \in [0; 1].$$

$$13. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1; 1).$$

$$14. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, x \in [-1; 0).$$

$$15. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in (0; 1].$$

$$16. \arccos x = \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, x \in [-1; 0].$$

$$17. \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}, x \in [0; 1].$$

$$18. \arccos x = \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [-1; 0).$$

$$19. \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, x \in [0; 1].$$

$$20. \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1; 1).$$

$$21. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in \mathbb{R}.$$

$$22. \operatorname{arctg} x = -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in (-\infty; 0].$$

$$23. \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0; +\infty).$$

$$24. \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \pi, x \in (-\infty; 0].$$

$$25. \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, x \in [0; +\infty).$$

$$26. \operatorname{arctg} x = \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in (-\infty; 0].$$

$$27. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0; +\infty).$$

$$28. \operatorname{arctg} x = -\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in (-\infty; 0].$$

$$29. \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, x \in [0; +\infty).$$

$$30. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{1-xy}{x+y}, x \in (0; +\infty), y \in (0; +\infty).$$

31.  $\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1; 1]$ .
32.  $\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\pi / 2; \pi / 2]$ .
33.  $\arcsin x + \arccos x = \pi / 2, x \in [-1; 1]$ .
34.  $\cos(\arccos x) = x, x \in [-1; 1]$ .
35.  $\arccos(\cos x) = x, x \in [0; \pi]$ .
36.  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in \mathbb{R}$ .
37.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in [-\pi / 2; \pi / 2]$ .
38.  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, x \in \mathbb{R}$ .
39.  $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in (0; \pi)$ .
40.  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi / 2, x \in [-\pi / 2; \pi / 2]$ .
41.  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1; 1]$ .
42.  $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}, x \in \mathbb{R}$ .
43.  $\operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x - y}{1 + xy}, x \in (0; +\infty), y \in (0; +\infty)$ .
44.  $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy - 1}{x + y}, x \in (0; +\infty), y \in (0; +\infty)$ .

21. Виясніть, чи відповідність є функцією в  $\mathbb{R}$ , якщо числу  $x$  ставиться у відповідність вказане число  $y$

1.  $y = x^2$ .
2.  $x = y^2$ .
3.  $y = \sin x$ .
4.  $x = \sin y$ .
5.  $y = \sqrt{1 - x^2}$ .
6.  $x^2 + y^2 = 1$ .
7.  $xy = e^{xy} - 1$ .
8.  $|x| + |y| = 1$ .
9.  $|y| = x$ .
10.  $|y| = \frac{|\operatorname{tg} x|}{\operatorname{tg} x}$ .

22. Знайдіть образи  $x_1$  і  $x_2$  для функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

1.  $f(x) = \ln^2 x, x_1 = 1, x_2 = e$ .
2.  $f(x) = \ln x^2, x_1 = 1, x_2 = e$ .
3.  $f(x) = \ln^2 x, x_1 = e^\pi, x_2 = e^{\sqrt{\pi}}$ .
4.  $f(x) = \ln x^2, x_1 = e^\pi, x_2 = e^{\sqrt{\pi}}$ .
5.  $f(x) = e^x, x_1 = \ln \ln 2, x_2 = 2 \ln 3$ .
6.  $f(x) = \sin x, x_1 = \arcsin \frac{1}{3}, x_2 = \arccos \left( -\frac{1}{4} \right)$ .

7.  $f(x) = \sin x$ ,  $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 2 \operatorname{arctg} \left( -\frac{1}{4} \right)$ .
8.  $f(x) = \sin x$ ,  $x_1 = \operatorname{arcctg} \frac{1}{3}$ ,  $x_2 = 2 \operatorname{arcctg} \left( -\frac{1}{4} \right)$ .
9.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $x_1 = \sin \frac{\pi}{3}$ ,  $x_2 = \sin 4$ .
10.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $x_1 = \sin \frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = \cos 7$ .
11.  $f(x) = \cos x$ ,  $x_1 = \arccos \left( -\frac{1}{2} \right)$ ,  $x_2 = \arcsin \frac{1}{3}$ .
12.  $f(x) = \cos x$ ,  $x_1 = 2 \arccos \left( -\frac{1}{2} \right)$ ,  $x_2 = 2 \arcsin \frac{1}{3}$ .
13.  $f(x) = \cos x$ ,  $x_1 = \operatorname{arctg} \left( -\sqrt{3} \right)$ ,  $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ .
14.  $f(x) = \cos x$ ,  $x_1 = \operatorname{arctg} 1$ ,  $x_2 = 2 \operatorname{arctg} \frac{1}{3}$ .
15.  $f(x) = \cos x$ ,  $x_1 = \operatorname{arcctg} (-1)$ ,  $x_2 = \operatorname{arcctg} \frac{1}{3}$ .
16.  $f(x) = \cos x$ ,  $x_1 = \operatorname{arcctg} \frac{1}{\sqrt{3}}$ ,  $x_2 = 2 \operatorname{arcctg} \frac{1}{3}$ .
17.  $f(x) = \arccos x$ ,  $x_1 = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{6} \right)$ ,  $x_2 = \cos 4$ .
18.  $f(x) = \arccos x$ ,  $x_1 = \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} \right)$ ,  $x_2 = \sin 4$ .
19.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{3}$ ,  $x_2 = \operatorname{arctg} 5$ .
20.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x_1 = \operatorname{arcctg} \sqrt{3}$ ,  $x_2 = \arcsin \frac{1}{3}$ .
21.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x_1 = \operatorname{arcctg} \left( -\sqrt{3} \right)$ ,  $x_2 = 2 \arccos \frac{1}{3}$ .
22.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $x_1 = \arccos \left( \frac{-\sqrt{3}}{2} \right)$ ,  $x_2 = \operatorname{arcctg} \frac{1}{3}$ .
23.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $x_1 = \operatorname{tg} \left( -\frac{\pi}{6} \right)$ ,  $x_2 = \operatorname{tg} \frac{13\pi}{3}$ .
24.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $x_1 = \arccos \left( -\frac{1}{2} \right)$ ,  $x_2 = \operatorname{arcctg} 7$ .
25.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $x_1 = \arcsin \left( -\frac{1}{2} \right)$ ,  $x_2 = \operatorname{arctg} (-9)$ .

$$26. f(x) = \operatorname{ctg} x, x_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), x_2 = 2 \arcsin \frac{1}{3}.$$

$$27. f(x) = \operatorname{ctg} x, x_1 = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), x_2 = 2 \arccos \frac{1}{3}.$$

$$28. f(x) = \operatorname{ctg} x, x_1 = \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right), x_2 = \operatorname{arctg} \frac{7}{3}.$$

$$29. f(x) = \operatorname{ctg} x, x_1 = -\frac{\pi}{4}, x_2 = \operatorname{arctg} 5.$$

$$30. f(x) = \operatorname{arctg} x, x_1 = \operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{3}\right), x_2 = \operatorname{tg} \frac{13\pi}{3}.$$

$$31. f(x) = \sin x, x_1 = 2 \arcsin \frac{1}{3}, x_2 = 2 \arccos\left(-\frac{1}{4}\right).$$

$$32. f(x) = \operatorname{arctg} x, x_1 = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}, x_2 = \operatorname{tg} \frac{13\pi}{3}.$$

$$33. f(x) = \ln x, x_1 = 1, x_2 = e.$$

$$34. f(x) = \ln x, x_1 = e^\pi, x_2 = e^{\sqrt{\pi}}.$$

$$35. f(x) = e^x, x_1 = \ln 2, x_2 = 2 \ln 3.$$

**23.** Знайдіть прообрази  $y_1$  для функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$1. f(x) = |\ln x|, y_1 = 2. \quad 2. f(x) = e^{|x|}, y_1 = 1.$$

$$3. f(x) = |\sin x|, y_1 = -\frac{1}{2}. \quad 4. f(x) = |\cos x|, y_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$5. f(x) = |\operatorname{arctg} x|, y_1 = 1. \quad 6. f(x) = |\operatorname{arctg} x|, y_1 = 1.$$

**24.** Знайдіть  $f(H_1)$  та  $f^{-1}(H_2)$  і з'ясуйте, чи функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  є : а) оборотною; б) відображенням  $H_1$  в  $H_2$ ; в) відображенням  $H_1$  на  $H_2$ ; г) бієкцією між  $H_1$  і  $H_2$

$$1. f(x) = \ln x, H_1 = \mathbb{R}, H_2 = \mathbb{R}.$$

$$2. f(x) = \ln x, H_1 = H_2 = (0; +\infty).$$

$$3. f(x) = \ln x, H_1 = (0; +\infty), H_2 = \mathbb{R}.$$

$$4. f(x) = \ln x, H_1 = (0; 1), H_2 = (-\infty; 0).$$

$$5. f(x) = 10^x, H_1 = (0; 1), H_2 = (1; 10).$$

$$6. f(x) = 10^x, H_1 = (-\infty; +\infty), H_2 = (0; +\infty).$$

7.  $f(x) = 10^x$ ,  $H_1 = H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
8.  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ ,  $H_1 = (-\infty; +\infty)$ ,  $H_2 = [0; \pi]$ .
9.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $H_1 = (-\pi; 0)$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
10.  $f(x) = \arccos x$ ,  $H_1 = [-1; 1]$ ,  $H_2 = [0; \pi]$ .
11.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $H_1 = \mathbb{R}$ ,  $H_2 = \mathbb{R}$ .
12.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $H_1 = H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
13.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $H_1 = (0; +\infty)$ ,  $H_2 = (-\pi / 2; \pi / 2)$ .
14.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ ,  $H_1 = (-\infty; +\infty)$ ,  $H_2 = (-\pi; \pi)$ .
15.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $H_1 = (0; +\infty)$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
16.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $H_1 = (-\pi / 2; \pi / 2)$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
17.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $H_1 = H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
18.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $H_1 = [0; \pi]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
19.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $H_1 = (-2\pi; 0)$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
20.  $f(x) = \arccos x$ ,  $H_1 = [-1; 1]$ ,  $H_2 = [0; \pi]$ .
21.  $f(x) = \arccos x$ ,  $H_1 = [-1; 1]$ ,  $H_2 = [-\pi / 2; \pi / 2]$ .
22.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $H_1 = [0; 1]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
23.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $H_1 = [-1; 1]$ ,  $H_2 = [0; \pi]$ .
24.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $H_1 = [-1; 1]$ ,  $H_2 = [-\pi / 2; \pi / 2]$ .
25.  $f(x) = \cos x$ ,  $H_1 = (0; +\infty)$ ,  $H_2 = [-1; 1]$ .
26.  $f(x) = \cos x$ ,  $H_1 = [-\pi / 2; \pi / 2]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
27.  $f(x) = \cos x$ ,  $H_1 = [-\pi / 2; 3\pi / 2]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
28.  $f(x) = \cos x$ ,  $H_1 = [0; \pi]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
29.  $f(x) = \cos x$ ,  $H_1 = H_2 = (-\infty; +\infty)$ .

30.  $f(x) = \cos x$ ,  $H_1 = [-\pi/2; \pi/2]$ ,  $H_2 = [-1; 1]$ .

31.  $f(x) = \cos x$ ,  $H_1 = (-\infty; +\infty)$ ,  $H_2 = [-1; 1]$ .

32.  $f(x) = 2x$ ,  $H_1 = [0; 1]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .

33.  $f(x) = 2x$ ,  $H_1 = H_2 = (-\infty; +\infty)$ .

34.  $f(x) = 2x$ ,  $H_1 = [0; +\infty)$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .

35.  $f(x) = \sin x$ ,  $H_1 = (0; +\infty)$ ,  $H_2 = [-1; 1]$ .

36.  $f(x) = \sin x$ ,  $H_1 = [-\pi/2; \pi/2]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .

37.  $f(x) = \sin x$ ,  $H_1 = [-\pi/2; 3\pi/2]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .

38.  $f(x) = \sin x$ ,  $H_1 = [0; \pi]$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .

39.  $f(x) = \sin x$ ,  $H_1 = H_2 = (-\infty; +\infty)$ .

40.  $f(x) = \sin x$ ,  $H_1 = [-\pi/2; \pi/2]$ ,  $H_2 = [-1; 1]$ .

41.  $f(x) = \sin x$ ,  $H_1 = (-\infty; +\infty)$ ,  $H_2 = [-1; 1]$ .

42.  $f: (x; y) \rightarrow x$ ,  $H_1 = \mathbb{R}^2$ ,  $H_2 = \mathbb{R}$ .

43.  $f: x \rightarrow (x^2; x)$ ,  $H_1 = \mathbb{R}$ ,  $H_2 = \mathbb{R}^2$ .

44.  $f: F \rightarrow F(0)$ ,  $H_1 = (\mathbb{R})^{(\mathbb{R})}$ ,  $H_2 = \mathbb{R}$ , де  $(\mathbb{R})^{(\mathbb{R})}$  – множина всіх функцій  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**25.** З'ясуйте, чи множина  $H$  є: а) обмеженою зверху; б) обмеженою знизу; в) обмеженою; г) має найбільший елемент; д) має найменший елемент

1.  $H = \left\{ \frac{(-2)^n}{4^n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

2.  $H = \left\{ \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

3.  $H = \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^k : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

4.  $H = \left\{ (-1)^n \sum_{k=1}^n k : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

5.  $H = \left\{ \frac{2(-1)^n n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

6.  $H = \left\{ \frac{(-1)^n n}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

$$7. H = \left\{ (-1)^n n \sin \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 8. H = \left\{ (-1)^n 2^{(-1)^n n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$9. H = \{10^x : x \in [0; +\infty)\}. \quad 10. H = \{2^{-x} : x \in (-1; 1]\}.$$

$$11. H = \left\{ \frac{2^n}{4^n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 12. H = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$13. H = \left\{ \sum_{k=1}^n 1 : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 14. H = \left\{ \sum_{k=1}^n k : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$15. H = \left\{ \frac{2n}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 16. H = \left\{ \frac{n}{\sqrt[3]{n^3 + 1}} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$17. H = \left\{ n \sin \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 18. H = \left\{ 2^{(-1)^n n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$19. H = \{\lg x : x \in (0; +\infty)\}. \quad 20. H = \{\lg x : x \in (1; 10]\}.$$

$$21. H = \left\{ \frac{2n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \quad 22. H = \left\{ \frac{n^2}{n^4 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$23. H = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 24. H = \left\{ \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2} \right)^{k-1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$25. H = \left\{ \frac{1+n}{4n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 26. H = \left\{ \sqrt[3]{n^3 + 1} - n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$27. H = \left\{ n \cos^2 \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 28. H = \left\{ n^{(-1)^n n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$29. H = \{\operatorname{ctg} x : x \in (0; \pi)\}. \quad 30. H = \{\operatorname{ctg} x : x \in (\pi/6; \pi/3)\}.$$

$$31. H = \left\{ \frac{n^2}{n^2 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 32. H = \left\{ \frac{2n^4}{n^4 + 1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$33. H = \left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} : n \in \mathbb{N} \right\}. \quad 34. H = \left\{ \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{3} \right)^{k-1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$35. H = \left\{ \frac{2+n}{3n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$36. H = \left\{ n \left( \sqrt{n^2+1} - n \right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$37. H = \left\{ n \cos \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$38. H = \left\{ n^{(-1)^n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$39. H = \{ \operatorname{tg} x : x \in (-\pi/2; \pi/4] \}.$$

$$40. H = \{ \operatorname{tg} x : x \in (-\pi/2; \pi/3) \}.$$

$$41. H = \left\{ \frac{x+y+xy}{1+x^2+y^2} : (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

$$42. H = \left\{ \frac{x+y+z+xy+yz+xz}{1+x^2+y^2+z^2} : (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

**26.** Знайдіть  $\sup H$  та  $\inf H$  і з'ясуйте, чи  $\max H = \sup H$  і  $\inf H = \min H$

$$1. H = \left\{ -\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cap \mathbb{Q}.$$

$$2. H = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup \mathbb{N}.$$

$$3. H = \left\{ \frac{2(-1)^n n}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cap (-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

$$4. H = \left\{ \frac{\sqrt{n}}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-2; 2).$$

$$5. H = \left\{ n \cos^2 \frac{\pi n}{2} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (0; 1].$$

$$6. H = H = \left\{ n^{(-1)^n n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cap (0; 1].$$

$$7. H = \left\{ \frac{1+n}{4n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cap \mathbb{Q}.$$

$$8. H = \left\{ \frac{n^2}{n^2+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cap \mathbb{Q}.$$

$$9. H = \{ \lg x : x \in [1; 10] \} \cap \mathbb{N}.$$

$$10. H = \{ \lg x : x \in [1; 10] \} \cup \mathbb{N}.$$

$$11. H = \left\{ 2 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cap (-\sqrt{6}; \sqrt{6}).$$

$$12. H = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} \cup (-2; 2].$$

$$13. H = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} \cap (-\sqrt{2}; \sqrt{2}).$$

$$14. H = \mathbb{Z} \cup (-\sqrt{6}; \sqrt{6}).$$

$$15. H = \mathbb{N} \cup (0; 1].$$

$$16. H = \mathbb{R} \cap (0; 1].$$

$$17. H = \{ \operatorname{arctg} x : x \in (1/\sqrt{3}; 1] \} \cup \mathbb{Q}.$$

$$18. H = \{ \operatorname{arctg} x : x \in [1; \sqrt{3}] \} \cap \mathbb{Q}.$$

$$19. H = \{ \operatorname{tg} x : x \in [0; \pi/4] \} \cap \mathbb{N}.$$

$$20. H = \{ \operatorname{tg} x : x \in [\pi/4; \pi/3] \} \cup \mathbb{N}.$$

21.  $H = \left\{ 2 - \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

22.  $H = \left\{ \frac{(-1)^n n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

23.  $H = \left\{ \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

24.  $H = \mathbb{Z} \cap (-4; 3].$

25.  $H = \mathbb{Q} \cup (0; 1].$

26.  $H = \mathbb{Q} \cap (0; 1].$

27.  $H = \{\arctg x : x \in (1/\sqrt{3}; 1]\}.$

28.  $H = \{\text{arcctg } x : x \in [1; \sqrt{3}]\}.$

29.  $H = \{\text{tg } x : x \in (0; \pi/4]\}.$

30.  $H = \{\text{ctg } x : x \in [\pi/4; \pi/3)\}.$

31.  $H = [0; 1].$

32.  $H = \{0; 1\}.$

33.  $H = (1; 4].$

34.  $H = (-1; 5).$

35.  $H = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

36.  $H = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

37.  $H = \left\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}.$

38.  $H = \mathbb{N}.$

39.  $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}.$

40.  $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$

41.  $H = \{\arccos x : x \in (1/2; 1/\sqrt{2}]\}.$

42.  $H = \{\arcsin x : x \in (1/2; 1/\sqrt{2}]\}.$

43.  $H = \left\{ \frac{nm}{n^2 + m^2} : n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N} \right\}.$

**27.** Покажіть, що множини  $H_1$  і  $H_2$  є еквівалентними

1.  $H_1 = \mathbb{N}, H_2 = \{3; 6; \dots; 2n; \dots\}.$
2.  $H_1 = (-1; 1), H_2 = (-4; 4).$
3.  $H_1 = (0; +\infty), H_2 = (-\infty; +\infty).$
4.  $H_1 = (-\pi/2; \pi/2), H_2 = (-\infty; +\infty).$
5.  $H_1 = [-\pi/2; \pi/2], H_2 = [-1; 1].$
6.  $H_1 = \mathbb{N}, H_2 = \{5; 7; \dots; 2n+3; \dots\}.$
7.  $H_1 = [1; 2], H_2 = [-1; 2].$
8.  $H_1 = \{3; 6; \dots; 2n; \dots\}, H_2 = \{5; 7; \dots; 2n+3; \dots\}.$
9.  $H_1 = \{3; 6; \dots; 2n; \dots\}, H_2 = \{5; 9; \dots; 4n+1; \dots\}.$
10.  $H_1 = \{5; 9; \dots; 4n+1; \dots\}, H_2 = \{5; 7; \dots; 2n+3; \dots\}.$

11.  $H_1 = (0; +\infty)$ ,  $H_2 = (-\infty; -1)$ .
12.  $H_1 = (1; +\infty)$ ,  $H_2 = (-\infty; 0)$ .
13.  $H_1 = (2; +\infty)$ ,  $H_2 = (-\infty; 1)$ .
14.  $H_1 = (0; +\infty)$ ,  $H_2 = (0; 1)$ .
15.  $H_1 = [1; +\infty)$ ,  $H_2 = (0; 1]$ .
16.  $H_1 = [1; +\infty)$ ,  $H_2 = [0; 1)$ .
17.  $H_1 = (-\infty; -1]$ ,  $H_2 = (-1; 2]$ .
18.  $H_1 = (-\infty; -1]$ ,  $H_2 = [-1; 2)$ .
19.  $H_1 = (-3; 2)$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
20.  $H_1 = (-3; 2)$ ,  $H_2 = (0; +\infty)$ .
21.  $H_1 = (-3; 2)$ ,  $H_2 = (-\infty; 0)$ .
22.  $H_1 = [1; +\infty) \cap \mathbb{Q}$ ,  $H_2 = [0; 1) \cap \mathbb{Q}$ .
23.  $H_1 = (-3; 2) \cap \mathbb{Q}$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty) \cap \mathbb{Q}$ .
24.  $H_1 = (0; +\infty) \cap \mathbb{Z}$ ,  $H_2 = (-\infty; 0) \cap \mathbb{Z}$ .
25.  $H_1 = (-3; +\infty) \cap \mathbb{Z}$ ,  $H_2 = (-\infty; -1) \cap \mathbb{Z}$ .
26.  $H_1 = \mathbb{N}$ ,  $H_2 = \{(\sqrt{2}; k^2) : k \in \mathbb{N}\}$ .
27.  $H_1 = \mathbb{N}$ ,  $H_2 = \{(k; k^2) : k \in \mathbb{N}\}$ .
28.  $H_1 = \mathbb{N}$ ,  $H_2 = \{(1/k; 1/k^2) : k \in \mathbb{N}\}$ .
29.  $H_1 = \mathbb{N}$ ,  $H_2 = \{(k; k; k) : k \in \mathbb{N}\}$ .
30.  $H_1 = (0; +\infty)$ ,  $H_2 = (2; 4)$ .
31.  $H_1 = \mathbb{N}$ ,  $H_2 = \{-2; -5; \dots; -3n + 1; \dots\}$ .
32.  $H_1 = \{3; 7; \dots; 2n + 1; \dots\}$ ,  $H_2 = \{-3; -7; \dots; -4n + 1; \dots\}$ .
33.  $H_1 = (1; 3]$ ,  $H_2 = [-4; -1)$ .
34.  $H_1 = (1; +\infty)$ ,  $H_2 = (-\infty; +\infty)$ .
35.  $H_1 = (0; +\infty)$ ,  $H_2 = (-2; -1]$ .
36.  $H_1 = (-\infty; -3]$ ,  $H_2 = (-2; -1]$ .
37.  $H_1 = (-\infty; -3]$ ,  $H_2 = [5; +\infty)$ .
38.  $H_1 = \mathbb{N}$ ,  $H_2 = \{(\sqrt{k}; \sqrt{k}) : k \in \mathbb{N}\}$ .
39.  $H_1 = \mathbb{N}$ ,  $H_2 = \{(2^n; 2^{\sqrt{n}}) : k \in \mathbb{N}\}$ .

### 23. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру

- 6.31. 27. 6.32.  $\emptyset$ . 6.33.  $\pm 3$ . 6.34. 4. 6.35.  $\frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$ . 6.36. -1; 2. 6.37. 3/2. 6.38. 4.
- 6.39. 3. 6.40.  $\log_2 3$ . 6.41.  $\lg 5$ . 6.42.  $\frac{\ln 7}{\ln 3} - 1$ . 6.43. 5. 6.44. 1. 6.45.  $-3 + 2\sqrt{2}$ ; 1. 6.46.
11. 6.47. 5. 6.48. 8. 6.49. 8. 6.50. 100. 6.51. 20. 6.52. 1. 6.53. 8/7. 6.54.  $\pm 1/\sqrt{10}$ ;  
 $\pm \sqrt{10}$ . 6.55. 3. 6.56.  $\emptyset$ . 7.31.  $\arccos(1/\sqrt[4]{2}) + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;  $\arccos(1/\sqrt[4]{2}) + \pi(2k - 1)$

- ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **7.32.**  $\pm(\pi n + (-1)^n \pi / 4)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . **7.33.**  $\pi(k+1) - \text{arccctg} 5$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\pi(n \pm 1/6)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **7.34.**  $\text{arccctg} 2 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;  $\pm(\pi m \pm \pi / 4)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ . **7.35.**  $\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **7.36.**  $\pi k + \pi / 2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **7.37.**  $\pm \sqrt{\pi n + (-1)^n \pi / 4}$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . **8.31.**  $(-2; 1)$ . **8.32.**  $(-\infty; -1] \cup [2; +\infty)$ . **8.33.**  $(-\infty; -3) \cup [1; +\infty)$ . **8.34.**  $(-1; 3)$ . **8.35.**  $(-3; -17/6]$ . **8.36.**  $(-\infty; 3) \cup (6; +\infty)$ . **8.37.**  $(-\infty; 1] \cup [2; +\infty)$ . **8.38.**  $[-4; -1]$ . **8.39.**  $(-\infty; +\infty)$ . **8.40.**  $\emptyset$ . **8.41.**  $[-1/2; 1]$ . **8.42.**  $\emptyset$ . **8.43.**  $(-4; 4)$ . **8.44.**  $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ . **8.45.**  $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ . **8.46.**  $(-3; 3)$ . **8.47.**  $(-4; 0) \cup (0; 4)$ . **8.48.**  $(-\infty; 1, 9) \cup (2, 1; +\infty)$ . **8.49.**  $(-2, 1; -1, 9)$ . **8.50.**  $(4; 6)$ . **8.51.**  $(-3; 1) \cup (1; 5)$ . **8.52.**  $(-2; -1) \cup (-1; 0)$ . **8.53.**  $[-\sqrt{6}; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; \sqrt{6}]$ . **8.54.**  $[-1/2; 1/2]$ . **8.55.**  $(-\infty; +\infty)$ . **8.56.**  $[1/2; +\infty)$ . **8.57.**  $(-\infty; -1/2]$ . **8.58.**  $(-3/2; 5/2)$ . **9.31.**  $[0; +\infty)$ . **9.32.**  $[1; +\infty)$ . **9.33.**  $(-\infty; 0]$ . **9.34.**  $(-\infty; +\infty)$ . **9.35.**  $(0; +\infty)$ . **9.36.**  $[-1; +\infty)$ . **9.37.**  $[2\pi n - \pi/4; 2\pi n + \pi/4]$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **9.38.**  $(2\pi n + \pi/4; 2\pi n + 3\pi/4) \cup (2\pi n + 5\pi/4; 2\pi n + 7\pi/4)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **9.39.**  $(\pi n - \pi/2; \pi n - \pi/3) \cup [\pi n + \pi/3; \pi n + \pi/2)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . **9.41.**  $(0; e)$ . **9.42.**  $(0; 1/e)$ . **9.43.**  $(-\infty; -10) \cup (10; +\infty)$ . **9.44.**  $(-1; 0) \cup (0; 1)$ . **9.45.**  $(1/4; 1)$ . **9.46.**  $(1/25; 25)$ . **9.47.**  $(-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$ . **9.48.**  $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$ . **9.49.**  $(-\infty; -1/2)$ . **11.31.**  $A \cup B = (-3; -1) \cup (0; 2)$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \setminus B = (0; 2)$ . **11.32.**  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  $A \cap B = (1; 3)$ ,  $A \setminus B = (-\infty; 1] \cup [3; +\infty)$ . **11.33.**  $A \cup B = (-1/2; 3/2)$ ,  $A \cap B = \emptyset$ ,  $A \setminus B = (-1/2; 3/2)$ . **11.34.**  $A \cup B = \mathbb{R}$ ,  $A \cap B = \{-1/3; 3\}$ ,  $A \setminus B = \mathbb{R} \setminus \{-1/3; 3\}$ . **14.31.**  $D(f) = E(f) = \mathbb{R}$ . **14.32.**  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $E(f) = [0; +\infty)$ . **14.33.**  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $E(f) = (0; +\infty)$ . **14.34.**  $D(f) = (0; +\infty)$ ,  $E(f) = \mathbb{R}$ . **14.35.**  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $E(f) = [-1; 1]$ . **14.36.**  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $E(f) = [-1; 1]$ . **14.37.**  $D(f) = [-1; 1]$ ,  $E(f) = [-\pi/2; \pi/2]$ . **14.38.**  $D(f) = [-1; 1]$ ,  $E(f) = [0; \pi]$ . **14.39.**  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi n + \pi/2 : n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $E(f) = \mathbb{R}$ . **14.40.**  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $E(f) = \mathbb{R}$ . **14.41.**  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $E(f) = (-\pi/2; \pi/2)$ . **14.42.**  $D(f) = \mathbb{R}$ ,  $E(f) = (0; \pi)$ . **14.43.**  $D(f) = E(f) = [0; +\infty)$ . **14.44.**  $D(f) = E(f) = \mathbb{R}$ . **14.45.**  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $E(f) = (0; +\infty)$ . **14.46.**  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $E(f) = (0; +\infty)$ . **14.47.**  $D(f) = (0; 1) \cup (1; +\infty)$ ,  $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . **14.48.**  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ ,  $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . **14.49.**  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0; 1\}$ ,  $E(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . **14.50.**  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ ,  $E(f) = (0; +\infty)$ . **22.31.**  $f(x_1) = 4\sqrt{2}/9$ ,  $f(x_2) = -\sqrt{15}/8$ . **22.32.**  $f(x_1) = \pi/4$ ,  $f(x_2) = \pi/3$ . **22.33.**  $f(x_1) = 0$ ,  $f(x_2) = 1$ . **22.34.**  $f(x_1) = \pi$ ,  $f(x_2) = \sqrt{\pi}$ . **22.35.**  $f(x_1) = 2$ ,  $f(x_2) = 9$ . **24.31.**  $f(H_1) = [-1; 1]$ ,  $f^{-1}(H_2) = \mathbb{R}$ , функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  є відображенням  $H_1$  в  $H_2$ , не є бієкцією. **24.33.**  $f(H_1) = f^{-1}(H_2) = \mathbb{R}$ , функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  є оборотною, відображенням  $H_1$  на  $H_2$ , є бієкцією. **24.36.**  $f(H_1) = f^{-1}(H_2) = [-1; 1]$

, функція  $f: H_1 \rightarrow H_2$  є оборотною, відображенням  $H_1$  в  $H_2$ , не є бієкцією.

**25.31.** обмежена,  $\min H = 1/2$ . **25.33.** обмежена,  $\min H = 1/3$ . **25.35.** обмежена,  $\max H = 3/4$ . **25.37.** необмежена. **25.39.** обмежена зверху,  $\max H = 1$ . **26.31.**  $\max H = \sup H = 1$ ,  $\min H = \inf H = 0$ . **26.32.**  $\max H = \sup H = 1$ ,  $\min H = \inf H = 0$ . **26.33.**  $\max H = \sup H = 4$ ,  $\inf H = 1$ ,  $\min H$  не існує. **26.35.**  $\max H = \sup H = 3/2$ ,  $\min H = \inf H = 0$ . **26.37.**  $\max H = \sup H = 1$ ,  $\inf H = 0$ ,  $\min H$  не існує. **26.38.**  $\min H = \inf H = 1$ ,  $\sup H = +\infty$ ,  $\max H$  не існує. **26.39.**  $\sup H = +\infty$ ,  $\inf H = -\infty$ ,  $\min H$  і  $\max H$  – не існують. **26.41.**  $\sup H = \pi/3$ ,  $\min H = \inf H = \pi/4$ ,  $\max H$  не існує. **26.42.**  $\max H = \sup H = \pi/4$ ,  $\inf H = \pi/6$ ,  $\min H$  не існує. **27.31.** взаємно однозначною відповідністю між множинами  $H_1$  і  $H_2$  є функція  $y = -3x + 1$ . **27.34.** взаємно однозначною відповідністю між множинами  $H_1$  і  $H_2$  є функція  $y = \ln(x - 1)$ .

## Розділ 2. Границя послідовності

Послідовність є однією з найпростіших функцій. В цьому розділі вивчається поняття границі послідовності. Це поняття є дуже важливим. Воно використовується при вивченні багатьох інших понять та в інших розділах математики.

**1.  $\varepsilon$ -окіл точки.** Нехай  $\varepsilon > 0$  – довільне дійсне число.  $\varepsilon$ -околом точки  $a \in \mathbb{R}$  називається проміжок  $U(a; \varepsilon) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ . Отже,  $U(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$ . Проколотим  $\varepsilon$ -околом точки  $a \in \mathbb{R}$  називається множина  $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) := (a - \varepsilon; a + \varepsilon) \setminus \{a\}$ . Отже,  $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = U(a; \varepsilon) \setminus \{a\}$ , тобто  $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ . Інколи множину  $\mathbb{R}$ , доповнюють двома такими символами  $-\infty$  і  $+\infty$ , що  $(\forall x \in \mathbb{R}) : -\infty < x < +\infty$ . Доповнена такими символами множина  $\mathbb{R}$  називається розширеною числовою прямою і позначається через  $\overline{\mathbb{R}}$ . Символи  $-\infty$  і  $+\infty$  не є дійсними числами. Вони називаються нескінченно віддаленими точками або нескінченними числами. Проколені  $\varepsilon$ -околи точок  $-\infty$  і  $+\infty$  визначаються відповідно так:  $\overset{\circ}{U}(-\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x < -\varepsilon\}$  і  $\overset{\circ}{U}(+\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : x > \varepsilon\}$ , де  $\varepsilon > 0$ . Інколи множину дійсних чисел доповнюють одним символом  $\infty$ , який називають нескінченністю. Доповнена цим символом множина  $\mathbb{R}$  позначається через  $\overline{\mathbb{R}}_0$ . Проколотим  $\varepsilon$ -околом  $\infty$  називається множина  $\overset{\circ}{U}(\infty; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \varepsilon\}$ , де  $\varepsilon > 0$ . За означенням вважають, що для будь-якого  $x \in \mathbb{R}$  виконується  $x + \infty = \infty$ ,  $\frac{x}{\infty} = 0$ ,  $|\infty| = +\infty$ ,  $|x| < |\infty|$  і якщо

$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то  $x \cdot \infty = \infty$  і  $\frac{x}{0} = \infty$ . Наступні вирази є невизначеними (не мають змісту в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ ):

а)  $\frac{0}{0}$ ; б)  $\frac{\infty}{\infty}$ ; в)  $0 \cdot \infty$ ; г)  $\infty - \infty$ ; д)  $\infty^0$ ; е)  $1^\infty$ ; є)  $0^0$ .

$\varepsilon$ -околиці точок  $\infty$ ,  $-\infty$  і  $+\infty$  визначаються відповідно так:  $\{x \in \overline{\mathbb{R}}_0 : |x| > \varepsilon\}$ ,  $\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < -\varepsilon\}$ ,  $\{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > \varepsilon\}$ .

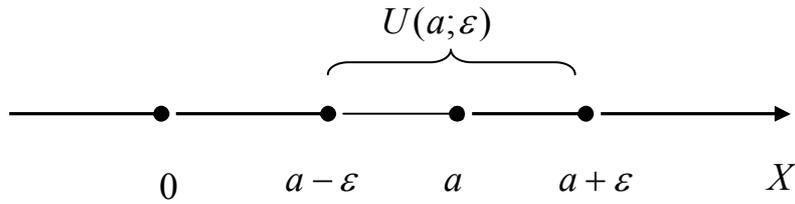


Рис.1.

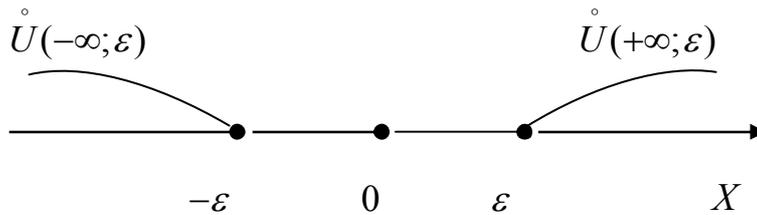


Рис.2.

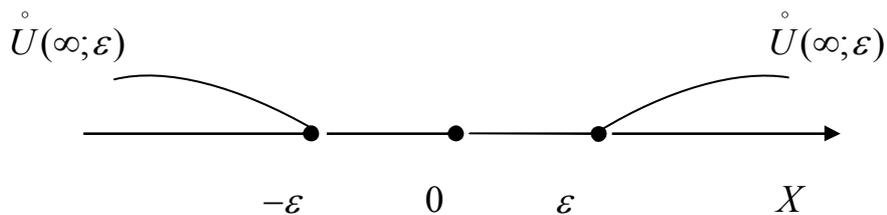


Рис.3.

**Приклад 1.**  $U(1; \varepsilon) = (1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon)$ .

**Приклад 2.**  $U(1; 0,1) = (0,9; 1,1)$ .

**Приклад 3.**  $\overset{\circ}{U}(1; \varepsilon) = (1 - \varepsilon; 1) \cup (1; 1 + \varepsilon)$ .

**Приклад 4.**  $\overset{\circ}{U}(1; 0,1) = (0,9; 1) \cup (1; 1,1)$ .

**Приклад 5.**  $\overset{\circ}{U}(+\infty; \varepsilon) = (\varepsilon; +\infty)$ .

**Приклад 6.**  $\overset{\circ}{U}(+\infty; 100) = (100; +\infty)$ .

**Приклад 7.**  $U(+\infty; 100) = (100; +\infty]$ .

**Приклад 8.**  $U(\infty; 100) = (-\infty; 100] \cup [100; +\infty) \cup \{\infty\}$ .

**Зауваження 1.** Далі разом з множиною  $\mathbb{R}$  дійсних чисел часто використовуються множини  $\overline{\mathbb{R}}$  і  $\overline{\mathbb{R}}_0$ .

**2. Послідовність.** Числовою послідовністю називається така функція, область визначення якої є множина натуральних чисел, а множина значень належить  $\mathbb{R}$ . Надалі числові послідовності будемо називати послідовностями або послідовностями точок із  $\mathbb{R}$ , опускаючи слово “числова”. Отже, послідовність є функцією з  $\mathbb{N}$  в  $\mathbb{R}$ . Для послідовностей використовуються такі ж позначення як і для функцій:  $x(n)$ ,  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  і т.д. Разом з цим, для позначення послідовностей використовуються і спеціальні позначення:  $(x_n)$ ,  $x = (x_n)$ ,  $(x_1; x_2; \dots; x_n; \dots)$ ,  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x_n: n \in \mathbb{N})$ , .... Числа  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  називаються членами послідовності, відповідно першим, другим,  $n$ -ним і т.д.,  $x_n$  називають ще загальним членом послідовності  $(x_n)$ . Слід розрізняти послідовність  $x = (x_n)$  і множину її значень  $D(x) = \{x_n\}$ . Щоб задати послідовність, досить кожному натуральному числу  $n$  поставити у відповідність одне дійсне число  $x_n$ . Послідовність можна задати різними способами.

**Приклад 1.** Послідовність можна задати аналітично, тобто за допомогою формули  $x_n = f(n)$ .

**Приклад 2.** Рівність  $x_n = n^2 + 1$  задає послідовність  $(x_n)$ .

**Приклад 3.** Послідовність можна задати рекурентно. Цей спосіб полягає в тому, що вказується кілька членів послідовності і вказується спосіб знаходження наступних членів через попередні.

**Приклад 4.** Нехай  $x_1 = 2$  і  $x_n = 4x_{n-1}$ , якщо  $n > 1$ .

**Приклад 5.** Послідовність можна задати таблично, тобто записом у вигляді таблиці значень  $n$  і відповідних значень  $x_n$ .

**Приклад 6.** Послідовність можна задати графічно, тобто зображенням в деякій системі координат точок  $A_n(n; x_n)$ .

**Приклад 7.** Послідовність можна задати словесно-описово, тобто словесним описом відповідності.

**Приклад 8.** Нехай  $(x_n)$  – це така послідовність, перший член якої дорівнює 1, а кожний наступний вдвічі більший за попередній.

При розгляді різних послідовностей бачимо, що члени одних послідовностей при зростанні номера  $n$  наближаються до певного дійсного числа, а члени інших послідовностей такою властивістю не володіють.

**Приклад 9.** Послідовність

$$(2) = (2; 2; 2; \dots; 2; \dots), \quad (1)$$

є сталою. Всі члени цієї послідовності дорівнюють 2.

**Приклад 10.** Члени послідовності

$$\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; \dots\right), \quad (2)$$

при зростанні номера  $n$  наближаються до числа 0.

**Приклад 11.** Члени послідовності

$$\left(\frac{n-1}{n}\right) = \left(0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots; \frac{n-1}{n}; \dots\right) \quad (3)$$

при зростанні номера  $n$  наближаються до числа 1.

**Приклад 12.** Члени послідовності

$$((-1)^n) = (-1; 1; -1; 1; -1; \dots; (-1)^n; \dots), \quad (4)$$

при зростанні номера  $n$  не наближаються до якогось числа, а дорівнюють 1 або  $-1$ .

**Приклад 13.** Члени послідовності

$$(n^2) = (1; 4; 9; 16; 25; \dots; n^2; \dots). \quad (5)$$

при зростанні номера  $n$  стають все більшими (наближаючись до  $+\infty$ ).

**Зауваження 1.** *Послідовності, про які мова йшла вище, інколи називають нескінченними послідовностями в  $\mathbb{R}$ . Саме такі послідовності ми будемо вивчати. Часто варто нескінченну послідовність трактувати як функцію  $x: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$ . Ми будемо мати справу також з послідовностями в  $\overline{\mathbb{R}}$  і в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ , тобто з функціями  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  і  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$ . Інколи зустрічаються скінченні послідовності. Так називають функцію  $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої множина визначення є скінченною підмножиною множини натуральних чисел. Такі послідовності можна трактувати як функції  $x: \overline{1;n} \rightarrow \mathbb{R}$  для деякого  $n \in \mathbb{N}$ . Зустрічаються також функції  $x: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ , які також називають послідовностями. Такі послідовності, як і скінченні послідовності, ми не розглядаємо в цьому розділі.*

**3. Означення границі послідовності. Границя сталої послідовності.** Число  $a \in \mathbb{R}$  називається границею послідовності  $(x_n)$  або границею в  $\mathbb{R}$  послідовності  $(x_n)$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n - a| < \varepsilon \quad . \quad (1)$$

Якщо число  $a \in \mathbb{R}$  є границею послідовності  $(x_n)$ , то цей факт відзначають одним із символів:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad (2)$$

$$\lim_{\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty} x_n = a,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a,$$

$$x_n \rightarrow a,$$

$$x_n \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty,$$

$$x_n \xrightarrow{\mathbb{R}} a,$$

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a.$$

Послідовність, яка має границю  $a \in \mathbb{R}$ , називається збіжною або збіжною в  $\mathbb{R}$ . Іншими словами можна сказати, що послідовність  $(x_n)$  називається збіжною в  $\mathbb{R}$ , якщо

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n - a| < \varepsilon.$$

Послідовність, яка не є збіжною в  $\mathbb{R}$ , називається розбіжною або розбіжною в  $\mathbb{R}$ . Таким чином, послідовність  $(x_n)$  є розбіжною в  $\mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall a \in \mathbb{R})(\exists \varepsilon > 0)(\forall n^* \in \mathbb{N})(\exists n \geq n^*) : |x_n - a| \geq \varepsilon.$$

Якщо послідовність  $(x_n)$  є збіжною в  $\mathbb{R}$ , то кажуть, що границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує в  $\mathbb{R}$ . Якщо послідовність  $(x_n)$  є розбіжною в  $\mathbb{R}$ , то кажуть, що границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не існує в  $\mathbb{R}$ .

З означення границі послідовності випливає, що зміна скінченного числа членів послідовності не впливає на збіжність і границю послідовності, а також, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n,$$

якщо остання границя існує.

**Зауваження 1.** В означенні границі послідовності  $\varepsilon > 0$  – довільне число, яке може бути як завгодно малим. Означення границі послідовності докладніше можна сформулювати так. Границею послідовності  $(x_n)$  називається таке число  $a \in \mathbb{R}$ , що для будь-якого як завгодно малого  $\varepsilon > 0$  існує натуральне число  $n^* = n^*(\varepsilon)$ , яке може залежати від  $\varepsilon$ , що для всіх  $n \geq n^*$  виконується  $|x_n - a| < \varepsilon$ .

Нерівність  $|x_n - a| < \varepsilon$  рівносильна нерівності  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$ . Тому означення границі послідовності  $(x_n)$  можна сформулювати так (на мові околів). Число  $a \in \mathbb{R}$  називається границею послідовності  $(x_n)$ , якщо в будь-якому його  $\varepsilon$ -околі лежать всі члени послідовності  $(x_n)$  за винятком, можливо, скінченного числа членів.

**Зауваження 2.** Число  $d(x_n; a) = |x_n - a|$  – це відстань від точки  $x_n$  до точки  $a$ . Тому суть означення границі послідовності можна виразити і так: число  $a$  є границею послідовності  $(x_n)$ , якщо відстань між точками  $x_n$  і  $a$  наближається до нуля при зростанні номера  $n$ .

**Зауваження 3.** Число  $a \in \mathbb{R}$  не є границею послідовності  $(x_n)$  тоді і тільки тоді, коли

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m_n \geq n) : |x_{m_n} - a| \geq \varepsilon.$$

Послідовність  $(x_n)$  називається сталою, якщо

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n = c. \quad (3)$$

**Теорема 1.** *Границя сталої дорівнює цій же сталій, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} c = c$ .*

**Доведення.** Справді, якщо виконується (1), то

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = 1)(\forall n \geq n^*) : |x_n - c| = |c - c| < \varepsilon.$$

Звідси і з означення границі одержуємо потрібний висновок. ►

**Зауваження 4.** Число  $a$  буде границею послідовності  $(x_n)$ , якщо для кожного  $\varepsilon > 0$  можна вказати натуральне число  $n^* = n^*(\varepsilon)$  з відповідною властивістю. Якщо таке натуральне число  $n^*$  існує, то таких чисел є нескінченно багато (наприклад,  $n^* + 1$ ,  $n^* + 2$  і т.д.). При розв'язуванні прикладів, в яких на основі означення потрібно показати, що число  $a$  є границею послідовності  $(x_n)$ , досить вказати одне з таких чисел  $n^*$  (не обов'язково шукати найменше).

**Приклад 1.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ .

**Приклад 2.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ . Справді, потрібно показати, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Шукаємо це  $n^*$ . Маємо  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$ . Тому нерівність  $\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $\frac{1}{n} < \varepsilon$ , тобто якщо  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Тому за  $n^*$  можна взяти будь-яке натуральне число, більше за  $\frac{1}{\varepsilon}$ . Наприклад,  $n^* = [1/\varepsilon] + 1$ . Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [1/\varepsilon] + 1)(\forall n \geq n^*) : \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Приклад 3.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$ . Справді, потрібно показати, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : \left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Шукаємо це  $n^*$ . Маємо  $\left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| = \left|\frac{2}{n}\right| = \frac{2}{n}$ . Бачимо, що нерівність  $\left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $2/n < \varepsilon$ , тобто якщо  $n > 2/\varepsilon$ . Тому за  $n^*$  можна взяти будь-яке натуральне число, більше за  $2/\varepsilon$ . Наприклад,  $n^* = [2/\varepsilon] + 1$ , де  $[x]$  – ціла частина числа  $x$  (зокрема, можна взяти  $n^* = 21$ , якщо  $\varepsilon = 0,1$ ). Таким чином,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [2/\varepsilon] + 1)(\forall n \geq n^*) : \left|1 + \frac{2}{n} - 1\right| < \varepsilon.$$

Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n}\right) = 1$ .

**Приклад 4.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^\beta} = 0$ , якщо  $\beta \in (0; +\infty)$ , бо  $\left|\frac{1}{n^\beta} - 0\right| < \varepsilon$ , якщо  $n > 1/\varepsilon^{1/\beta}$ .

**Зауваження 5.** В обох розглянутих прикладах  $n^*$  залежить від  $\varepsilon > 0$  і  $n^*$  тим є більшим, чим меншим є  $\varepsilon$ . Це є типова ситуація при розгляді подібних прикладів.

**Приклад 5.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1$ . Справді, потрібно показати, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : \left|\frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} - 1\right| < \varepsilon.$$

Шукаємо це  $n^*$ . Маємо

$$\left|\frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} - 1\right| = \frac{2n + 1}{n^2 + 2n + 1} \leq \frac{2n + 2}{n^2 + 2n + 1} = \frac{2(n + 1)}{(n + 1)^2} = \frac{2}{n + 1} \leq \frac{2}{n}.$$

Бачимо, що нерівність  $\left| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} - 1 \right| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $2/n < \varepsilon$ ,

тобто якщо  $n > 2/\varepsilon$ . Тому за  $n^*$  можна взяти будь-яке натуральне число, більше за  $2/\varepsilon$ . Наприклад  $n^* = [2/\varepsilon] + 1$ . Отже,

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [2/\varepsilon] + 1)(\forall n \geq n^*) : \left| \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} - 1 \right| < \varepsilon$ . Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 + 2n + 1} = 1.$$

**Приклад 6.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ , якщо  $|q| < 1$ . Справді, потрібно показати, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |q^n| < \varepsilon.$$

Нехай  $\gamma = 1/|q|$ . Тоді  $\gamma > 1$  і  $\gamma = 1 + \alpha$ , де  $\alpha > 0$ . За нерівністю Бернуллі

$(1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha$ . Тому  $|q|^n = \frac{1}{\gamma^n} = \frac{1}{(1 + \alpha)^n} \leq \frac{1}{n\alpha}$ . Отже, нерівність  $|q^n| < \varepsilon$

буде виконуватись, якщо  $\frac{1}{n\alpha} < \varepsilon$ , тобто якщо  $n > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$ . Тому

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [1/\alpha\varepsilon] + 1)(\forall n \geq n^*) : |q^n| < \varepsilon$ . Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ,  $|q| < 1$ .

**Приклад 7.** Якщо  $x_n = \frac{n}{2^n}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ . Тоді

$0 \leq x_n = \frac{n}{(1+1)^n} = \frac{n}{C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n} \leq \frac{n}{C_n^1} = \frac{2}{n-1}$ , якщо  $n > 1$ . Тому  $|x_n - 0| \leq \frac{2}{n-1}$  і

нерівність  $|x_n - 0| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $n > 1 + 2/\varepsilon$ .

**Приклад 8.** Послідовність  $x_n = (-1)^n$  є розбіжною в  $\mathbb{R}$ . Справді, припустимо, що вона є збіжною. Тоді знайдеться таке  $a \in \mathbb{R}$ , що

$(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n - a| < 1/2$ . Тому  $|1 - a| < 1/2$ ,  $|-1 - a| < 1/2$ ,

$2 = |-1 - 1| = |(-1 - a) - (1 + a)| \leq |-1 - a| + |1 + a| < 1$ . Отже,  $2 < 1$ . Суперечність.

**Приклад 9.** Послідовність  $x_n = n$  є розбіжною в  $\mathbb{R}$ . Справді, припустимо, що вона є збіжною. Тоді знайдеться таке  $a \in \mathbb{R}$ , що

$(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n - a| < 1/2$ . Отже,  $|n - a| < 1/2$  і  $|n + 1 - a| < 1/2$  для деякого

$n \in \mathbb{N}$ . Крім цього,  $1 = |n+1-n| = |(n+1-a) - (n-a)| \leq |n+1-a| + |n-a| < 1$ . Отже,  $1 < 1$ . Суперечність.

**Зауваження 6.** Якщо ми говоримо “сума”, то можемо мати на увазі символ “+”, оператор додавання  $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  і значення цього оператора в конкретній точці, тобто результат додавання. Подібна ситуація є з терміном “границя послідовності”. Вище сформульовано означення числа  $a \in \mathbb{R}$ , яке є границею послідовності, що далі йменується означенням границі послідовності. Проте під цим терміном можна розуміти символ “ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ ”, оператор  $\lim_{n \rightarrow \infty}: (\mathbb{N})^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$ , який кожній послідовності  $x = (x_n) \in (\mathbb{N})^{(\mathbb{R})}$  ставить у відповідність число  $a \in \mathbb{R}$ , яке є її границею, і значення цього оператора на конкретній послідовності (воно може бути числом або не існувати), де  $(\mathbb{N})^{(\mathbb{R})}$  – множина всіх послідовностей. Разом з цим, є одна відмінність. Сума двох дійсних чисел, тобто значення оператора додавання  $+: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  в конкретній точці, існує завжди, а значення оператора  $\lim_{n \rightarrow \infty}: (\mathbb{N})^{(\mathbb{R})} \rightarrow \mathbb{R}$  в конкретній точці, тобто границя послідовності, існує не завжди. Сказане вище стосується й інших математичних понять (похідної функції в точці, інтеграла функції, числового ряду,  $\sup E$ ,  $\inf E$  і т.д.).

#### 4. Єдиність границі.

**Теорема 1.** *Послідовність не може мати більше однієї границі.*

**Доведення.** Припустимо, що існує послідовність  $(x_n)$ , яка має дві границі  $a$  і  $b$ . Нехай  $a < b$  і  $\varepsilon = (b-a)/2$ . Тоді  $\varepsilon > 0$ . За означенням границі знайдеться таке  $n \in \mathbb{N}$ , що  $|x_n - a| < \varepsilon$  і  $|x_n - b| < \varepsilon$ . Тому для цього  $n$  маємо

$$b - a = (x_n - a) + (b - x_n) \leq |x_n - a| + |x_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = b - a.$$

Отже,  $b - a < b - a$ . Суперечність. ►

**5. Обмеженість збіжної послідовності.** Послідовність  $(x_n)$  називається обмеженою або обмеженою в  $\mathbb{R}$ , якщо

$$(\exists K \in (0; +\infty)) (\forall n \in \mathbb{N}) : |x_n| \leq K.$$

Таким чином, послідовність  $(x_n)$  є обмеженою, якщо модулі всіх її членів не перевищують деякого додатного числа  $K$ , незалежного від  $n$ .

**Теорема 1.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є збіжною в  $\mathbb{R}$ , то вона є обмеженою в  $\mathbb{R}$ .

**Доведення.** За означенням границі для числа  $\varepsilon = 1$  знайдеться  $n^* \in \mathbb{N}$  таке, що при всіх  $n \geq n^*$  виконується  $|x_n - a| < 1$ . Оскільки  $|x_n| - |a| \leq |x_n - a|$ , то звідси отримуємо, що  $|x_n| \leq |a| + 1$  для всіх  $n \geq n^*$ . Нехай  $K = \max\{|x_1|; |x_2|; \dots; |x_{n^*-1}|; |a| + 1\}$ . Тоді  $|x_n| \leq K$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Тому послідовність  $(x_n)$  є обмеженою. ►

**Приклад 1.** Послідовність  $x_n = (-1)^n$  є обмеженою, бо  $|x_n| \leq 1$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і не є збіжною в  $\mathbb{R}$ . Отже, твердження, обернене до теореми 1, не є справедливим.

**Приклад 2.** Послідовність  $x_n = \frac{2^n}{n!}$  є обмеженою, бо

$$\frac{|x_{n+1}|}{|x_n|} = \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1 \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}. \text{ Отже, } |x_{n+1}| \leq |x_n| \leq \dots \leq |x_1| = 2. \text{ Тому } |x_n| \leq 2 \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

**Приклад 3.** Послідовність  $x_n = \frac{(2n+3)\sin n}{n+1}$  є обмеженою, бо

$$|x_n| = \frac{(2n+3)|\sin n|}{n+1} \leq \frac{2n+3}{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{n+1} = \frac{2(n+1)}{n+1} + \frac{1}{n+1} \leq 2 + 1 = 3 \text{ для всіх } n \in \mathbb{N}.$$

**Приклад 4.** Послідовність  $x_n = n$  є необмеженою.

**Приклад 5.** Послідовність  $x_n = (-1)^n \frac{n^2}{n+1}$  є необмеженою, бо

$$|x_n| = \left| (-1)^n \frac{n^2}{n+1} \right| = \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2-1}{n+1} = n-1.$$

**6. Підпослідовність.** Нехай  $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$  – така нескінченна підмножина множини  $\mathbb{N}$ , що

$$n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots \quad (1)$$

Підпослідовністю послідовності  $(x_n)$  називається така послідовність  $(b_k)$ , для якої знайдеться підмножина  $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$  множини  $\mathbb{N}$  з властивістю (1), що для

всіх  $k \in \mathbb{N}$  виконується  $b_k = x_{n_k}$ . Підпослідовність послідовності  $(x_n)$  позначають так  $(x_{n_k})$ . Кожна послідовність  $(x_n)$  має нескінченну кількість підпослідовностей.

**Приклад 1.** Підпослідовностями послідовності  $x_n = (-1)^n + 1/n^2$ , є, зокрема, послідовності  $x_{2k} = (-1)^{2k} + 1/(2k)^2$  та  $x_{4k+3} = (-1)^{4k+3} + 1/(4k+3)^2$ . В першому випадку  $n_k = 2k$ , а в другому –  $n_k = 4k+3$ .

**Теорема 1.** Якщо збіжною є послідовність  $(x_n)$ , то збіжною є будь-яка її підпослідовність  $(x_{n_k})$  і має ту ж границю, що і послідовність  $(x_n)$ .

**Доведення.** Оскільки послідовність  $(x_n)$  є збіжною, то знайдеться таке  $a \in \mathbb{R}$ , що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n - a| < \varepsilon. \quad (2)$$

Якщо  $(x_{n_k})$  – підпослідовність послідовності  $(x_n)$ , то для заданого  $n^* \in \mathbb{N}$  знайдеться таке  $k^* \in \mathbb{N}$ , що  $n_k \geq n^*$  для всіх  $k \geq k^*$ . Тому із (2) випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*) : |x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

А це означає, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . ►

**Приклад 1.** Послідовність  $x_n = (-1)^n$  є розбіжною, бо  $x_{2k} = 1$  і  $x_{2k+1} = -1$  – її підпослідовності,  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$  і  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = -1$ .

## 7. Граничний перехід в нерівностях.

**Теорема 1.** Якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  є збіжними в  $\mathbb{R}$  і  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

**Доведення.** Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Потрібно показати, що  $a \leq b$ . Припустимо, що  $a > b$ . Візьмемо  $\varepsilon > 0$  настільки малим, щоб  $a - \varepsilon > b + \varepsilon$  (можна взяти  $\varepsilon = (a - b) / 4$ ). За означенням границі існує таке  $n$ , що  $|x_n - a| < \varepsilon$  і  $|y_n - b| < \varepsilon$ . Звідси  $y_n < b + \varepsilon$  і  $a - \varepsilon < x_n$ . Але  $b + \varepsilon < a - \varepsilon$ . Тому  $y_n < x_n$ , що суперечить умові теореми 1. ►

**Приклад 1.** Якщо  $x_n = 0$  і  $y_n = 1/n$ , то  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < y_n$  і

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Тому, якщо виконуються всі умови теореми 1 і  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < y_n$ , то нерівність  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n < \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не обов'язково є справедливою.

**Теорема 2.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  і  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq z_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .

**Доведення.** За означенням границі

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^{**} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^{**}) : |y_n - a| < \varepsilon.$$

Звідси  $a - \varepsilon < x_n$  і  $y_n < a + \varepsilon$  для всіх  $n \geq n_0$ , де  $n_0 = \max\{n^*; n^{**}\}$ . Але  $x_n \leq z_n \leq y_n$ . Тому  $a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$ , тобто  $|z_n - a| < \varepsilon$ , якщо  $n \geq n_0$ . Отже,  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : |z_n - a| < \varepsilon$ , а це і означає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ . ►

**Теорема 3.** Якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $a < b$ , то

$$(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n < b.$$

**Доведення.** Нехай  $\varepsilon = b - a$ . Тоді  $\varepsilon > 0$ . За означенням границі  $(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n - a| < \varepsilon$ , звідки  $x_n < a + \varepsilon = a + b - a = b$ . Отже,  $x_n < b$  для всіх  $n \geq n^*$ . ►

**Приклад 2.** Якщо  $x_n = 0$ ,  $y_n = 1/n$  і  $z_n = 1/(2n)$ , то  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < z_n < y_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ . Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ .

**Приклад 3.** Якщо  $x_n = (n+1)^\alpha - n^\alpha$  і  $\alpha \in (0;1)$ , то  $0 \leq x_n = n^\alpha ((1+1/n)^\alpha - 1) \leq n^\alpha ((1+1/n) - 1) = n^{\alpha-1}$ . Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ((n+1)^\alpha - n^\alpha) = 0.$$

**8. Нескінченно малі послідовності.** Послідовність  $(\alpha_n)$  називається нескінченно малою, якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ . Можна також сказати, що послідовність  $(\alpha_n)$  називається нескінченно малою, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |\alpha_n| < \varepsilon. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Для того щоб число  $a \in \mathbb{R}$  було границею послідовності  $(x_n)$ , необхідно і достатньо, щоб послідовність  $(x_n)$  можна було подати у вигляді  $x_n = a + \alpha_n$ , де  $(\alpha_n)$  – нескінченно мала послідовність.

**Доведення. Необхідність.** Нехай число  $a$  є границею послідовності  $(x_n)$ .  
Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n - a| < \varepsilon. \quad (2)$$

Тоді послідовність  $\alpha_n = x_n - a$  є нескінченно малою і  $x_n = a + \alpha_n$ . **Достатність.** Нехай  $x_n = a + \alpha_n$ , де  $(\alpha_n)$  – нескінченно мала послідовність. Тоді  $x_n - a = \alpha_n$  і з (1) випливає (2), тобто число  $a$  є границею послідовності  $(x_n)$ . ►

Сумою, добутком, різницею і часткою двох послідовностей  $(x_n)$  і  $(y_n)$  називаються відповідно послідовності  $(x_n + y_n)$ ,  $(x_n y_n)$ ,  $(x_n - y_n)$  і  $\left(\frac{x_n}{y_n}\right)$ . Добутком послідовності  $(x_n)$  на число  $c$  називається послідовність  $(cx_n)$ .

**Теорема 2.** Сума двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

**Доведення.** Нехай  $(\alpha_n)$  і  $(\beta_n)$  – нескінченно малі послідовності. Тоді виконується (1) і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n''): |\beta_n| < \varepsilon.$$

Нехай  $n_0 = \max\{n'; n''\}$ . Тоді з (1) і (2) випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0): |\alpha_n + \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

тобто,  $|\alpha_n + \beta_n| < 2\varepsilon$  для всіх  $n \geq n_0$ , а це і означає, що послідовність  $(\alpha_n + \beta_n)$  є нескінченно малою послідовністю. ►

**Наслідок 1.** Сума скінченного числа нескінченно малих послідовностей є нескінченно малою послідовністю.

**Теорема 3.** Добуток обмеженої і нескінченно малої послідовностей є нескінченно мала послідовність.

**Доведення.** Нехай  $(\alpha_n)$  – нескінченно мала послідовність і  $(\beta_n)$  – обмежена послідовність. Тоді виконується (1) і

$$(\exists K \in (0; \infty))(\forall n \in \mathbb{N}) : |\beta_k| \leq K. \quad (3)$$

З (1) і (3) отримуємо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |\alpha_n \cdot \beta_n| = |\alpha_n| \cdot |\beta_n| < \varepsilon \cdot K.$$

Звідси одержуємо, що

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists n^{**} \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^{**}) : |\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon_1,$$

а це і означає, що послідовність  $(\alpha_n \beta_n)$  є нескінченно малою. ►

**Теорема 4.** Добуток двох нескінченно малих послідовностей є нескінченно мала послідовність.

**Доведення.** Ця теорема безпосередньо випливає з теореми 3, бо кожна нескінченно мала послідовність є збіжною і, отже, обмеженою, а добуток нескінченно малої і обмеженої послідовностей є нескінченно мала послідовність. ►

**Приклад 1.** Послідовність  $(1/n)$  є нескінченно малою, бо раніше вже було показано, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**Приклад 2.** Послідовність  $(1/2^n)$  є нескінченно малою, бо раніше вже було показано, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} = 0$ .

**Приклад 3.** Послідовність  $\left(\frac{1}{n} \cdot \sin n\right)$  є нескінченно малою, бо послідовність  $(\sin n)$  є обмеженою, а послідовність  $(1/n)$  є нескінченно малою.

**Приклад 4.** Послідовність  $(1/n^2)$  є нескінченно малою, бо вона є добутком двох нескінченно малих послідовностей  $(1/n)$  і  $(1/n)$ .

**9. Нескінченно великі послідовності. Нескінченні границі.** Послідовність  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$  називається нескінченно великою, якщо

$$(\forall E > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n| > E. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Для того щоб послідовність  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$  була нескінченно великою, необхідно і достатньо, щоб послідовність  $\alpha_n = 1/x_n$  була нескінченно

малою.

**Доведення.** Якщо виконується (1), то  $\frac{1}{|x_n|} < \frac{1}{E}$ , тобто  $|\alpha_n| < 1/E$  для всіх  $n \geq n^*$ . Якщо  $E > 0$  – довільне число, то  $\varepsilon = 1/E$  також може бути довільним додатним числом. Тому з (1) випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |\alpha_n| < \varepsilon, \quad (2)$$

а це і означає, що послідовність  $\alpha_n = 1/x_n$  є нескінченно малою. Навпаки, якщо послідовність  $(\alpha_n)$  є нескінченно малою, то виконується (2) і тому  $|x_n| > 1/\varepsilon$  для всіх  $n \geq n^*$ . Якщо  $\varepsilon > 0$  – довільне додатне число, то і  $E = 1/\varepsilon$  також може бути довільним додатним числом. Тому з (2) випливає (1). ►

Точка  $\infty$  називається границею послідовності  $(x_n)$ , якщо виконується (1), тобто якщо послідовність  $(x_n)$  є нескінченно великою. Послідовність  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$ , яка має границю  $\infty$  або скінченну границю  $a \in \mathbb{R}$ , називається збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ .

Точка  $+\infty$  називається границею послідовності  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , якщо

$$(\forall E > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n > E. \quad (3)$$

Точка  $-\infty$  називається границею послідовності  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ , якщо

$$(\forall E > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n < -E. \quad (4)$$

Послідовність  $(x_n): \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$ , яка має границю  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ , називається збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

Якщо точки  $\infty, +\infty, -\infty$  є границями послідовності  $(x_n)$ , то це записують відповідно так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty. \quad (5)$$

Границі (5) називаються нескінченними границями. Можна означення границі послідовності  $(x_n)$  сформулювати так, що воно буде включати в себе означення границі в точці  $a \in \mathbb{R}$ , а також в точках  $\infty, +\infty$  і  $-\infty$ . Власне точка  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \infty$ ,  $a = +\infty$ ,  $a = -\infty$ ) називається границею послідовності  $(x_n)$ , якщо в будь-якому її  $\varepsilon$ -околі  $U(a; \varepsilon)$  лежать всі члени цієї послідовності за винятком,

можливо, скінченного числа членів, тобто якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n \in U(a; \varepsilon)$ . Нагадаємо, що  $\varepsilon$ -околом точок  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \infty$ ,  $a = +\infty$  і  $a = -\infty$  називаються відповідно множини

$$\{x \in \mathbb{R} : a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}, \{x \in \overline{\mathbb{R}}_0 : |x| > \varepsilon\}, \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > \varepsilon\}, \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < -\varepsilon\},$$

де  $\varepsilon > 0$ .

**Приклад 1.** Послідовність  $(n)$  є нескінченно великою, бо послідовність  $(1/n)$  є нескінченно малою.

**Приклад 2.** Послідовність  $x_n = 2^n$  є нескінченно великою, бо за нерівністю Бернуллі  $2^n = (1+1)^n \geq n$ . Тому (1) для цієї послідовності буде виконуватись з  $n^* = [E] + 1$ .

**Приклад 3.** Послідовність  $x_n = q^n$ ,  $|q| > 1$ , також є нескінченно великою, бо послідовність  $1/q^n$  є нескінченно малою.

**Приклад 4.** Послідовність  $((-1)^n n)$  є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n = \infty$ .

**Приклад 5.** Послідовність  $((-1)^n n)$  є розбіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

## 10. Границі суми, добутку і частки.

**Теорема 1.** Границя суми двох послідовностей дорівнює сумі границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (1)$$

**Доведення.** Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Потрібно показати, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ . За теоремою 1 про нескінченно малі  $x_n = a + \alpha_n$  і  $y_n = b + \beta_n$ , де  $(\alpha_n)$  і  $(\beta_n)$  – нескінченно малі послідовності. Тому  $x_n + y_n = a + b + \gamma_n$ , де  $\gamma_n = \alpha_n + \beta_n$ . За теоремою про суму нескінченно малих, послідовність  $(\gamma_n)$  є нескінченно малою. Отже, за теоремою 1 про нескінченно малі  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$ . ►

**Теорема 2.** Границя добутку двох послідовностей дорівнює добутку границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n. \quad (2)$$

**Доведення.** Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Тоді  $x_n = a + \alpha_n$  і  $y_n = b + \beta_n$ , де  $(\alpha_n)$  і  $(\beta_n)$  – нескінченно малі послідовності. Тому  $x_n y_n = ab + a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$ . За теоремами про нескінченно малі послідовності  $\gamma_n = a\beta_n + b\alpha_n + \alpha_n \beta_n$  є нескінченно малою. Отже, за теоремою 1 про нескінченно малі послідовності  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = ab$ . ►

**Наслідок 1.** Сталу можна виносити за знак границі, тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  для кожної сталої  $c \in \mathbb{R}$ , якщо остання границя існує.

**Доведення.** Справді, за теоремою 2 і теоремою про границю сталої  $\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . ►

**Теорема 3.** Границя частки двох послідовностей дорівнює частці границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$  і границя знаменника не дорівнює нулеві:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}. \quad (3)$$

**Доведення.** Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ . Тоді  $x_n = a + \alpha_n$  і  $y_n = b + \beta_n$ , де  $(\alpha_n)$  і  $(\beta_n)$  – нескінченно малі послідовності. Тому

$$\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{1}{y_n b} (b\alpha_n - a\beta_n).$$

За умовою  $b \neq 0$ . Отже,  $|y_n| > \frac{|b|}{2}$  і  $0 < \left| \frac{1}{y_n b} \right| \leq \frac{2}{b^2}$  для достатньо великих  $n$ . Тому,

послідовність  $\gamma_n = \frac{1}{y_n b} (b\alpha_n - a\beta_n)$  є нескінченно малою і  $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \gamma_n$ . Таким

чином,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$ . ►

**Зауваження 1.** Якщо принаймні одна з границь  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  є нескінченною або не існує, то теореми 1-3, взагалі кажучи, не можна застосувати. До нескінченних границь їх можна застосувати тільки у випадку,

коли при цьому не виникають невизначені вирази  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  і інші.

**Приклад 1.** Якщо  $x_n = (-1)^n$  і  $y_n = (-1)^{n+1}$ , то  $x_n + y_n = 0$  і тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$ , але цю границю не можна знайти за формулою (1), бо границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не існують.

**Приклад 2.** Якщо  $x_n = (-1)^n$  і  $y_n = (-1)^{n+1}$ , то  $x_n y_n = -1$  і тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = -1$ , але цю границю не можна знайти за формулою (2), бо границі  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  не існують.

**Приклад 3.** Якщо  $x_n = (-1)^n$  і  $y_n = 1/n$ , то  $(x_n y_n)$  є нескінченно малою послідовністю як добуток обмеженої і нескінченно малої. Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$ . Але останню границю не можна знайти за формулою (2), бо границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не існує.

**Приклад 4.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} + 2}{\frac{2}{n^2} + 4} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n} + 2 \right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2}{n^2} + 4 \right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2} + \lim_{n \rightarrow \infty} 4} = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 5.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{32}{3} \left( \frac{3}{4} \right)^n = \frac{32}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3}{4} \right)^n = 0.$

**Приклад 6.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + 4}{2 + 4n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{4}{n^2}}{\frac{2}{n^2} + 4} = \frac{3}{4}.$$

**Приклад 7.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 5n^3}{n^3 + n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{n^2} + 5}{1 + \frac{1}{n^2}} = 5.$$

**Приклад 8.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n^4}{n^5 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n^5}} = 0.$$

**Приклад 9.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 1}{n^3 + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n^5}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^5}} = \infty.$$

**Приклад 10.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4 - (n-1)^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4 - (n^4 - 4n^3 + 6n^2 - 4n + 1)} = \frac{1}{4}.$$

**Зауваження 2.** В прикладах 6-10 потрібно було знайти границю частки двох нескінченно великих послідовностей, тобто ми мали невизначеність  $\frac{\infty}{\infty}$  в кожному із цих прикладів. Разом з цим, в кожному з них одержали іншу відповідь.

**Зауваження 3.** В кожному з прикладів 6-10 теореми 1-3 не можна було використовувати, бо була невизначеність. Проте, ми змогли скористатись цими теоремами, зробивши спочатку певні перетворення. Подібним чином поступають часто при знаходженні границь. Взагалі, знаходження кожної границі доцільно починати зі з'ясування наявності невизначеності та її типу.

**Приклад 11.** Якщо  $x_n = \frac{3^n}{n!}$ , то

$$0 \leq x_n = \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \dots \cdot n} \leq \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 4} = \frac{3^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4^{n-3}} \leq \frac{32}{3} \left(\frac{3}{4}\right)^n,$$

якщо  $n \geq 4$ . Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!} = 0$ .

**Приклад 12.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$ , якщо існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і всі  $x_n \geq 0$ . Справді, якщо  $a = 0$ , то  $x_n < \varepsilon$  для всіх  $n \geq n^*$ . Тому  $\sqrt{x_n} < \sqrt{\varepsilon}$  для всіх  $n \geq n^*$ . Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{x_n} = 0$  і в цьому випадку рівність справедлива. Нехай  $a > 0$ . Тоді

$$|\sqrt{x_n} - \sqrt{a}| = \frac{|x_n - a|}{\sqrt{x_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|x_n - a|}{\sqrt{a}} \quad \text{і згідно з означенням границі}$$

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n - a| < \varepsilon / \sqrt{a}$ . Тому і тепер приходимо до потрібного твердження.

**Приклад 13.** 
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1+2n}{1+3n}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{3n+1}} = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+1/n}{3+1/n}} = \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

**Приклад 14.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 1/2$ , якщо

$$z_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n}},$$

бо

$$z_n \leq \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 + 1}} = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 1}},$$

$$z_n \geq \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n}} = \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + 1/n^2}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt{4n^2 + n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4 + 1/n}} = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 15.**  $(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): 0.001n^9 + n > 100n^8 + n$ . Справді,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{100n^8 + n}{0.01n^9 + n} = 0.$$

Тому за означенням границі (див. також теорему 3 пункту 7)

$$(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): \frac{100n^8 + n}{0.01n^9} < 1,$$

звідки отримуємо потрібний висновок.

**Приклад 16.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$  для кожного  $a \in (0; +\infty)$ . Якщо  $a = 1$ , то твердження є справедливим. Якщо  $a > 1$ ,  $b = \sqrt[n]{a}$  і  $x_n = \sqrt[n]{a} - 1$ , то  $b > 1$  і  $x_n > 0$ . Тому, використовуючи нерівність Бернуллі, одержуємо

$$a = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n = (1 + x_n)^n \geq nx_n,$$

звідки  $x_n < a/n$ . Таким чином,  $0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq a/n$ . Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{a} - 1) = 0$  і

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ . Якщо ж  $0 < a < 1$ , то число  $d = \frac{1}{a}$  є більшим за одиницю і за тільки

що доведеним

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{d}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{d}} = 1.$$

**Приклад 17.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\delta_n} = 1$  для кожного  $a \in (0; +\infty)$  і для кожної нескінченно малої послідовності  $(\delta_n)$  раціональних чисел. Якщо  $a = 1$ , то твердження є справедливим. Нехай, наприклад,  $a > 1$ . Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0 \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

то існує така послідовність  $(m_n)$  натуральних чисел, що  $-\frac{1}{m_n} \leq \delta_n \leq \frac{1}{m_n}$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді  $a^{-1/m_n} \leq a^{\delta_n} \leq a^{1/m_n}$ . Але

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{-1/m_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{1/m_n} = 1.$$

Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\delta_n} = 1$ .

**Приклад 18.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ . Справді, оскільки згідно з формулою бінома Ньютона

$$\begin{aligned} n &= \left(1 + (\sqrt[n]{n} - 1)\right)^n \\ &= 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) + \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2 + \dots + (\sqrt[n]{n} - 1)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}(\sqrt[n]{n} - 1)^2, \end{aligned}$$

то  $0 \leq \sqrt[n]{n} - 1 \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$ ,  $n > 1$ . Тому  $|\sqrt[n]{n} - 1| \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}$  і нерівність  $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$  виконується, якщо  $n \geq n' := [1 + 2/\varepsilon^2] + 1$ . Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

**Приклад 19.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^4 + n^2 + 1} = 1$ . Справді,

$$1 \leq \sqrt[n]{n^4 + n^2 + 1} \leq \sqrt[n]{3n^4} = \sqrt[n]{3} (\sqrt[n]{n})^4, \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$$

і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^4 = 1.$$

**Приклад 20.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}|$ , якщо остання границя існує. Справді, нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}| = q$ . Якщо  $q > 0$ , то  $|x_n / x_{n-1}| \geq q_1$  для кожного  $q_1 \in (0; q)$  і всіх  $n \geq n^*$ . Отже,

$$|x_n| \geq q_1 |x_{n-1}| \geq q_1^2 |x_{n-2}| \geq \dots \geq q_1^{n-n^*} |x_{n^*}|, \quad n \geq n^*.$$

Тому

$$q_1 \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{|x_n|}, \quad a := q_1^{n-n^*} |x_{n^*}|. \quad (4)$$

Нехай  $q < +\infty$ . Тоді для кожного  $q_3 > q$ ,  $n \geq n^{**}$ , одержуємо, що  $|x_n / x_{n-1}| \geq q_3$ , тобто

$$|x_n| \leq q_3 |x_{n-1}| \leq q_3^2 |x_{n-2}| \leq \dots \leq q_3^{n-n^{**}} |x_{n^{**}}|,$$

звідки

$$\sqrt[n]{|x_n|} \leq q_3 \sqrt[n]{b}, \quad b := q_3^{n-n^{**}} |x_{n^{**}}|. \quad (5)$$

Оскільки  $\sqrt[n]{a} \rightarrow 1$  і  $\sqrt[n]{b} \rightarrow 1$ , то з (4) і (5) випливає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = +\infty$ , якщо  $q = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} = 0$ , якщо  $q = 0$ , і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*) : q - \varepsilon < \sqrt[n]{|x_n|} < q + \varepsilon,$$

якщо  $0 < q < +\infty$ . Тому потрібна рівність є справедливою.

**11. Границя монотонної послідовності. Теорема Вейєрштрасса.** Послідовність  $(x_n)$  називається неспадною, якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq x_{n+1}$ . Таким чином, послідовність  $(x_n)$  є неспадною, якщо кожний її наступний член є не меншим за попередній. Послідовність  $(x_n)$  називається обмеженою зверху, якщо  $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq K$ . Таким чином, послідовність  $(x_n)$  є обмеженою зверху, якщо всі її члени не перевищують деякого числа  $K$ , незалежного від  $n$ .

**Теорема 1 (Вейєрштрасса).** Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною і обмеженою зверху, то вона має скінченну границю. Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною і необмеженою зверху, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ .

**Доведення.** Нехай  $a = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  і послідовність  $(x_n)$  є обмеженою зверху. Оскільки множина  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  є обмеженою зверху, то за теоремою про існування точної верхньої межі  $a < +\infty$  і, згідно з означенням точної верхньої межі, 1)  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq a$  і 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N}) : x_{n^*} > a - \varepsilon$ . З умови 1) випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < a + \varepsilon,$$

а з умови 2) і монотонності послідовності  $(x_n)$  одержуємо, що  $x_n \geq x_{n^*} > a - \varepsilon$  для всіх  $n \geq n^*$ . Таким чином,  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$  і  $|x_n - a| < \varepsilon$  для  $n \geq n^*$ . Отже,  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n - a| < \varepsilon$ , а це і означає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Якщо послідовність  $(x_n)$  є необмеженою зверху, то  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N}) : x_{n^*} > \varepsilon$ . Тоді для всіх  $n \geq n^*$  маємо  $x_n > \varepsilon$ , тобто  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ . ►

**Наслідок 1.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною, то вона є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Послідовність  $(x_n)$  називається незростаючою, якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \geq x_{n+1}$ . Послідовність  $(x_n)$  називається обмеженою знизу, якщо  $(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \geq K$ .

**Теорема 2.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є незростаючою і обмеженою знизу, то вона має скінченну границю. Якщо послідовність  $(x_n)$  є незростаючою і необмеженою знизу, то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Доведення** цієї теореми аналогічне до доведення теореми 1. ►

**Наслідок 2.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є незростаючою, то вона є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ .

Послідовність  $(x_n)$  називається монотонною, якщо вона є неспадною або незростаючою.

**Наслідок 3.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є монотонною, то вона є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ .

**Наслідок 4.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є монотонною і обмеженою,

то вона є збіжною в  $\mathbb{R}$ .

Послідовність  $(x_n)$  називається зростаючою, якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < x_{n+1}$ .

Послідовність  $(x_n)$  називається спадною, якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n > x_{n+1}$ .

**Приклад 1.** Якщо  $x_n = 2n + (-1)^n$ , то

$$x_{n+1} - x_n = 2(n+1) + (-1)^{n+1} - 2n - (-1)^n = 2 + (-1)^{n+1} - (-1)^n \geq 0.$$

Тому послідовність  $(x_n)$  є неспадною. Вона є обмеженою знизу, бо всі  $x_n \geq 0$ .

Вона є необмеженою зверху, бо всі  $x_n \geq 2n - 1$ .

**Приклад 2.** Якщо  $x_n = \sqrt{n} + 2(-1)^n$ , то  $x_4 = \sqrt{4} + 2(-1)^4 = 4$ ,  $x_5 = \sqrt{5} + 2(-1)^5 = \sqrt{5} - 2 < 1 < x_4$  і  $x_6 = \sqrt{6} + 2(-1)^6 = \sqrt{6} + 2 > x_4$ . Тому ця послідовність не є монотонною. Вона є обмеженою знизу, бо всі  $x_n \geq -2$ . Вона є необмеженою зверху, бо всі  $x_n \geq \sqrt{n} - 2$ .

**Приклад 3.** Якщо  $x_n = \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2^2} + \dots + \frac{1}{1+2^n}$ , то  $x_n \leq x_{n+1}$  і  $x_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-1/2^n}{1-1/2} = 1 - \frac{1}{2^n} \leq 1$ . Тому розглядувана послідовність  $(x_n)$  є неспадною і обмеженою зверху. Отже, є збіжною в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 4.** Нехай  $x_n = \frac{2^n}{n!}$ . Тоді  $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2^{n+1}n!}{(n+1)!2^n} = \frac{2}{n+1} \leq 1$ ,  $x_{n+1} \leq x_n$  і  $0 \leq x_n$ , тобто послідовність  $(x_n)$  є незростаючою і обмеженою знизу. Крім цього,  $x_{n+1} = x_n \frac{2}{n+1}$ . Отже, послідовність  $(x_n)$  має скінченну границю  $a$  і  $a = a \cdot 0$ .

Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$ .

**Приклад 5.** Нехай  $x_1 = \frac{1}{2}$  і  $x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді  $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}(1 + x_{n-1}^2 - 2x_{n-1}) = \frac{1}{2}(1 - x_{n-1})^2 \geq 0$ , тобто  $x_n \geq x_{n-1}$ . Тому послідовність  $(x_n)$  є неспадною. З іншого боку,  $x_1 \leq 1$ ,  $x_2 = \frac{1}{2} + \frac{x_1^2}{2} \leq 1$  і методом математичної індукції переконуємось, що  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq 1$ . Отже, дана

послідовність має скінченну границю  $a$  і  $a$  знаходиться з рівності  $a = \frac{1}{2} + \frac{a^2}{2}$ , звідки  $a = 1$ . Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ .

**Приклад 6.** Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq a$ . Справді, припустимо протилежне, тобто що  $(\exists n_0 \in \mathbb{N}) : x_{n_0} > a$ . Тоді  $x_n \geq x_{n_0}$ , якщо  $n \geq n_0$ . Тому  $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq x_{n_0} > a$ . Суперечність.

**Приклад 7.** Для кожної послідовності  $(x_n)$  послідовність  $x_{n,\text{sup}} = \sup\{x_k : k \geq n\}$  є незростаючою і  $x_{n,\text{sup}} \geq x_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 8.** Для кожної послідовності  $(x_n)$  послідовність  $x_{n,\text{inf}} = \inf\{x_k : k \geq n\}$  є неспадною і  $x_{n,\text{inf}} \leq x_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**12. Число  $e$ .** Число  $e$  визначається так:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Границя (1) існує в  $\mathbb{R}$ .

**Доведення.** Нехай  $y_n = (1 + 1/n)^{n+1}$ . Тоді  $y_{n-1} = (1 + 1/(n-1))^n$  і, скориставшись нерівністю Бернуллі, отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{y_{n-1}}{y_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{n^{2n} \cdot n}{(n^2 - 1)^n \cdot (n+1)} = \frac{n^{2n+2} (n^2 - 1)}{n(n+1)(n^2 - 1)^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n^2}{n^2 - 1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} = \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right)^{n+1} \frac{n-1}{n} \geq \left(1 + (n+1) \frac{1}{n^2 - 1}\right) \frac{n-1}{n} = 1. \end{aligned}$$

Отже,  $y_{n-1} \geq y_n$  і  $y_n > 0$ . Тому послідовність  $(y_n)$  є незростаючою і обмеженою знизу. Таким чином, існує скінченна границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ . Але

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Отже, границя (1) існує і є скінченною. ►

**Наслідок**  $1.2 \leq e \leq 4$ .

**Доведення.** Справді, за нерівністю Бернуллі  $(1 + 1/n)^n \geq 1 + n/n = 2$  і тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n \geq 2$ . Крім цього,  $e \leq (1 + 1/n)^{n+1}$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і тому  $2 \leq e \leq (1 + 1/1)^{1+1} = 4$ . ►

**Зауваження 1.** Можна переконатись, що число  $e$  є ірраціональним і  $e \approx 2.71828\dots$

**Приклад 1.**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+n}\right)^{n+3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1+1/n}\right)^n \cdot \left(\frac{n}{1+n}\right)^3 = \frac{1}{e}.$$

**Приклад 2.**

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

**Приклад 3.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1+3n}\right)^n = 0$ . Справді,  $\frac{n}{1+3n} \leq \frac{n}{3n} \leq \frac{1}{3}$ . Тому

$$0 \leq \left(\frac{n}{1+3n}\right)^n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \rightarrow 0.$$

**Приклад 4.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^n}{1+n}\right)^n = +\infty$ . Справді,  $\frac{2^n}{1+n} \geq \frac{2^n}{2n} \geq \frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{4} \geq 2$ ,

якщо  $n \geq 9$ . Тому  $\left(\frac{2^n}{1+n}\right)^n \geq 2^n \rightarrow +\infty$ .

**Приклад 5.** Послідовність  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  є неспадною і обмеженою зверху.

Справді,

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n}{n-1} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Тому послідовність  $(x_n)$  є неспадною. Крім цього,

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} \\ &\quad + \dots + \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \cdot (1 - 1/n) + \frac{1}{3!} \cdot (1 - 1/n)(1 - 2/n) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{k!} (1 - 1/n)(1 - 2/n) \dots (1 - (k-1)/n) \\ &\quad + \dots + \frac{1}{n!} (1 - 1/n)(1 - 2/n) \dots (1 - (n-1)/n) \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!}. \end{aligned}$$

Але  $n! \geq 2^{n-1}$ . Тому

$$x_n \leq 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k-1}} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - (1/2)^{n-1}}{1 - 1/2} \leq 2 + 1 = 3.$$

Отже, розглядувана послідовність є обмеженою зверху. Таким чином,

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**13. Теорема Больцано-Вейерштрасса.** Не кожна обмежена послідовність є збіжною. Наприклад, послідовність  $x_n = (-1)^n$  є обмеженою, але границі не має. Разом з цим, справедлива наступна теорема.

**Теорема 1.** Для кожної обмеженої послідовності існує її збіжна підпослідовність.

**Доведення.** Нехай  $(x_n)$  – обмежена послідовність. Тоді  $(\exists a_0 \in \mathbb{R})(\exists b_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}): a_0 \leq x_n \leq b_0$ . Поділимо проміжок  $[a_0; b_0]$  на два рівні. Тоді принаймні один з одержаних проміжків містить нескінченно багато членів послідовності  $(x_n)$ . Позначимо такий проміжок через  $[a_1; b_1]$ . Нехай  $x_{n_1}$  один із членів послідовності  $(x_n)$ , який належить  $[a_1; b_1]$ . Очевидно,  $b_1 - a_1 = \frac{b_0 - a_0}{2}$ . Поділимо проміжок  $[a_1; b_1]$  на два рівні і позначимо через  $[a_2; b_2]$  один з двох одержаних проміжків, який містить нескінченну кількість членів послідовності. Тоді  $b_2 - a_2 = \frac{b_0 - a_0}{2^2}$ . Нехай  $x_{n_2}$  – довільний член цієї послідовності  $(x_n)$  такий, що  $n_2 > n_1$  і  $x_{n_2} \in [a_2; b_2]$ . Продовжуючи цей процес, одержуємо нескінченну систему  $\{[a_k; b_k]: k \in \mathbb{N}\}$  замкнених вкладених проміжків таких, що

$$[a_0; b_0] \supset [a_1; b_1] \supset \dots \supset [a_k; b_k] \supset \dots, \quad (1)$$

$$b_k - a_k = \frac{b_0 - a_0}{2^k} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad (2)$$

і підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ , для якої

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k, \quad k \in \mathbb{N}. \quad (3)$$

За наслідком з аксіоми Кантора існує єдине число  $a \in \mathbb{R}$  таке, що

$$(\forall k \in \mathbb{N}): a_k \leq a \leq b_k. \quad (4)$$

З (2) і (4) випливає, що

$$0 \leq b_k - a \leq b_k - a_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

$$0 \leq a - a_k \leq b_k - a_k \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Таким чином,  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = a$ . Тому з (3) одержуємо, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .

Отже, існує збіжна підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ . ►

**Теорема 2.** Для кожної послідовності існує її збіжна в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  підпослідовність.

**Доведення.** Якщо послідовність є обмеженою, то потрібне твердження випливає з теореми 1. Нехай послідовність  $(x_n)$  є необмеженою. Тоді

$$(\exists n_1): |x_{n_1}| \geq 1, (\exists n_2 > n_1): |x_{n_2}| \geq 2, \dots,$$

і так побудована підпослідовність  $(x_{n_k})$  є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  і  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . ►

**Приклад 1.** Послідовність  $x_n = (-1)^n + 1/n$  є обмеженою, бо  $(\forall n \in \mathbb{N}): |x_n| \leq 2$ . Її збіжними підпослідовностями є, зокрема, такі:

$$x_{2k} = 1 + \frac{1}{2k}, \quad x_{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1}, \quad x_{4k+3} = -1 + \frac{1}{4k+3}.$$

**14. Часткова границя послідовності. Верхня і нижня границі послідовності.** Частковою границею послідовності  $(x_n)$  називається таке число  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ , для якого існує підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$  така, що

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b.$$

**Теорема 1.** Кожна послідовність  $(x_n)$  має принаймні одну часткову границю  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ . Кожна обмежена послідовність  $(x_n)$  має принаймні одну часткову границю  $b \in \mathbb{R}$ .

**Доведення.** Ця теорема є іншим формулюванням теореми Больцано-Вейерштрасса. ►

Верхньою границею послідовності  $(x_n)$  називається найбільша в  $\overline{\mathbb{R}}$  її часткова границя. Для позначення верхньої границі використовують символи  $a = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  і  $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Теорема 2.** Кожна послідовність  $(x_n)$  має верхню границю  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k : k \geq n\}$ .

**Доведення.** Оскільки послідовність  $(\sup\{x_k : k \geq n\})$  є незростаючою, то існує  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k : k \geq n\} = a \in \overline{\mathbb{R}}$ . Нехай спочатку  $a = -\infty$ . За означенням границі для кожного  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $n^*$ , що  $\sup\{x_k : k \geq n\} \leq -\varepsilon$ , якщо  $n \geq n^*$ . Але  $\sup\{x_k : k \geq n\} \geq x_n$ . Отже,  $x_n \leq -\varepsilon$ , якщо  $n \geq n^*$ . Таким чином,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ ,  $-\infty$ —єдина гранична точка послідовності  $(x_n)$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty = a$ . Тому в розглядуваному випадку теорема доведена. Нехай  $a > -\infty$ . Візьмемо

довільну зростаючу послідовність  $(a_m)$ , збіжну до  $a$ . За означенням границі для кожного  $m \in \mathbb{N}$  знайдеться таке  $n_m \in \mathbb{N}$ , що  $n_m < n_{m+1}$  і  $\sup\{x_k : k \geq n_m\} \geq a_m$ . Крім цього, за означенням точної верхньої межі знайдеться таке  $k_m \geq n_m$ , що  $k_m < k_{m+1}$  і  $x_{k_m} \geq a_m$ . Отже, послідовність  $(x_n)$  має підпослідовність  $(x_{k_m})$ , всі граничні точки якої є не меншими за  $a$ . З іншого боку,  $\sup\{x_k : k \geq n\} \geq x_n$ . Тому всі часткові границі послідовності  $(x_n)$  є не більшими за  $a$  і ми приходимо до твердження теореми. ►

**Наслідок 1.** Для кожної послідовності  $(x_n)$  виконується

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k : k \geq n\} = \inf \{ \sup \{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N} \}.$$

**Теорема 3.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

- 1) існує така підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ , що  $x_{n_k} \rightarrow a$ ;
- 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n - a < \varepsilon$ .

**Доведення.** Справді, умова 1) означає, що число  $a$  є частковою границею послідовності, а умова 2) вказує на те, що жодне число  $\gamma > a$  не може бути частковою границею послідовності  $(x_n)$ . ►

**Теорема 4.**  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

- 1) існує така підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ , що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*) : -\varepsilon < x_{n_k} - a$ ;
- 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n - a < \varepsilon$ .

**Доведення.** Справді, умови 1) і 2) показують, що число  $a$  є частковою границею послідовності, а умова 2) вказує на те, що жодне число  $\gamma > a$  не може бути частковою границею послідовності  $(x_n)$ . ►

Нижньою границею послідовності  $(x_n)$  називається найменша в  $\overline{\mathbb{R}}$  її часткова границя. Для позначення нижньої границі використовують символи  $a = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  та  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

**Теорема 5.** Кожна послідовність  $(x_n)$  має нижню границю  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  
 $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty}(-x_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  і

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf \{x_k : k \geq n\} = \sup \{\inf \{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N}\}.$$

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з означення і теореми 2.



**Теорема 6.**  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

3) існує така підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ , що  $x_{n_k} \rightarrow a$ ;

4)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : -\varepsilon < x_n - a$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж як і теореми 3. ►

**Теорема 7.**  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови

3') існує така підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ , що  
 $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*) : x_{n_k} - a < \varepsilon$ ;

4)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : -\varepsilon < x_n - a$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж як і теореми 4. ►

**Теорема 8.** Для того щоб  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a. \quad (1)$$

**Доведення.** Справді, якщо існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , то збіжною є будь-яка підпослідовність  $(x_{n_k})$  і  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ . Тому послідовність  $(x_n)$  має в  $\overline{\mathbb{R}}$  єдину часткову границю. Тому виконується (1). Навпаки, нехай виконується (1) і, наприклад,  $a \in \mathbb{R}$ . Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n - a < \varepsilon$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'') : -\varepsilon < x_n - a.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0) : |x_n - a| < \varepsilon,$$

тобто послідовність  $(x_n)$  є збіжною і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . ►

**Наслідок 2.** Для того щоб послідовність була збіжною в  $\mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою і мала в  $\mathbb{R}$  єдину граничну точку. Для того щоб послідовність  $(x_n)$  була збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ , необхідно і достатньо, щоб вона мала в  $\overline{\mathbb{R}}$  єдину часткову границю.

**Приклад 1.** Якщо  $x_n = (-1)^n + 1/n$ , то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не існує.

**Приклад 2.** Нехай  $(x_n)$  – послідовність, членами якої є всі раціональні числа. Кожне число  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  є її частковою границею. Тому  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  і  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Приклад 3.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст. Справді, нехай  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq +\infty$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq +\infty$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c$ . Тоді

$$(\forall a_1 > a)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n') : x_n < a_1,$$

$$(\forall b_1 > b)(\exists n'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'') : y_n < b_1.$$

Тому  $x_n + y_n < c_1$  для будь-якого  $c_1 > a + b$  і всіх достатньо великих  $n$ . Отже,  $c \leq a + b$ , що і потрібно було довести. В інших можливих випадках розглядувана нерівність є очевидною.

**Приклад 4.** Якщо  $x_n = (-1)^n$  і  $y_n = (-1)^{n+1}$ , то  $x_n + y_n = 0$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$ . Отже,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

**Приклад 5.** Якщо  $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$ , то

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n < 1 + \varepsilon$ . З іншого боку,  $x_{2k} = \frac{1}{2k} + 1$ . Тому  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$ .

Отже,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Далі,  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n > -\varepsilon$ . Крім цього,  $x_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$  і  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = 0$ . Тому  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Приклад 6.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує. Справді, нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c$ . Якщо  $a \neq -\infty$  і  $b \neq -\infty$ , то  $(\forall a_1 < a)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n > a_1$  і існує така підпослідовність  $(y_{n_k})$  послідовності  $(y_n)$ , що

$$(\forall b_1 < b)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*): y_{n_k} > b_1.$$

Тому  $x_{n_k} + y_{n_k} > c_1$  для будь-якого  $c_1 < a + b$  і всіх достатньо великих  $k$ . Отже,  $c \geq a + b$ . В інших можливих випадках остання нерівність є очевидною. Тому, врахувавши попередні приклади, приходимо до потрібної рівності.

**Приклад 7 (теорема Штольца).**

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$  і  $y_n - y_{n-1} > 0$

для всіх  $n \geq n_0$ . Справді, нехай  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = c$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = d$ . Якщо  $d = +\infty$ , то

нерівність  $c \leq d$  є очевидною. Нехай  $d \neq +\infty$ . Тоді  $y_n > 0$  для всіх великих  $n \in \mathbb{N}$  і

$$(\forall d_1 > d)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq n^*): \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < d_1.$$

Тому

$$x_k - x_{k-1} < d_1(y_k - y_{k-1}), \quad k \geq n^*,$$

$$x_n - x_{n'-1} = \sum_{k=n'}^n (x_k - x_{k-1}) < d_1 \sum_{k=n'}^n (y_k - y_{k-1}) = d_1 (y_n - y_{n'-1}), \quad n \geq n',$$

$$\frac{x_n}{y_n} \leq d_1 - d_1 \frac{y_{n'-1}}{y_n} + \frac{x_{n'-1}}{y_n}, \quad n \geq n',$$

*i*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( d_1 - d_1 \frac{y_{n'-1}}{y_n} + \frac{x_{n'-1}}{y_n} \right) = d_1.$$

Отже,  $c \leq d_1$  для довільного  $d_1 > d$ . Тому  $c \leq d$ . Нехай  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$  і

$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = b$ . Якщо  $a = -\infty$ , то нерівність  $a \leq b$  є очевидною. Нехай  $a \neq -\infty$ . Тоді

$y_n > 0$  для всіх великих  $n \in \mathbb{N}$  і

$$(\forall a_1 < a)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall k \geq n') : \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} > a_1.$$

Тому

$$x_k - x_{k-1} > a_1 (y_k - y_{k-1}), \quad k \geq n',$$

$$x_n - x_{n'-1} = \sum_{k=n'}^n (x_k - x_{k-1}) > a_1 \sum_{k=n'}^n (y_k - y_{k-1}) = a_1 (y_n - y_{n'-1}), \quad n \geq n',$$

$$\frac{x_n}{y_n} \geq a_1 - a_1 \frac{y_{n'-1}}{y_n} + \frac{x_{n'-1}}{y_n}, \quad n \geq n',$$

*i*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 - a_1 \frac{y_{n'-1}}{y_n} + \frac{x_{n'-1}}{y_n} \right) = a_1.$$

Отже,  $b \geq a_1$  для довільного  $a_1 < a$ . Тому  $a \leq b$ .

**Приклад 8.**  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$  для будь-яких двох

послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  і  $y_n - y_{n-1} < 0$  для всіх

$n \geq n_0$ . Справді, нехай  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = c$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = d$ . Якщо  $d = +\infty$ , то нерівність  $c \leq d$  є очевидною. Нехай  $d \neq +\infty$ . Тоді  $y_n < 0$  для всіх великих  $n \in \mathbb{N}$

$$(\forall d_1 > d)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq n^*): \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} < d_1.$$

Тому

$$x_{k+1} - x_k > d_1(y_{k+1} - y_k), \quad n \geq n^*,$$

$$x_m - x_n = \sum_{k=n}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \geq d_1 \sum_{k=n}^{m-1} (y_{k+1} - y_k) = d_1(y_m - y_n), \quad m > n \geq n^*,$$

$$-x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_m - x_n) \geq d_1 \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_m - y_n) = -d_1 y_n, \quad n \geq n^*.$$

Отже,  $x_n / y_n \leq d_1$ , якщо  $n \geq n^*$ , і  $c \leq d_1$  для довільного  $d_1 > d$ . Тому  $c \leq d$ . Ліва частина розглядуваної нерівності обґрунтовується аналогічно.

**Приклад 9.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  для кожної послідовності  $(u_n)$ ,

збіжної в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ . Справді, якщо  $x_n = \sum_{k=1}^n u_k$  і  $y_n = n$ , то  $\frac{x_n}{y_n} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$ ,

$\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = u_n$  і за теоремою Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

**Приклад 10.** Послідовність  $u_n = (-1)^n$  є розбіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ , але

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + 1 + \dots + (-1)^n}{n} = 0.$$

**Приклад 11.** Якщо  $x_n = \sum_{k=1}^n k^3$  і  $y_n = n^4$  то за теоремою Штольца

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4 - (n-1)^4} = \frac{1}{4}.$$

**Приклад 12.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}|$ , якщо всі  $x_n \neq 0$ . Справді, нехай  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}| = q$ . Якщо  $q < +\infty$ , то  $|x_n / x_{n-1}| \leq q_3$  для кожного  $q_3 > q$  і всіх  $n \geq n^* - 1$ , тобто

$$|x_n| \leq q_3 |x_{n-1}| \leq q_3^2 |x_{n-2}| \leq \dots \leq q_3^{n-n^*} |x_{n^*}|,$$

Звідки  $\sqrt[n]{|x_n|} \leq q_3 \sqrt[n]{|x_{n^*}|}$ ,  $b := q_3^{-n^*} |x_{n^*}|$ . Тому  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq q_3$ . Але  $q_3 > q$  є довільним. Отже,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \leq q$  (у випадку  $q = +\infty$  остання нерівність є очевидною). Далі, нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}| = \underline{q}$  і  $\underline{q} > 0$ . Тоді  $|x_n / x_{n-1}| \geq q_4$  для кожного  $q_4 \in (0; \underline{q})$  і всіх  $n \geq n^* - 1$ , тобто

$$|x_n| \geq q_4 |x_{n-1}| \geq q_4^2 |x_{n-2}| \geq \dots \geq q_4^{n-n^*} |x_{n^*}|,$$

Звідки  $\sqrt[n]{|x_n|} \geq q_4 \sqrt[n]{|x_{n^*}|}$ ,  $b := q_4^{-n^*} |x_{n^*}|$ . Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \geq q_4$ . Але  $q_4 \in (0; \underline{q})$  є довільним. Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} \geq \underline{q}$  (у випадку  $\underline{q} = 0$  остання нерівність є очевидною).

**Приклад 13.** Якщо  $(x_n)$  – така послідовність невід’ємних чисел, що  $x_{k+n} \leq x_k x_n$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$  і всіх  $n \in \mathbb{N}$ , то існує скінченна границя  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_k} = \inf \{ \sqrt[k]{x_k} : k \in \mathbb{N} \}$ . Справді, оскільки

$$x_n \leq x_1 x_{n-1} \leq x_1^2 x_{n-2} \leq \dots \leq x_1^{n-1} x_1 = x_1^n,$$

то  $0 \leq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_k} \leq x_1$ . Далі, нехай  $\inf \{ \sqrt[k]{x_k} : k \in \mathbb{N} \} = d$ . Тоді для заданого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $n \in \mathbb{N}$ , що  $\sqrt[n]{x_n} < d_1$ ,  $d_1 := d + \varepsilon$ . Крім цього, знайдеться підпослідовність  $(x_{k_j})$ , для якої  $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{x_k} = \lim_{j \rightarrow \infty} x_{k_j}^{1/k_j}$ . Кожне натуральне число  $j$  можна подати у вигляді  $j = nk_j + l_j$ ,  $0 \leq l_j \leq n - 1$ . Тоді

$$x_j = x_{nk_j + l_j} \leq x_{nk_j} x_{l_j} = x_{n(k_j-1)+n} x_{l_j} \leq x_{n(k_j-1)} x_n x_{l_j} \leq \dots \leq x_n x_n^{k_j-1} x_{l_j} = x_n^{k_j} x_{l_j},$$

$d \leq \sqrt[j]{x_j} \leq \sqrt[j]{x_n^{k_j} x_{l_j}} = x_n^{k_j/j} x_{l_j}^{1/j} \leq d_1^{nk_j/j} x_{l_j}^{1/j} \rightarrow d_1 = d + \varepsilon$ , звідки впливає потрібне.

**Зауваження 1.** Інколи часткову границю послідовності називають граничною точкою послідовності.

### 15. Критерій Коші збіжності послідовності.

**Теорема 1.** Для того щоб послідовність  $(x_n)$  була збіжною, необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall m \geq n^*): |x_n - x_m| < \varepsilon. \quad (1)$$

**Доведення. Необхідність.** Нехай послідовність  $(x_n)$  є збіжною, тобто існує скінченна границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Тоді за означенням границі

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n - a| < \varepsilon / 2, \quad (2)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall m \geq n^*): |x_m - a| < \varepsilon / 2. \quad (3)$$

Тому для будь-яких  $\varepsilon > 0$ ,  $n \geq n^*$  і  $m \geq n^*$  отримуємо, що  $|x_n - x_m| = |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |a - x_m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , звідки випливає (1). **Достатність.** Нехай виконується (1). Взявши  $\varepsilon = 1$  з (1) отримуємо, що  $|x_n - x_m| < 1$ , якщо  $n \geq n^*$ . Але  $|x_n| - |x_m| \leq |x_n - x_m|$ . Тому  $|x_n| < 1 + |x_m|$ , якщо  $n \geq n^*$ . Отже, послідовність  $(x_n)$  є обмеженою. Тому існує її збіжна підпослідовність  $(x_{n_k})$ . Нехай

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a. \quad (4)$$

Із (1) для всіх  $m \geq n^*$  і досить великих  $k$  маємо  $-\varepsilon < x_{n_k} - x_m < \varepsilon$ . Перейдемо в останній нерівності до границі і врахуємо (4). Одержуємо, що  $-\varepsilon \leq a - x_m \leq \varepsilon$ , якщо  $m \geq n^*$ . Отже,  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall m \geq n^*): |x_m - a| \leq \varepsilon$ , тобто послідовність  $(x_n)$  є збіжною. ►

Послідовність, яка задовольняє умову (1), називається фундаментальною або послідовністю Коші. Умову (1) можна переписати так

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall p \geq 0): |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon. \quad (5)$$

З теореми 1 випливає, що послідовність  $(x_n)$  є розбіжною тоді і тільки тоді, коли

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n^* \in \mathbb{N})(\exists n \geq n^*)(\exists p \geq 0): |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon. \quad (6)$$

**Приклад 1.** Послідовність  $x_n = \frac{\cos 1}{2} + \frac{\cos 2}{2^2} + \dots + \frac{\cos n}{2^n}$  є збіжною.

Справді, використовуючи нерівність Бернуллі, отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos k}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{2^k} \right| &= \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\cos k}{2^k} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{|\cos k|}{2^k} \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n+1}} \cdot \frac{1 - (1/2)^p}{1 - 1/2} \leq \frac{1}{2^n} = \frac{1}{(1+1)^n} \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [1/\varepsilon] + 1 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall p \geq 0): \left| \sum_{k=1}^{n+p} \frac{\cos k}{2^k} - \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{2^k} \right| < \varepsilon.$$

Тому згідно з критерієм Коші розглядувана послідовність  $(x_n)$  є збіжною.

**Приклад 2.** Послідовність  $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  є розбіжною. Справді,

$$|x_{n+n} - x_n| = \sum_{k=n+1}^{n+n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Отже,  $(\exists \varepsilon = 1/2)(\forall n^* \in \mathbb{N})(\exists n = n^* \geq n^*)(\exists p = n): |x_{n+p} - x_n| \geq \varepsilon.$

Тому

послідовність  $(x_n)$  є розбіжною.

**16. Зауваження про побудову множини дійсних чисел як класів фундаментальних послідовностей раціональних чисел.** Послідовність  $(x_n)$  десяткових наближень з недостачею числа  $\sqrt{2}$  є збіжною до  $\sqrt{2}$  і є фундаментальною. Якщо  $(\tilde{x}_n)$  – інша фундаментальна послідовність раціональних чисел, яка є збіжною до числа  $\sqrt{2}$ , то  $x_n - \tilde{x}_n \rightarrow 0$ . При цьому, послідовності  $(x_n + \tilde{x}_n)$  і  $(x_n \tilde{x}_n)$  також є фундаментальними. Таким чином, кожна фундаментальна послідовність раціональних чисел є збіжною до деякого дійсного числа і існують такі фундаментальні послідовності раціональних чисел, які не збігаються до жодного раціонального числа. На цих спостереженнях базується один із способів введення множини дійсних чисел, про який будемо говорити нижче. При цьому слід уявити, що термін “дійсне число” нам не знайомий. Припустимо, що раціональні числа певним чином уведені і основні їхні властивості встановлені. Послідовність  $(u_n)$

раціональних чисел назвемо фундаментальною в  $\mathbb{Q}$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{Q})(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall m \geq n^*): |u_n - u_m| < \varepsilon.$$

Дві фундаментальні в  $\mathbb{Q}$  послідовності  $(u_n)$  і  $(v_n)$  раціональних чисел назвемо еквівалентними, якщо вони є фундаментальними  $u_n - v_n \rightarrow 0$ . Поділимо всі фундаментальні в  $\mathbb{Q}$  послідовності на попарно неперетинні класи, відносячи до одного класу еквівалентні послідовності. Кожні два такі класи або співпадають або не перетинаються. Кожний такий клас назвемо дійсним числом. Такий клас  $u$  однозначно визначається одним із своїх представників, тобто однією з послідовностей  $(u_n)$ , і цей факт записують так:  $u = (u_n)$ . Кожному раціональному числу  $u$  відповідає той клас, який містить послідовність  $(u; u; \dots)$ . Виходячи з цього означення можна отримати основні властивості дійсних чисел. Деякі відповідні означення і теореми наведені нижче в прикладах.

**Приклад 1.** Сумою двох дійсних чисел  $u = (u_n)$  і  $v = (v_n)$  назвемо дійсне число  $u + v$ , яке містить послідовність  $(u_n + v_n)$ .

**Приклад 2.** Для будь-яких двох фундаментальних в  $\mathbb{Q}$  послідовностей  $(u_n)$  і  $(v_n)$  послідовність  $(u_n + v_n)$  також є фундаментальною в  $\mathbb{Q}$ . Отже, будь-які два дійсні числа  $u = (u_n)$  і  $v = (v_n)$  мають суму  $u + v = (u_n + v_n)$ .

**Приклад 3.** В множині дійсних чисел є нуль і ним є  $0 = (0; 0; \dots)$ .

**Приклад 4.** Кожне дійсне число  $u = (u_n)$  має єдиний протилежний елемент і ним є  $-u = (-u_n)$ .

**17. Сума членів послідовності.** Сумою членів послідовності  $(a_k)$  або сумою ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

називається число

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n, \quad S_n := \sum_{k=1}^n a_k,$$

якщо остання границя існує. Цей факт записується так  $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ .

**Приклад 1.** Геометричною прогресією називається послідовність  $a_k = aq^{k-1}$ , де  $a \in \mathbb{R}$  і  $q \in \mathbb{R}$ . Якщо геометрична прогресія є нескінченно спадною, тобто  $|q| < 1$ , то вона має суму і

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n aq^{k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Отже,  $\frac{a}{1-q} = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ ,  $|q| < 1$ .

**18. Множина десяткових дробів.** Нехай  $\mathfrak{R}^1$  – множина всіх нескінченних десяткових дробів:

$$x = x_0, x_1 \dots x_k \dots, \quad (1)$$

$$x = -x_0, x_1 \dots x_k \dots, \quad (2)$$

де  $x_0 \in \mathbb{N}_0$  і  $x_j \in \overline{0;9}$ . Дріб (1) будемо називати невід'ємним або додатним, а дріб (2) від'ємним. Обидва дроби (1) і (2) будемо записувати одним символом

$$x = \pm x_0, x_1 \dots x_k \dots \quad (3)$$

Якщо дріб (3) є періодичним і  $\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m$  – його період, тобто

$$x = \pm x_0, x_1 \dots x_\nu \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \beta_1 \beta_2 \dots \beta_m \dots,$$

то ми записуємо

$$x = \pm x_0, x_1 \dots x_\nu (\beta_1 \beta_2 \dots \beta_m). \quad (4)$$

Далі вважаємо, якщо не вказано на інше, що дроби  $-0,(0)$  і дроби, для яких число 9 є періодом, не належать до  $\mathfrak{R}^1$  ( $0 = 0,(0) = -0,(0)$  і  $\pm x_0, x_1 \dots x_n(9) = \pm x_0, x_1 \dots \tilde{x}_n(0)$ , де  $\tilde{x}_n = x_n + 1$ ). Розглядувана множина десяткових дробів задовольняє всі аксіоми множення дійсних чисел. Деякі відповідні означення і теореми наведені нижче в прикладах.

**Приклад 1.** Дріб  $0 = 0,(0)$  називається нулем.

**Приклад 2.** Дріб  $1 = 1,(0)$  називається одиницею.

**Приклад 3.** Дріб  $x$  вважається меншим за дріб  $y$ , якщо виконується принаймні одна з умов: 1)  $x$  є від'ємним, а  $y$  є додатним; 2)  $x$  і  $y$  є додатними,  $x_0 = y_0, \dots, x_n = y_n$  і  $x_{n+1} < y_{n+1}$  для деякого  $n \in \mathbb{N}$ ; 3)  $x$  і  $y$  є від'ємними дробами,  $x_0 = y_0, \dots, x_n = y_n$  і  $x_{n+1} > y_{n+1}$  для деякого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 4.** Множину дробів  $x$ , які задовольняють нерівність  $a \leq x \leq b$ , де  $a$  і  $b$  – деякі дроби, позначаємо через  $[a; b]$ . Аналогічно визначаються множини  $(a; b)$ ,  $(a; b]$  та  $[a; b)$ .

**Приклад 5.** Модулем дробу (3) називається дріб  $|x| = x_0, x_1, \dots$ .

**Приклад 6.** Періодичні десяткові дроби назвемо раціональними.

**Приклад 7.** Між множиною раціональних чисел і множиною всіх періодичних десяткових дробів існує взаємно однозначна відповідність.

Кожному раціональному числу  $x = \frac{p}{q}$  ставиться у відповідність десятковий періодичний дріб (4) шляхом ділення  $p$  на  $q$  в стовпчик. Навпаки, якщо маємо періодичний дріб (4), то йому ставиться у відповідність раціональне число

$$x = \pm \left( x_0 + \frac{x_1}{10} + \dots + \frac{x_\nu}{10^\nu} + \frac{\beta_1}{10^{\nu+1}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{10^m} \right)^k + \dots + \frac{\beta_m}{10^{\nu+m}} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{10^m} \right)^k \right).$$

Переконаємось, що розглядувана відповідність є взаємооднозначною.

**Приклад 8.** Десятковий дріб  $a = \pm a_0, a_1 \dots a_k \dots$  називається стабілізацією послідовності десяткових дробів  $a(k) = \pm a_{0k}, a_{1k} \dots a_{nk} \dots$ , якщо для кожного  $j \in \mathbb{N}_0$  виконується  $a_j = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{jk}$ , тобто якщо  $(\forall j \in \mathbb{N}_0)(\exists k_0^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0^*) : a_{jk} = a_{jk_0^*} = a_j$ .

**Приклад 9.** Нехай  $\underline{x}_n = x_0, x_1 \dots x_n$ , якщо  $x \geq 0$  і  $\underline{x}_n = - \left( x_0, x_1 \dots x_n + 0, \underbrace{0 \dots 0}_n 1 \right)$ ,

якщо  $x < 0$ . Послідовність  $(\underline{x}_n)$ , розглядувана як послідовність періодичних десяткових дробів з періодом 0, називається послідовністю десяткових наближень дробу  $x$  з недостатчею.

**Приклад 10.** Сумою двох десяткових дробів  $x$  і  $y$  називається стабілізація (стабілізація співпадає з границею у звичайному розумінні і, отже, оправданим є використання символу границі при її позначенні)

$x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} (\underline{x}_n + \underline{y}_n)$ , а добутком  $xy = \lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n \underline{y}_n$ . Для будь-яких десяткових дробів  $x$  і  $y$  ці границі існують ( $\underline{x}_n + \underline{y}_n$  і  $\underline{x}_n \underline{y}_n$  – це періодичні десяткові дроби, яким відповідають раціональні числа і для них поняття суми і добутку визначене звичайним чином. Тому ці означення є коректними).

**Приклад 11 (теорема Кантора).** Для будь-якої системи  $\{[a(k); b(k)]: k \in \mathbb{N}\}$  замкнених вкладених проміжків десяткових дробів, довжини яких прямують до нуля, тобто  $\lim_{k \rightarrow \infty} (b(k) - a(k)) = 0$ , існує принаймні один десятковий дріб, який належить всім проміжкам цієї системи. Справді, нехай, для певності,

$$a(k) = a_{0k}, a_{1k} \dots a_{nk} \dots \geq 0, \quad a(k) \leq b(k) = b_{0k}, b_{1k} \dots b_{nk} \dots$$

Тоді шуканим є дріб  $a = a_{01}, a_{12} a_{23} \dots a_{n-1n} \dots$ .

**19. Зображення дійсних чисел у вигляді нескінченних десяткових дробів.** Припустимо, що множина дійсних чисел визначена аксіоматично і деяка множина  $\mathbb{R}$  задовольняє відповідні аксіоми. З'ясуємо, яким чином кожному дійсному числу можна поставити у взаємно однозначну відповідність деякий нескінченний десятковий дріб. Нехай  $x \in \mathbb{R}$  і  $x > 0$ . Згідно з принципом Архімеда існує ціле невід'ємне число  $x_0 \in \mathbb{R}$  таке, що  $x_0 \leq x < x_0 + 1$ . Нехай  $\underline{x}_0 = x_0$  і  $\bar{x}_0 = x_0 + 1$ . Поділимо проміжок  $[\underline{x}_0; \bar{x}_0] \subset \mathbb{R}$  на десять рівних. Нехай  $x_1$  – номер нашого з отриманих проміжків, який містить число  $x$  (нумерація зліва направо). Цей проміжок позначимо через  $[\underline{x}_1; \bar{x}_1]$ , де  $\underline{x}_1 = x_0, x_1$  і  $\bar{x}_1 = x_0, x_1 + \frac{1}{10}$ . Далі, проміжок  $[\underline{x}_1; \bar{x}_1]$  ділимо на десять рівних і аналогічно отримуємо проміжок  $[\underline{x}_2; \bar{x}_2]$ , де  $\underline{x}_2 = x_0, x_1 x_2$ ,  $\bar{x}_2 = x_0, x_1 x_2 + \frac{1}{10^2}$  і  $x_2$  – номер першого проміжку, який містить  $x$  і т.д. В результаті отримуємо послідовності  $(\underline{x}_n)$  і  $(\bar{x}_n)$  такі, що  $\bar{x}_n - \underline{x}_n = \frac{1}{10^n}$ ,  $\underline{x}_n \leq \underline{x}_{n+1} \leq x \leq \bar{x}_n \leq \bar{x}_{n+1}$  для всіх  $k \in \mathbb{N}_0$  і  $n \in \mathbb{N}_0$ . Таким чином, кожному дійсному додатному числу  $x \in \mathbb{R}$  ми поставили у відповідність послідовність  $\underline{x}_n = x_0, x_1 x_2 \dots x_n$  раціональних чисел, тобто числу  $x > 0$  поставили у відповідність десятковий дріб  $x_0, x_1 \dots x_n \dots$ , для якого число 9 не є періодом. Числу 0 поставимо у відповідність дріб  $0 = 0, (0)$ , від'ємному числу  $x$  – десятковий дріб  $-x_0, x_1 \dots x_n \dots$ , де  $x_0, x_1 \dots x_n \dots$  – десятковий дріб числа  $-x$ . Зважаючи на аксіому Кантора, переконуємось, що встановлена відповідність є

взаємно однозначною між множиною всіх дійсних чисел і множиною всіх нескінченних десяткових дробів, для яких 9 не є періодом. При цьому, сумі двох дійсних чисел відповідає десятковий дріб, який є сумою відповідних десяткових дробів. Аналогічне можна сказати про добуток, різницю і частку. Тому множини всіх дійсних чисел можна ототожнити з множиною всіх десяткових дробів, для яких 9 не є періодом. При цьому, дробу  $\pm x_0, x_1 \dots x_n \dots$  відповідає число

$$x = \pm \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{10^k}.$$

**Зауваження 1.** Аналогічно можна ототожнити множини всіх дійсних чисел з множиною трійкових дробів, вісімкових дробів і т.д. Часто зустрічаються двійкові нескінченні дроби. Вони мають вигляд

$$\pm x_0, x_1 \dots x_k \dots,$$

де  $x_0 = \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 \dots \tilde{x}_v \in \mathbb{N}_0$ ,  $\tilde{x}_j \in \{0;1\}$  і  $x_j \in \{0;1\}$ . При цьому можна обмежитись тільки дроби, для яких 1 не є періодом і, отже, серед чисел  $x_j$  є нескінченна кількість нулів. При побудові такого дроби відповідні проміжки потрібно ділити на два рівні.

## 20. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення  $\varepsilon$ -околу точки  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Напишіть  $\varepsilon$ -окіл точки 2, якщо  $\varepsilon = 0,1$ .
3. Сформулюйте означення проколеного  $\varepsilon$ -околу точки  $a \in \mathbb{R}$ .
4. Напишіть проколений  $\varepsilon$ -окіл точки  $-3$ , якщо  $\varepsilon = 0,01$ .
5. Сформулюйте означення  $\varepsilon$ -околу точки  $a = +\infty$ .
6. Напишіть  $\varepsilon$ -окіл точки  $+\infty$ , якщо  $\varepsilon = 10$ .
7. Сформулюйте означення проколеного  $\varepsilon$ -околу точки  $a = +\infty$ .
8. Сформулюйте означення  $\varepsilon$ -околу точки  $a = -\infty$ .
9. Сформулюйте означення проколеного  $\varepsilon$ -околу точки  $a = -\infty$ .
10. Сформулюйте означення  $\varepsilon$ -околу точки  $a = \infty$ .
11. Сформулюйте означення проколеного  $\varepsilon$ -околу точки  $a = \infty$ .
12. Напишіть проколений  $\varepsilon$ -окіл точки  $\infty$ , якщо  $\varepsilon = 100$ .
13. Які з рівностей

$$1) \frac{0}{0} = 1; 2) \frac{1}{0} = \infty; 3) \frac{2}{\infty} = 0; 4) \frac{\infty}{\infty} = 1;$$

$$5) 0 \cdot \infty = 0; 6) 1 \cdot \infty = \infty; 7) \infty - \infty = 0.$$

є правильними в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ ?

14. Сформулюйте означення послідовності.

15. Сформулюйте означення границі послідовності на мові околів.

16. Сформулюйте означення збіжної в  $\mathbb{R}$  послідовності.

17. Сформулюйте означення сталої послідовності.

18. Сформулюйте і доведіть теорему про границю сталої послідовності.

19. Що можна сказати, про послідовність  $(x_n)$  і її границю, якщо

$$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N}) : |x_n - a| < \varepsilon ?$$

20. Наведіть приклад збіжної в  $\mathbb{R}$  послідовності, для якої  $(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\forall n \geq n') : |x_n - a| < \varepsilon$  не виконується для жодного  $a \in \mathbb{R}$ .

21. Наведіть приклад розбіжної в  $\mathbb{R}$  послідовності, для якої  $(\exists a \in \mathbb{R})(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \geq n') : |x_n - a| < \varepsilon$ .

22. Наведіть приклад розбіжної в  $\mathbb{R}$  послідовності, для якої  $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\exists n \geq n') : |x_n - a| < \varepsilon$ .

23. Наведіть приклад розбіжної в  $\mathbb{R}$  послідовності і числа  $a \in \mathbb{R}$ , для яких  $(\exists \varepsilon > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n') : |x_n - a| < \varepsilon$ .

24. Що можна сказати про послідовність  $(x_n)$  та її границю, якщо:

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geq n_0)(\forall \varepsilon > 0) : |x_n - a| < \varepsilon ?$$

25. Чи є число  $a$  границею послідовності  $(x_n)$ , якщо

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) : |x_n - a| < \varepsilon ?$$

26. Чи є послідовність  $(x_n)$  обмеженою, якщо

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists K \in \mathbb{R}) : |x_n| \leq K ?$$

27. Відомо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  і  $(\exists n_0)(\forall n \geq n_0) : x_n < y_n$ . Чи можна стверджувати, що: 1)  $a < b$ ; 2)  $a \leq b$ ; 3)  $a = b$ ?

28. Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  і  $a < b$ . Чи можна стверджувати, що: 1)  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n < y_n$ ?; 2)  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq y_n$ ?; 3)  $(\exists n')(\forall n \geq n') : x_n < y_n$ ?

29. Наведіть приклад необмеженої послідовності, яка має скінченну часткову границю.

30. Відомо, що в будь-якому  $\varepsilon$ -околі точок  $a_1 = 1$  і  $a_2 = 3$  міститься нескінченна кількість членів послідовності  $(x_n)$ . Чи є така послідовність збіжною?

31. Наведіть приклад послідовності, граничними точками якої є числа 1 і 2.

32. Наведіть приклад послідовності  $(x_n)$ , кожний член якої є її граничною точкою.

33. Наведіть приклади розбіжних послідовностей  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , для яких послідовності  $(x_n + y_n)$  та  $(x_n \cdot y_n)$  є збіжними.

34. В будь-якому  $\varepsilon$ -околі точки  $a$  міститься нескінченна кількість членів

послідовності  $(x_n)$ . Чи можна стверджувати, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ?

35. Відомо, що послідовність  $(|x_n|)$  є збіжною і має границю  $a$ . Що можна сказати про збіжність послідовності  $(x_n)$ ?
36. Відомо, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . Чому дорівнює  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+2} + x_{n-1})$ ?
37. Наведіть приклад послідовності  $(x_n)$ , для якої  

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n') : x_n < \varepsilon.$$
38. Сформулюйте означення обмеженої послідовності.
39. Сформулюйте означення нескінченно малої послідовності.
40. Сформулюйте означення нескінченно великої послідовності.
41. Сформулюйте означення неспадної послідовності.
42. Сформулюйте означення обмеженої зверху послідовності.
43. Сформулюйте означення необмеженої зверху послідовності.
44. Сформулюйте означення обмеженої знизу послідовності.
45. Сформулюйте означення необмеженої знизу послідовності.
46. Сформулюйте означення незростаючої послідовності.
47. Сформулюйте означення зростаючої послідовності.
48. Сформулюйте означення спадної послідовності.
49. Сформулюйте означення монотонної послідовності.
50. Поза деяким  $\varepsilon$ -околом точки 3 міститься нескінченна кількість членів послідовності  $(x_n)$ . Чи є така послідовність нескінченно великою?
51. Зовні деякого  $\varepsilon$ -окола точки 2 лежить один член послідовності  $(x_n)$ . Чи є послідовність  $(x_n)$ : а) збіжною; б) обмеженою?
52. Наведіть приклад необмеженої послідовності  $(x_n)$ , для якої  

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists K \in \mathbb{R}) : |x_n| \leq K.$$
53. Чи існує обмежена послідовність  $(x_n)$ , для якої умова  

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists K \in \mathbb{R}) : |x_n| \leq K$$
 не виконується?
54. Що можна сказати про обмеженість послідовності  $(x_n)$ , для якої  

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) : |x_n| \geq K?$$
55. Сформулюйте і доведіть теорему про обмеженість збіжної послідовності.
56. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність границі послідовності.
57. Сформулюйте і доведіть теорему про підпослідовність збіжної послідовності.
58. Сформулюйте і доведіть теорему про граничний перехід в нерівностях.
59. Чи існує нескінченно мала послідовність  $(\alpha_n)$ , для якої  $\alpha_1 = 10$ ,  $\alpha_2 = 1000$  і  $\alpha_3 = 1000000$ ?
60. Сформулюйте і доведіть теорему про нескінченно малі послідовності.
61. Наведіть приклад немонотонної послідовності  $(x_n)$ , для якої  

$$(\exists n \in \mathbb{N}) : x_n < x_{n+1}.$$
62. Наведіть приклад немонотонної послідовності  $(x_n)$ , для якої

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\exists n \geq m) : x_n < x_m.$$

63. Що можна сказати про послідовність  $(x_n)$ , для якої  $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall m \geq n) : x_n \leq x_m$  ?
64. Сформулюйте і доведіть теорему про границю неспадної послідовності.
65. Наведіть приклад зростаючої послідовності  $(x_n)$ , для якої  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\sqrt{2}$ .
66. Завершіть написання формули  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} =$  і обґрунтуйте її.
67. Завершіть написання формули  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} =$  і обґрунтуйте її.
68. Сформулюйте означення числа  $e$  і обґрунтуйте його існування.
69. Завершіть написання формули  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n =$ .
70. Сформулюйте і доведіть теорему Больцано-Вейерштрасса.
71. Сформулюйте і доведіть критерій Коші збіжності послідовності.
72. Опишіть введення дійсних чисел як класів фундаментальних послідовностей раціональних чисел.
73. Сформулюйте означення часткової границі послідовності.
74. Наведіть приклад послідовності, для якої числа  $b_1 = -1$ ,  $b_2 = 0$ ,  $b_3 = 1$  і  $b_4 = +\infty$  є частковими границями.
75. Наведіть приклад послідовності, для якої числа  $b_1 = 0$ ,  $b_2 = -\infty$  і  $b_3 = +\infty$  є частковими границями.
76. Наведіть приклад послідовності, частковими границями якої є всі числа з проміжку  $[0;1]$  і тільки вони.
77. Чи існує послідовність  $(x_n)$ , для якої проміжок  $(0;1)$  є множиною всіх її часткових границь?
78. Чи існує послідовність  $(x_n)$ , для якої проміжок  $(0;1]$  є множиною всіх її часткових границь?
79. Чи існує послідовність  $(x_n)$ , для якої проміжок  $(-\infty;0]$  є множиною всіх її часткових границь?
80. Чи існує послідовність  $(x_n)$ , для якої проміжок  $[-\infty;0]$  є множиною всіх її часткових границь?
81. Сформулюйте означення верхньої границі послідовності.
82. Сформулюйте означення нижньої границі послідовності.
83. Сформулюйте і доведіть теорему про існування верхньої границі.

## 21. Вправи і задачі теоретичного характеру.

### 1. Доведіть твердження

1. Послідовність  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  не може мати більше однієї границі в  $\overline{\mathbb{R}}$ .
2. Послідовність  $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$  не може мати більше однієї границі в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ .
3. Якщо збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$  є послідовність  $(x_n)$ , то збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$  є будь-яка її підпослідовність  $(x_{n_k})$  і має ту ж границю, що і послідовність  $(x_n)$ .

4. Якщо збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  є послідовність  $(x_n)$ , то збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  є будь-яка її підпослідовність  $(x_{n_k})$  і має ту ж границю, що і послідовність  $(x_n)$ .
5. Якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  є збіжними в  $\overline{\mathbb{R}}$  і  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .
6. Якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  є збіжними в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  і  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .
7. Якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  є збіжними в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  і  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq z_n \leq y_n$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ .
8. Існує необмежена послідовність, яка є збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ .
9. Сума двох обмежених послідовностей є обмеженою послідовністю.
10. Якщо існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то  $(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n| \geq |a|/2$ .
11. Якщо існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то  $(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n| \leq 2|a|$ .
12. Існує збіжна послідовність  $(x_n)$ , для якої  $(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall \varepsilon > 0): |x_n - a| < \varepsilon$ .
13. Існує розбіжна послідовність  $(x_n)$ , для якої  $(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall \varepsilon > 0): |x_n - a| < \varepsilon$ .
14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ , якщо всі  $x_k \geq 0$  і послідовність  $(x_n)$  є збіжною.
15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_k(n)}{Q_m(n)} = \begin{cases} 0, & k < m, \\ \infty, & k > m, \text{ якщо } P_k(n) = \sum_{i=0}^k a_i n^i \text{ і якщо } Q_m(n) = \sum_{i=0}^m b_i n^i. \\ \frac{a_k}{b_k}, & k = m, \end{cases}$
16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  для кожної сталої  $c \in \mathbb{R}$ , якщо остання границя існує в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ .
17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує в  $\mathbb{R}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  існує в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ .
18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує в  $\mathbb{R}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$  існує в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ .
19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує в  $\mathbb{R}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \infty$ .

20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \neq 0$  існує в  $\mathbb{R}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ .
21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = \left| \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right|$ , якщо послідовність  $(x_n)$  є збіжною.
22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[m]{x_n} = \sqrt[m]{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$  для кожного  $m \in \mathbb{N}$ , якщо послідовність  $(x_n)$  є збіжною і всі  $x_n \geq 0$ .
23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2m+1]{x_n} = \sqrt[2m+1]{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$  для кожного  $m \in \mathbb{N}$ , якщо послідовність  $(x_n)$  є збіжною.
24. Якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  є фундаментальними, то фундаментальною є також послідовність  $(x_n + y_n)$ .
25. Якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  є фундаментальними, то фундаментальною є також послідовність  $(x_n y_n)$ .
26. Якщо послідовність  $(x_n)$  є фундаментальною і  $c \in \mathbb{R}$ , то послідовність  $(c x_n)$  є фундаментальною.
27. Якщо послідовність  $(x_n)$  є фундаментальною, то вона є обмеженою.

## 2. Доведіть твердження

- Для кожної послідовності існує її збіжна в  $\overline{\mathbb{R}}$  підпослідовність.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$ ,  $y_n - y_{n-1} > 0$  для всіх  $n \geq n_0$  і існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$ ,  $y_n - y_{n-1} < 0$  для всіх  $n \geq n_0$  і існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1^p + 2^p + \dots + n^p}{n^p} - \frac{n}{p+1} \right) = \frac{1}{2}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ .
- Послідовність  $x_n = -\ln n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$  є збіжною в  $\mathbb{R}$ .
- Послідовність  $x_n = \prod_{k=1}^n (1 - 1/(k+1))$  є спадною і обмеженою знизу.
- Послідовність  $x_n = \left(1 + 1/n^2\right)^n$  є спадною.

10. Послідовність  $x_n = (1 + 1/n)^{n^2}$  є зростаючою і необмеженою зверху.
11. Послідовність  $x_n = 2\sqrt{n+1} - \sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$  є монотонною і обмеженою.
12. Послідовність  $x_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^n 1/\sqrt{k}$  є монотонною і обмеженою.
13. Послідовність  $(x_n)$  є зростаючою і необмеженою зверху, якщо  $x_1 = 9$  і  $x_n = (x_{n-1} - 3)^2$  для  $n \in \mathbb{N}$ .
14. Послідовність  $(x_n)$  є збіжною, якщо всі її члени є додатними, послідовність  $(x_n \sqrt{x_n})$  має додатну границю.
15. Послідовність  $(x_n)$  є збіжною, якщо 
$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \geq m) : |x_{n+1} - x_n| \leq 1/2^n.$$
16. Для кожної необмеженої зверху послідовності  $(x_n)$  існує така її підпослідовність  $(x_{n_k})$ , що  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = +\infty$ .
17. Для кожної необмеженої знизу послідовності  $(x_n)$  існує така її підпослідовність  $(x_{n_k})$ , що  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = -\infty$ .
18. Існує розбіжна в  $\mathbb{R}$  послідовність  $(x_n)$ , яка має в  $\overline{\mathbb{R}}$  єдину часткову границю.
19. Якщо  $(\forall n \in \mathbb{N}) : x_n \leq y_n$ , то для кожної часткової границі  $a$  послідовності  $(x_n)$  знайдеться така часткова границя  $b$  в  $\overline{\mathbb{R}}$  послідовності  $(y_n)$ , що  $a \leq b$ .
20. Для того щоб точка  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  була частковою границею послідовності  $(x_n)$ , необхідно і достатньо, щоб в кожному околі точки  $b$  містився принаймні один член послідовності  $(x_n)$ .
21. Для того щоб точка  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  була частковою границею послідовності  $(x_n)$ , необхідно і достатньо, щоб в кожному  $\varepsilon$ -околі точки  $b$  містилася нескінченна кількість членів послідовності  $(x_n)$ .
22. Існують послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , для яких  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n > \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ .
23.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує.
24. Існує послідовність  $(x_n)$ , для якої  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|} < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}|$ .
25. Існує послідовність  $(x_n)$ , для якої  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |x_n / x_{n-1}| < \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|x_n|}$ .

### 3. Доведіть твердження

- Сума нескінченно великої послідовності і обмеженої послідовності є нескінченно велика послідовність.
- Існують дві необмежені послідовності, сума яких є обмеженою

послідовністю.

3. Існують дві необмежені послідовності, сума яких є необмеженою послідовністю.
4. Добуток двох обмежених послідовностей є обмеженою послідовністю.
5. Існують нескінченно велика послідовність і обмежена послідовність, добуток яких є нескінченно велика послідовність.
6. Існують нескінченно велика послідовність і обмежена послідовність, добуток яких є нескінченно мала послідовність.
7. Існують нескінченно велика послідовність і обмежена послідовність, добуток яких є необмеженою послідовністю, але не є нескінченно великою послідовністю.
8. Існують розбіжні послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , для яких послідовність  $(x_n + y_n)$  є збіжною.
9. Існують розбіжні послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , для яких послідовність  $(x_n y_n)$  є збіжною.
10. Існують розбіжні послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , для яких послідовність  $(x_n / y_n)$  є збіжною.
11. Якщо послідовності  $(x_n)$  і  $(x_n + y_n)$  є збіжними, то збіжною є також послідовність  $(y_n)$ .
12. Існують такі послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , що послідовності  $(x_n)$  і  $(x_n y_n)$  є збіжними, а послідовність  $(y_n)$  є розбіжною.
13. Послідовність  $(x_n)$  є збіжною, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |x_n - a| \leq \varepsilon.$$

14. Для того щоб послідовність була обмеженою, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою зверху і знизу.
15. Існує необмежена послідовність, яка є обмеженою зверху.
16. Існує необмежена послідовність, яка є обмеженою знизу.
17. Існує необмежена зверху послідовність, яка є обмеженою знизу.
18. Сума двох неспадних послідовностей є неспадною послідовністю.
19. Добуток двох неспадних невід'ємних послідовностей є неспадною послідовністю.
20. Існують дві неспадні послідовності, добуток яких є спадною послідовністю.

21. Якщо  $y_n > 0$  для всіх достатньо великих  $n$  і існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} < 1$ , то

$$(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n < y_n.$$

22. Якщо послідовності  $(x_n)$  є збіжною в  $\mathbb{R}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$ .

23. Існує збіжна в  $\overline{\mathbb{R}}$  послідовність  $(x_n)$ , для якої  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = +\infty$ .

24. Існує збіжна в  $\overline{\mathbb{R}}$  послідовність  $(x_n)$ , для якої  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - x_{n-1}) = +\infty.$$

25. Якщо послідовність  $(x_n)$  є неспадною, послідовність  $(y_n)$  є незростаючою,  $(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): x_n \leq y_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = 0$ , то послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$  є збіжними в  $\mathbb{R}$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ .
26. Якщо збіжною є послідовність  $(x_n)$ , то збіжною є і послідовність  $(|x_n|)$ .
27. Існує розбіжна послідовність  $(x_n)$ , для якої послідовність  $(|x_n|)$  є збіжною.
28.  $0 < e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{3}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
29.  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$ .
31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{3^n} = 0$  для будь-якого  $p \in \mathbb{R}$ .
32.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{a^n} = 0$  для будь-якого  $a \in (1; +\infty)$ .
33.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$  для будь-яких  $p \in \mathbb{R}$  і  $a \in (1; +\infty)$ .
34.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4}{n!} = 0$ .
35.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n!} = 0$  для будь-якого  $p \in \mathbb{R}$ .
36.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^n}{n!} = 0$ .
37.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$  для будь-якого  $a \in (1; +\infty)$ .
38.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ ,  $|q| > 1$ .
39.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .
40.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1}}{n!} = 0$ .
41. Існують такі послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , що  $(\forall n \in \mathbb{N}): x_n \leq y_n$  і для деякої часткової границі  $a$  послідовності  $(x_n)$  не існує часткової границі  $b$  в  $\mathbb{R}$  послідовності  $(y_n)$ , для якої  $a \leq b$ .
42.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  тоді і тільки тоді, коли знайдеться підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$  така, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*): x_{n_k} > \varepsilon$ .

43.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$  тоді і тільки тоді, коли знайдеться підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$  така, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*): x_{n_k} < -\varepsilon.$$

44.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст.

45.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \geq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст.

46.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

47.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ , якщо  $x_n \leq y_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

48.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ , якщо  $x_n \leq y_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

49.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \leq a < +\infty$  тоді і тільки тоді, коли  $x_n \leq a + \alpha_n$ , де  $(\alpha_n)$  – нескінченно мала послідовність.

50.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \geq a > -\infty$  тоді і тільки тоді, коли  $x_n \geq a + \alpha_n$ , де  $(\alpha_n)$  – нескінченно мала послідовність.

51.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}$ .

52. Існують послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , для яких

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) > \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

53.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст.

54.  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує.

55.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст і всі члени послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$  є додатними.

56. Існують послідовності  $(x_n)$  і  $(y_n)$ , всі члени яких є додатними і

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n y_n < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

57.  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n}$ .

## 22. Вправи і задачі розрахункового характеру.

1. Наведіть приклади  $\varepsilon$ -околів точок  $a_1$  і  $a_2$ , які: а) перетинаються; б) не

перетинаються

1.  $a_1 = 1/2, a_2 = 1/4$ .

2.  $a_1 = 0, a_2 = -1$ .

3.  $a_1 = -\infty, a_2 = 1$ .

4.  $a_1 = +\infty, a_2 = -1$ .

5.  $a_1 = \infty, a_2 = -2$ .

6.  $a_1 = +\infty, a_2 = -\infty$ .

2. Наведіть приклади проколених  $\varepsilon$ -околів точок  $a_1$  і  $a_2$ , які: а) перетинаються; б) не перетинаються

1.  $a_1 = -1/2, a_2 = -1/4$ .

2.  $a_1 = 0, a_2 = 1$ .

3.  $a_1 = -\infty, a_2 = -1$ .

4.  $a_1 = +\infty, a_2 = -1$ .

5.  $a_1 = \infty, a_2 = 2$ .

6.  $a_1 = +\infty, a_2 = -\infty$ .

3. Вкажіть ті члени послідовності  $(x_n)$ , які належать  $\varepsilon$ -околу точки  $a$

1.  $x_n = 1 - 1/n, \varepsilon = 1, a = 1$ .

2.  $x_n = 1 - 1/n, \varepsilon = 0,1, a = 1$ .

3.  $x_n = 1 - 1/n, \varepsilon = 0,01, a = 1$ .

4.  $x_n = 1 - 1/n, \varepsilon = 0,01, a = 2$ .

5.  $x_n = (-1)^n + 1/n, \varepsilon = 0,1, a = 1$ .

6.  $x_n = (-1)^n + 1/n, \varepsilon = 0,1, a = -1$ .

4. Знайдіть таке  $n^* \in \mathbb{N}$ , що при  $n \geq n^*$  виконується  $|x_n - a| < \varepsilon$

1.  $x_n = \frac{n+1}{n+2}, a = 1, \varepsilon = 1$ .

2.  $x_n = \frac{n+1}{n+2}, a = 1, \varepsilon = 0,1$ .

3.  $x_n = \frac{n+1}{n+2}, a = 1, \varepsilon = 0,01$ .

4.  $x_n = \frac{n+1}{n+2}, a = 6, \varepsilon = 0,01$ .

5.  $x_n = \frac{2n-1}{n+1}, a = 2, \varepsilon = 1$ .

6.  $x_n = \frac{2n-1}{n+1}, a = 2, \varepsilon = 0,1$ .

7.  $x_n = \frac{2n-1}{n+1}, a = 2, \varepsilon = 0,01$ .

8.  $x_n = \frac{2n-1}{n+1}, a = 4, \varepsilon = 0,01$ .

5. Виходячи з означення границі послідовності покажіть, що

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^2 - 3}{1 - 2n^2} = 1$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-2n^4 - n}{1 - n^4} = 2$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 1}{1 - n^4} = -1.$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5n^6 + 1}{n^6 + 2n - 4} = -5.$

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n + n^4) = +\infty.$

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n n^3 + n^2) = \infty.$

7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2n^2}{2n + 2} = -\infty.$

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - n}{n^2 + 2} = 0.$

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 3}{4n + 5} = \frac{1}{2}.$

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 6}{n + 1} = 5.$

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3}{1 - 2n^2} = -\frac{1}{2}.$

12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 - n - 1}{1 - n^4} = -1.$

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n + 1}{1 - n^3} = -1.$

14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n^4 + 3n + 1}{n^4 + 2n + 1} = -1.$

15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n 2^n n = \infty.$

16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-n^3 + n^2) = -\infty.$

17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - n}{2n + 2} = -\frac{1}{2}.$

18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2n}{n + 2} = -2.$

19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2}{2n + 1} = 1.$

20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 5}{3n + 1} = 1.$

21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 3}{1 - n^3} = -1.$

22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n + 1}{1 - 2n^4} = \frac{-1}{2}.$

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^3 + 1} = 1.$

24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 3n + 1}{6n^4 + n + 1} = 1.$

25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n 2^n = \infty.$

26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 - n) = +\infty.$

27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{2n + 2} = \frac{1}{2}.$

28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 3}{n + 2} = 2.$

29.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n + 2}{n + 1} = 2.$

30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{3n + 1} = \frac{1}{3}.$

31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{n} = 1.$

32.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n} = \frac{1}{2}.$

33.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 3n + 1}{2n^2 + 1} = 2.$

34.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^3 + 3n + 1}{2n^3 + n + 1} = 3.$

35.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{2n^3 + 1} = 0.$

36.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n^2 + 1} = 0.$

37.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{6n^4 + 3n + 1}{n^2 + 1} = \infty.$

38.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n + 1}{n^2 + 1} = \infty.$

39.  $\lim_{n \rightarrow \infty} ((-1)^n - n^2) = -\infty.$

40.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (2^n - n^2) = +\infty.$

6. Виходячи з означення границі послідовності покажіть, що число  $a$  не є границею послідовності  $(x_n)$

1.  $x_n = \frac{2n+1}{n-1}, a = 1.$

2.  $x_n = \frac{n+1}{n-1}, a = 2.$

3.  $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}, a = 1.$

4.  $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}, a = 1.$

7. З'ясуйте, чи є число  $a$  границею послідовності  $(x_n)$ , якщо

1.  $(\forall \varepsilon > 0)(\forall n^*)(\exists n \geq n^*) : |x_n - a| < \varepsilon.$

2.  $(\exists \varepsilon > 0)(\forall n^*)(\exists n \geq n^*) : |x_n - a| < \varepsilon.$

8. Знайдіть границю

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^5 + 2}}{\sqrt{100n^5 + 3}}.$

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^5 + 2n}}{\sqrt[4]{2n^5 + 3n + 1}}.$

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2}}{100n^2 + 3}.$

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^4 + 2}}{1 + 3n^2}.$

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}).$

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 + (n-1)^4}{n^4 + 1}.$

7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 + (n+1)^4}{n^4 + 2}.$

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^6 + (n+5)^5}{(n+1)^6}.$

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^4 - (2n-1)^4}{(2n+1)^3}.$

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{n^3 + 1}.$

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + n}{(n+1)^3 - (n-1)^3}.$

12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n}{1 + 100n^3}.$

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^{10} - (n-5)^{10}}{n^4 - 8}.$

14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+5)^{10} + (n-5)^{10}}{n^4 + 8}.$

15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{(2n+1)^2 + (2n-1)^2}.$

16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}.$

17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^5 - (n-1)^5}{(n+1)^4}.$

18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 - (n-1)^2}.$

19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{10} - (n-1)^{10}}{(n+1)^9}.$

20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^8 - (n-1)^8}{(n+1)^7 + (n-1)^7}.$

21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}.$

22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}.$

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}}{\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1}}.$

24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4+1} + \sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^5+1} + \sqrt{n}}.$

25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6+1} - 2n^2}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n^6-1}}.$

26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{n^8+1} - 2n^2}{\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n-1}}.$

27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{2/3} - (n-1)^{2/3} + 2n}{\sqrt{n^2+1}}.$

28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}}{\sqrt{n^2+1}}.$

29.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{3/2} - (n-1)^{3/2}}{\sqrt{n}\sqrt{n^2+1}}.$

30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(\sqrt[3]{n} - \sqrt[3]{n-1})n^{2/3}}.$

31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{3 + \frac{4}{n}}$

32.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{n^2}}{4 + \frac{3}{n}}$

33.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 + 1}{1 + 4n^2}.$

34.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n}{n^3 + 9n^2}.$

35.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + n}{n^2 + 9n^3}.$

36.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - 2n^2}{2n + 2}.$

37.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 4}{2n^3 + 1}$ .

38.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 3}{2n^2 + 1}$ .

39.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + n^2 + 4}{n^3 + 1}$ .

40.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^5 + 3n}{n^4 + 1}$ .

41.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{n+4}$ .

42.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{n^2 + 4n + 1}$ .

43.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n-1)!}{n! - (n-1)!}$ .

44.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! + (n+1)!}{n!n + (n-1)!}$ .

45.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{n + 2}$ .

46.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{27n^3 + 1}}{\sqrt{4n^2 + 1}}$ .

47.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})$ .

48.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n^3 + 1} - \sqrt{n^2 + 1})$ .

49.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n})$ .

50.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt{n})$ .

51.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(\sqrt[5]{n} - \sqrt[5]{n-1})}$ .

52.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\sqrt[3]{n^3 + 1} - n)$ .

## 9. Знайдіть границю

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(4k-1)(4k+3)}$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(5k-1)(5k+4)}$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (4k+1)}{k^2 + 3}$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (5k+7)}{2k^2 + 1}$ .

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-4)^{2n+3} + (-1)^{n+1}}{(-1)^n + 9^n}$ .

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+1} + (-1)^n}{(-1)^{n+1} + (-2)^{2n+3}}$ .

7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3^k - (-2)^k}{(-4)^{k+1}}$ .

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3^{-2k+1} (1 - (-4)^{k-1})$ .

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 2^{k-1}}{\sum_{k=1}^n 3^{k-1}}$ .

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (-4)^k}{\sum_{k=1}^n 3^k}$ .

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (-0,2)^n}{2 - (0,3)^n}$ .

12.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-0,8)^n + 2}{(-0,3)^n - 3}$ .

13.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + (\sqrt{5})^n}{2^n + (\sqrt{5})^n}$ .

14.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^n} - (-\sqrt{5})^n}{(\sqrt{2})^n + \sqrt{3^n}}$ .

15.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k}{2 + 4n^2}$ .

16.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{2}{(k+1)(k-1)k}$ .

17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{7}{k^2 + k - 2}$ .

18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{6}{9k^2 + 3k - 2}$ .

19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{4}{4k^2 + 8k + 3}$ .

20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{8}{9k^2 + 6k - 8}$ .

21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{18}{9k^2 + 21k - 8}$ .

22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2 + k - 2}$ .

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + 2 + \dots + n}{n+1} - \frac{n}{2} \right)$ .

24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=2}^n \frac{12}{9k^2 - 12k - 5}$ .

25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^n + (-1)^n}{(-1)^n + 9^n}$ .

26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-5)^{n+1} + (-1)^n}{(-1)^{n+1} + (-4)^n}$ .

27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{3^k + 2^k}{6^k}$ .

28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n 3^{-2k} (1 + 4^k)$ .

29.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}}$ .

30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$ .

31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (0,2)^n}{2 + (0,3)^n}$ .

32.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(0,8)^n + 2}{(-0,3)^n + 3}$ .

33.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-3)^n + 5^n}{2^n + 5^n}$ .

34.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3^n} + (\sqrt{5})^n}{(\sqrt{2})^n + \sqrt{5^n}}$ .

$$35. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (2k-1)}{n^2 + 2n + 4}.$$

$$36. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n (3k-1)}{n^2 + 1}.$$

$$37. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n 2^k}{4 \cdot 2^n + 3}.$$

$$38. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^n \right).$$

$$39. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$$40. \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+5)}.$$

$$41. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (k-1)^2.$$

### 10. Знайдіть границю

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n - 1}{3^n} \right)^{-n}.$$

$$2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + 1}{4^n} \right)^n.$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^2 - 1} \right)^{n+5}.$$

$$4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} \right)^{3n}.$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + 1/n^2 \right)^n.$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - 1/n \right)^{n^2}.$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^4 - 1}{n^4} \right)^{-n^4 - 1}.$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n^2}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + n}{n + 1} \right)^n.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2}{n^3 + 1} \right)^n.$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n-1}{2n} \right)^{-4n}.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{-2n+1}.$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n+1} \right)^{n-3}.$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^n - 1}{3^n + 1} \right)^{3^n - 2}.$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n-1} \right)^{n+5}.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{1-2n} \right)^{2n-5}.$$

17.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{4n-1} \right)^{-n}$

18.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n-1}{4n} \right)^{-n}$

19.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3-1}{n^3} \right)^{-2n^3-1}$

20.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2-4n-2}{n^2-4n-1} \right)^{n^2+4n}$

21.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n} \right)^{-4n}$

22.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{-2n+1}$

23.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n-1}{n} \right)^{n-3}$

24.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^n-1}{3^n} \right)^{3^n-2}$

25.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n-1} \right)^{n+5}$

26.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{1+2n} \right)^{2n-5}$

27.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n}{4n+1} \right)^n$

28.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{5n+1}{2n} \right)^n$

29.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^3+1}{n^3} \right)^{2n^3-1}$

30.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+4n+2}{n^2+4n+1} \right)^{n^2+4n}$

31.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n} \right)^{2n}$

32.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{2n}$

33.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+1}{n} \right)^{-n+3}$

34.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3^n+1}{3^n} \right)^{3^n+2}$

35.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n-5}$

36.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n}{1+2n} \right)^{-2n+5}$

37.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{2n+1} \right)^n$

38.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{n} \right)^{2n}$

39.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+1}{n^2} \right)^{n^2+1}$

40.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2+3n+2}{n^2+3n+1} \right)^{n^2+3n+1}$

11. Знайдіть границю

$$1. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(n+1)! - n!}{(n+1)!} + \frac{2n^2 + n}{3n^2 - 1} \right). \quad 2. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sin n}{n} + \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{2n^2 + n} \right).$$

$$3. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cos n}{n^2 + 1} + \frac{(n+1)^2 - (n-1)^2}{3n+1} \right). \quad 4. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{2n^2 + 2} + \frac{3n^2 + n}{1 + n^2} \right).$$

$$5. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n! - (n-1)!}{(n+1)! - n!} + (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n})\sqrt{n} \right).$$

$$6. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + 3^n}{3^n - 2^n} + \frac{(2n+1)^3 - (2n-1)^3}{6n^2 + 6n} \right).$$

$$7. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{4^n + (1/2)^n}{4^n - (1/3)^n} + \frac{(2n+1)^2 - (2n-1)^2}{3n+6} \right).$$

$$8. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \sin n!}{n^2 + 1} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right).$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n^2 + 1}{n^3 + 3} \cos(2n)! + \frac{n^{\sqrt{2}} + 1}{n^2 + n} \right).$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{n}{n+1} \right)^{3n} + \frac{(n+1)^4}{2n^4 + 2} \right).$$

$$11. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{3n+1}{3n} \right)^{3n+1} + \frac{(3n+1)^5}{n^6 + 2} \right).$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{4n}{4n+1} \right)^{4n+5} + \frac{2n^5 + 1}{(n+1)^5} \right).$$

$$13. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{4^n + 1}{4^n} \right)^{4^n + 3} + \frac{(2n+1)^{10}}{(n+1)^{10}} \right).$$

$$14. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{5^n}{5^n + 1} \right)^{5^n + 2} + \frac{2n^{\sqrt{8}} + 1}{(n+1)^3} \right).$$

$$15. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n!(2n+2) + (n-1)!}{(n+1)! + (n-1)!} + \frac{n^{\sqrt{3}} + 1}{(2n+1)^2} \right).$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( (\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n})n^{2/3} + \frac{\sqrt[n]{3}}{n+1} \right).$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt{2n+3} - \sqrt{2n} + \frac{\sqrt[4]{4} \sin n}{(2n+1)^4} \right).$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + e^n}{4^n - 3^n} \sin n! + \frac{\sqrt[3]{3}}{(3n+1)^2} \right).$$

$$19. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + (-3)^n}{1 + 4^n} \cos n! + \frac{\sqrt[n]{2n}}{2n + 1} \right).$$

$$20. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + (0,3)^n}{1 + (0,4)^n} + \frac{\sqrt[n]{2} \sin n^2}{n^2 + 1} \right).$$

$$21. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2 + (-2)^n}{3 + 3^n} + \frac{\sqrt[n]{3} \sin \frac{n^3}{n+1}}{n+1} \right).$$

$$22. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( \frac{n^2 + 1}{n^2} \right)^{n^2 + 1} \frac{\sin n}{n} + \frac{3n^2 + 1}{(n+1)^2} \right).$$

$$23. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sqrt[3]{2n+1} - \sqrt[3]{2n-1} + \frac{n}{n^2 + 1} \sin \frac{n^2 + 1}{n} \right).$$

$$24. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{(2n+3)^5}{n^5 + 5n} - \frac{\sin n!}{n!} \right).$$

$$25. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n \cos n}{n^2 + 1} + \frac{(2n-1)^4}{n^5 + 3} \right).$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1^\pi + n^\pi}.$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n} \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right)^{n^2 + 1}.$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} \sqrt[n]{2 + n^2}.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2^n + 3^n}{4^n - 3^n} (-1)^{n+1} + \frac{\sqrt[n]{3}}{(3n+1)^2} \right).$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k}.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^2 + 1} \cdot \sin \sqrt{n}.$$

$$32. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (-1)^{n+1} (1 + 1/n)^{n+1}.$$

$$33. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^2 + 3n}.$$

$$34. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n!}{n!}.$$

12. Покажіть, що існує  $n' \in \mathbb{N}$  таке, що для всіх  $n \geq n'$  виконується нерівність

$$1. n^2 < 2^n.$$

$$2. \sqrt[n]{n} < 1,5.$$

$$3. \sqrt{n^2 + 1} < 2n.$$

$$4. \frac{100n^2 + 1}{n^3 + 2} < \frac{1}{2}.$$

13. З'ясуйте, чи послідовність  $(x_n)$  є: а) обмеженою; б) обмеженою зверху; в) обмеженою знизу

$$1. x_n = (-1)^n \sqrt[n]{n} \frac{2+n}{n+1}.$$

$$2. x_n = (-1)^n (1 + 1/n)^n.$$

$$3. x_n = 2^n - (-1)^n n^2.$$

$$4. x_n = (-1)^n 2^n + n^2.$$

$$5. x_n = 2^n - n^2.$$

$$6. x_n = 2^n - (-1)^n n!.$$

7.  $x_n = 2^n - n!$ .

8.  $x_n = (-1)^n 2^n - n!$ .

9.  $x_n = n - n^2$ .

10.  $x_n = n + (-1)^n n^2$ .

11.  $x_n = \frac{(-1)^n 2^n + n}{2^n + 1} \operatorname{arctg} n$ .

12.  $x_n = \frac{(-1)^n n^2 + 4}{n^2 + 1} \operatorname{arccotg} n$ .

13.  $x_n = \frac{n^2 (-1)^n}{n + 3}$ .

14.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\sin k!}{k(k+1)}$ .

15.  $x_n = \frac{(-1)^n 2^n + 3}{2^n + 1} \cos n$ .

16.  $x_n = \frac{(-1)^n n + 4}{n + 1} \arccos \frac{n}{n + 1}$ .

17.  $x_n = -\frac{n!}{2^n}$ .

18.  $x_n = (-1)^n \frac{n!}{2^n}$ .

19.  $x_n = \frac{5^n}{n!}$ .

20.  $x_n = \frac{n!}{2^n}$ .

21.  $x_n = -\frac{n!}{n^3}$ .

22.  $x_n = (-1)^n \frac{n!}{n^3}$ .

23.  $x_n = \frac{n^4}{n!}$ .

24.  $x_n = \frac{n(-1)^n - 2}{n + 3}$ .

25.  $x_n = \frac{(-1)^n n^2}{n^2 + 1} \sin n$ .

26.  $x_n = \frac{(-1)^n n}{n + 1} \arcsin \frac{n}{n + 1}$ .

27.  $x_n = -\frac{3^n}{n^3}$ .

28.  $x_n = (-1)^n \frac{3^n}{n^3}$ .

29.  $x_n = \frac{n^2}{2^n}$ .

30.  $x_n = \frac{2^n}{n^2}$ .

31.  $x_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}$ .

32.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{2^k}$ .

33.  $x_n = -n + \frac{n}{n + 1}$ .

34.  $x_n = -n + \frac{n^3}{n + 1}$ .

35.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k}$ .

36.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k^2 \cos k}{4^k}$ .

14. З'ясуйте, чи послідовність  $(x_n)$  є: а) неспадною; б) незростаючою; в) існує таке  $n^* \in \mathbb{N}$ , що  $(x_n)$  є монотонною для  $n \geq n^*$  (тобто монотонною є послідовність  $(y_n) = (x_{n+n^*})$ )

1.  $x_n = n \sin n$ .

2.  $x_n = n \cos n$ .

3.  $x_n = n + (-1)^n \arcsin \frac{n}{n+1}$ .

4.  $x_n = n + (-1)^n \arccos \frac{n}{n+1}$ .

5.  $x_n = 3n + \sin n$ .

6.  $x_n = 2^n + n \cos n$ .

7.  $x_n = 2^n + (-1)^n n$ .

8.  $x_n = n! + (-1)^n 2^n$ .

9.  $x_n = \frac{n^2 + n(-1)^n}{2^n}$ .

10.  $x_n = n^2 + (-1)^n n$ .

11.  $x_n = n + \cos \frac{\pi n}{2}$ .

12.  $x_n = \frac{\sqrt{2}}{2} n + (-1)^n$ .

13.  $x_n = n + \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^n$ .

14.  $x_n = \left((-1)^n + 1\right) \frac{n}{n+1} + 2n$ .

15.  $x_n = n \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + k}}$ .

16.  $x_n = n \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k+3}$ .

17.  $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{(-1)^k}{2^k}\right)$ .

18.  $x_n = n \prod_{k=1}^n \frac{k+4}{2k-1}$ .

19.  $x_n = n + \sin \frac{\pi n}{2}$ .

20.  $x_n = \sqrt{2}n + (-1)^n$ .

21.  $x_n = n + 2(-1)^n$ .

22.  $x_n = n + \frac{(-1)^n n}{n+1}$ .

23.  $x_n = n + (-1)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

24.  $x_n = \left((-1)^n + 1\right) \frac{n}{n+1}$ .

25.  $x_n = (-1)^n n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ .

26.  $x_n = \left((-1)^n + 1\right) + \frac{n}{n+1}$ .

27.  $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2 + k}}$ .

28.  $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k+5}$ .

29.  $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$

30.  $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+9}{2k-1}.$

31.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3+2^{k-1}}.$

32.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k+1}.$

33.  $x_n = \frac{n}{2^n}.$

34.  $x_n = \frac{n!}{2^n}.$

35.  $x_n = \frac{n+(-1)^n}{2n+1}.$

36.  $x_n = \frac{n+(-1)^n}{n+2(-1)^n n^2}.$

37.  $x_n = n + \frac{(-1)^n n}{2n+1}.$

38.  $x_n = n + (-1)^n.$

15. Знайдіть часткові границі послідовності  $(x_n)$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$  і  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$

1.  $x_n = 2(-1)^{n+1} - (-1)^n \frac{n}{n+1}.$

2.  $x_n = (-1)^n \sqrt[n]{2} + \frac{n}{3n+1}.$

3.  $x_n = \frac{n}{2^n} + (-1)^n n.$

4.  $x_n = (-1)^n \frac{n^3}{2^n} + (-1)^{n+1}.$

5.  $x_n = \frac{1}{n} \left( \sin \frac{\pi n}{4} + 1 \right).$

6.  $x_n = (0,2)^{(-1)^n n} + (-1)^n.$

7.  $x_n = \frac{n}{n+1} \cos \frac{\pi n}{3}.$

8.  $x_n = \left(1 - \sin \frac{\pi n}{6}\right) \left(1 + \cos \frac{\pi n}{4}\right).$

9.  $x_n = \frac{n}{2n+1} \sin \frac{\pi n}{4}.$

10.  $x_n = \left(1 - \cos \frac{\pi n}{6}\right) \left(1 + \sin \frac{\pi n}{4}\right).$

11.  $x_n = 2(-1)^{n+1} - (-1)^n \frac{\cos n}{n}.$

12.  $x_n = (-1)^n \sqrt[n]{2} \frac{2n}{n+1}.$

13.  $x_n = (-1)^n \frac{n}{2^n} + n.$

14.  $x_n = (-1)^n \frac{2^n}{n^3} + n.$

15.  $x_n = (-1)^n \left( \sin \frac{\pi n}{4} + 1 \right).$

16.  $x_n = n(0,2)^{(-1)^n n}.$

17.  $x_n = n \cos^n \frac{\pi n}{3}$ .

18.  $x_n = n \left( 1 + \cos \frac{\pi n}{4} \right)$ .

19.  $x_n = \sin \frac{\pi n}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$ .

20.  $x_n = \cos \frac{\pi n}{4} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}}$ .

21.  $x_n = (-1)^{n+1} - (-1)^n \frac{\sin n}{n}$ .

22.  $x_n = (-1)^n \sqrt[n]{n+1}$ .

23.  $x_n = (-1)^n \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n$ .

24.  $x_n = (-1)^n \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n$ .

25.  $x_n = (-1)^{n(n-1)} \left( \left| \sin \frac{\pi n}{4} \right| + 1 \right)$ .

26.  $x_n = (0,3)^{(-1)^n n}$ .

27.  $x_n = \frac{n}{2n+1} \cos^n \frac{\pi n}{3}$ .

28.  $x_n = \left( 1 + \left| \cos \frac{\pi n}{4} \right| \right)^{-1}$ .

29.  $x_n = 1 + \sin \frac{\pi n}{3}$ .

30.  $x_n = n 3^{(-1)^n n}$ .

31.  $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ .

32.  $x_n = 2(-1)^n + \frac{1}{n}$ .

33.  $x_n = (1 + (-1)^n) \frac{n+1}{n}$ .

34.  $x_n = \sin \frac{\pi n}{4}$ .

35.  $x_n = \left( 1 + (-1)^n / n \right)^n$ .

36.  $x_n = \left( 1 + (-1)^n / n^2 \right)^n$ .

37.  $(x_n) = (0; 1; 0; 1; 0; 1; \dots)$ .

38.  $(x_n)$  – послідовність, членами якої є всі раціональні числа, які належать проміжку  $(0; 2)$ .

39.  $(x_n) = \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{5}; \frac{2}{5}; \frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{6}; \frac{3}{6}; \frac{5}{6}; \dots \right)$ .

40.  $(x_n)$  – послідовність, членами якої є всі раціональні числа.

**16.** З'ясуйте, чи послідовність  $(x_n) \in$  : а) збіжною в  $\mathbb{R}$ ; б) збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}$ ; в) збіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$

1.  $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+9}{2k-1}$ .

2.  $x_n = \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ .

3.  $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k+5}$ .

4.  $x_n = \prod_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k^2+k}}$ .

5.  $x_n = (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{2k}$ .

6.  $x_n = \prod_{k=1}^n (-1)^k \frac{k+2}{3k}$ .

7.  $x_n = n + n \sin \frac{\pi n}{3}$ .

8.  $x_n = (-1)^n \prod_{k=1}^n \frac{1}{2^k}$ .

9.  $x_n = n + n \cos^n \frac{\pi n}{3}$ .

10.  $x_n = n^2 + n \cos^n \frac{\pi n}{3}$ .

11.  $x_n = (-1)^n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+2^{k-1}}$ .

12.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k+2^{k-1}}$ .

13.  $x_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k \sqrt{k}$ .

14.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k k}{k+2}$ .

15.  $x_n = (-1)^n \frac{n}{2^n} + (-1)^n n$ .

16.  $x_n = (-1)^n \frac{n!}{2^n} + n$ .

17.  $x_n = 2^{(-1)^n n}$ .

18.  $x_n = (-1)^n n^2 + 2^n$ .

19.  $x_n = (-1)^n n + \sum_{k=1}^n 2^k$ .

20.  $x_n = \cos^n \frac{\pi n}{3}$ .

21.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3+2^{k-1}}$ .

22.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k+1}$ .

23.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{\cos k}{5^k+k}$ .

24.  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{k \sin k}{3^k}$ .

25.  $x_n = ((-1)^n + 1) \frac{n}{n+1}$ .

26.  $x_n = (-1)^n n$ .

27.  $x_n = ((-1)^n + 1) \frac{n}{n^2+1}$ .

28.  $x_n = (-1)^n n + n^2$ .

$$29. x_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k.$$

$$30. x_n = \sum_{k=1}^n (-1)^k k^2.$$

17. Знайдіть границю послідовності  $(x_n)$

$$1. x_1 = 1 \text{ і } x_n = \sqrt{3 + x_{n-1}}, n > 1.$$

$$2. x_1 = 0,3 \text{ і } x_n = x_{n-1}(2 - x_{n-1}), n > 1.$$

$$3. x_1 = 1 \text{ і } x_n = \frac{1}{2} + \frac{x_{n-1}^2}{2}, n > 1.$$

$$4. x_1 = 1 \text{ і } x_n = \sqrt[3]{6 + x_{n-1}}, n > 1.$$

$$5. x_1 = 1, x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, n > 1.$$

$$6. x_1 = 1, x_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x_{n-1}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{x_{n-1}} \right), n > 1.$$

$$7. x_1 = 1, x_2 = 2, \dots, x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2}, n > 2.$$

$$8. x_1 = 1, x_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{x_{n-1}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{x_{n-1}} \right), n > 1.$$

$$9. x_1 = 1, x_n = \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^2 x_{n-1} + \frac{1}{n}, n > 2.$$

$$10. x_1 = \sqrt{2} \text{ і } x_n = \sqrt{2 + x_{n-1}}, n > 1.$$

$$11. x_1 = 1 \text{ і } x_n = \frac{1}{3} \left( 2x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}^2} \right), n > 1.$$

$$12. x_1 = 25 \text{ і } x_n = \operatorname{arctg} x_{n-1}, n > 1.$$

$$13. x_n = \sqrt[n]{2^n + 3^n}.$$

$$14. x_n = \sqrt[n]{2 + n^5}.$$

$$15. x_n = \sqrt[n]{1^5 + 2^5 + \dots + n^5}.$$

$$16. x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{n+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[n]{n+n}}.$$

$$17. x_1 = 0,3, x_2 = 0,33, \dots, x_n = 0, \underbrace{333\dots3}_{n\text{-раз}}, \dots$$

$$18. x_n = \frac{\sum_{k=1}^n 2k}{n^2 + 1}.$$

$$19. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{4k^2 - 1}.$$

$$20. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}.$$

$$21. x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+5)}.$$

$$22. x_n = \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{3^{k-1}} \right).$$

$$23. x_n = \prod_{k=1}^n \left( 1 - \frac{1}{(k+1)^2} \right).$$

$$24. x_n = \sin^2 \pi \left( \sqrt{n^2 + n} \right).$$

$$25. x_1 = 9 \text{ і } x_n = (x_{n-1} - 3)^2, \quad n > 1.$$

$$26. x_n = n \left( \sqrt[n]{2} - 1 \right).$$

$$27. x_n = \sqrt[n]{3^n - 2^n}.$$

$$28. x_n = \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n k^\pi}.$$

$$29. x_n = \sqrt[n]{3^n - n^2}.$$

$$30. x_n = \sqrt[n]{n^n - 2^n}.$$

$$31. x_1 = 3 \text{ і } x_n = \frac{2 + x_{n-1}^2}{2x_{n-1}}, \quad n > 1.$$

$$32. x_1 = 0 \text{ і } x_n = \frac{1}{4 - 4x_{n-1}}, \quad n > 1.$$

$$33. x_1 = 0 \text{ і } x_n = \frac{1 + x_{n-1}}{4}, \quad n > 1.$$

$$34. x_n = \sin \left( \pi \sqrt{n^2 + 1} \right).$$

$$35. x_1 = 3, \quad x_2 = 3 + \frac{1}{3}, \quad x_3 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}, \quad x_4 = 3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3 + \frac{1}{3}}}, \quad \dots$$

### 23. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру

8.31.  $2/3$ . 8.32.  $1/2$ . 8.33.  $1/2$ . 8.34.  $3$ . 8.35.  $1/3$ . 8.36.  $-\infty$ . 8.37.  $0$ . 8.38.  $0$ . 8.39.  $\infty$ . 8.40.  $\infty$ . 8.41.  $4$ . 8.42.  $6$ . 8.43.  $1$ . 8.44.  $1$ . 8.45.  $1$ . 8.46.  $3/2$ . 8.47.  $1/2$ . 8.48.  $0$ . 8.49.  $-\infty$ . 8.50.  $-\infty$ . 8.51.  $0$ . 8.52.  $0$ . 9.31.  $1/2$ . 9.32.  $2/3$ . 9.33.  $1$ . 9.34.  $1$ . 9.35.  $1$ . 9.36.  $3/2$ . 9.37.  $1/2$ . 9.38.  $2$ . 9.39.  $1/2$ . 9.40.  $23/90$ . 9.41.  $\infty$ . 10.31.  $e$ . 10.32.  $e^{-2}$ . 10.33.  $e^{-1}$ . 10.34.  $e$ . 10.35.  $e^{-1}$ . 10.36.  $e$ . 10.37.  $0$ . 10.38.  $\infty$ . 10.39.  $e$ . 10.40.  $e$ .

**11.31.0. 11.32. 0. 11.33. 1. 11.34. 0. 13.31. обмежена. 13.32. обмежена. 13.33. обмежена зверху, необмежена знизу. 13.34. необмежена. 14.31. неспадна. 14.32. неспадна. 14.33. незростаюча. 14.34. неспадна. 14.35. немонотонна. 14.36. немонотонна. 14.37. неспадна. 14.38. немонотонна. 15.31.**

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . **15.32.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -2$ . **15.33.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 2$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**15.34.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\sqrt{2}/2$ . **15.35.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = e$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1/e$ . **15.36.**

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . **15.40.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ . **17.31.**  $\sqrt{2}$ . **17.32.**  $1/2$ . **17.33.**

$1/3$ . **17.34.**  $0$ . **17.35.**  $\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$ .

## Розділ 3. Границя функції в $\mathbb{R}$

В цьому розділі вивчається основні властивості границі функції в  $\mathbb{R}$ . Це поняття є одним з основних в математичному аналізі. Природно було б спочатку вивчити всі теоретичні питання, викладені в цьому та наступному розділі, обґрунтувати властивості елементарних функцій, а потім розглядати відповідні приклади. Але такий виклад матеріалу з великим сумнівом можна назвати доцільним, якщо мова йде про початкове вивчення предмету. Ми виклад теоретичного матеріалу супроводжуємо розглядом прикладів, при розгляді яких вважаємо, що з основними властивостями елементарних функцій читач знайомий зі шкільного курсу математики (насправді, обґрунтування властивостей елементарних функцій є одним з основних завдань математичного аналізу).

**1. Функції в  $\mathbb{R}$  і їх способи задання.** Функцією в  $\mathbb{R}$ , або функцією з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , або дійсною функцією однієї дійсної змінної називається така відповідність в множині дійсних чисел, за якої кожному дійсному числу відповідає не більше одного дійсного числа. Можна також сказати, що функцією з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  називається така функція, область визначення  $D(f)$  і множина значень  $E(f)$  якої є підмножинами множини дійсних чисел. Таким чином, функція в  $\mathbb{R}$  – це непорожня множина упорядкованих пар  $(x; y)$  дійсних чисел, яка не містить двох різних пар з однаковими першими елементами. Функції в  $\mathbb{R}$  позначають символами  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R} \xrightarrow{\psi} \mathbb{R}$ ,  $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  або коротше  $f$ ,  $\gamma$ ,  $\psi$ ,  $x \rightarrow f(x)$  і т.д.  $f(x)$  – це значення функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $x \in \mathbb{R}$ . Дійсні функції однієї змінної далі як правило, називаємо функціями, опускаючи інші слова. Якщо ми говоримо, що функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є визначеною на деякій множині  $H$ , то це

означає, що  $H \subset D(f)$ .

Графіком функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається упорядкована пара  $\text{graf}(f) = (f; \mathbb{R}^2)$  функції  $f$  і множини  $\mathbb{R}^2$ . Геометрично графік функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  зображають у вигляді деякої множини точок евклідової площини у певній системі координат.

Через  $f(A)$  і  $f^{-1}(B)$  позначаємо відповідно образ множини  $A$  і прообраз множини  $B$ , тобто  $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$  і  $f^{-1}(B) = \{x \in D(f) : f(x) \in B\}$ .

Сумою двох функцій  $f_1$  і  $f_2$  називається така функція  $f = f_1 + f_2$ , для якої образом числа  $x \in \mathbb{R}$  є число  $f_1(x) + f_2(x)$ . Зрозуміло, що  $D(f_1 + f_2) = D(f_1) \cap D(f_2)$ . Добутком функції  $f_1$  на число  $c$  називається така функція  $f = cf_1$ , для якої образом числа  $x \in \mathbb{R}$  є число  $cf_1(x)$ . Аналогічно дається означення добутку і частки двох функцій.

Дві функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називаються рівними, якщо  $D(f_1) = D(f_2)$  і  $(\forall x \in D(f_1)) : f_1(x) = f_2(x)$ .

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається сталою, якщо знайдеться таке число  $C$ , що  $f(x) = C$  для всіх  $x \in D(f)$ .

Нулем функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається таке число  $a$ , що  $f(a) = 0$ , тобто нуль функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – це корінь рівняння  $f(x) = 0$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = 2x$ , то образом числа  $x = 1$  є число  $y = 2$ , прообразом числа  $y = 1$  є число  $x = 1/2$ ,  $f([0; 1]) = [0; 2]$ ,  $f^{-1}([1; 2]) = [1/2; 1]$ .

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = \arcsin x$ , то  $f([2; 3]) = \emptyset$ ,  $f([0; 2]) = [0; \pi/2]$ ,  $f^{-1}([3; 4]) = \emptyset$  і  $f^{-1}([\pi/6; \pi]) = [1/2; 1]$ .

Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати різними способами.

**Приклад 3.** Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати аналітично, тобто формулою:  
 $y = 1 + \ln \sqrt{\sin x}$ ,  $y = e^{\text{tg}(\ln x)}$ ,

$$f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{якщо } x < 1, \\ 3, & \text{якщо } 1 \leq x < 5, \\ x^2 - 1, & \text{якщо } x \geq 5. \end{cases}$$

**Приклад 4.** Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати графічно, тобто зображенням в евклідовій площині її графіка.

**Приклад 5.** Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати таблично, тобто записом у

вигляді таблиці значень аргументу і значень функції.

**Приклад 6.** Функцію в  $\mathbb{R}$  можна задати словесно-описово, тобто словесним описанням відповідності.

**Приклад 7.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  найбільше ціле число  $[x]$  (тобто цілу частину  $x$ ), яке не перевищує  $x$ . Одержимо функцію, яка позначається так:  $f(x) = [x]$ .

**Приклад 8.** Поставимо у відповідність кожному числу  $x > 0$  число 1, числу 0 – число 0, а кожному  $x < 0$  – число  $-1$ . Одержимо функцію, яка позначається через  $\operatorname{sgn} x$ . Її можна задати і так:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

**Приклад 9.** Кожному раціональному числу поставимо у відповідність 1, а кожному ірраціональному – число 0. Отримаємо функцію

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ – раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ – ірраціональне,} \end{cases}$$

яка називається функцією Діріхле.

**Приклад 10.** Функцію можна задати параметрично, тобто системою

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta], \quad (1)$$

де  $\varphi$  і  $\psi$  – відомі функції. Такий спосіб задання слід розуміти так: числу  $x$  ставимо у відповідність число  $y$ , якщо існує таке число  $t \in [\alpha; \beta]$ , що упорядкована трійка  $(x; y; t)$  є розв'язком цієї системи.

**Приклад 11.** Функцію  $y = x^2$  можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = t, \\ y = t^2, \end{cases} \quad t \in (-\infty; +\infty).$$

**Приклад 12.** Функцію  $y = \sqrt{1 - x^2}$  також можна задати параметрично системою

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi].$$

**Приклад 13.** Система, якою задається параметрично функція може бути досить складною:

$$\begin{cases} x = e^{\operatorname{tg} t} + \cos 2t, \\ y = 1 + \cos t + e^{\operatorname{tg} t}. \end{cases}$$

**Приклад 14.** Функцію можна задати неявно рівнянням (тобто рівнянням  $F(x, y) = 0$ , з якого ми не обов'язково вміємо виразити  $y$  через  $x$  у вигляді якоїсь формули).

**Приклад 15.** Рівняння  $x^2 + y^2 - 1 = 0$  можна розв'язати відносно  $y$ . Воно задає, зокрема, функції  $y = \sqrt{1 - x^2}$  і  $y = -\sqrt{1 - x^2}$ .

**Приклад 16.** Рівняння

$$e^{\operatorname{tg} x} \cos x + \ln(x + \sin y) = 0$$

ми не вміємо розв'язати відносно  $y$ , але можливо, воно має розв'язок і тому може визначати деяку функцію  $y = f(x)$ .

**Приклад 17.** Функцію часто задають як розв'язок деякого функціонального рівняння (диференціального, інтегрального та інших). Невідомим в такому рівнянні є не число, а функція.

**Приклад 18.** Позначимо через  $f$  таку функцію з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , для якої

$$(\forall c_1 \in \mathbb{R})(\forall c_2 \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R})(\forall u \in \mathbb{R}): f(c_1x + c_2u) = c_1f(x) + c_2f(u). \quad (2)$$

Якщо функція  $f$  задовольняє співвідношення (2), то ми маємо

$$f(x) = f(x \cdot 1 + 0 \cdot u) = x \cdot f(1) + 0 \cdot f(u) = x \cdot f(1).$$

Позначивши  $f(1) = a$  одержуємо  $f(x) = ax$ . Функція  $f(x) = ax$  і справді задовольняє умову (2), бо  $f(c_1x + c_2u) = a(c_1x + c_2u) = c_1ax + c_2au = c_1f(x) + c_2f(u)$  для всіх  $c_1 \in \mathbb{R}$ ,  $c_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}$  і  $u \in \mathbb{R}$ . Функцію  $y = ax$  називають лінійною функцією, а інколи лінійною однорідною.

**Приклад 19.** Позначимо через  $f$  таку функцію, для якої при всіх  $x \in \mathbb{R}$

виконується  $f'(x) - f(x) = 0$  і  $f(0) = 1$ . Далі переконаємось, що функція  $f(x) = e^x$  є єдиним розв'язком цього рівняння.

**Приклад 20.** Функція  $f(x) = 4\cos^2 \frac{x}{x^2 - 1} + 4\sin^2 \frac{x}{x^2 - 1} - 1$  є сталою, бо  $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$  і  $f(x) = 3$  для всіх  $x \in D(f)$ .

**Приклад 21.** Нулями функції  $f(x) = \sin x$  є числа  $x = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

**2. Знаходження області визначення функції.** Згідно з означенням, якщо задано функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , то задано множину  $D(f) \subset \mathbb{R}$  визначення функції і її множину  $E(f) \subset \mathbb{R}$  значень. Проте, в дійсності так буває рідко. Частіше в математичному аналізі функція  $f$  задається деякою формулою  $y = f(x)$  і її множина визначення складається, якщо не вказано на інше, з тих  $x$ , для яких ця формула має зміст. Таким чином, для знаходження області визначення функції, яка задана формулою  $y = f(x)$ , потрібно, якщо не вказано на інше, знайти множину тих  $x$ , для яких ця формула має зміст.

**Приклад 1.** Область визначення функції  $f(x) = \sqrt{x-1}$  складається з тих  $x \in \mathbb{R}$ , для яких  $x-1 \geq 0$ . Отже,  $D(f) = [1; +\infty)$ .

**3. Звуження і продовження функцій.** Функція однозначно визначається областю визначення, множиною значень і тим правилом, за яким елементам з області визначення ставляться у відповідність елементи з множини значень. Проте, інколи вигідно розглядати функцію тільки на деякій підмножині множини визначення.

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = \sin x$  не є зростаючою на області визначення, але вона є зростаючою на проміжку  $[-\pi/2; \pi/2]$ .

Звуженням функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  на множину  $H \subset D(f)$  називається така функція  $f_H: H \rightarrow \mathbb{R}$ , яку також позначають так:  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $(\forall x \in H): f_H(x) = f(x)$ . Часто замість того, щоб говорити "розглянемо звуження функції  $f$  на множину  $H$ " кажуть "функція  $f$ , розглядувана на  $H$ ".

**Приклад 2.** Функція  $f_H(x) = \sqrt{x}$  є звуженням функції  $f(x) = \sqrt{|x|}$  на множину  $H = [0; +\infty)$ .

Інколи навпаки вигідно розглядати функцію  $f$  на ширшій множині, ніж її

область визначення.Продовженням функції  $f$  на множину  $H \supset D(f)$  називається така функція  $\varphi$ , що  $(\forall x \in D(f)) : \varphi(x) = f(x)$ .

**Приклад 3.** Областю визначення функції  $f(x) = \sqrt{x}$  є множина  $D(f) = [0; +\infty)$ . Її можна продовжити на множину  $(-\infty; +\infty)$  нескінченною кількістю способів. Зокрема, кожна з функцій

$$\varphi(x) = \sqrt{|x|}, \quad \psi(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ -\sqrt{|x|}, & x < 0, \end{cases} \quad \gamma(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0, \\ 5x^2 + 7, & x < 0, \end{cases}$$

є таким продовженням.

**4. Композиція функцій.** Композицією функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається функція  $F = f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , визначена формулою  $F(x) = f(\varphi(x))$ . Композицію двох функцій називають інколи складеною функцією.

**Приклад1.** Якщо  $f(x) = \cos x$  і  $\varphi(x) = 2x$ , то  $F(x) = \cos 2x$ , тобто  $f \circ \varphi(x) = \cos 2x$ .

**Приклад2.** Якщо  $f(x) = \sin x$  і  $\varphi(x) = e^x$ , то  $F(x) = \sin e^x$ , тобто  $f \circ \varphi(x) = \sin e^x$ .

**5. Елементарні функції.** Функції  $f(x) = C$ ,  $f(x) = x^\mu$ ,  $f(x) = a^x$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $f(x) = \arcsin x$ ,  $f(x) = \arccos x$ ,  $f(x) = \arctg x$  та  $f(x) = \operatorname{arccctg} x$ , де  $\mu \in \mathbb{R}$  і  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$  – деякі числа, називають основними елементарними функціями. Функція називається елементарною, якщо її можна задати формулою  $y = F(x)$ , яка містить тільки скінченне число арифметичних операцій і композицій основних елементарних функцій.

**Приклад1.** Функція  $F(x) = \exp\left(\sqrt{\operatorname{tg}\left(\lg\left(1 + \sqrt{x}\right)\right)}\right) + \exp\left(\frac{\ln(1 + \arcsin 3x)}{\operatorname{arctg}(1 + e^x)}\right)$  є

елементарною.

Елементарні функції можна поділити на різноманітні класи за різними ознаками.

**Приклад2.** Одночленом називають функцію  $f(x) = ax^n$ , де  $a \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}_0$  – деякі числа.

**Приклад3.** Багаточленом (многочленом, поліномом) називають скінченну суму одночленів, тобто функцію  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , де  $a_0 \in \mathbb{R}, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}_0$  – деякі числа. Багаточлен  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  називають багаточленом степеня  $n \in \mathbb{N}_0$ , якщо  $a_n \neq 0$ .

**Приклад4.** Багаточлен нульового степеня – це стала функція  $f(x) = C$ .

**Приклад5.** Багаточлен першого степеня – це афінна функція  $f(x) = ax + b$ . Зокрема, лінійна функція  $f(x) = ax$ , де  $a \in \mathbb{R}$ , є багаточленом першого степеня.

**Приклад6.** Багаточлен другого степеня – це квадратний тричлен  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ .

**Приклад7.** Функція  $f(x) = 1 - 9x + 12x^5 - 7x^8$  є багаточленом восьмого степеня.

**Приклад8.** Раціональна функція – це частка двох багаточленів.

**Приклад9.** Функція  $f(x) = \frac{1 + 2x^4 - 7x^5}{5 - 7x^5 + 7x^8}$  є раціональною.

**Приклад10.** Ірраціональні функції – це функції, які є елементарними і які можуть бути задані за допомогою формули  $y = F(x)$ , яка містить тільки скінченне число арифметичних операцій і композицій раціональних і степеневих функцій з раціональним показником.

**Приклад11.** Функція  $f(x) = \sqrt{x}$  є ірраціональною.

**Приклад12.** Функція  $f(x) = \sqrt{3 + \frac{x^{2/3} + 2x^3}{\sqrt[3]{x + \log 2}}}$  є ірраціональною.

**Приклад 13.** Функція  $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^{3/2} + 1}{(x^7 + 10x + 1)^{5/9}}}$  є ірраціональною.

**Приклад 14.** Трансцендентні функції – це елементарні функції, які не є ні раціональними, ні ірраціональними.

**Приклад 15.** Функції  $f(x) = a^x$ ,  $f(x) = \log_a x$ ,  $f(x) = \sin x$ ,  $f(x) = \cos x$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $f(x) = \arcsin x$ ,  $f(x) = \arccos x$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  та  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$  є трансцендентними.

**Приклад 16.** Функції  $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$  і  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$  є

трансцендентними. Використовується також позначення  $\operatorname{csc} x = \frac{1}{\sin x}$ .

**Приклад 17.** Функції  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ ,  $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$  і

$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$  називаються відповідно гіперболічним синусом, гіперболічним

косинусом, гіперболічним тангенсом та гіперболічним котангенсом. Ці функції є елементарними. Використовуються також позначення  $\operatorname{sinh} x = \operatorname{sh} x$ ,  $\operatorname{cosh} x = \operatorname{ch} x$ ,  $\operatorname{tanh} x = \operatorname{th} x$  та  $\operatorname{coth} x = \operatorname{cth} x$ .

В математичному аналізі вивчаються і функції, які не є елементарними. Наприклад, гамма-функція, циліндричні функції та інші. Такі функції широко використовуються у фізиці та інших науках. Вони задаються як розв'язки деяких функціональних рівнянь, рядами та іншими способами.

**6. Парні і непарні функції.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається парною, якщо

$$(\forall x \in D(f)): f(-x) = f(x). \quad (1)$$

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається непарною, якщо

$$(\forall x \in D(f)): f(-x) = -f(x). \quad (2)$$

Для того щоб показати, що функція не є парною досить вказати значення  $x \in D(f)$ , для якого  $f(-x) \neq f(x)$ . Аналогічно, для того щоб показати, що функція  $f$  не є непарною досить показати, що

$$(\exists x \in D(f)): f(-x) \neq -f(x). \quad (3)$$

Графіки парних функцій симетричні відносно осі  $OY$ , а непарних – відносно початку координат.

Існують функції, які є ні парними ні непарними.

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = |x|$  є парною, бо  $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$  для всіх

$x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = x^2$  є парною, бо  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = \cos x$  є парною, бо  $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = x$  є непарною, бо  $f(-x) = -x = -f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = x^3$  є непарною, бо  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 6.** Функція  $f(x) = \sin x$  є непарною, бо  $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 7.** Якщо  $f(x) = 2x + 1$ , то  $f(1) = 3$ ,  $f(-1) = -1$  і  $-f(1) = -3$ . Тому ця функція є ні парною ні непарною.

**Приклад 8.** Функція  $f(x) = (x^2 - 1)(x + 2)$  є ні парною ні непарною, бо  $f(2) = 12$ ,  $f(-2) = 0$ . Разом з цим, і  $f(1) = f(-1) = 0$ .

**Приклад 9.** Для кожної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для  $-x \in D(f)$ , якщо  $x \in D(f)$ , функція  $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  є парною.

**Приклад 10.** Для кожної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для  $-x \in D(f)$ , якщо  $x \in D(f)$ , функція  $f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$  є непарною.

**Приклад 11.** Кожну функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $-x \in D(f)$ , якщо  $x \in D(f)$ , можна подати у вигляді суми парної функції  $f_1$  і непарної функції  $f_2$ :  $f = f_1 + f_2$ .

**7. Періодичні функції.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається періодичною, якщо існує таке число  $T \neq 0$ , що

$$(\forall x \in D(f)): f(x \pm T) = f(x). \quad (1)$$

Періодом функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається таке число  $T \neq 0$ , для якого

виконується (1). Таким чином, функція  $f$  називається періодичною, якщо вона має період. Можна сказати і так. Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається періодичною, якщо існує таке число  $T \neq 0$ , що

$$A \quad (A \in \mathbb{R}, A = \infty, A = -\infty, A = +\infty) \quad (2)$$

і

$$(\forall x \in D(f)) : x - T \in D(f). \quad (3)$$

З означення випливає, що разом із числом  $T \neq 0$  періодом функції є також кожне число  $\tilde{T} = nT$ , де  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ .

**Приклад 1.** Будь-яке число  $T \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  є періодом сталої функції  $f(x) = C$  і, таким чином, існують періодичні функції, які не мають найменшого додатного періоду.

**Приклад 2.** Будь-яке раціональне число є періодом функції Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x - \text{раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } x - \text{іраціональне,} \end{cases}$$

і зрозуміло, що найменшого додатного періоду така функція не має.

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = x^2$  не є періодичною. Справді, якщо б функція була періодичною, то існувало б  $T \neq 0$  таке, що для всіх  $x \in \mathbb{R}$  виконувалось би  $(x+T)^2 = x^2$ . Взевши тут  $x=0$  отримуємо  $T^2 = 0$ , тобто  $T=0$ , що суперечить припущенню.

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = \sin \sqrt{2}x$  є періодичною і кожне число  $T = 2\pi m / \sqrt{2}$ ,  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  є її періодом. Справді, якщо б функція була періодичною, то існувало б  $T \neq 0$  таке, що для всіх  $x \in \mathbb{R}$  виконувалось би  $\sin(\sqrt{2}(x+T)) = \sin(\sqrt{2}x)$ . Взевши тут  $x=0$  отримуємо  $\sin(\sqrt{2}T) = 0$ , тобто періодами можуть бути лише числа  $T = \pi n / \sqrt{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ . Але  $\sin(\sqrt{2}(x + \pi n / \sqrt{2})) = \sin(\sqrt{2}x + \pi n)$ . Якщо  $x = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ,  $n = 2m + 1$  і  $m \in \mathbb{Z}$ , то

$$\sin(\sqrt{2}(x + \pi n / \sqrt{2})) = \sin(\sqrt{2}x + 2\pi m + \pi) = -\sin(\sqrt{2}x) \neq \sin(\sqrt{2}x).$$

тобто число  $T = 2\pi n / \sqrt{2}$ , де  $n = 2m + 1$  і  $m \in \mathbb{Z}$ , не є періодом розглядуваної функції. Разом з цим, якщо  $n = 2m$ , то  $\sin(\sqrt{2}(x + \pi n / \sqrt{2})) = \sin(\sqrt{2}x + 2\pi m) = \sin(\sqrt{2}x)$ , тобто кожне число  $T = 2\pi m / \sqrt{2}$ ,  $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , є періодом.

**Зауваження 1.** Інколи функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називають періодичною, якщо існує число  $T \neq 0$ , для якого виконується (2). За такого означення (ми ж приймаємо сформульоване на початку пункту) функція  $f(x) = \sin \sqrt{x^2 \operatorname{sgn} x}$  є періодичною, числа  $T = 2\pi n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ , є її періодами, а числа  $T = -2\pi n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ , – ні, бо проміжок  $x \in (-\infty; 0)$  не належить її області визначення.

**8. Монотонні функції.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається зростаючою на множині  $H$ , якщо

$$(\forall \{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2): f(x_1) < f(x_2). \quad (1)$$

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неспадною або монотонно зростаючою на множині  $H$ , якщо

$$(\forall \{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2): f(x_1) \leq f(x_2). \quad (2)$$

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається спадною на множині  $H$ , якщо

$$(\forall \{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2): f(x_1) > f(x_2). \quad (3)$$

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається незростаючою або монотонно спадною на множині  $H$ , якщо

$$(\forall \{x_1; x_2\} \subset H, x_1 < x_2): f(x_1) \geq f(x_2). \quad (4)$$

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка задовольняє принаймні одну із умов (1)-(4) називається монотонною на множині  $H$ . Функція, яка задовольняє умову (1) або умову (3) називається строго монотонною на множині  $H$ .

Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на множинах  $H'$  і  $H''$ , то вона не обов'язково є зростаючою на множині  $H = H' \cup H''$ .

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = \operatorname{tg} x$  є зростаючою на проміжках  $H' = (-\pi/2; \pi/2)$  і  $H'' = (\pi/2; 3\pi/2)$ , але вона не є зростаючою на множині  $H = (-\pi/2; \pi/2) \cup (\pi/2; 3\pi/2)$ .

**Приклад2.** Функція  $f(x) = 2x + 1$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ ,  $f(x_1) = 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 = f(x_2)$ , якщо  $x_1 < x_2$ .

**Приклад3.** Функція  $f(x) = x \sin x$  не є монотонною на  $\mathbb{R}$ , бо  $0 = f(x_1) < f(x_2) = \pi/2$ ,  $\pi/2 = f(x_2) > f(x_3) = 0$  і  $x_1 < x_2 < x_3$ , якщо  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = \pi/2$  і  $x_3 = \pi$ .

**Приклад4.** Нехай  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – довільна функція, для якої  $D(f) = [0; +\infty)$ . Тоді функція  $\varphi(x) = \sup\{f(t) : t \geq x\}$  є незростаючою на проміжку  $[0; +\infty)$ .

**Приклад5.** Нехай  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – довільна функція, для якої  $D(f) = [0; +\infty)$ . Тоді функція  $\varphi(x) = \inf\{f(t) : t \geq x\}$  є неспадною на проміжку  $[0; +\infty)$ .

**Приклад 6.** Нехай  $a \in \mathbb{R}$  і  $f: (a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – довільна функція, для якої  $D(f) = (a; +\infty)$ . Тоді функція  $\varphi(x) = \sup\{f(t) : t \geq x\}$  є незростаючою на проміжку  $(a; +\infty)$ .

**Приклад7.** Нехай  $a \in \mathbb{R}$  і  $f: (a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  – довільна функція, для якої  $D(f) = (a; +\infty)$ . Тоді функція  $\varphi(x) = \inf\{f(t) : t \geq x\}$  є неспадною на проміжку  $(a; +\infty)$ .

**Приклад 8.** Нехай  $a \in \mathbb{R}$  і  $f: \overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  – довільна функція, для якої  $D(f) = \overset{\circ}{U}(a; \varepsilon)$ , де  $\varepsilon > 0$ . Тоді функція  $\varphi(x) = \sup\{f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x)\}$  є незростаючою на проміжку  $(a; a + \varepsilon)$ .

**9. Обмежені і необмежені функції.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається обмеженою на множині  $H$ , якщо

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : |f(x)| \leq c.$$

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є обмеженою на множині  $H$ , називається необмеженою на  $H$ . Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається обмеженою зверху на множині  $H$ , якщо

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H) : f(x) \leq c.$$

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається обмеженою знизу на множині  $H$ , якщо

$$(\exists c \in \mathbb{R})(\forall x \in H): f(x) \geq c.$$

**Приклад1.** Функція  $f(x) = \sin x$  є обмеженою на  $\mathbb{R}$ , бо  $|\sin x| \leq 1$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад2.** Функція  $f(x) = 2x + 1$  є необмеженою на  $\mathbb{R}$ .

**Приклад3.** Функція  $f(x) = x^2$  є обмеженою знизу на  $\mathbb{R}$ , але не є обмеженою зверху на  $\mathbb{R}$ .

**Приклад4.** Функція  $f(x) = -x^2 + 1$  є обмеженою зверху на  $\mathbb{R}$ , але не є обмеженою знизу на  $\mathbb{R}$ .

**Приклад5.** Функція  $f(x) = 1/x$  є обмеженою на множині  $H = (1; +\infty)$ , є необмеженою на множині  $H = (0; +\infty)$ , є обмеженою знизу на множині  $H = (0; +\infty)$ , є необмеженою зверху на множині  $H = (0; +\infty)$ .

**10.Означення границі функції. Границя сталої функції.** Границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  або при  $x \rightarrow a$  називається таке число  $A \in \mathbb{R}$ , що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (1)$$

З означення границі видно, що значення функції в точці  $a$  не впливає на границю, бо вона з розгляду виключається (на це вказано в нерівності  $0 < |x - a| < \delta$ ). Докладніше це означення можна сформулювати так. Границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  називається таке число  $A \in \mathbb{R}$ , що для кожного як завгодно малого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , яке може залежати від  $\varepsilon$ , що для всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $0 < |x - a| < \delta$  виконується  $|f(x) - A| < \varepsilon$ . Це означення границі функції називають означенням границі на мові “ $\varepsilon - \delta$ ” (або означенням Коші). Якщо число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то це позначають одним з символів:

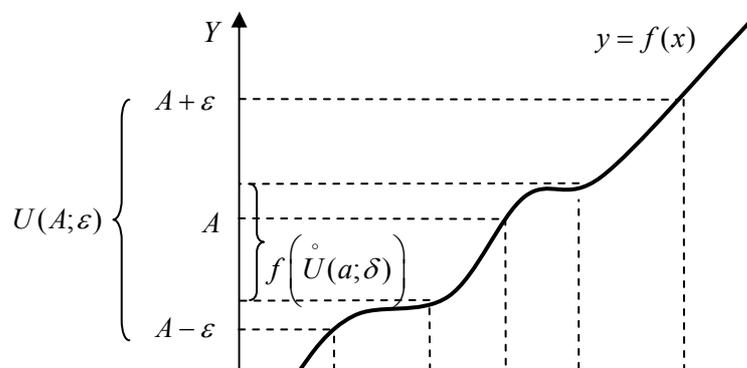


Рис. 1.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A,$$

$$\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow a} f(x) = A,$$

$$f(x) \rightarrow A, x \rightarrow a,$$

$$f(x) \rightarrow A, \mathbb{R} \ni x \rightarrow a,$$

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} A.$$

Означення границі функції можна сформулювати і в наступній еквівалентній формі (на мові околів). Число  $A \in \mathbb{R}$  називається границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon$ -околу  $U(A; \varepsilon)$  точки  $A \in \mathbb{R}$  знайдеться такий проколений  $\delta$ -окіл  $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$  точки  $a$ , образ якого належить  $U(A; \varepsilon)$ , тобто  $f\left(\overset{\circ}{U}(a; \delta)\right) \subset U(A; \varepsilon)$ .

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається сталою на множині  $H$ , якщо існує таке число  $C \in \mathbb{R}$ , що  $f(x) = C$  для всіх  $x \in H$ .

**Теорема 1.** *Границя сталої дорівнює цій же сталій, тобто*

$$\lim_{x \rightarrow a} C = C.$$

**Доведення.** Оскільки  $|C - C| < \varepsilon$  для будь-якого  $\varepsilon > 0$ , то ця теорема випливає безпосередньо з означення границі. ►

**Приклад1.**  $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ . Справді, потрібно показати, що для кожного  $\varepsilon > 0$  знайдеться  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $0 < |x - a| < \delta$  виконується  $|x - a| < \varepsilon$ . Але це так, бо можна взяти  $\delta = \varepsilon$  і тоді  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta) : |x - a| < \varepsilon$ .

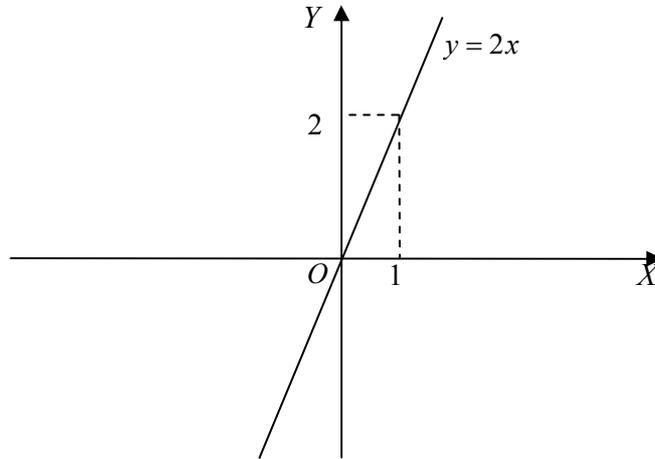


Рис. 2.

**Приклад2.** Нехай  $f(x) = 2x$  (рис. 2). Тоді  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ . Справді, потрібно показати, що для кожного  $\varepsilon > 0$  знайдеться  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $0 < |x - 1| < \delta$  виконується  $|2x - 2| < \varepsilon$ . Але це так, бо можна взяти  $\delta = \varepsilon / 2$  і тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon / 2 > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - 1| < \delta) : |2x - 2| < \varepsilon.$$

**Приклад3.** Нехай

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x \neq 1, \\ 3, & \text{якщо } x = 1. \end{cases}$$

(рис. 3). Тоді  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , бо  $f(x) = 2x$ , якщо  $x \neq 1$ .

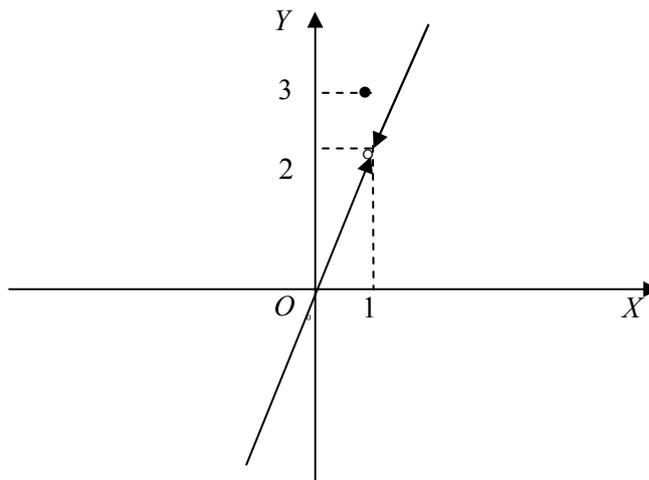


Рис. 3.

**Приклад 4.** Нехай  $f(x) = \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}$  (рис. 4). Тоді  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ , бо  $f(x) = 2x$ , якщо  $x \neq 1$ .

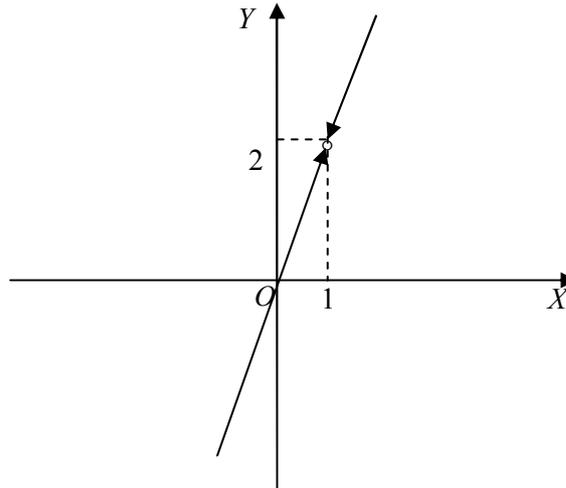


Рис. 4.

**Приклад 5.**  $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ . Справді, потрібно показати, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - 2| < \delta) : |x^2 - 4| < \varepsilon$ . Розглянемо останню нерівність. Її можна переписати так  $|x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$ . Підберемо для кожного  $\varepsilon > 0$  відповідне  $\delta > 0$ . Можемо вважати, що  $\delta \leq 1$ . Тоді, якщо  $|x - 2| < \delta$ , то  $|x| \leq 2 + \delta \leq 3$ . Тому нерівність  $|x - 2| \cdot |x + 2| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $|x - 2| \cdot 5 < \varepsilon$ . Бачимо, що  $|x^2 - 4| < \varepsilon$ , якщо  $|x - 2| < \varepsilon / 5$ . Таким чином, можна взяти  $\delta = \min\{1; \varepsilon / 5\}$ . Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \min\{1; \varepsilon / 5\} > 0)(\forall x, 0 < |x - 2| < \delta) : |x^2 - 4| < \varepsilon.$$

**Приклад 6.**  $\lim_{x \rightarrow a} x^3 = a^3$  для довільного  $a \in \mathbb{R}$ . Справді, потрібно показати, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |x^3 - a^3| < \varepsilon.$$

Розглянемо останню нерівність. Вона буде виконуватись, якщо

$|x - a| \cdot (|a|^2 + |a| \cdot |x| + |x^2|) < \varepsilon$ . Можемо вважати, що  $\delta \leq 1$ . Тоді, якщо  $|x - a| \leq \delta$ , то  $|x| \leq |a| + \delta$ . Тому нерівність  $|x^3 - a^3| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $|x - a| (|a|^2 + |a|(|a| + 1) + (|a| + 1)^2) < \varepsilon$ . Отже, для довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $\delta = \min \left\{ 1; \varepsilon / (|a|^2 + |a|(|a| + 1) + (|a| + 1)^2) \right\}$ , таке що для всіх  $x$ , які задовольняють умову  $0 < |x - a| < \delta$ , виконується  $|x^3 - a^3| < \varepsilon$ .

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$  для довільного  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\| |x| - |a| \| \leq |x - a|$ .

## 11. Теорема про еквівалентність означень границі функції на мові “ $\varepsilon - \delta$ ” і на мові послідовності.

**Теорема 1.** Для того щоб число  $A \in \mathbb{R}$  було границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad (1)$$

виконувалось

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = A. \quad (2)$$

**Доведення. Необхідність.** Нехай число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ . Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon. \quad (3)$$

Якщо ж виконується (1), то

$$(\forall \delta > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |x_n - a| < \delta, \quad (4)$$

з (3) і (4) одержуємо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): |f(x_n) - A| < \varepsilon, \quad (5)$$

а це і означає, що (2) має місце. **Достатність.** Припустимо, що (2) виконується для послідовностей з властивістю (1), але (3) не має місця, тобто

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| \geq \varepsilon. \quad (6)$$

Нехай  $\delta_n = 1/n$ . Тоді з (6) одержимо, що

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in \mathbb{R}, 0 < |x_n - a| < \delta_n) : |f(x_n) - A| \geq \varepsilon. \quad (7)$$

Оскільки  $\delta_n \rightarrow 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і згідно (2)  $\lim_{n \leftarrow -\infty} f(x_n) = A$ . Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : |f(x_n) - A| < \varepsilon,$$

а це суперечить (7). ►

Доведена теорема дає можливість сформулювати ще одне означення границі функції (означення границі функції на мові послідовностей, означення границі функції за Гейне), яке є еквівалентним раніше розглянутим. Число  $A \in \mathbb{R}$  називають границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для будь-якої послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Приклад 1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не існує. Справді, якщо  $x_n = \frac{1}{\pi n}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  і

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \pi n = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0$ . Якщо ж  $x_n = \frac{1}{2\pi n + \pi/2}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  і

$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ . Отже, за означенням границі на мові

послідовності розглядувана границя не існує.

## 12. Перша важлива (визначна) границя.

**Лема 1.**  $(\forall x \in (0; \pi/2)) : \sin x < x < \operatorname{tg} x$ .

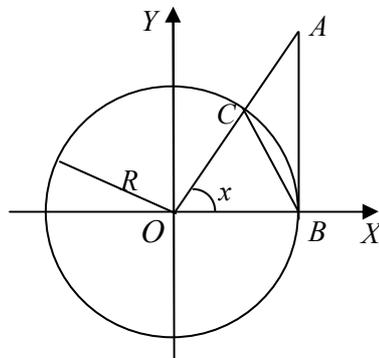


Рис. 1.

**Доведення.** З рисунка видно, що  $S_{\Delta OCB} \leq S_{\text{сект.} OCB} \leq S_{\Delta ABO}$ . Але

$S_{\Delta OCB} = \frac{1}{2} R^2 \sin x$ ,  $S_{\text{сект.} OCB} = \frac{1}{2} R^2 x$ ,  $S_{\Delta ABO} = \frac{1}{2} R^2 \operatorname{tg} x$  і ми отримуємо потрібні нерівності. ►

**Наслідок 1.**  $(\forall x \in \mathbb{R}) : |\sin x| \leq |x|$ .

**Доведення.** Справді, якщо  $x \geq 0$ , то ця нерівність безпосередньо випливає з леми 1. Якщо  $x < 0$ , то  $-x > 0$ . Тому для  $x < 0$  маємо  $|\sin x| = |\sin(-x)| \leq |-x| = |x|$ . ►

**Теорема 1.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (1)$$

**Доведення.** Для  $x \in (0; \pi/2)$  з леми 1 отримуємо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

$$-1 < -\frac{\sin x}{x} < -\cos x, \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

Оскільки  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} \leq 2 \sin \frac{x}{2} \leq x$ , то для розглядуваних  $x$  маємо

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x.$$

Отже,

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < |x|, \quad x \in (0; \pi/2). \quad (2)$$

Функції  $f(x) = \left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right|$  і  $f(x) = |x|$  є парними, тому нерівність (2) є справедливою і для  $x \in (-\pi/2; 0)$ . Таким чином, для  $x \in (-\pi/2; 0) \cup (0; \pi/2)$  виконується (2). Тому нерівність  $\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $0 < |x| < \varepsilon$ . Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \min\{\varepsilon; \pi/2\})(\forall x, 0 < |x| < \delta) : \left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| < \varepsilon,$$

а це означає, що (1) виконується. ►

**Приклад 1.**  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}.$$

Тому  $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|$  і нерівність

$|\sin x - \sin a| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $|x-a| < \varepsilon$ . Таким чином,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta) : |\sin x - \sin a| < \varepsilon.$$

**Зауваження 1.** Важливі для подальшого лема 1, теорема 1 і наслідок 1 отримані вище на основі геометричних фактів, з якими читач знайомий зі шкільного курсу математики. Математичний аналіз не потребує використання геометричних фактів. Ми могли визначити функції синус та косинус відповідно рівностями

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

отримати на основі них основні тригонометричні формули, наведені вище твердження та інші відомі властивості цих функцій (це зроблено з методичних міркувань в подальших розділах, хоч можна було б зробити і тут).

### 13. Єдиність границі функції.

**Теорема 1.** Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не може мати більше однієї границі.

**Доведення.** Припустимо, що існує функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка в деякій точці  $a$  має дві границі  $A$  і  $B$ . Припустимо, що  $A < B$ . Нехай  $\varepsilon = (B-A)/2$ . Тоді  $\varepsilon > 0$ . Згідно з означенням границі

$$(\exists x) : |f(x) - A| < \varepsilon \wedge |f(x) - B| < \varepsilon.$$

Тому

$$B - A = (f(x) - A) + (B - f(x)) \leq |f(x) - A| + |B - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon = B - A.$$

Отже,  $B - A < B - A$ . Суперечність. ►

### 14. Обмеженість функції, яка має границю. Функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

називається обмеженою при  $x \rightarrow a$ , якщо вона є обмеженою в деякому проколеному околі точки  $a$ , тобто якщо

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x)| \leq K. \quad (1)$$

**Теорема1.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має границю в точці  $a$ , то вона є обмеженою при  $x \rightarrow a$ .

**Доведення.** Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , то за означенням границі для числа  $\varepsilon = 1$  знайдеться  $\delta > 0$  таке, що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $0 < |x - a| < \delta$  виконується  $|f(x) - A| < 1$ , але  $|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A| \leq 1$ . Тому для таких  $x$  маємо  $|f(x)| \leq |A| + 1$ , а це означає, що функція  $f$  є обмеженою при  $x \rightarrow a$ . ►

**Приклад1.** Оскільки  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , то функція  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  є обмеженою в деякому проколеному околі  $U(0; \delta)$  точки  $0$ . Якщо  $x \notin U(0; \delta)$ , то  $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{\delta}$ . Тому функція  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  є обмеженою на множині  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . До того ж висновку приходимо використовуючи нерівність  $|\sin x| \leq |x|$ .

## 15. Перехід до границі в нерівностях.

**Теорема1.** Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A$  і для всіх  $x$  з деякого проколеного околу точки  $a$  виконується  $f_1(x) \leq f_3(x) \leq f_2(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f_3(x) = A$ .

**Доведення.** Згідно з означенням границі на мові послідовностей досить показати, що для кожної послідовності  $(x_n)$ , такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_3(x_n) = A$ . Але  $f_1(x_n) \leq f_3(x_n) \leq f_2(x_n)$  для всіх  $n \geq n^*$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(x_n) = A$ . Тому за відповідною теоремою для послідовностей  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_3(x_n) = A$ . ►

**Теорема2.** Якщо існують границі  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) = A_1$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x) = A_2$  і для всіх  $x$  з деякого проколеного околу точки  $a$  виконується  $f_1(x) \leq f_2(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$ .

**Доведення** теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1. ►

**Теорема 3.** Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  і  $A > B$ , то знайдеться такий проколений окіл точки  $a$ , що для всіх точок з цього околу виконується  $f(x) > B$ .

**Доведення.** Нехай  $\varepsilon = A - B$ . Тоді  $\varepsilon > 0$ . Тому за означенням границі  $(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - A| < \varepsilon$ . Тому  $f(x) > A - \varepsilon = B$ , якщо  $0 < |x - a| < \delta$ . ►

**Приклад 1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ . Справді,  $\lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$  і  $0 \leq x^2 \leq |x|$ , якщо  $x \in [-1; 1]$ .

**16. Нескінченно малі функції.** Функція  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається нескінченно малою в точці  $a$  або при  $x \rightarrow a$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0, \quad (1)$$

тобто якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Функція  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається обмеженою в точці  $a$  або при  $x \rightarrow a$ , якщо

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |\beta(x)| \leq K. \quad (2)$$

**Теорема 1.** Для того щоб число  $A$  було границею функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб функцію  $f$  можна було подати у вигляді  $f(x) = A + \alpha(x)$ , де  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, яка є нескінченно малою при  $x \rightarrow a$ .

**Доведення.** Безпосередньо з означення випливає, що якщо число  $A$  є границею  $f$  в точці  $a$ , то функція  $\alpha(x) = f(x) - A$  є нескінченно малою при  $x \rightarrow a$  і тому  $f(x) = A + \alpha(x)$ . Навпаки, якщо  $f$  допускає зображення  $f(x) = A + \alpha(x)$ , де  $\alpha$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow a$ , то безпосередньо з означення границі випливає, що  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . ►

**Приклад 1.**  $\frac{\sin x}{x} = 1 + \alpha(x)$ , де  $\alpha$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow a$ .

**Теорема 2.** Сума двох нескінченно малих функцій при  $x \rightarrow a$  є функція

нескінченно мала при  $x \rightarrow a$ .

**Доведення.** Нехай функції  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  є нескінченно малими при  $x \rightarrow a$ . Тоді за означенням

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta_1) : |\alpha_1(x)| < \varepsilon / 2, \quad (3)$$

і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta_2 > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta_2) : |\alpha_2(x)| < \varepsilon / 2. \quad (4)$$

Для довільного  $\varepsilon > 0$  нехай  $\delta = \min\{\delta_1; \delta_2\}$ . Тоді з (3) і (4) маємо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |\alpha_1(x) + \alpha_2(x)| \leq |\alpha_1(x)| + |\alpha_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

а це означає, що функція  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  є нескінченно малою при  $x \rightarrow a$ . ►

**Теорема 3.** Добуток обмеженої і нескінченно малої при  $x \rightarrow a$  функцій є функція нескінченно мала при  $x \rightarrow a$ .

**Доведення.** Нехай  $\alpha_1$  і  $\alpha_2$  – відповідно нескінченно мала і обмежена функції при  $x \rightarrow a$ . Потрібно показати, що функція  $\alpha = \alpha_1 \cdot \alpha_2$  є нескінченно малою при  $x \rightarrow a$ . Для цього досить показати, що для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = 0$ . А це так, бо для кожної такої послідовності  $(x_n)$  послідовність  $(\alpha_1(x_n))$  є нескінченно малою, а послідовність  $(\alpha_2(x_n))$  є обмеженою. Тому послідовність  $\alpha(x_n) = \alpha_1(x_n) \cdot \alpha_2(x_n)$  є нескінченно малою. Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha(x_n) = 0$ . ►

**Наслідок 1.** Добуток двох нескінченно малих при  $x \rightarrow a$  функцій є функція нескінченно мала при  $x \rightarrow a$ .

**Приклад 2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$ . Справді, функція  $\alpha(x) = x$  є нескінченно малою

при  $x \rightarrow 0$ , а функція  $\beta(x) = \sin \frac{1}{x}$  є обмеженою при  $x \rightarrow 0$ .

**17. Нескінченно великі функції. Нескінченні границі.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$  називається нескінченно великою в точці  $a \in \mathbb{R}$  або при  $x \rightarrow a$ , якщо

$$(\forall E > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x)| > E. \quad (1)$$

**Теорема 1.** Для того щоб функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$  була нескінченно великою при  $x \rightarrow a$ , необхідно і достатньо, щоб функція  $\alpha = 1/f$  була нескінченно малою при  $x \rightarrow a$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж, як і відповідної теореми для послідовностей.

Якщо функція  $f$  є нескінченно великою при  $x \rightarrow a$ , то це записують так:  
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ .

**Приклад 1.** Наприклад, функція  $f(x) = \frac{1}{x}$  є нескінченно великою при  $x \rightarrow 0$ , бо функція  $\alpha(x) = 1/f(x) = x$  є нескінченно малою при  $x \rightarrow 0$ .

Точка  $\infty$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ) функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_0$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо виконується (1), тобто якщо вона є нескінченно великою в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

Точка  $+\infty$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ) функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : f(x) > \varepsilon.$$

Точка  $-\infty$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ) функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : f(x) < -\varepsilon.$$

**Приклад 2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$ .

**Приклад 3.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ .

**Приклад 4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$ .

## 18. Границя суми, добутку і частки функцій.

**Теорема 1.** *Границя суми двох функцій дорівнює сумі границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$ :*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) + \lim_{x \rightarrow a} f_2(x). \quad (1)$$

**Доведення.** Нехай  $A_1 \in \mathbb{R}$  і  $A_2 \in \mathbb{R}$  – границі функцій  $f_1$  і  $f_2$  в точці  $a$  відповідно. Тоді за теоремою про нескінченно малі  $f_1(x) = A_1 + \alpha_1(x)$ ,  $f_2(x) = A_2 + \alpha_2(x)$  і  $f_1(x) + f_2(x) = A_1 + A_2 + \alpha(x)$ , де  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  і  $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$  – нескінченно малі функції. Тому  $\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) + f_2(x)) = A_1 + A_2$ , що і потрібно було довести. ►

**Теорема 2.** *Границя добутку двох функцій дорівнює добутку границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$ :*

$$\lim_{x \rightarrow a} (f_1(x) \cdot f_2(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f_1(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f_2(x). \quad (2)$$

**Доведення.** Досить показати, що для будь-якої послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  при всіх  $n \in \mathbb{N}$  виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(x_n) \cdot f_2(x_n)) = A_1 A_2.$$

де  $A_1 \in \mathbb{R}$  і  $A_2 \in \mathbb{R}$  – границі функцій  $f_1$  і  $f_2$  в точці  $a$  відповідно. А це так, бо за теоремою про границю добутку послідовностей

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_1(x_n) \cdot f_2(x_n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_1(x_n) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} f_2(x_n) = A_1 \cdot A_2. \quad \blacktriangleright$$

**Наслідок 1.** *Сталу можна виносити за знак границі, тобто для кожної сталої  $c \in \mathbb{R}$*

$$\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x),$$

якщо остання границя існує.

**Доведення.** За теоремою 2 і теоремою про границю сталої  $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = \lim_{x \rightarrow a} c \lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ . ►

**Теорема 3.** *Границя частки двох функцій дорівнює частці границь, якщо останні існують в  $\mathbb{R}$  і границя знаменника не дорівнює нулеві:*

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)}. \quad (4)$$

**Доведення** теореми 3 аналогічне доведенню теореми 1 або теореми 2. ►

**Приклад 1.**  $\lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$\lim_{x \rightarrow a} x^2 = \lim_{x \rightarrow a} (x \cdot x) = \lim_{x \rightarrow a} x \cdot \lim_{x \rightarrow a} x = a \cdot a = a^2.$$

**Приклад 2.**  $\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = A^2$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . Справді,

$$\lim_{x \rightarrow a} f^2(x) = \lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x) = A^2.$$

**Приклад 3.**  $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$  і для кожного  $n \in \mathbb{N}$ . Справді,

для  $n=1$  твердження справедливе. Припустимо, що воно є справедливим для  $n=k$ , тобто  $\lim_{x \rightarrow a} x^k = a^k$ . Тоді  $\lim_{x \rightarrow a} x^{k+1} = \lim_{x \rightarrow a} (x x^k) = \lim_{x \rightarrow a} x \lim_{x \rightarrow a} x^k = a a^k = a^{k+1}$  і на основі принципу математичної індукції приходимо до потрібного висновку.

**Зауваження 1.** Якщо принаймні одна з границь  $\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)$  є нескінченною або не існує, то теореми 1-3, взагалі кажучи, не можна застосувати. До нескінченних границь їх можна застосувати тільки у випадку, коли при цьому не виникають невизначені вирази  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  і інші. Взагалі, знаходження кожної границі доцільно починати зі з'ясування наявності невизначеності та її типу.

**19. Однобічні границі.** Число  $A \in \mathbb{R}$  називається правою границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, a < x < a + \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Використовуються також для позначення  $A = f(a+0)$ ,  $A = f(a+)$ ,  $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$  та інші.

Число  $A \in \mathbb{R}$  називається лівою границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, a - \delta < x < a): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Використовуються також позначення  $A = f(a-0)$ ,  $A = f(a-)$ ,  $A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$  та інші.

**Теорема 1.** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з означень, бо нерівність  $0 < |x - a| < \delta$  виконується тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна з нерівностей  $-\delta < x - a < 0$  і  $0 < x - a < \delta$ . ►

**Теорема 2.** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n > a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж, як і відповідної теореми для границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . ►

**Теорема 3.** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $a > x_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж, як і відповідної теореми для границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . ►

**Приклад 1.** Нехай (рис. 1)

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x > 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ x-1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Тоді  $f(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = 1$  і  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = -1$ .

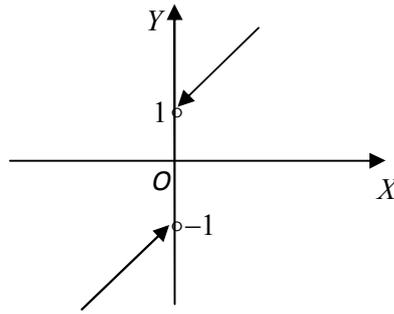


Рис. 1.

**20. Границя в  $\infty$ .** Число  $A \in \mathbb{R}$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $\infty$  або при  $x \rightarrow \infty$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, |x| > \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число  $A \in \mathbb{R}$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $+\infty$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x > \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Число  $A \in \mathbb{R}$  називається границею (пишуть  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $-\infty$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x < -\delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

**Теорема 1.** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з означень, бо нерівність  $|x| > \delta$  виконується тоді і тільки тоді, коли виконується принаймні одна з нерівностей  $x < -\delta$  і  $x > \delta$ . ►

**Теорема 2.** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж, як і відповідної теореми для границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . ►

**Теорема 3.** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж, як і відповідної теореми для границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . ►

**Теорема 4.** Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж, як і відповідної теореми для границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . ►

**Приклад1.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2} = 0$ . Справді, потрібно показати, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x, x > \delta) : 1/x^2 < \varepsilon$ . Оскільки  $x^2 \geq x$ , якщо  $x \geq 1$ , то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \max\{1/\varepsilon; 1\})(\forall x, x > \delta) : 1/x^2 < \varepsilon.$$

**Приклад2.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ , якщо  $a \in (1; +\infty)$ . Справді, потрібно показати, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, x > \delta) : a^x > \varepsilon$ . Оскільки  $a^x > \varepsilon$ , якщо  $x > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ , то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = (\ln a)^{-1} \ln \varepsilon)(\forall x, x > \delta) : |a^x| > \varepsilon.$$

**Приклад3.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ , якщо  $a \in (0; 1)$ . Справді, потрібно показати, що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x, x > \delta) : a^x < \varepsilon$ . Оскільки  $a^x < \varepsilon$ , якщо  $x > \frac{\ln \varepsilon}{\ln a}$ , то приходимо до висновку, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = (\ln a)^{-1} \ln \varepsilon)(\forall x, x > \delta) : |a^x| < \varepsilon.$$

**Приклад4.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = 0$ , якщо  $a \in (1; +\infty)$ . **Приклад5.**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^t = +\infty, \text{ якщо } a \in (0;1).$$

**Приклад 6.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$  не існує, якщо  $a \in (1; +\infty)$ , бо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ .

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x$  не існує, якщо  $a \in (0;1)$ , бо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .

**Приклад 8.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{2+x^2}\right)^x = 0$ . Справді,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x}{2+x^2} = 0$ . Отже,

$$\frac{1+x}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad x > \delta.$$

Тому

$$0 \leq \left(\frac{1+x}{2+x^2}\right)^x \leq \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty.$$

**Приклад 9.**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x = +\infty$ . Справді,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1+|x|}{2+x^2} = 0$ . Отже,

$$\frac{1+|x|}{2+x^2} \leq \frac{1}{2}, \quad x < -\delta.$$

Тому

$$\left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x \geq \left(\frac{1}{2}\right)^x \rightarrow +\infty, \quad x \rightarrow -\infty.$$

**Приклад 10.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x$  не існує, бо  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x = 0$  і

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1+|x|}{2+x^2}\right)^x = +\infty.$$

## 21. Границя композиції функцій.

**Теорема 1.** Якщо  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  і для кожного  $\sigma > 0$  знайдеться

таке  $\delta > 0$ , що  $\varphi(U(\alpha; \delta)) \subset U(a; \sigma)$ , то  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = A$ , тобто

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

**Доведення.** Справді, згідно з означенням границі

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \sigma > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \sigma) : |f(x) - A| < \varepsilon.$$

і

$$(\forall \sigma > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \mathbb{R}, 0 < |t - \alpha| < \delta) : |\varphi(t) - a| < \sigma.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \mathbb{R}, 0 < |t - \alpha| < \delta) : |f(\varphi(t)) - A| < \varepsilon.$$

**Приклад 1.**  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{2t} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , бо  $\varphi(t) = 2t \rightarrow 0$ , якщо  $t \rightarrow 0$ .

**Приклад 2.**  $\lim_{t \rightarrow a} \sin 2t = \lim_{x \rightarrow 2a} \sin x = \sin 2a$  для кожного  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\varphi(t) := 2t \rightarrow 2a$ , якщо  $t \rightarrow a$  і  $\lim_{x \rightarrow 2a} \sin x = \sin 2a$ .

**Приклад 3.**

$$\lim_{t \rightarrow a} \cos t = \lim_{t \rightarrow a} \sin(-t + \pi/2) = \lim_{x \rightarrow -a + \pi/2} \sin x = \sin(-a + \pi/2) = \cos a$$

для кожного  $a \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = 1$ .

**Приклад 5.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin(\arcsin x)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\sin t}{t}} = 1$ .

**Приклад 6.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 x}{2}}{2 \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = \frac{1}{2}$ .

**Приклад 7.**  $\lim_{x \rightarrow 0} |\operatorname{sgn} x| = 1$  і  $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{\pi}{x} = 0$ , але  $\lim_{x \rightarrow 0} \left| \operatorname{sgn} \left( x \sin \frac{\pi}{x} \right) \right|$  не існує

(скористатись теоремою 1 не можна, бо функція  $\varphi(t) = t \sin \frac{\pi}{t}$  приймає нульові

значення в будь-якому проколеному околі точки  $\alpha = 0$  і тому умова  $\varphi(U(\alpha; \delta)) \subset U(\alpha; \sigma)$  не виконується для жодних  $\sigma > 0$  і  $\delta > 0$ , якщо  $a = 0$ ).

**Зауваження 1.** Далі ми покажемо, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$  для кожної основної елементарної функції  $f$  і для кожної точки  $x_0$ , яка належить довільному відкритому проміжку з області визначення функції  $f$  (для функцій  $f(x) = x^n$ ,  $f(x) = \sin x$  та  $f(x) = \cos x$  це вже доведено вище) і дослідимо поведінку цих функцій на кінцях відповідних проміжків. В результаті переконаємось в справедливості наступних рівностей:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^\mu = x_0^\mu, \quad \mu \in \mathbb{R}, \quad x_0 \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu = +\infty, \quad \mu \in (-\infty; 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = 0, \quad \mu \in (-\infty; 0),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^\mu = 0, \quad \mu \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\mu = +\infty, \quad \mu \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}, \quad a \in (0; +\infty), \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty, \quad a \in (1; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \quad a \in (1; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0, \quad a \in (0; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \quad a \in (0; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0, \quad a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}, \quad x_0 \in (0; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad a \in (1; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty, \quad a \in (1; +\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad a \in (0; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty, \quad a \in (0; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi / 2 : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{tg} x = +\infty, \quad x_0 = \pi k + \pi / 2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{tg} x = -\infty, \quad x_0 = \pi k + \pi / 2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad x_0 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \operatorname{ctg} x = -\infty, \quad x_0 = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad x_0 \in (-1; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad x_0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \arcsin x = \arcsin x_0, \quad x_0 = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 \in (-1; 1),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \arccos x = \arccos x_0, \quad x_0 = -1,$$

$$\lim_{t \rightarrow x_0} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi / 2,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi / 2,$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \operatorname{arcctg} x = \operatorname{arcctg} x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcctg} x = \pi,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcctg} x = 0.$$

**Приклад 8.**  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x - 3)(x^2 + 3x + 9)}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + 3x + 9) = 27.$

**Приклад 9.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x^2 - 4} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt{2})(x + 2)} = \frac{1}{8\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

**Приклад 10.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 3x + 1}}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}}}{1 - \frac{4}{x}} = \sqrt{3}.$

## 22. Друга важлива (визначна) границя.

**Теорема 1.**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} (1 + t)^{1/t} = e. \quad (2)$$

**Доведення.** Досить довести (1). Згідно з означенням,

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \quad (3)$$

За теоремою про границю підпослідовності

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_k}\right)^{m_k} = e, \quad (4)$$

для будь-якої послідовності  $(m_k)$  натуральних чисел такої, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \infty$ .

Нехай  $(q_k)$  – довільна послідовність така, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} q_k = +\infty$ , і  $(n_k)$  – така послідовність натуральних чисел, що  $n_k \leq q_k < n_k + 1$ . Тоді

$$\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k} \leq \left(1 + \frac{1}{q_k}\right)^{q_k} \leq \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k + 1},$$

тобто

$$\frac{\left(1 + \frac{1}{n_k + 1}\right)^{n_k + 1}}{1 + \frac{1}{n_k + 1}} \leq \left(1 + \frac{1}{q_k}\right)^{q_k} \leq \left(1 + \frac{1}{n_k}\right)^{n_k} \left(1 + \frac{1}{n_k}\right).$$

Звідси, враховуючи (4), маємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{q_k}\right)^{q_k} = e. \quad (5)$$

Тому, на основі означення границі в  $+\infty$  на мові послідовностей, одержуємо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e. \quad (6)$$

Нехай  $(y_k)$  – довільна послідовність, для якої  $\lim_{k \rightarrow \infty} y_k = -\infty$ . Тоді, позначивши  $z_k = -y_k$ , маємо  $\lim_{k \rightarrow \infty} z_k = +\infty$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} (z_k - 1) = +\infty$  і

$$\left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{y_k} = \left(1 - \frac{1}{z_k}\right)^{-z_k} = \left(\frac{z_k}{z_k - 1}\right)^{z_k} = \left(1 + \frac{1}{z_k - 1}\right)^{z_k - 1} \cdot \left(1 + \frac{1}{z_k - 1}\right).$$

Звідси на основі (5), отримуємо  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y_k}\right)^{y_k} = e$ . Тому

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (7)$$

і ми приходимо до потрібного твердження. ►

$$\text{Приклад 1. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{-x}\right)^{-x}} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t} = \frac{1}{e}.$$

$$\text{Приклад 2. } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \left(1 + \frac{1}{x}\right) = e.$$

**Приклад 3.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 1}{1 + x^2}\right)^{x^2} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}} \right)^2 \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{\frac{1+x^2}{2}} \right)^2 = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \left(1 - \frac{2}{1 + x^2}\right)^{-\frac{1+x^2}{2}} \right)^2} = \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

**Зауваження 1.** Далі ми покажемо, що  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$ , якщо функція  $f$  є основною елементарною, існує  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a \in D(f)$  (якщо  $a$  не належить жодному відкритому проміжку з  $D(f)$ , то границі потрібно замінити відповідними односторонніми границями). Зокрема, за відповідних умов

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} (\varphi(t))^\mu = \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)^\mu, \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} a^{\varphi(t)} = a^{\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)}, \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} \log_a \varphi(t) = \log_a \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \sin \varphi(t) = \sin \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} \cos \varphi(t) = \cos \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{tg} \varphi(t) = \operatorname{tg} \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{ctg} \varphi(t) = \operatorname{ctg} \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \arcsin \varphi(t) = \arcsin \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} \arccos \varphi(t) = \arccos \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right),$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{arctg} \varphi(t) = \operatorname{arctg} \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$$

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} \operatorname{arctg} \varphi(t) = \operatorname{arctg} \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right), \quad \lim_{t \rightarrow \alpha} (u(t))^{v(t)} = \lim_{t \rightarrow \alpha} e^{v(t) \ln u(t)}$$

$$= e^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t) \ln u(t)} = e^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t) \ln \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t)\right)} = \left(\lim_{t \rightarrow \alpha} u(t)\right)^{\lim_{t \rightarrow \alpha} v(t)}.$$

**Наслідок 1.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

**Доведення.** Справді,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln\left(\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x}\right) = \ln e = 1. \blacktriangleright$$

**Наслідок 2.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

**Доведення.** Справді,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1. \blacktriangleright$

**Наслідок 3.**  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \ln a, \quad a > 0.$

**Доведення.** Справді,  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{t \ln a} - 1}{t \ln a} \ln a = \ln a. \blacktriangleright$

**Наслідок 4.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu, \quad \mu \in \mathbb{R}.$

**Доведення.** Справді,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{\mu \ln(1+x)} - 1}{\mu \ln(1+x)} \cdot \frac{\mu \ln(1+x)}{x} \right) = \mu. \blacktriangleright$

**Приклад 4.** 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{\sin 2x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2. \end{aligned}$$

**Приклад 5.**

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2 \sin x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{e^{2 \sin x} - 1}{2 \sin x} \cdot \frac{2 \sin x}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2 \sin x} - 1}{2 \sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{x} = 2.$$

**Приклад 6.** 
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - (1+x)^{\sqrt{2}}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( (1+x)^2 - 1 \right) - \left( (1+x)^{\sqrt{2}} - 1 \right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^2 - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\sqrt{2}} - 1}{x} = 2 - \sqrt{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Приклад 7. } \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^1 = e.$$

$$\text{Приклад 8. } \lim_{x \rightarrow 2} x^{(x^2-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} x^{\lim_{x \rightarrow 2} (x^2-1)} = 2^3 = 8.$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 9. } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\frac{\cos x - 1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( (1 + (\cos x - 1))^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x}} = e^0 = 1. \end{aligned}$$

$$\text{Приклад 10. } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\frac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}} = \sqrt{2}.$$

### 23. Існування границі монотонної функції.

**Теорема 1.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною на проміжку  $(a; b)$ , то існують однобічні границі (скінченні або нескінченні)

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x). \quad (2)$$

**Доведення.** Нехай, наприклад, функція  $f$  є неспадною на  $(a; b)$ ,  $b \in \mathbb{R}$  і  $M_0 = \sup \{f(x) : x \in (a; b)\}$ . Якщо  $f$  є обмеженою зверху на  $(a; b)$ , то  $M_0 < +\infty$  і за означенням точної верхньої межі

$$(\forall x \in (a; b)) : f(x) \leq M_0, \quad (3)$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in (a; b)) : f(x') > M_0 - \varepsilon. \quad (4)$$

З (3) отримуємо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall x \in (a; b)) : f(x) < M_0 + \varepsilon. \quad (5)$$

З (4) і монотонності функції  $f$  випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x' \in (a; b))(\forall x \in (x'; b)) : f(x) > M_0 - \varepsilon. \quad (6)$$

Взявши  $\delta = b - x'$  з (4) і (5) одержуємо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, b - \delta < x < b) : M_0 - \varepsilon < f(x) < M_0 + \varepsilon,$$

а це означає, що

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = M_0.$$

Якщо ж функція  $f$  є неспадною і необмеженою на  $(a; b)$ , то

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x^* \in (a; b)) : f(x^*) > \varepsilon.$$

і завдяки монотонності функції  $f$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x^* \in (a; b))(\forall x \in (x^*; b)) : f(x) > \varepsilon$$

Позначивши  $\delta = b - x^*$  одержуємо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, b - \delta < x < b) : f(x) > \varepsilon.$$

Отже,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = +\infty$ . Таким чином, у розглядуваному випадку існування границі (2) доведено. В інших випадках твердження теореми доводиться аналогічно. ►

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неспадною на проміжку  $(a; b)$ , то  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in (a; b)\}$ .

**Наслідок 2.** Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неспадною на проміжку  $(a; b)$ , то  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in (a; b)\}$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = \operatorname{tg} x$  і  $(a; b) = (-\pi/2; \pi/2)$ , то  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} f(x) = +\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow -\pi/2^+} f(x) = -\infty$ .

**24. Часткова границя функції. Верхня і нижня границі функції.** Частковою границею функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \infty$ ,  $a = +\infty$ ,  $a = -\infty$ ) називається таке число  $A$  ( $A \in \mathbb{R}$ ,  $A = \infty$ ,  $A = +\infty$ ,  $A = -\infty$ ), для якого знайдеться послідовність  $(x_n)$ ,  $x_n \in \mathbb{R}$ , така, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 1.** Кожна визначена в деякому проколеному околі точки  $a$  функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в цій точці принаймні одну часткову границю.

**Доведення.** Справді, нехай  $(x_n)$  – така послідовність, що  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Послідовність  $(f(x_n))$  має принаймні одну часткову границю. Вона є і частковою границею функції  $f$ . ►

Верхньою границею (пишуть  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A$  або  $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ) функції  $f$  в точці  $a$  називається найбільша в  $\overline{\mathbb{R}}$  її часткова границя в точці  $a$ . Нижньою границею (пишуть  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A$  або  $\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a$  називається найменша в  $\overline{\mathbb{R}}$  її часткова границя в точці  $a$ .

**Теорема 2.** Кожна визначена в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в цій точці верхню границю і

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &= \limsup_{x \rightarrow a} \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} : x \in \overset{\circ}{U}(a; \delta) \right\} \end{aligned}$$

для деякого  $\delta > 0$ .

**Доведення.** Справді, нехай  $a \in \mathbb{R}$ . Функція  $\varphi(x) = \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\}$  є незростаючою. Тому існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ . Якщо  $A = -\infty$ , то за означенням границі  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} < -\varepsilon$ . Але  $f(x) \leq \varphi(x)$ . Тому  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ ,  $-\infty$  – єдина гранична точка функції  $f$  і  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ . Нехай  $A > -\infty$  і  $(A_m)$  – довільна зростаюча послідовність, збіжна до  $A$ . За означенням границі для кожного  $m \in \mathbb{N}$  знайдеться таке  $\delta_m$ , що  $0 < \delta_{m+1} < \delta_m$ ,  $\delta_m \rightarrow 0$  і  $\sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; \delta_m) \right\} \geq A_m$ . Крім цього, за означенням точної верхньої межі знайдеться таке  $x_m \in \overset{\circ}{U}(a; \delta_m)$ , що  $f(x_m) \geq \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; \delta_m) \right\} \geq A_m$ . Тоді  $x_m \rightarrow a$  і послідовність  $(f(x_m))$  має граничну точку, яка є не меншою за  $A$ . З іншого боку,  $f(x) \leq \varphi(x)$ . Отже, всі

граничні точки функції  $f$  не перевищують  $A$  і ми приходимо до твердження теореми. ►

**Теорема 3.** Якщо  $a \in \mathbb{R}$ , то  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови:

1) існує така послідовність  $(x_n)$ , що  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і  $f(x_n) \rightarrow A$ ;

2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta): f(x) - A < \varepsilon$ .

**Доведення.** Справді, умова 1) означає, що число  $A$  є частковою границею функції  $f$  в точці  $a$ , а умова 2) вказує на те, що жодне число  $\gamma > A$  не може бути її частковою границею в точці  $a$ . ►

**Теорема 4.** Якщо  $a \in \mathbb{R}$ , то  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконується 2) і

1') існує така послідовність  $(x_n)$ , що  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*): -\varepsilon < f(x_n) - A$ .

**Доведення.** Справді, умови 1') і 2) показують, що число  $A$  є частковою границею функції  $f$  в точці  $a$ , а умова 2) вказує на те, що жодне число  $\gamma > A$  не може бути її частковою границею в точці  $a$ . ►

**Теорема 5.** Кожна визначена в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в цій точці нижню границю і

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \liminf_{x \rightarrow a} \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} = \sup \left\{ \inf \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} : x \in \overset{\circ}{U}(a; \delta) \right\}$$

для деякого  $\delta > 0$ .

**Доведення** цієї теореми таке ж, як і теореми 2. ►

**Теорема 6.**  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} (-f(x)) = -\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  для кожної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , визначеної в деякому проколеному околі точки  $a$ .

**Доведення.** Ця теорема впливає безпосередньо з відповідних означень.

►

**Теорема 7.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є визначеною в деякому проколеному околі точки  $a$ , то для існування границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A. \quad (1)$$

**Доведення.** Справді, якщо існує  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ , тозгідно з означенням границі функції на мові послідовностей, функція  $f$  має в точці  $a$  єдину граничну точку. Тому виконується (1). Навпаки, якщо виконується (1), то  $f(x_n) \rightarrow A$  для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і  $f(x_n) \rightarrow A$ . Тому згідно з означенням границі функції на мові послідовностей  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ . ►

**Приклад 1.** Проміжок  $[-1; 1]$  є множиною часткових границь функції  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  у точці  $a = 0$ ,  $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 1$  і  $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = -1$ .

## 25. Критерій Коші існування границі функції.

**Теорема 1.** Для того щоб функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  мала границю в точці  $a \in \mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', 0 < |x' - a| < \delta)(\forall x'', 0 < |x'' - a| < \delta):$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (1)$$

**Доведення. Необхідність.** Нехай функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має границю в точці  $a \in \mathbb{R}$ . Тоді

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x', 0 < |x' - a| < \delta): |f(x') - A| < \varepsilon / 2$$

і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x'', 0 < |x'' - a| < \delta): |f(x'') - A| < \varepsilon / 2.$$

Тому для заданого  $\varepsilon > 0$  і всіх  $x'$  і  $x''$ , для яких  $0 < |x' - a| < \delta$  і  $0 < |x'' - a| < \delta$  виконується

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - A + A - f(x'')| \leq |f(x') - A| + |A - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

і необхідна частина теореми доведена.

*Достатність.* Нехай виконується (1) і  $(x_n)$  – довільна послідовність така, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді

$$(\forall \delta > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall m \geq n^*) : 0 < |x_n - a| < \delta \wedge 0 < |x_m - a| < \delta$$

і завдяки (1)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall m \geq n^*) : |f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon.$$

Отже, послідовність  $y_n = f(x_n)$  є фундаментальною і тому збіжною. Таким чином, існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A. \quad (2)$$

Число  $A$  не залежить від послідовності  $(x_n)$ . Справді, якщо б для деяких послідовностей  $(x_k^*)$  і  $(x_k^{**})$  виконувалось

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^*) = A_1, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_k^{**}) = A_2 \quad \text{і} \quad A_1 \neq A_2,$$

то, побудувавши послідовність  $(x_n) = (x_1^*; x_1^{**}; x_2^*; x_2^{**}; \dots; x_n^*; x_n^{**}; \dots)$ , приходимо до висновку, що для цієї послідовності границя (2) не існує, що суперечить доведеному. Отже, на основі означення границі функції на мові послідовностей приходимо до висновку, що функція  $f$  має границю в точці  $a$ . ►

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = x\sqrt{\sin x}$  має скінченну границю в точці  $a = \pi/2$ . Справді, якщо  $\delta \in (0; \pi/4]$  і  $|x'' - \pi/2| < \delta$ , то  $|x''| < \delta + \pi/2 \leq 3\pi/4$ . Крім цього,

$$\begin{aligned} |f(x') - f(x'')| &= |x''\sqrt{\sin x''} - x'\sqrt{\sin x'}| \\ &\leq |x''\sqrt{\sin x''} - x''\sqrt{\sin x'}| + |x''\sqrt{\sin x'} - x'\sqrt{\sin x'}| \\ &\leq x'' \left| \sqrt{\sin x''} - \sqrt{\sin x'} \right| + \sqrt{\sin x'} |x'' - x'| \\ &\leq x'' \left| \frac{\sin x'' - \sin x'}{\sqrt{\sin x''} + \sqrt{\sin x'}} \right| + \sqrt{\sin x'} |x'' - x'| \leq x'' \left| \frac{\sin x'' - \sin x'}{2} \right| + |x'' - x'| \\ &\leq x'' \left| \sin \frac{x'' - x'}{2} \cos \frac{x'' + x'}{2} \right| + |x'' - x'| \leq x'' \left| \sin \frac{x'' - x'}{2} \right| + |x'' - x'| \end{aligned}$$

$$\leq |x'''| \left| \frac{x'' - x'}{2} \right| + |x'' - x'| = \left( 1 + \frac{|x''|}{2} \right) |x'' - x'| \leq (1 + |x''|/2) (|x'' - \pi/2| + |x' - \pi/2|).$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0) \left( \exists \delta = \min \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{4\varepsilon}{3 + 8\pi} \right\} \right)$$

$$(\forall x', 0 < |x' - \pi/2| < \delta) (\forall x'', 0 < |x'' - \pi/2| < \delta) : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

і залишилось скористатись критерієм Коші.

**26. Гранична точка множини. Границя функції за множиною.** Граничною точкою множини  $H \subset \mathbb{R}$  називається така точка  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \infty$ ,  $a = -\infty$ ,  $a = +\infty$ ), в будь-якому проколеному околі якої лежить принаймні одна точка множини  $H$ .

**Приклад 1.** Множина  $\mathbb{N}$  має єдину граничну точку в множині  $\bar{\mathbb{R}}$  і нею є точка  $a = +\infty$ .

**Приклад 2.** Множина  $\mathbb{N}$  має єдину граничну точку в множині  $\bar{\mathbb{R}}_0$  і нею є точка  $a = \infty$ .

**Приклад 3.** Множина  $\mathbb{N}$  не має граничних точок в множині  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 4.** Кожна точка  $a \in \bar{\mathbb{R}}_0$  є граничною точкою множини  $\mathbb{Q}$ .

**Приклад 5.** Кожна точка  $a \in \bar{\mathbb{R}}$  є граничною точкою множини  $\mathbb{Q}$ .

**Приклад 6.** Кожна точка  $a \in [0;1]$  є граничною точкою множини  $H = [0;1]$  і жодна інша точка не є граничною точкою цієї множини.

**Приклад 7.** Кожна точка  $a \in [0;1]$  є граничною точкою множини  $H = [0;1] \cap \mathbb{Q}$  і жодна інша точка не є граничною точкою цієї множини.

**Приклад 8.** Кожна точка  $a \in [0;1]$  є граничною точкою множини  $H = [0;1] \cup \{2\}$  і жодна інша точка не є граничною точкою цієї множини.

Вище в цьому розділі ми говорили про функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Інколи зручно розглядати функції  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $H \subset \mathbb{R}$  – деяка множина, і говорити про границю функції  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  за множиною  $H$ . Точка  $A$  ( $A \in \mathbb{R}$ ,  $A = \infty$ ,  $A = -\infty$ ,  $A = +\infty$ ) називається границею (пишуть  $\lim_{H \ni x \rightarrow a} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в

точці  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \infty$ ,  $a = -\infty$ ,  $a = +\infty$ ) за множиною  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon$ -околу  $U(A; \varepsilon)$  точки  $A$  знайдеться такий проколений  $\delta$ -окіл  $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$  точки  $a$ , що  $f(H \cap \overset{\circ}{U}(a; \delta)) \subset U(A; \varepsilon)$ . При цьому, якщо точка  $a$  не є граничною точкою множини  $H$  (тобто для всіх досить малих  $\delta > 0$  в  $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$  немає точок множини  $H$ ), то вважають, що кожне число  $A$  є границею  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a$  за множиною  $H$ . В тому випадку, коли з тексту зрозуміло по якій множині береться границя, символ  $H \ni$  в позначенні границі за множиною опускають. Так часто буває у випадках, коли  $H = D(f)$ , або  $H = \mathbb{R}$ .

Якщо  $a$  є граничною точкою множини  $H$ , то для границі за множиною справедливі (з відповідними змінами у формулюванні) основні теореми про границі і, зокрема, теорема про єдиність границі.

**Теорема 1.** *Нехай точка  $a$  є граничною точкою множини  $H \subset \mathbb{R}$ . Для того щоб число  $A$  було границею  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  за множиною  $H$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $x_n \in H$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконувалось*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$$

**Доведення** цієї теореми повторює доведення відповідної теореми для множини  $H = \mathbb{R}$ . ►

Подібним чином формулюються і інші теореми про границю функції.

Якщо  $a \in \mathbb{R}$  і  $A \in \mathbb{R}$ , то означення границі функції за множиною  $H$ , можна сформулювати в наступній еквівалентній формі. Число  $A \in \mathbb{R}$  називається границею функції  $f$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  за множиною  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in H, 0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

За аналогією формулюються означення односторонніх границь за множиною. Зокрема, число  $A \in \mathbb{R}$  називається правою границею (пишуть  $\lim_{H \ni x \rightarrow a^+} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  за множиною  $H$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in H, 0 < x - a < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Використовуються також для позначення  $A = f_H(a + 0)$ ,  $A = f_H(a+)$ ,

$A = \lim_{H \ni x \rightarrow a+0} f(x)$  та інші.

**Приклад 9.** Якщо  $A \in \mathbb{R}$ ,  $H = \mathbb{N}$  і  $a = +\infty$ , то означення границі функції за множиною  $H$  перетворюється в означення границі послідовності.

**Приклад 10.** Якщо  $A \in \mathbb{R}$ ,  $H = \mathbb{R}$  і  $a \in \mathbb{R}$ , то означення границі функції за множиною  $H$  перетворюється в означення границі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Приклад 11.** Якщо  $A \in \mathbb{R}$ ,  $H = (a; +\infty)$  і  $a \in \mathbb{R}$ , то означення границі функції за множиною  $H$  перетворюється в означення правої границі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Приклад 12.** Якщо  $A \in \mathbb{R}$ ,  $H = (-\infty; a)$  і  $a \in \mathbb{R}$ , то означення границі функції за множиною  $H$  перетворюється в означення лівої границі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Приклад 13.** Якщо  $A = +\infty$ ,  $H = \mathbb{R}$  і  $a = +\infty$ , то означення границі функції за множиною  $H$  перетворюється в означення границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

яке символічно записується так:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > 0): f(x) > \varepsilon.$$

**Приклад 14.** За відповідного вибору  $a$ ,  $A$  і  $H$  отримуємо також означення наступних границь

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty,$$

які символічно відповідно записуються так:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta): f(x) < -\varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta): |f(x)| > \varepsilon, \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x < -\delta): f(x) < -\varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x < -\delta): |f(x)| > \varepsilon, \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x < -\delta): |f(x)| > \varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall |x| > \delta): f(x) > \varepsilon,$$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall |x| > \delta): f(x) < \varepsilon, \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall |x| > \delta): |f(x)| > \varepsilon.$$

**Приклад 15.** Нехай  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне.} \end{cases}$  Тоді  $\lim_{\mathbb{Q} \ni x \rightarrow 2} f(x) = 1$ ,

$$\lim_{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \ni x \rightarrow 2} f(x) = 0.$$

**Приклад 16.** Нехай  $f(x) = \arcsin x$ . Тоді кожне число є границею функції  $f(x) = \arcsin x$  в точці  $a = 2$  за множиною  $H = [-1; 1]i$ , зокрема,  $\lim_{[-1; 1] \ni x \rightarrow 2} \arcsin x = 3$ ,  $\lim_{[-1; 1] \ni x \rightarrow 2} \arcsin x = -12$  і т.д.

**Приклад 17.** Границя  $\lim_{\mathbb{N} \ni k \rightarrow \infty} \sin k$  не існує. Справді, припустимо протилежне. Тоді  $\sin k \rightarrow a$ . Тому  $\sin(k+1) \rightarrow a$ . Але

$$\sin(k+1) = \sin k \cos 1 + \cos k \sin 1.$$

Звідси випливає, що  $\cos k \rightarrow a(1 - \cos 1) / \sin 1$ . Таким чином,  $1 = \cos^2 k + \sin^2 k \rightarrow a^2(1 + (1 - \cos 1)^2 / \sin^2 1)$ . Тому

$$a^2 = 1 / (1 + (1 - \cos 1)^2 / \sin^2 1) = \sin^2 1 / 2(1 - \cos 1) = \cos^2 \frac{1}{2} > \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{1}{4}.$$

З іншого боку,  $a \leftarrow \sin 2k = 2 \sin k \cos k \rightarrow 2a^2(1 - \cos 1) / \sin 1$ . Тому

$$a = \frac{\sin 1}{2(1 - \cos 1)} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{1}{2} \quad \text{і} \quad a^2 = \frac{1}{4} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} < \frac{1}{4}. \quad \text{Суперечність.}$$

**Приклад 18.** Кожне число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f(x) = \sin x$  в точці  $a = \pi$  за множиною  $H = \mathbb{N}$ .

**Приклад 19.** Кожне число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f(x) = \sin x$  в точці  $a = 2$  за множиною  $H = [0; 1]$ .

**Зауваження 1.** Кожну функцію з множини  $H \subset \mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  можна розглядати як функцію з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$  і навпаки. Тому говорячи про границю функції  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  за множиною  $H$  ми говоримо і про границю функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  за множиною  $H$ .

**Зауваження 2.** Інколи означення границі за множиною  $\tilde{H}$  формулюють так. Точка  $A$  ( $A \in \mathbb{R}$ ,  $A = \infty$ ,  $A = -\infty$ ,  $A = +\infty$ ) називається границею (пишуть  $\lim_{H \ni x \rightarrow a} f(x) = A$ ) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \infty$ ,  $a = -\infty$ ,  $a = +\infty$ ) за множиною  $\tilde{H} \subset \mathbb{R}$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon$ -околу  $U(A; \varepsilon)$  точки  $A$  знайдеться такий  $\delta$ -окіл  $U(a; \delta)$  точки  $a$ , що  $f(\tilde{H} \cap U(a; \delta)) \subset U(A; \varepsilon)$ . Якщо  $\tilde{H} = H \setminus \{a\}$ , то приходимо до попереднього означення.

**Зауваження 3.** Вибір множини  $H$ , за якою розглядається границя, мотивується розглядуваною задачею. Трохи більше з цього приводу скажемо в наступному розділі.

**27. Границя по базі.** Можна узагальнити поняття границі функції так, що воно буде придатне і для функцій  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ , де  $H$  – довільна множина, яка може і не бути числовою. Таке узагальнення є корисним для вивчення інтегралів і його запропонував у ХХ столітті французький математик А. Картан, який ввів поняття границі функції по фільтру та по базі фільтра. Розглянемо коротко суть цього узагальнення (докладніше з ним можна ознайомитись в літературі з топології).

Сукупність  $B$  підмножин непорожньої множини  $H$  називається базою в  $H$ , якщо: 1)  $\emptyset \notin B$ ; 2) для будь-яких двох множин  $B_1 \subset B$  і  $B_2 \subset B$  перетин  $B_1 \cap B_2$  є непорожньою множиною і знайдеться така множина  $B_3 \subset B$ , що  $B_3 \subset B_1 \cap B_2$ . Число  $A$  ( $A \in \mathbb{R}$ ,  $A = -\infty$ ,  $A = +\infty$ ,  $A = \infty$ ) називається границею функції  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$  по базі  $B$ , якщо для кожного  $\varepsilon$ -околу  $U(A; \varepsilon)$  точки  $A$  знайдеться такий елемент  $b_\varepsilon \subset B$  бази  $B$ , що  $F(b_\varepsilon) \subset U(A; \varepsilon)$ . Границя по базі  $B$  позначається символом  $A = \lim_B F(x)$ .

**Приклад 1.** Нехай  $H = \mathbb{R}$ , база  $B = (\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty)$  складається з множин  $B_n = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n'\}$ . В цьому випадку поняття границі функції  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$  по базі  $B$  збігається з поняттям границі послідовності в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 2.** Нехай  $H = \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  і  $B = (\mathbb{R} \ni x \rightarrow a)$  – база в  $H$ , яка складається з проколених околів  $\overset{\circ}{U}(a; \delta) = (a - \delta; a + \delta) \setminus \{a\}$  точки  $a \in \mathbb{R}$ . Поняття границі функції  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$  по такій базі  $B$  збігається з поняттям границі функції  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Приклад 3.** Нехай  $H = \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  і  $B = (\mathbb{R} \ni x \rightarrow a+)$  – база в  $H$ , яка складається з правих проколених  $\delta$ -околів  $U^+(a; \delta) = (a; a + \delta)$  точки  $a$ . Поняття границі функції  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$  по такій базі  $B$  збігається з поняттям правої границі функції  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Приклад 4.** Нехай  $H = \mathbb{R}$  і  $B = (\mathbb{R} \ni x \rightarrow \infty)$  – база в  $H$ , яка складається з проколених околів  $\overset{\circ}{U}(\infty; \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta\}$  в  $\overline{\mathbb{R}}_0$  нескінченності. Поняття границі функції  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$  по такій базі збігається з границею  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ .

**Приклад 5.** Нехай  $H = \mathbb{R}$ ,  $\emptyset \neq E \subset H$  і  $B$  – база в  $H$ , яка складається з всіх множин  $\overset{\circ}{U}(a; \delta) \cap E$ . Поняття границі функції  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$  по такій базі  $B$  збігається з поняттям границі функції  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  по множині  $E$ .

На границі по базі можна перенести основні теореми про границі. Обмежимось формулюванням однієї, яка вже була доведена нами у випадках, розглянутих в прикладах 1 і 3.

**Теорема 1 (критерій Коші існування границі).** Для того щоб функція  $F: H \rightarrow \mathbb{R}$  мала скінченну границю по базі  $B$ , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists b_\varepsilon \subset B) : \sup \{|f(x'') - f(x')| : x' \in b_\varepsilon, x'' \in b_\varepsilon\} < \varepsilon.$$

**Приклад 6.** Нехай  $H = \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  і  $B = (\mathbb{R} \ni x \rightarrow a)$  – база в  $H$ , яка складається з околів  $U(a; \delta) = (a - \delta; a + \delta)$  точки  $a \in \mathbb{R}$ . Поняття границі функції  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  по такій базі  $B$  збігається з поняттям границі функції  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яке сформульоване в зауваженні 2 попереднього пункту.

## 28. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення періодичної функції.
2. Сформулюйте означення періоду функції.
3. Сформулюйте означення продовження і звуження функції.
4. Сформулюйте означення неспадної функції.
5. Сформулюйте означення незростаючої функції.
6. Сформулюйте означення монотонної функції.
7. Сформулюйте означення спадної функції.
8. Сформулюйте означення зростаючої функції.
9. Наведіть приклад функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і множин  $A_1 \subset \mathbb{R}$  та  $A_2 \subset \mathbb{R}$  таких, що  $f$  є зростаючою на кожній із множин  $A_1$  і  $A_2$ , але не є зростаючою на  $A_1 \cup A_2$ .
10. Сформулюйте означення границі функції.
11. Сформулюйте означення границі функції на мові околів.
12. Сформулюйте означення границі функції на мові послідовностей.
13. Сформулюйте і доведіть теорему про еквівалентність означення границі функції на мові "  $\varepsilon - \delta$  " і на мові послідовностей.
14. Сформулюйте і доведіть теорему про першу важливу границю.
15. Сформулюйте і доведіть теорему про єдиність границі функції.
16. Сформулюйте означення функції, обмеженої в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$ .
17. Сформулюйте і доведіть теорему про обмеженість функції, яка має границю.
18. Сформулюйте теореми про перехід до границі в нерівностях (для функцій в  $\mathbb{R}$ ) і доведіть одну з них.
19. Сформулюйте означення нескінченно малої функції.
20. Сформулюйте означення нескінченно великої функції.
21. Сформулюйте теореми про нескінченно малі функції і доведіть одну з них.
22. Сформулюйте і доведіть теорему про границю суми.
23. Сформулюйте і доведіть теорему про границю добутку.
24. Сформулюйте і доведіть теорему про границю частки.
25. Сформулюйте означення правої границі.
26. Сформулюйте означення лівої границі.
27. Сформулюйте і доведіть теорему про одnobічні границі.
28. Сформулюйте і доведіть теорему про другу визначну границю.
29. Наведіть приклад функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$  і  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .
30. Наведіть приклад функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  не існує і  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$ .

31. Завершіть написання формули  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x =$  і обґрунтуйте її.
32. Завершіть написання формули:  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} =$ .
33. Завершіть написання формули:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} =$  і обґрунтуйте її.
34. Завершіть написання формули:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} =$  і обґрунтуйте її.
35. Завершіть написання формули:  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} =$  і обґрунтуйте її.
36. Сформулюйте і доведіть теорему про існування границі монотонної функції.
37. Сформулюйте і доведіть критерій Коші існування границі функції.
38. Сформулюйте означення границі функції за множиною.
39. Сформулюйте означення границі функції по базі.
40. На мові "ε - δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .
41. На мові "ε - δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .
42. На мові "ε - δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .
43. На мові "ε - δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ,  $A \in \mathbb{R}$ .
44. На мові "ε - δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
45. На мові "ε - δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
46. На мові "ε - δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ .
47. На мові "ε - δ" сформулюйте означення границі  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ .

## 29. Вправи і задачі теоретичного характеру.

### 1. Доведіть твердження

- Якщо  $(\exists T \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R}) : f(x+T) = \frac{f(x)+1}{f(x)-1}$ , то функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною.
- Існують зростаючі на  $\mathbb{R}$  функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких функція  $F = f - \varphi$  є спадною на  $\mathbb{R}$ .
- Існують функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які є ні спадними ні зростаючими на  $\mathbb{R}$ , для яких функція  $F = f + \varphi$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .
- Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$  є зростаючими на  $\mathbb{R}$ , то функція  $F = f\varphi$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .

5. Існують зростаючі на  $\mathbb{R}$  функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких функція  $F = f\varphi$  є спадною на  $\mathbb{R}$ .
6. Існують спадні на  $\mathbb{R}$  функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких функція  $F = f\varphi$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .
7. Існують зростаюча на  $\mathbb{R}$  функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і спадна на  $\mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких функція  $F = f\varphi$  є спадною на  $\mathbb{R}$ .
8. Існують зростаюча на  $\mathbb{R}$  функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і спадна на  $\mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких функція  $F = f\varphi$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .
9. Існує парна функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої функція  $F(x) = f(x+1)$  є ні парною, ні непарною.
10. Існує парна функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(x) = x$  для всіх  $x \in [0; +\infty)$ .
11. Існує парна функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(x) = x$  для всіх  $x \in (-\infty; 0]$ .
12. Існує непарна функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(x) = x^2$  для всіх  $x \in [0; +\infty)$ .
13. Існує непарна функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(x) = x^2$  для всіх  $x \in (-\infty; 0]$ .
14.  $\text{sh}(-x) = -\text{sh } x$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .
15.  $\text{ch}(-x) = \text{ch } x$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

## 2. Доведіть твердження

1. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F = Cf$  є періодичною.
2. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F(x) = f(-x)$  є періодичною.
3. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F(x) = f(Cx)$  є періодичною.
4. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F(x) = f(C+x)$  є періодичною.
5. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F = C + f$  є періодичною.
6. Якщо  $(\exists T \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R}): f(x+T) = \frac{1}{2f(x)}$ , то функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною.
7. Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною,  $\varphi(\mathbb{R}) \subset D(f)$  і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка функція, то функція  $F = f \circ \varphi$  є періодичною.
8. Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парними, то функція  $F = f + \varphi$  є парною.
9. Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парними, то функція  $F = f\varphi$  є парною.
10. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F = Cf$  є парною.

11. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F(x) = f(-x)$  є парною.
12. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F(x) = f(Cx)$  є парною.
13. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F = C + f$  є парною.
14. Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарними, то функція  $F = f + \varphi$  є непарною.
15. Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарними, то функція  $F = f\varphi$  є парною.
16. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F = Cf$  є непарною.
17. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною, то функція  $F(x) = f(-x)$  є непарною.
18. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною, то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F(x) = f(Cx)$  є непарною.
19. Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парною і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною, то функція  $F = f\varphi$  є непарною.
20. Існують така непарна  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що функція  $F = 1 + f$  є ні парною ні непарною.
21. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що функція  $\varphi$  є парною, функція  $f$  є непарною, функція  $F = f + \varphi$  є ні парною ні непарною.
22. Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парною,  $\varphi(D(\varphi)) \subset D(f)$  і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка функція, то функція  $F = f \circ \varphi$  є парною.
23. Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною,  $\varphi(D(\varphi)) \subset D(f)$  і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – є парною, то функція  $F = f \circ \varphi$  є парною.
24. Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною,  $\varphi(D(\varphi)) \subset D(f)$  і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – є непарною, то функція  $F = f \circ \varphi$  є непарною.
25. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що функція  $\varphi$  є парною, функція  $f$  є ні парною ні непарною,  $\varphi(D(\varphi)) \subset D(f)$  і функція  $F = f \circ \varphi$  є непарною.
26. Сума двох функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обмежених на множині  $H$ , є функція, обмежена на  $H$ .
27. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\varphi$  є необмеженою на множині  $H$ ,  $f$  є необмеженою на множині  $H$  і  $f + \varphi$  є функцією необмеженою на  $H$ .
28. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\varphi$  є необмеженою на множині  $H$ ,  $f$  є необмеженою на множині  $H$  і  $f + \varphi$  є функцією обмеженою на  $H$ .
29. Добуток двох функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обмежених на множині  $H$ , є обмеженою функцією на  $H$ .

30. Сума функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обмеженої на множині  $H$ , і функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , необмеженої на множині  $H$ , є необмеженою функцією на  $H$ .
31. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\varphi$  є обмеженою на множині  $H$ ,  $f$  є необмеженою на множині  $H$  і  $f\varphi$  є функцією необмеженою на  $H$ .
32. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\varphi$  є обмеженою на множині  $H$ ,  $f$  є необмеженою на множині  $H$  і  $f\varphi$  є функцією обмеженою на  $H$ .
33. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\varphi$  є необмеженою на множині  $H$ ,  $f$  є необмеженою на множині  $H$  і  $f\varphi$  є функцією обмеженою на  $H$ .

### 3. Доведіть твердження.

1. Для того щоб число  $A \in \mathbb{R}$  було границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| \leq \delta): |f(x) - A| < \varepsilon.$$

2. Для того щоб число  $A \in \mathbb{R}$  було границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

3. Для того щоб число  $A \in \mathbb{R}$  було границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| \leq \delta): |f(x) - A| \leq \varepsilon.$$

4. Якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$ , то число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

5. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої умова

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$$

не виконується і число  $A \in \mathbb{R}$  є її границею в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

6. Якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$ , то число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

7. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої умова

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$$

не виконується і число  $A \in \mathbb{R}$  є її границею в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

8. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої

$$(\exists \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$$

і число  $A \in \mathbb{R}$  не є її границею в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

9. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$$

і число  $A \in \mathbb{R}$  не є її границею в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

10. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої

$$(\forall \delta > 0)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta): |f(x) - A| < \varepsilon$$

і число  $A \in \mathbb{R}$  не є її границею в точці  $a \in \mathbb{R}$ .

11. Існує така функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що для деякого  $\varepsilon$ -околу  $U(A; \varepsilon)$  точки  $A \in \mathbb{R}$

знайдеться такий проколений  $\delta$ -окіл  $U(a; \delta)$  точки  $a \in \mathbb{R}$ , образ якого належить  $U(A; \varepsilon)$  і число  $A$  не є її границею в точці  $a$ .

12. Існує така функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що для кожного проколеного  $\delta$ -околу  $U(a; \delta)$  точки  $a \in \mathbb{R}$  знайдеться такий  $\varepsilon$ -окіл  $U(A; \varepsilon)$  точки  $A \in \mathbb{R}$ , що

$f(U(a; \delta)) \subset U(A; \varepsilon)$  і число  $A$  не є її границею в точці  $a$ .

13. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої знайдуться такі числа  $a \in \mathbb{R}$ ,  $A \in \mathbb{R}$  і послідовність  $(x_n)$ , що  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ , але число  $A$  не є границею цієї функції  $f$  у точці  $a$ .

14. Існує необмежена в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є нескінченно великою в цій точці.

15. Існує необмежена в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ .

16. Існує необмежена в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ .

17. Сума функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обмеженої в точці  $a$ , і функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , нескінченно великої в точці  $a$ , є нескінченно великою функцією в цій точці.

18. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\varphi$  є обмеженою в точці  $a$ ,  $f$  є нескінченно великою в точці  $a$  і  $f\varphi$  є нескінченно великою функцією в цій точці.

19. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\varphi$  є обмеженою в точці  $a$ ,  $f$  є нескінченно великою в точці  $a$  і  $f\varphi$  є нескінченно малою функцією в цій точці.

20. Існують такі функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\varphi$  є обмеженою в точці  $a$ ,  $f$  є нескінченно великою в точці  $a$  і функція  $f\varphi$  є необмеженою в точці  $a$ , але не є нескінченно великою в цій точці.

21. Якщо існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ , то знайдеться таке  $\delta > 0$ , що

функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою на множині  $\mathring{U}(a; \delta) \cap (a; +\infty)$ .

22. Якщо існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ , то знайдеться таке  $\delta > 0$ , що

функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою на множині  $\mathring{U}(a; \delta) \cap (-\infty; a)$ .

23. Існують такі функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\lim_{x \rightarrow 0} (f_1(x) + f_2(x)) = 0$ , а границі  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$  не існують.

24. Існують такі функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\lim_{x \rightarrow 0} (f_1(x) f_2(x)) = 1$ , а границі  $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)$  не існують.

25. Сума двох обмежених в проколеному околі точки  $a$  функцій є обмеженою функцією в цьому проколеному околі.

26. Добуток двох обмежених в проколеному околі точки  $a$  функцій є обмеженою функцією в цьому проколеному околі.

27. Якщо існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то існує такий проколений окіл

$\mathring{U}(a; \delta)$ , що для всіх  $x \in \mathring{U}(a; \delta)$  виконується  $|f(x)| \leq 2|A|$ .

28. Якщо існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , то існує такий проколений окіл

$\mathring{U}(a; \delta)$ , що для всіх  $x \in \mathring{U}(a; \delta)$  виконується  $|f(x)| \geq |A|/2$ .

29. Для того щоб  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$ , для якої  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ , виконувалось  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$ .

30. Для того щоб  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної послідовності  $(x_n)$ , для якої  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ , виконувалось  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = -\infty$ .

#### 4. Доведіть твердження.

1.  $\cos x < \frac{\sin x}{x} < \frac{1}{\cos x}$  для всіх  $x \in (0; \pi/2)$ .

2.  $2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) x - \sin \left( k - \frac{1}{2} \right) x$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$  і всіх  $k \in \mathbb{Z}$ .

3.  $\sin x < \frac{x}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos \frac{kx}{n}$  для всіх  $x \in (0; \pi/2)$  і всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

4.  $\frac{x}{n} \sum_{k=1}^n \cos \frac{kx}{n} < \sin x$  для всіх  $x \in (0; \pi/2)$  і всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

5.  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

6.  $\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch} 2x$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

7.  $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

8.  $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$  і  $y \in \mathbb{R}$ .

9.  $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$  і  $y \in \mathbb{R}$ .

$$10. \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} \text{ для всіх } x \in \mathbb{R} \text{ і } y \in \mathbb{R}.$$

$$11. \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \text{ для всіх } x \in \mathbb{R} \text{ і } y \in \mathbb{R}.$$

$$12. \operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2} \text{ для всіх } x \in \mathbb{R} \text{ і } y \in \mathbb{R}.$$

$$13. \operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2} \text{ для всіх } x \in \mathbb{R} \text{ і } y \in \mathbb{R}.$$

$$14. \lim_{\mathbb{N} \ni k \rightarrow +\infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1}) = 0.$$

$$15. \lim_{\mathbb{N} \ni k \rightarrow +\infty} \sin^2(\pi \sqrt{n^2 + n}) = 1.$$

$$16. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin_n x = 0, \text{ якщо } \sin_1 x := \sin x \text{ і } \sin_n x := \sin(\sin_{n-1} x), \text{ якщо } n > 1.$$

$$17. \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\sqrt[n]{2} + \sqrt[n]{3}}{2} \right)^n = 0.$$

$$18. \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n]{2})^n = 0.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{sh} x = +\infty.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{sh} x = -\infty.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{ch} x = +\infty.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{th} x = 1.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{cth} x = 1.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow +\infty} (|a|^x + |b|^x)^{1/x} = \max\{|a|; |b|\}, \text{ якщо } a \in \mathbb{R} \text{ і } b \in \mathbb{R}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow -\infty} (|a|^x + |b|^x)^{1/x} = \min\{|a|; |b|\} \text{ для будь-яких } a \in \mathbb{R} \text{ і } b \in \mathbb{R}, \text{ якщо } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \\ \text{ і } \min\{|a|; |b|\} > 0.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow -\infty} (|a|^x + |b|^x)^{1/x} = \max\{|a|; |b|\}, \text{ якщо } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ і } \min\{|a|; |b|\} = 0.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0+} (|a|^x + |b|^x)^{1/x} = +\infty, \text{ якщо } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ і } \min\{|a|; |b|\} > 0.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0+} (|a|^x + |b|^x)^{1/x} = \max\{|a|; |b|\}, \text{ якщо } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ і } \min\{|a|; |b|\} = 0.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0-} (|a|^x + |b|^x)^{1/x} = 0, \text{ якщо } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ і } \min\{|a|; |b|\} > 0.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0-} (|a|^x + |b|^x)^{1/x} = \max\{|a|; |b|\}, \text{ якщо } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \text{ і } \min\{|a|; |b|\} = 0.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|a|^x - |a|^{-x}}{|a|^x + |a|^{-x}} = 1, \text{ якщо } |a| > 1.$$

$$32. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|a|^x - |a|^{-x}}{|a|^x + |a|^{-x}} = -1, \text{ якщо } 0 < |a| < 1.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{ax} + e^{bx})}{x} = \max\{a; b\}, \text{ якщо } a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}.$$

34. Для того щоб  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ , необхідно і достатньо, щоб знайшлась така послідовність  $(x_n)$ , що  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

35. Для того щоб  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) < +\infty$ , необхідно і достатньо, щоб  
 $(\exists A_1 \in \mathbb{R})(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}, x > \delta) : f(x) \leq A_1$ .

36. Для того щоб  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \in \mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб: 1) знайшлась така послідовність  $(x_n)$ , що  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \geq A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ ; 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta \in \mathbb{R})(\forall x \in \mathbb{R}, x > \delta) : f(x) < A + \varepsilon$ .

37.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \limsup_{x \rightarrow +\infty} \{f(t) : t \geq x\} = \inf \{ \sup \{f(t) : t \geq x\} : x \geq \delta \}$  для кожної функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , визначеної в деякому проколеному околі точки  $+\infty$ , і деякого  $\delta > 0$ .

38.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \limsup_{x \rightarrow -\infty} \{f(t) : t \leq x\} = \inf \{ \sup \{f(t) : t \leq x\} : x \leq -\delta \}$  для кожної функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , визначеної в деякому проколеному околі точки  $-\infty$ , і деякого  $\delta > 0$ .

39.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$ , якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою на кожному скінченному проміжку  $[a; b] \subset (0; +\infty)$  і існує скінченна або нескінченна границя  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$ .

40.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x))^{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ , якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою на кожному скінченному проміжку  $[a; b] \subset (0; +\infty)$  і існує скінченна або нескінченна границя  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ .

41.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = 0$ .

### 5. Доведіть твердження.

1. Існує функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є парною і

$$(\exists x \in D(f)) : f(-x) = f(x).$$

2. Існує функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є непарною і

$$(\exists x \in D(f)) : f(-x) = -f(x).$$

3. Існує неперіодична функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  

$$(\exists T \neq 0)(\exists x \in D(f)): f(x \pm T) = f(x).$$
4. Існує неперіодична функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  

$$(\forall x \in D(f))(\exists T \neq 0): f(x \pm T) = f(x).$$
5. Якщо  $(\exists T \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R}): f(x+T) = f(x)$ , то функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною.
6. Якщо  $(\exists T \neq 0)(\forall x \in \mathbb{R}): f(x+T) = -f(x)$ , то функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною.
7. Існують такі періодичні функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $F = f + \varphi$  не є періодичною.
8. Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичними і їхніми періодами є раціональні числа, то функція  $F = f + \varphi$  є періодичною.
9. Існують такі неперіодичні функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $F = f + \varphi$  є періодичною.
10. Існують такі періодичні функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що функція  $F = f\varphi$  є неперіодичною.
11. Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичними і їхніми періодами є раціональні числа, то функція  $F = f\varphi$  є періодичною.
12. Існує  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є неспадною і  

$$(\exists x_1 \in D(f))(\exists x_2 \in D(f), x_1 < x_2): f(x_1) < f(x_2).$$
13. Якщо функція  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  є неспадною на проміжку  $(\alpha; \beta)$ ,  $\varphi((\alpha; \beta)) \subset (a; b)$  і функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неспадною на проміжку  $(a; b)$ , то функція  $F = f \circ \varphi$  є неспадною на проміжку  $(\alpha; \beta)$ .
14. Якщо функція  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  є неспадною на проміжку  $(\alpha; \beta)$ ,  $\varphi((\alpha; \beta)) \subset (a; b)$  і функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є незростаючою на проміжку  $(a; b)$ , то функція  $F = f \circ \varphi$  є незростаючою на проміжку  $(\alpha; \beta)$ .
15. Якщо функція  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  є незростаючою на проміжку  $(\alpha; \beta)$ ,  $\varphi((\alpha; \beta)) \subset (a; b)$  і функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неспадною на проміжку  $(a; b)$ , то функція  $F = f \circ \varphi$  є незростаючою на проміжку  $(\alpha; \beta)$ .
16. Якщо функція  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  є незростаючою на проміжку  $(\alpha; \beta)$ ,  $\varphi((\alpha; \beta)) \subset (a; b)$  і функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є незростаючою на проміжку  $(a; b)$ , то функція  $F = f \circ \varphi$  є неспадною на проміжку  $(\alpha; \beta)$ .
17. Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючими на  $\mathbb{R}$ , то функція  $F = f + \varphi$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .
18. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ , то для кожного  $C > 0$  функція  $F = Cf$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .

19. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ , то для кожного  $C < 0$  функція  $F = Cf$  є спадною на  $\mathbb{R}$ .
20. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ , то для кожного  $C > 0$  функція  $F(x) = f(Cx)$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .
21. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ , то для кожного  $C < 0$  функція  $F(x) = f(Cx)$  є спадною на  $\mathbb{R}$ .
22. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ , то для кожного  $C \in \mathbb{R}$  функція  $F(x) = f(x + C)$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .
23. Якщо функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючими на  $\mathbb{R}$ , то функція  $F = f + \varphi$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .
24. Існують зростаючі на  $\mathbb{R}$  функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких функція  $F = f - \varphi$  є зростаючою на  $\mathbb{R}$ .
25. Якщо існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , то існує границя функція  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$ .
26. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої границя  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)|$  існує, а границя  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  не існує.

### 30. Вправи і задачі розрахункового характеру.

#### 1. Зобразіть на одному малюнку графіки функцій

$$1. f_1(x) = x^2, \quad f_2(x) = x^4.$$

$$2. f_1(x) = \frac{1}{x}, \quad f_2(x) = \frac{1}{x^3}.$$

$$3. f_1(x) = \sqrt{x}, \quad f_2(x) = \sqrt[3]{x}.$$

$$4. f_1(x) = x^5, \quad f_2(x) = x^3.$$

$$5. f_1(x) = 2^x, \quad f_2(x) = 4^x.$$

$$6. f_1(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \quad f_2(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

$$7. f_1(x) = \log_2 x, \quad f_2(x) = \log_4 x.$$

$$8. f_1(x) = \log_{0,25} x, \quad f_2(x) = \log_4 x.$$

#### 2. Зобразіть графіки функцій

$$1. f(x) = \sec x. \quad 2. f(x) = \operatorname{cosec} x.$$

$$3. f(x) = \sin^2 x. \quad 4. f(x) = \cos^2 x.$$

5.  $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$ .

6.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x$ .

7.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ .

8.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ .

9.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x)$ .

10.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} x)$ .

11.  $f(x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ .

12.  $f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ .

13.  $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ .

14.  $f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ .

15.  $f(x) = \cos(\arccos x)$ .

16.  $f(x) = \sin(\arcsin x)$ .

17.  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ .

18.  $f(x) = \arccos(\cos x)$ .

19.  $f(x) = \frac{|\sin x|}{\sin x}$ .

20.  $f(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$ .

3. Зобразіть множину  $H$  і з'ясуйте, чи вказана множина є функцією в  $\mathbb{R}$

1.  $H = \{(x; y) : x^2 + y^2 = 1\}$ .

2.  $H = \{(x; y) : y^2 = x\}$ .

3.  $H = \{(x; y) : y = |\sin x|\}$ .

4.  $H = \{(x; y) : y = x + \sin x\}$ .

5.  $H = \{(x; y) : y = \sin \frac{1}{x}\}$ .

6.  $H = \{(x; y) : y = \cos \frac{1}{x}\}$ .

7.  $H = \{(x; y) : y = [x]\}$ .

8.  $H = \{(x; y) : y = \operatorname{sgn} x\}$ .

9.  $H = \{(x; y) : |y| = \sin x\}$ .

10.  $H = \{(x; y) : |y| = \cos x\}$ .

11.  $H = \{(x; y) : |x| + |y| = 1\}$ .

12.  $H = \{(x; y) : x + |y| = 1\}$ .

13.  $H = \{(x; y) : y = \sin x + |\sin x|\}$ .

14.  $H = \{(x, y) : x = \cos t, y = \sin t, t \in [0; 2\pi]\}$ .

15.  $H = \{(x; y) : x = 4 \cos t, y = 2 \sin t, t \in [0; \pi/2]\}$ .

16.  $H = \{(x; y) : x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, t \in \mathbb{R}\}$ .

17.  $H = \{(x; y) : \rho = \cos \varphi, x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \varphi \in [0; \pi]\}$ .

18.  $H = \{(x; y) : \rho = \cos \varphi, x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\}$ .

19.  $H = \{(x; y) : \rho = 1, x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \varphi \in [0; \pi]\}$ .

20.  $H = \{(x; y) : \rho = 1, x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, \varphi \in [0; 2\pi]\}$ .

4. Знайдіть нулі функції

1.  $f(x) = \sin x$ .

2.  $f(x) = \cos x$ .

3.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

4.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ .

5.  $f(x) = 4^{\sqrt{x-2}} - 2^{\sqrt{x-2}}$ .

6.  $f(x) = (2^x - 3^x)(\ln x + 1)$ .

7.  $f(x) = (2^{|x|} - 2)(\ln x - 1)$ .

8.  $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$ .

9.  $f(x) = \sqrt[4]{x} - 2\sqrt[8]{x} - 3$ .

10.  $f(x) = |x| - 2\sqrt{|x|} + 1$ .

5. Знайдіть абсциси точок перетину графіка функції і осі  $OX$

1.  $f(x) = \arcsin x$ .

2.  $f(x) = \arccos x$ .

3.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

4.  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ .

5.  $f(x) = 4^{-\sqrt{x-2}}$ .

6.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ .

7.  $f(x) = \cos 2x - \cos 6x$ .

8.  $f(x) = \cos^2 x (\cos x - \sqrt{5}/2)$ .

9.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x + \sqrt{3} \operatorname{tg} x$ .

10.  $f(x) = 2^{x^2} - (0,5)^{2x-3}$ .

6. Знайдіть ординати точок перетину графіка функції і осі  $OY$

1.  $f(x) = \sin x$ .

2.  $f(x) = \cos x$ .

3.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ .

4.  $f(x) = \ln x$ .

5.  $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{x})$ .

6.  $f(x) = \sin x + 2 \cos \frac{x}{2}$ .

7.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ .

8.  $f(x) = \ln(\operatorname{sgn}(\operatorname{arcctg} x))$ .

9.  $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$ .

10.  $f(x) = \arccos(\cos x)$ .

7. Знайдіть ті точки, в яких функція приймає значення  $A$

1.  $f(x) = \sin^2 x, A = 1/2$ . 2.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x, A = 1/3$ .

3.  $f(x) = |x+1| + |x|, A = 1/2$ . 4.  $f(x) = |\ln|x||, A = 2$ .

5.  $f(x) = 5^{x+1} - 5^{x-1}$ ,  $A = 24$ .

6.  $f(x) = x - \sqrt{x+1}$ ,  $A = 4$ .

7.  $f(x) = \cos^2 x - 2 \cos x$ ,  $A = 24$ .

8.  $f(x) = \log_2 x^2$ ,  $A = 4$ .

9.  $f(x) = \sin^2 x + 2|\sin x|$ ,  $A = 0$ .

10.  $f(x) = \arcsin^2 \sqrt{x}$ ,  $A = 1/2$ .

8. Знайдіть прообрази точки  $A$

1.  $f(x) = \cos^2 x$ ,  $A = 1/2$ .

2.  $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x$ ,  $A = 1/3$ .

3.  $f(x) = e^{\ln^2 x}$ ,  $A = 1$ .

4.  $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ ,  $A = 1$ .

5.  $f(x) = x + \sqrt{x+1}$ ,  $A = 5$ .

6.  $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$ ,  $A = 1$ .

9. Знайдіть множину точок, в яких функція приймає додатні значення

1.  $f(x) = \sin x$ .

2.  $f(x) = \cos x$ .

3.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

4.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ .

5.  $f(x) = \ln x$ .

6.  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ .

7.  $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}$ .

8.  $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}$ .

9.  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{\ln x}}$ .

10.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \ln x}}$ .

10. Знайдіть абсциси тих точок, для яких графік функції лежить під віссю абсцис

1.  $f(x) = (x-1)(x+2)$ .

2.  $f(x) = \frac{1}{x+3} - 6$ .

3.  $f(x) = |x+1| - |x|$ .

4.  $f(x) = ||x+1| - |x-1||$ .

5.  $f(x) = \log_{1/2} x + 1$ .

6.  $f(x) = \log_2 x^2$ .

7.  $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$ .

8.  $f(x) = \sqrt{x+1} + 1$ .

9.  $f(x) = \sqrt{x^2} - x$ .

10.  $f(x) = \lg|x| - 1$ .

11. Знайдіть множину, на якій функція  $f_1$  приймає більші значення, ніж функція

$f_2$ 

1.  $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 4.$

2.  $f_1(x) = \ln x, f_2(x) = -1.$

3.  $f_1(x) = 4^x, f_2(x) = 2^x.$

4.  $f_1(x) = x^2, f_2(x) = x^3.$

5.  $f_1(x) = x - 1, f_2(x) = \sqrt{7 - x}.$

6.  $f_1(x) = \sqrt{x}, f_2(x) = x - 2.$

7.  $f_1(x) = \operatorname{sgn} x, f_2(x) = [x].$

8.  $f_1(x) = |x - 1|, f_2(x) = x.$

**12.** Знайдіть абсциси таких точок площини, що графік функції  $f_1$  розміщений під графіком функції  $f_2$

1.  $f_1(x) = \frac{1}{x}, f_2(x) = x.$

2.  $f_1(x) = 2^{-x}, f_2(x) = 4.$

3.  $f_1(x) = x^2, f_2(x) = 2 - 3x.$

4.  $f_1(x) = e^x, f_2(x) = -e^{-x} + 2.$

5.  $f_1(x) = -\sin^2 x + 2, f_2(x) = -\sin^{-2} x.$

6.  $f_1(x) = -x^2, f_2(x) = -3 + 4x.$

**13.** Знайдіть множину (область) визначення функцій

1.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x} + \ln x.$

2.  $f(x) = \arcsin x + \sqrt{\ln x}.$

3.  $f(x) = \sqrt{\sin x} + \ln \sqrt{x}.$

4.  $f(x) = \sqrt{\cos x} + \sqrt{x}.$

5.  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sqrt{\operatorname{tg} x}.$

6.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{arcc} \operatorname{tg} x}.$

7.  $f(x) = \frac{1}{\ln(x-2)}.$

8.  $f(x) = \frac{1}{2 + \ln x}.$

9.  $f(x) = \sqrt{\frac{1+x^2}{\ln x}}.$

10.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{2 + \ln x}}.$

11.  $f(x) = \operatorname{arcc} \operatorname{tg}(\sqrt{\operatorname{ctg} x}).$

12.  $f(x) = \operatorname{ctg}(\ln \operatorname{arcc} \operatorname{tg} x).$

13.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arcc} \operatorname{tg} \sqrt{x}).$

14.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sqrt{\operatorname{arcc} \cos x}).$

15.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{sgn}(\operatorname{arctg} x)}$ .

16.  $f(x) = \ln(\operatorname{sgn}(\operatorname{arcctg} x))$ .

17.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ .

18.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ .

19.  $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} \sqrt{x})$ .

20.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)}$ .

21.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x + 1}}$ .

22.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos x - 1}}$ .

23.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 8}}$ .

24.  $f(x) = \ln^2 \frac{x^2 + 1}{x}$ .

25.  $f(x) = \frac{2 + x}{|x| - x}$ .

26.  $f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x - 1}$ .

27.  $f(x) = \sqrt{2 - 3x + x^2}$ .

28.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{-3 + 4x - x^2}}$ .

29.  $f(x) = \arcsin(1 - x^2)$ .

30.  $f(x) = \arccos(1 - |x|)$ .

31.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$ .

32.  $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}$ .

33.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + x + 8}}$ .

34.  $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 2x + 1}}$ .

35.  $f(x) = \frac{x + \ln \sqrt{4 - x^2}}{|x| + x}$ .

36.  $f(x) = \sqrt{1 - x - x^2}$ .

37.  $f(x) = \sqrt{2 - x - x^2}$ .

38.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 - x^2}}$ .

39.  $f(x) = \arcsin \sqrt{x}$ .

40.  $f(x) = \sqrt{\arcsin x}$ .

41.  $f(x) = \arccos \frac{x}{4}$ .

42.  $f(x) = \cos \frac{x - 1}{x + 1}$ .

43.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .

44.  $f(x) = 2^{x - x^2}$ .

45.  $f(x) = \arcsin \frac{1}{x}$ .

46.  $f(x) = \arccos \frac{x-1}{x+1}$ .

14. Знайдіть множину (область) визначення функцій  $f_1, f_2$  і  $f_1 + f_2$

1.  $f_1(x) = \arcsin \sqrt{x}$ ,  $f_2(x) = \sqrt{\arccos x}$ .

2.  $f_1(x) = \operatorname{arctg}|x|$ ,  $f_2(x) = |\ln x|$ .

3.  $f_1(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ ,  $f_2(x) = \sqrt[3]{x}$ .

4.  $f_1(x) = \ln \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ ,  $f_2(x) = \sin|x|$ .

5.  $f_1(x) = |2^x - 3^{x+1}|$ ,  $f_2(x) = e^{|x|} - 1$ .

6.  $f_1(x) = x^2 - 1$ ,  $f_2(x) = (x-1)^3$ .

15. Знайдіть множину значень функції

1.  $f(x) = x^2 + 1$ . 2.  $f(x) = 1 + \arcsin x$ .

3.  $f(x) = 1 + \ln x$ . 4.  $f(x) = e^x + 1$ .

5.  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ . 6.  $f(x) = \operatorname{arctg}|x| + \frac{\pi}{2}$ .

16. Знайдіть  $F(x)$ , якщо  $F = f \circ \varphi$

1.  $f(x) = \sin x$ ,  $\varphi(x) = x^2$ .

2.  $f(x) = e^x$ ,  $\varphi(x) = \sin x$ .

3.  $f(x) = x^2$ ,  $\varphi(x) = \sin x$ .

4.  $f(x) = \sin x$ ,  $\varphi(x) = e^x$ .

5.  $f(x) = x^2$ ,  $\varphi(x) = \sqrt{x}$ .

6.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $\varphi(x) = x^2$ .

17. З'ясуйте, чи функція є парною, непарною, ні парною ні непарною

1.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ .

2.  $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ .

3.  $f(x) = \sin x + \operatorname{tg} x$ .

4.  $f(x) = \arccos x^2$ .

5.  $f(x) = \ln x$ .

6.  $f(x) = x^2 + 1$ .

7.  $f(x) = e^x$ .

8.  $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ .

9.  $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ .

10.  $f(x) = x^2 - 2x$ .

11.  $f(x) = x \ln |x|$ .

12.  $f(x) = \cos(x+2)$ .

13.  $f(x) = \sin(x-1)$ .

14.  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

15.  $f(x) = \sin(\arcsin x)$ .

16.  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ .

17.  $f(x) = \cos(\arccos x)$ .

18.  $f(x) = \arccos(\cos x)$ .

19.  $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ .

20.  $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ .

21.  $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x)$ .

22.  $f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$ .

23.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arctg} x)$ .

24.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\arccos x)$ .

25.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arctg} x)$ .

26.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\arcsin x)$ .

27.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ .

28.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ .

29.  $f(x) = \sin^2 x$ .

30.  $f(x) = x \cos x$ .

31.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ .

32.  $f(x) = x + \sin x$ .

33.  $f(x) = 2x + 1$ .

34.  $f(x) = [x]$ .

35.  $f(x) = 2$ .

36.  $f(x) = x^3 + x^2$ .

37.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .

38.  $f(x) = 2^{x-x^2}$ .

39.  $f(x) = \sin x^2$ .

40.  $f(x) = x - [x]$ .

41.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\sin x}}$ .

42.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}$ .

43.  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ .

44.  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ .

45.  $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + x$ .

46.  $f(x) = \cos(\sqrt{3}x)$ .

47.  $f(x) = \sin 2x + \cos x$ .

48.  $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$ .

49.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x)$ .

50.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} x)$ .

51.  $f(x) = \sin(\operatorname{sgn} x)$ .

52.  $f(x) = \cos(\operatorname{sgn} x)$ .

**18.3** Ясуйте, чи функція є періодичною

1.  $f(x) = \sin^2 x$ .

2.  $f(x) = x \cos x$ .

3.  $f(x) = x^2 + 1$ .

4.  $f(x) = [x]$ .

5.  $f(x) = x - [x]$ .

6.  $f(x) = x^2$ .

7.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ .

8.  $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x \text{ — раціональне,} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне.} \end{cases}$

9.  $f(x) = 2^x$ .

10.  $f(x) = (x+1)^2$ .

11.  $f(x) = x^3 + x^2$ .

12.  $f(x) = \sin x^2$ .

13.  $f(x) = \sin(x-1)$ .

14.  $f(x) = 8 \sin(9x/8) + 2 \cos(2x/3)$ .

15.  $f(x) = \sin x + 2 \cos \frac{x}{2}$ .

16.  $f(x) = \sin \sqrt{x}$ .

17.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ .

18.  $f(x) = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ .

19.  $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg} x}$ .

20.  $f(x) = \sin(\sqrt{2x})$ .

21.  $f(x) = \cos(\sqrt{3x})$ .

22.  $f(x) = \sin(\sqrt{2x}) + \cos x$

23.  $f(x) = \frac{1}{\cos x}$ .

24.  $f(x) = \cos(\sqrt{3x}) + \cos x$ .

25.  $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ .

26.  $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x}$ .

27.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arcsin} x)$ .

28.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arccos} x)$ .

29.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arctg} x)$ .

30.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arcctg} x)$ .

31.  $f(x) = \sin 2x + \cos x$ .

32.  $f(x) = \sin 3x + \cos 2x$ .

33.  $f(x) = 2$ .

34.  $f(x) = -x^4 + 1$ .

35.  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{x}$ .

36.  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ .

37.  $f(x) = \cos x^2$ .

38.  $f(x) = \cos^2 x$ .

39.  $f(x) = x \sin x$ .

40.  $f(x) = x + \cos x$ .

41.  $f(x) = \sin(\arcsin x)$ .

42.  $f(x) = \arcsin(\sin x)$ .

43.  $f(x) = \cos(\arccos x)$ .

44.  $f(x) = \arccos(\cos x)$ .

45.  $f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ .

46.  $f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ .

47.  $f(x) = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ .

48.  $f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x)$ .

49.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$ .

50.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$ .

51.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x)$ .

52.  $f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} x)$ .

53.  $f(x) = \sin(\operatorname{sgn} x)$ .

54.  $f(x) = \cos(\operatorname{sgn} x)$ .

19. З'ясуйте, чи функція є обмеженою, обмеженою знизу та обмеженою зверху на множині  $H$

1.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $H = (1; +\infty)$ .

2.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $H = (0; 1)$ .

3.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $H = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

4.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $H = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ .

5.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $H = (0; +\infty)$ .

6.  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ ,  $H = (0; +\infty)$ .

7.  $f(x) = [x]$ .

8.  $f(x) = x - [x]$ .

9.  $f(x) = x^2$ .

10.  $f(x) = -x^2 + 1$ .

20. Виходячи з означення з'ясуйте, чи функція є монотонною на області визначення

1.  $f(x) = 2x + 3$ .

2.  $f(x) = x^2 + 2$ .

3.  $f(x) = |x|$ .

4.  $f(x) = [x]$ .

5.  $f(x) = x[x]$ .

6.  $f(x) = |x|[x]$ .

7.  $f(x) = \operatorname{sh} x$ .

8.  $f(x) = \operatorname{ch} x$ .

21. Для заданого  $\varepsilon > 0$  вкажіть таке  $\delta > 0$ , що для всіх  $x$ , які задовольняють нерівність  $0 < |x - a| < \delta$ , виконується  $|f(x) - A| < \varepsilon$

1.  $f(x) = 3x + 1$ ,  $a = 1$ ,  $A = 4$ ,  $\varepsilon = 0,1$ .

2.  $f(x) = 4x - 2$ ,  $a = 3$ ,  $A = 10$ ,  $\varepsilon = 0,01$ .

3.  $f(x) = x^2$ ,  $a = 2$ ,  $A = 4$ ,  $\varepsilon = 0,001$ .

4.  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$ ,  $a = 2$ ,  $A = \frac{5}{3}$ ,  $\varepsilon = 0,1$ .

22. Для  $\varepsilon$ -околу  $U(A, \varepsilon)$  вкажіть такий проколений  $\delta$ -окіл  $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$ , що  $f\left(\overset{\circ}{U}(a; \delta)\right) \subset U(A; \varepsilon)$

1.  $f(x) = 2x + 1$ ,  $a = 1$ ,  $A = 3$ ,  $\varepsilon = 1$ .

2.  $f(x) = -3x + 1$ ,  $a = 1$ ,  $A = -2$ ,  $\varepsilon = 1$ .

3.  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $a = 2$ ,  $A = 5$ ,  $\varepsilon = 0,1$ .

4.  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \pi/2$ ,  $A = 1$ ,  $\varepsilon = 0,1$ .

23. Виходячи з означення границі покажіть, що

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2 - x}{x - 1} = -\infty$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2 - 1}{x - 1} = +\infty$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{(x - 1)^2} = +\infty$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{(x + 1)^2} = +\infty$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{-x^2 - x}{x - 1} = -\infty$ .

8.  $\lim_{x \rightarrow 1+} \frac{x^2}{x - 1} = +\infty$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^2 - x + 1) = \infty$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x + 1) = +\infty$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-x^2 - x}{x - 2} = -\frac{1}{3}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x^2 - x}{x - 2} = -2$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x^2 - x}{x - 1} = \frac{1}{2}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x}{2x - 1} = -1$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = \infty$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 1}{x^2 - x} = 1$ .

17.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} = \frac{5}{2}$ .

18.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 + x} = \frac{1}{2}$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 1}{x^2 + 1} = \frac{3}{2}$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = \frac{3}{5}$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow -2} (-3x^2 - x) = -10$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow -2} (8x^2 + 5x) = 22$ .

23.  $\lim_{x \rightarrow -1} (-2x^2 - x + 1) = 0$ .

24.  $\lim_{x \rightarrow -2} (-x^2 - x + 1) = -1$ .

25.  $\lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 - x) = 5$ .

26.  $\lim_{x \rightarrow -1} (5x^2 - x) = 6$ .

27.  $\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - x) = 4$ .

28.  $\lim_{x \rightarrow 2} (4x^2 - x - 4) = 10$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^2 - x + 1) = 2$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - x + 1) = 3$ .

31.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1} = \frac{3}{9}$ .

32.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) = 5$ .

33.  $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 2x) = 0$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow 1} (x^2 - 2x) = -1$ .

35.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - 1} = \frac{1}{2}$ .

24. Сформулюйте твердження (на мові “ $\varepsilon - \delta$ ”, на мові околів, на мові послідовностей)

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \infty$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 4$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 4.$

8.  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \infty.$

25. Знайдіть границю

1.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 12x + 20}.$

2.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{6 + x - x^2}{x^3 - 27}.$

3.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - x^2 + 2x}{x^2 + x}.$

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}.$

5.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 - 5x + 6}.$

6.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{12 - x - x^2}{x^3 - 27}.$

7.  $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{27x^3 + 1}.$

8.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{-x^2 + x + 2}.$

9.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 2x - 3}.$

10.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 11x + 6}{x^3 - 27}.$

11.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 + x - 6}.$

12.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^3 + 1}.$

13.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 + x - 20}.$

14.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 11x - 3}{x^2 + 2x - 3}.$

15.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x^2 - 7x - 6}{2x^2 - 7x + 3}.$

16.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 7x - 2}{3x^2 + 5x - 2}.$

17.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x^2 + 4x - 1}{3x^2 + x - 2}.$

18.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 4x - 5}{3x^2 + 2x - 1}.$

19.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 4x - 3}{2x^2 + 3x + 1}.$

20.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x^2 - 13x + 4}{x^2 - x - 12}.$

21.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{20} - 1}{t^{40} - 1}.$

22.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^2 + x - 5}{x^2 + 9x - 10}.$

23.  $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 5x - 14}{2x^2 - 9x - 35}.$

24.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 17x + 15}{x^2 - 6x - 27}.$

25.  $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{2x^2 + 15x - 8}{3x^2 + 25x + 8}.$

26.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{(x^2 - 2x + 1)^2}.$

27.  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{11} - 1}{y - 1}$ .

28.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^{40} - 1}{t^{80} - 1}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 4x^2 + 3x}{x^3 - 3x + 2}$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 2x - 1}{x^4 - 2x^2 - x}$ .

31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 1}{4x^2 + 3}$ .

32.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( 4x^4 - 3x + \frac{2}{x} \right)$ .

33.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1}$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5}$ .

35.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5}{x^2 - 4}$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2}{x + 2}$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

38.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^2 + 2}$ .

39.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$ .

40.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$ .

41.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^5 + 1}$ .

42.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6 - 1}{x^7 - 1}$ .

43.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{x^3 - 8}$ .

44.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - 8}$ .

45.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{3x^2 - x - 2}$ .

46.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-3x^2 - 2x + 1}{-x^2 + x + 2}$ .

47.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 7x + 6}{x^2 - 5x + 6}$ .

48.  $\lim_{x \rightarrow 1/3} \frac{3x^2 + 2x - 1}{27x^3 - 1}$ .

49.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$ .

50.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x - 1}{x^5 - 2x - 1}$ .

51.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x - 2}$ .

52.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^4 - 5x^2 + 1}{x^3 - x}$ .

53.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( x + \frac{x^2 - 1}{x + 1} \right)$ .

54.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( \frac{x^2}{x + 2} + 2x \right)$ .

55.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( x - 1 + \frac{2+x}{x^3+x} \right).$

56.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{x^6+2x^3} + x \right).$

57.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} + \frac{2+x}{x^3+x} \right).$

58.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2}{x^6+2x^3} - \frac{x-2}{x^2} \right).$

59.  $\lim_{x \rightarrow -2} \left( x + \frac{x^2-1}{x+2} \right).$

60.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x^2}{x-1} + 2x \right).$

61.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^3+x^3}{x^3+x} \right).$

62.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2-2^2}{x^6+2x^3} \right).$

63.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right).$

64.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{1}{1-x^2} + \frac{1}{x+1} \right).$

65.  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{x^2-2x+1}{x-2} - \frac{1+x^2-2x}{x-2} \right).$

66.  $\lim_{x \rightarrow -1} \left( \frac{x^2+x}{x^2-1} - \frac{x^2-x}{x-1} \right).$

67.  $\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^n - 1}{t^m - 1}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}.$

68.  $\lim_{y \rightarrow 1} \frac{y^{10} - 1}{y - 1}.$

69.  $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^n - 1}{y}, n \in \mathbb{N}.$

70.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x+1)^3 - 1}{x}.$

71.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{3}{1-x^3} + \frac{1}{x-1} \right).$

72.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x^2 + 3x - 10}.$

73.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1}, n \in \mathbb{N}.$

74.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100} - 2x + 1}{x^{50} - 2x + 1}.$

75.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x}{x^4}.$

76.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 3x}{(x-1)^2}.$

77.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x^2 - 5x + 3}{x^3 - x^2 - x + 1}.$

78.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^3 - 3x^2 + 4}.$

**26. Знайдіть границю**

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x^2 - x}.$

2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 7x}{2x^3 - 4x^2 + 5}.$

3.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 5x^3 + 100x^2}{10x^2 + 3x^3 - x}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 5x^2 - 3x^5}{2 + 3x^2 + x^5}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 8x^5}{1000x + 7x^5}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 3x^2 + 5}{3x^2 - 4x + 1}$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{11x^3 + 3x^2 + 5}{2x^2 - 2x + 1}$ .

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 + 3x^2 + 5}{x^2 + 7x + 1}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 3x^4}{2x^3 + 3x^2 + 9}$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 9}{x^5 - 10x^2 + 7}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 7x + 9}{x^4 - 2 - 5x^5}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 7x^9}{x^4 + 8x^9}$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^9 - 100x^{11}}{10000x^9 - 0,1x}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2x^3}{4 + x^2}$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - x}{3x + 2x^2}$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{100x^3 + x}{x + 81x^2}$ .

17.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 2x + 1}$ .

18.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x^3 + 20}{x^2 + 3x^3 + 1}$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^8 - 9x^7 + 1}{x + x^2}$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^5}{100x - 0,1x^2}$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^3 - x^5}{2x + x^2 + x^4}$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^3 + x^9}{2x + 3x^3 + 2x^8}$ .

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - x^3 - x^{10}}{2x^9 + 1}$ .

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 4x^3 - x^{10}}{2x^2 + x^3 + 1}$ .

25.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x + x^2 + 1}{x^4 + x}$ .

26.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x^2 + 4x^8 + 1}{2x^8 + x^3 + 4}$ .

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 3x^3 - x^7}{2x + 3x^2 - 2x^4}$ .

28.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2x^2 + 4x^9}{1 + 3x^3 - 2x^8}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x^3 - x^{10}}{x - x^2 - 2x^{11}}$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 1 - 4x^9}{1 + x^3 - 2x^{10}}$ .

31.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}$ .

32.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x + 1}{2x^2 - x + 1}$ .

33.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 2x^5 - 13x^2 + 7}{4x^5 - x^2 + 1}$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 5x^4 + x^3 + 1}{x^4 - 2x^2 - x + 2}$ .

35.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x}{x^4 + x}$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + 1}{x^5 + x + 2}$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x^3 - x^7 + 2x}{2x^8 + x^7 - 2}$ .

38.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x^2 - x^6 + 1}{-3x^6 - 2x^8 + x + 1}$ .

39.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^5 - 31x^4 + 1}{-2x^3 + x}$ .

40.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^4 + x}{100x^3 + x + 200}$ .

41.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^6 - 3x^4 + 1}{2x^2 - x}$ .

42.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^4 + x}{100x^3 + x + 200}$ .

43.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^7 - x^4 + 10}{x^3 + x}$ .

44.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4 - 2x^6 + x}{-4x^4 + x^2 + 2}$ .

45.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^6 - x^4 + 1}{x^5 - 10x^2}$ .

46.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^7 + 3x^2}{3x^3 + 2x^2 + 1}$ .

27. Знайдіть границю

1.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+6}}{2x^2 - 7x - 15}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+2} - \sqrt{2}}{\sqrt{x^2+1} - 1}$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3}}{x}$ .

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+16} - 4}$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{3 - \sqrt{x}}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{\sqrt{3x} - x}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+20} - 4}{x^3 + 64}$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9+x} - 3}{x^2 + x}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{4-x}}{x^2 + 2x - 8}$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6}$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}$ .

17.  $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15}$ .

18.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} - 3}{\sqrt{x-1} - 2}$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{\sqrt{x-1} - \sqrt{2}}$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x^2 + 4}}{\sqrt{2x^2}}$ .

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x\sqrt{5+x}}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$ .

23.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$ .

24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^3 + x^2}$ .

25.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1} - 3}{x^3 - 8}$ .

26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{3x^2 + x^3}$ .

27.  $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{\sqrt{x} - 3}$ .

28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x^2 + 1} - 1}{3x^2 + x^3}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + x^2}{\sqrt{5-x} - \sqrt{5+x}}$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{6x+1} - 5}$ .

31.  $\lim_{x \rightarrow 2} x \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$ .

32.  $\lim_{x \rightarrow 2} 3 \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$ .

33.  $\lim_{x \rightarrow 8} 3 \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1} \sqrt{2x} \right)$ .

35.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt{x} - 4)\sqrt{x}}$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{2x}\sqrt{x^2-4}}$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x} - 2}{(\sqrt{x} - 4)}$ .
38.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ .
39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1+2x)^{3/2} - 1)\sqrt{1+3x}}{((1+3x)^{3/2} - 1)\sqrt{1+2x}}$ .
40.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+2x^2} - 1)\sqrt{1+x}}{(\sqrt[3]{1+x^2} - 1)\sqrt{4+x}}$ .
41.  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{1+x} - 3}{2 - \sqrt[3]{x}}$ .
42.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ .
43.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})$ .
44.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 - 4}{\sqrt{x^{12} + 5x^5 - 1}}$ .
45.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 6} + |x|}{\sqrt[4]{x^2 - 1}}$ .
46.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[n]{x} - 1}{2x(x-1)}, n \in \mathbb{N}$ .
47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x - \sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x} - 1}$ .
48.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x})$ .
49.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$ .
50.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} + 1}{(x^3 + x^2)\sqrt{4+x}}$ .
51.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x+4} + 3}{\sqrt{x-1} + 2}$ .
52.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} + 3}{\sqrt{x-1} + \sqrt{2}}$ .
53.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{x^2 - 9}}$ .
54.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{2}}{x-2}, n \in \mathbb{N}$ .
55.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 - x^4} + 1}{\sqrt{x^4 - 10x^2}}$ .
56.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^4 + 3x^2}}{x^2 + 2x + 1}$ .
57.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{3}{\sqrt{x-3}} + \frac{x}{x^2-3} \right)$ .
58.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x^2-3} \right)$ .
59.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 - x^2 + 1})$ .
60.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$ .

$$61. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt[3]{x^3 + 3x^2} - \sqrt{x^2 - 2x} \right). \quad 62. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+2}}.$$

$$63. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \sqrt[3]{x^3 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1} \right). \quad 64. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{x\sqrt{x+\sqrt{x}}} - \sqrt{x} \right).$$

**28. Знайдіть границю**

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{3x^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 5x}{2x^2}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{3x^2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 x - \sin^2 x}{3x^3}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{x \sin x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 4x}{3x^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x - \sin 3x}{2x^2}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos^3 4x}{3x^2}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x - \cos^2 2x}{4x^2}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{(\pi/2 - x)^2}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x \sin x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{5x^2}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{2 \sin x}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{\sin 3x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{\pi - 2x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x \operatorname{tg} x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x - \sin^2 x}{x^2(x+1)}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin 2x} - \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \right).$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 5x}{x^2 - x}.$$

23.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{x \sin x}$ .

24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x + \sin x}{\arcsin x}$ .

25.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos^3 x - 2}{5x^2}$ .

26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^2 x}$ .

27.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{1 - \sin 2x}{\pi - 4x}$ .

28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x + \sin 3x}{1 - \cos x}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{\operatorname{tg} x - \sin x}$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x + \sin^2 x}{x^2}$ .

31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ .

32.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}$ .

33.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin 2x}{x}$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin 2x}{x}$ .

35.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin 3x}$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ .

38.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} \cos 2x}{\cos 3x}$ .

39.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 4x \sin 2x}{\sin 3x}$ .

40.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x \cos 2x}{\cos 3x}$ .

41.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} 3x}$ .

42.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos 2x}{\cos 3x}$ .

43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2 \cos x}$ .

44.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^2 x \cos x}$ .

45.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos 2x}}{x^2}$ .

46.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \sqrt{\cos 2x}}{x^2 \sqrt{x+1}}$ .

47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{x^2 \sqrt{4-2x}}$ .

48.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2 \sqrt{9+2x}}$ .

49.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(\operatorname{tg} x - 1) \sin x}{x - \pi/4}$ .

50.  $\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}}{4x - \pi}$ .

51.  $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)\sqrt{4x} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$ .
52.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}}{\cos x}$ .
53.  $\lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{6} - x\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{3} - 2\cos x}$ .
54.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{\pi}{\cos x} - 2x \operatorname{tg} x\right)$ .
55.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{\sin 2\pi x}$ .
56.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{\sin \pi x}$ .
57.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin 7\pi x}{\sin 8\pi x}$ .
58.  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(2+x)\sqrt{-2x}}{\operatorname{tg} \pi x}$ .
59.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \sqrt{x+1} - \sin \sqrt{x})$ .
60.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos \sqrt{x}}$ .
61.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x^2}}{1 - \cos x}$ .
62.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos x}}$ .
63.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin(\sin x))}{x \cos x}$ .
64.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi x \sin x)}{x^2}$ .
65.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos 2x} - \sqrt{\cos x}}{1 - \cos x}$ .
66.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 2x} - \sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$ .
67.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{\sin \pi x}$ .
68.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x / 2)}{1 - \sqrt{x}}$ .
69.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{1 - \sqrt{\cos x}}$ .
70.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \cos x} - \sqrt{1 + \cos 2x}}{\sqrt{x+2} - \sqrt{2}}$ .
71.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$ .
72.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\sin x}$ .
73.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x\sqrt{1+2x}}$ .
74.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} x}$ .
75.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + \operatorname{tg} x}{x + 2\sin x}$ .
76.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x + x}{\arcsin x + \sin x}$ .

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x + \cos x - 1}{x + 2 \sin x}.$$

$$78. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x + x}{1 - \sqrt{\cos x + \arcsin x + \sin x}}.$$

**29.** Знайдіть границю

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \quad 2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{sgn} \sin x. \quad 4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{sgn} \sin x.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}. \quad 6. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + 2[x]). \quad 8. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2[x]).$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - [x]). \quad 10. \lim_{x \rightarrow 1^+} (x - [x]).$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & \text{якщо } x > 0, \\ x^2, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 1 + 2x, & \text{якщо } x > 0, \\ x^2, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 2 - x^2, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 2 - x^2, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

**30.** Знайдіть границю

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+4}{x+8} \right)^{-3x+1}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{1+2x} \right)^{-4x-1}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{5x+5}{5x+1} \right)^{5x+2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+2}{x+1} \right)^{1+2x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x}{2x-3} \right)^{3x-1}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x+4} \right)^{2x+5}.$$

7.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-2}{x+1} \right)^{2x+2}$  .

8.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-4}{2x} \right)^{-3x-1}$  .

9.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-7}{x+1} \right)^{4x-2}$  .

10.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2-3x}{5-3x} \right)^{x+1}$  .

11.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{4x-1}{4x+1} \right)^{2x-1}$  .

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2+x}{-1+x} \right)^{x+2}$  .

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-2+x}{2+x} \right)^{2x-1}$  .

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{2x-3}$  .

15.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-1}{x} \right)^{2-3x}$  .

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{-5x+3}$  .

17.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^{2x+1}$  .

18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x-9}{x} \right)^{3x+1}$  .

19.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+9}{x} \right)^{2x+2}$  .

20.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x-3}{2x+1} \right)^{3x-1}$  .

21.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^{2-5x}$  .

22.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+3}{1+2x} \right)^{-x+1}$  .

23.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{3x-1}{3+3x} \right)^{2x+1}$  .

24.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+5x}{5+5x} \right)^{1-x}$  .

25.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+9}{2+2x} \right)^{x+3}$  .

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^4+9}{2+x^4} \right)^{x^2+3}$  .

27.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1+x}{1+x^2} \right)^{\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}}$  .

28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( 1 + \frac{x}{1+x^2} \right)^{1/x}$  .

29.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1+\sqrt{x}}{1+x} \right)^{1/x}$  .

30.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( 1 + \frac{\sqrt{x}}{1+x} \right)^{1/\sqrt{x}}$  .

31.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{2x}}$  .

32.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+2x)^{\frac{1}{x}}$  .

33.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2x)^{\frac{1}{x} + 1}$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{2x} - 1}$ .

35.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{-\frac{1}{x} + 2}$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{-2}{x} - 2}$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x} \right)^{2x}$ .

38.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+9}{x} \right)^{3x+1}$ .

39.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{-1 + 2x^2}{1 + 2x^2} \right)^{x^2}$ .

40.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left( \frac{x}{1+x} \right)^{x+2}$ .

41.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{1+2x} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

42.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 2\sqrt[3]{1+3x} \right)^{1+2/x}$ .

43.  $\lim_{x \rightarrow 0} 4 \left( \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2 + 3} \right)^{\frac{1}{x}}$ .

44.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 2 \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3} \right)^{2 - \frac{1}{x^2}}$ .

45.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1+x}{1+x^2} \right)^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$ .

46.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{1+x} \right)^{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}}$ .

47.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + x}{x^2 + 3} \right)^x$ .

48.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 3} \right)^{-2x}$ .

49.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x}{x^2 + 3} \right)^{1/x}$ .

50.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - 2} \right)^{-2/x}$ .

**31. Знайдіть границю**

1.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+3}{x+1} \right)^{x+1}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x+4}{3x+1} \right)^x$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{2x+1} \right)^{-x}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{2x-4} \right)^{x+1}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x-1}{2+5x} \right)^{2x+1}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+2}{3x-4} \right)^{x+1}$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{5x+1}{2+2x} \right)^{-x+2}$ .

8.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{10x+1}{x} \right)^{-2x+3}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x}{20x+5} \right)^{-5x+3}$  .

10.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{21x+x^2+1}{5x^2+2} \right)^{x^2}$  .

11.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x^2}{1+2x^2} \right)^{x^2}$

12.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2x^2}{1+x^2} \right)^{-2x^2+1}$  .

13.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2x^2}{3x^2} \right)^{1-2x^2}$  .

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+4x^2}{1+x^2} \right)^{-2x^2+1}$  .

15.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1}$  .

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2x+2}{3x+3} \right)^{2x+1}$  .

17.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x-3}{3x-3} \right)^{2x-1}$  .

18.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1-3x}{3-4x} \right)^{x+1}$  .

19.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+3}{4x-5} \right)^{-2x}$  .

20.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{x^2+1}{3x^2+10} \right)^{-x}$  .

21.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2+1}{3x^2+10} \right)^{-x}$  .

22.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{2x-3}{3x-3} \right)^{2x-1}$  .

23.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x+1}{3x-1} \right)^{2x+1}$  .

24.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{5x+1}{2+2x} \right)^{-x+2}$  .

25.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{2x+3}{x+1} \right)^{x+1}$  .

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1+2x^2}{3x^2} \right)^{-x^4}$  .

27.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2+x}{1+2x} \right)^x$  .

28.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{2+x}{1+x} \right)^{1/x}$  .

29.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+x}{1+2x} \right)^x$  .

30.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{2+x}{1+x} \right)^{1/x}$  .

31.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1+x}{1+2x} \right)^x$  .

32.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{2x+1}{2x+2}}$  .

33.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ .

35.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{x+1}$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x+1}{2+2x}\right)^{-x+2}$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+1}{3x-1}\right)^{\frac{x-1}{\sqrt{x-1}}}$ .

38.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5x+1}{2+2x}\right)^{\frac{-x+2}{1-\sqrt{x}}}$ .

39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x-3}{x-1}\right)^{\frac{\sqrt{1-x}-1}{2x}}$ .

40.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x+2}{1+x}\right)^{2\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}}$ .

**32. Знайдіть границю**

1.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)\cos \pi x}{3^{x-1} - \sqrt{x}}$ .

2.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^{x-1} - \sqrt[3]{x}}{x^2 - 1}$ .

3.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{x-1} - \ln x}{x^3 - 1}$ .

4.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2^{x-1} - \ln x}$ .

5.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2^x - 16}{x^2 - 16}$ .

6.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{10^x - 100}{x^3 - 8}$ .

7.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1+x) - \log_3(1+x)}{x}$ .

8.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2^2(1 + \sqrt[3]{x})}{\log_3^3(1 + \sqrt{x})}$ .

9.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x(\ln^2(x+1) - \ln^2 x)$ .

10.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x}$ .

11.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + 2\sqrt{-x})^{2\sqrt{2}} - 1}{x - \sqrt{-x}}$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-x} - x}{(1 + 3x)^{\sqrt{3}} - 1}$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow -9} \frac{x}{(4 + \sqrt{-x})^{\sqrt{3}} - 1}$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(5-x)^{2\sqrt{2}} - 1}{(x-4)\sqrt{6-x}}$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - \sqrt[4]{1+2x}}{x + \sqrt{x}}$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[5]{1-x} - \sqrt[6]{1-2\sqrt[6]{x}}}{x + \sqrt[6]{x}}$ .

$$17. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} \sqrt{1+2\sqrt{x}} - 1}{x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt[4]{1-2x} \sqrt{1+2\sqrt{x}} - 1}{x + \sqrt{x}}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{2\sqrt{-x}} - 1}{x + \sqrt{-x}}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^{-2x} - e^x}{x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2^{-\sqrt{-2x}} - 1}}{2\sqrt{-x}}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{2\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{e^{-x} - 1}}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{5^x - 1}}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{3^{-\sqrt{-x}} - 1}}{\sqrt{-x}}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} - 1} \right) x.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2 \sqrt{(1+2x)}}{x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)^2}{\ln^2(1-x)}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln^2(1+x)}{\ln(1-\sqrt{x})^2}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+2x)^{\sqrt{2}} - 1}{x\sqrt{4+x}}.$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos 2x}{(1+3x)^{\sqrt{3}} - 1}.$$

$$33. \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{(4+x)^{\sqrt{3}} - 1}.$$

$$34. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(3-x)^{\sqrt{2}} - 1}{x-2}.$$

$$35. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[4]{1+2x}}{x\sqrt{4+x}}.$$

$$36. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[5]{1-x} - \sqrt[6]{1-2x}}{x}.$$

$$37. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} \sqrt{1+2x} - 1}{x(1+\sin x)}.$$

$$38. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1-2x} \sqrt{1+2x} - 1}{x(1+\cos x)}.$$

$$39. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}.$$

$$40. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x}.$$

$$41. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{-x} - 1}{2x}.$$

$$42. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{-x} - 1}.$$

43.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{5^x - 1}$ .

44.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^{-x} - 1}{x}$ .

45.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) x^2$ .

46.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{x - 1}$ .

47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + 2x)}{x}$ .

48.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - x)}{x^2}$ .

49.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + 2x} \ln(1 + x)}{\ln(1 - x)}$ .

50.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4 - 3x} \ln(1 + x)}{\ln(1 - \sqrt{x})}$ .

51.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + x)}{x 2^{\sqrt{4-x}}}$ .

52.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + x)}{\log_3(1 + x)}$ .

53.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} (\ln(x + 1) - \ln x)$ .

54.  $\lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$ .

55.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin 2x)}{x \sqrt{1 + 3 \cos x}}$ .

56.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 2x)}{x}$ .

57.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - 1}{x \sqrt{2}}$ .

58.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{\ln(\cos 2x)} - 1}{x \sqrt{1 + 3 \sin x}}$ .

59.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sqrt{1 + 2x}}{(1 + \sin x)^{\sqrt{2}} - 1}$ .

60.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sin x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^{\sqrt{3}} - 1}$ .

61.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{x+1} - 2}{\ln(1 + 2x)}$ .

62.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(\pi(1 + x/2))}{\ln(x + 1)}$ .

63.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} 2x} - 1}{(1 + 2 \sin x)^{\sqrt{2}} - 1}$ .

64.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)\sqrt{2}}{\ln \cos 2x}$ .

65.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{e^{\sin x} - 1}$ .

66.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^x}{\cos 2x - \cos x}$ .

67.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^{3x} - 1}$ .

68.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{4x} - 1}{\sin(\pi(x/2 + 1))}$ .

$$69. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3^{5x-3} - 3^{2x^2}}{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$70. \lim_{x \rightarrow \pi/2-} \frac{2^{\cos^2 x} - 1}{\ln \cos x}.$$

$$71. \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x-1)^2}{e^{\sin \pi x} - e^{-\sin 3\pi x}}.$$

$$72. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\ln \sin 3x}{(6x - \pi)^2}.$$

$$73. \lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(x-2\pi)^2}{\operatorname{tg}(\cos x - 1)}.$$

$$74. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2^x + 7} - \sqrt{2^{x+1} + 5}}{\ln x}.$$

$$75. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}.$$

$$76. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^{2x} - 5^{3x}}{2x - \operatorname{arctg} x}.$$

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x \sin x - \cos 2x}{\sin^2 x}.$$

$$78. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{3x} - 3^{5x}}{\sin 7x - 2x}.$$

$$79. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{x + \ln \operatorname{tg} x}{\cos 2x}.$$

$$80. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(9 - x^2)}{\sin 2\pi x}.$$

$$81. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{\ln x}.$$

$$82. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(5 - 2x)}{\sqrt{10 - 3x} - 2}.$$

$$83. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{e^{\cos^2 x} - 1}{\ln \sin x}.$$

$$84. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3 \operatorname{arcsin} x} - 1 + \sin x}{\operatorname{arctg} 6x}.$$

$$85. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^x - 1 + \sin x}{\ln(1 + 2 \operatorname{arcsin} x)}.$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + \ln(1 + x)}{(1 + \operatorname{arctg} x)^{\sqrt{3}} - 1}.$$

$$87. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1)}{(\cos x)^{\sqrt{3}} - 1}.$$

$$88. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(e + x)}{(1 + \ln(1 + \sin x))^{\sqrt{3}} - 1}.$$

### 33. Знайдіть границю

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \left( 6 - \frac{5}{\cos x} \right)^{1/\operatorname{tg} x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 - 3^{\sin^2 x} \right)^{1/\ln \cos x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0+} \left( \cos \sqrt{x} \right)^{1/\operatorname{tg} x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x + \sin x)^{1/x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 1-} (\operatorname{arcsin} x)^{\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{arctg} x)^{1/\operatorname{tg} \pi x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos \pi x)^{1/(x \sin \pi x)}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \sqrt{\cos x} \right)^{1/\operatorname{arcsin} x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\ln(1+2x)}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 3^+} \left( \frac{6-x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1^-} (3-2x)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} (2-2^{\sin^2 x})^{1/\sin x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+x3^x}{1+x7^x} \right)^{1/\operatorname{tg}^2 x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} (2-\cos x)^{1/x^2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin 5x^2}{\sin x} \right)^{1/(x+6)}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2^{2x}-1}{x} \right)^{x+1}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2-x}{x} \right)^{1/\ln(2-x)}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 1} (1+e^x)^{\frac{\sin \pi x}{1-x}}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\sin x)^{\frac{\sin x}{\operatorname{ctg} x}}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow \pi} (x+\sin x)^{x+\sin x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{e^{\sin \pi x}-1}{x^2-1} \right)^{x^2+1}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{9-2x}{3} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{6}}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 1} (2e^{x-1}-1)^{x/(x-1)}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 2} \left( \frac{\cos x}{\cos 2} \right)^{\frac{1}{x-2}}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{\operatorname{arctg} 2x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} 2x} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \pi/4} (\operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{ctg} x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \right)^{1/\cos x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2-x}{x} \right)^{1/\sin \pi x}.$$

$$31. \lim_{x \rightarrow 0} (1+\operatorname{tg} x)^{1/x}.$$

$$32. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/\operatorname{tg} x^2}.$$

33.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} x(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$ .
34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\cos 2x}{\cos 3x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$ .
35.  $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{6+x} \left( 2 - \frac{x}{3} \right)^{\sin \pi x}$ .
36.  $\lim_{x \rightarrow \pi/8} x(\operatorname{tg} 2x)^{\sin(x+\pi/8)}$ .
37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1+2^x x}{1+3^x x} \right)^{1/x}$ .
38.  $\lim_{x \rightarrow 1-} (1 - \ln x)^{1/\sin \pi x}$ .
39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos \left( \pi (1 + \sin x)^{1/x} \right)$ .
40.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sin \left( e \left( 1 + \sin \frac{1}{x} \right)^{-x} \right)$ .
41.  $\lim_{x \rightarrow 0} \arccos \frac{\sqrt{1 + \sin x} - 1}{x}$ .
42.  $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin \frac{e^{2x} - 1}{4 \sin x}$ .
43.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{\ln(1+x)}{\ln(2-x)}}$ .
44.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2x-1}{x} \right)^{\frac{\ln(3+2x)}{\ln(2-x)}}$ .
45.  $\lim_{x \rightarrow 3} \left( \frac{\sin x}{\sin 3} \right)^{\frac{1}{x-3}} \sqrt{3x}$ .
46.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2-x}{x} \right)^{\frac{1}{\ln(2-x)}}$ .
47.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 \cos 2x + x \operatorname{arctg} \cos x}$ .
48.  $\lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{x \left( 4 + \cos \frac{1}{x} \right) + \sqrt{x} \cos x}$ .
49.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \sqrt{\cos 2x + \frac{\ln \cos x}{x^2}}$ .
50.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg} \ln \left( x + \frac{e^x - 1}{\ln(1+x)} \right)$ .
51.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \sqrt{x^2 + x} - 2\sqrt{x^2 - x} + x \right)$ .
52.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos 2x \cos 3x}{x^2}$ .
53.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a}, a \in \mathbb{R}$ .
54.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a}, a \in \mathbb{R}$ .
55.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^x - x^a}{x - a}, a > 0$ .
56.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^x - a^a}{x - a}, a > 0$ .
57.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{a^{x^2} + b^{x^2}}{a^x + b^x} \right)^{1/x}, a > 0, b > 0$ .
58.  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{a^{a^x} - a^{x^a}}{a^x - x^a}, a > 0$ .

$$59. \lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x + 3^x)^{1/x}.$$

34. Знайдіть границю

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos x}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - e^{\sin x}}{x(e^x + x)}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin 4x} - e^{x \sin 2x}}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left( \frac{\ln(1 + \pi x)}{x} \right).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1 - \cos 2x}{x^2}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{e^\pi - e^x}{\sin 5x - \sin 3x}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \ln(e + x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cos^2 2x \cos^3 3x}{x^2 2^x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2 + \ln x)}{\ln(3 + \ln x)}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow e} \frac{e^x - x^e}{x - e}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \ln \left( \frac{1 + 2x}{1 + x} \right)}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \sqrt{x+1} - \cos \sqrt{x} \right).$$

$$15. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow -1+} \frac{\sqrt{\pi} + \sqrt{\arccos x}}{\sqrt{x+1}}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( \operatorname{arctg} \frac{x+1}{x+2} - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{x^3}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow +\infty} \arcsin \frac{1-x}{1+x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x2^x)}{x}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \sin \left( (\sin x)^{\operatorname{tg} x} \right).$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{\cos 4x} - \sqrt[3]{\cos 5x}}{1 - \cos 3x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \sqrt{x^2 + 1} - \sin \sqrt{x^2 - 1} \right).$$

25.  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{[x]}{x}$ .

26.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x]}{x}$ .

27.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \ln \cos \frac{\pi}{x}$ .

28.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1}$ .

29.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \cos \frac{e^x}{e^x + 1}$ .

30.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ .

31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \sin x)}{x2^x}$ .

32.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2 e^{-\sqrt{1+x}}}$ .

33.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$ .

34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \operatorname{ch} x}{x^2}$ .

35.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln \operatorname{ch}^2 x}$ .

36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}$ .

37.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x - \ln \operatorname{ch}^2 x}$ .

38.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{2 \sin x}}{\operatorname{th} x}$ .

39.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(e + e^{-x})}{\ln(2 + e^{2x})}$ .

40.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^{2x} + e^{3x})}{x \operatorname{th} x}$ .

41.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{2x} + 1}{2 + e^{2x}}$ .

42.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + e^{2x}}{e^x + e^{3x}}$ .

43.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{2x} + 1}{2 + e^{2x}}$ .

44.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{2x}}{e^x + e^{3x}}$ .

45.  $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \left( \frac{\sin x}{x\sqrt{3}} \right)$ .

46.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{\sqrt{x}} \operatorname{arcctg} \left( \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{\sqrt{3}}}{x} \right)$ .

47.  $\lim_{x \rightarrow 0} 2^x \ln \frac{\sin \pi x}{2x}$ .

48.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sin \ln(x+1) - \sin \ln x)$ .

49.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \sqrt{x^4 + x^2 \sqrt{x^4 + 1}} - x^2 \sqrt{2} \right)$ .

$$50. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{m}{1-x^m} - \frac{n}{1-x^n} \right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$51. \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^n - a^n - na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$53. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in [0; +\infty).$$

$$54. \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+x^n}, \quad x \in [0; +\infty).$$

$$55. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 - \sin x}{x - \pi/2}. \quad 56. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\pi - 4 \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}}{x\sqrt{2+x}}.$$

$$57. \lim_{x \rightarrow 0} x \left[ \frac{1}{x} \right]. \quad 58. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}.$$

$$59. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}. \quad 60. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{\ln(1+3^x)}.$$

$$61. \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{ctg} 2x. \quad 62. \lim_{x \rightarrow 0^-} \operatorname{ctg} 2x.$$

$$63. \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{якщо } x > 0, \\ x^2, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

$$64. \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \quad f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1, & \text{якщо } x > 0, \\ 1 - x^2, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

$$65. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x^2} - \cos x}{x^2}. \quad 66. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1-x} - \sqrt[5]{1-2x}}{x}.$$

35.3'ясуйте, чи функція  $f$  є нескінченно малою в точці  $a$

$$1. f(x) = x \arcsin \frac{1}{x^2}, \quad a = \infty.$$

$$2. f(x) = \frac{\operatorname{tg} x^2}{x}, \quad a = 0.$$

$$3. f(x) = (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \sin x, a = +\infty. \quad 4. f(x) = x \sin \frac{1}{x^2}, a = \infty.$$

$$5. f(x) = x \ln(1 + 1/x^2), a = \infty. \quad 6. f(x) = [x](x-1), a = 1.$$

$$7. f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 + \sin^2 x}}, a = 0.$$

$$8. f(x) = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x, a = 0.$$

**36.** Переконайтесь, що функція  $f$  є обмеженою в деякому проколеному околі точки  $a$

$$1. f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$2. f(x) = \frac{\operatorname{tg} x^2}{x}, a = 0.$$

$$3. f(x) = x(\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \sin x, a = +\infty.$$

$$4. f(x) = \cos \frac{1}{x}, a = \infty.$$

$$5. f(x) = \sin x \ln \frac{2x+1}{x+1}, a = \infty.$$

$$6. f(x) = \frac{[x]}{x} \sin x, a = \infty.$$

**37.** З'ясуйте, чи має в точці  $a$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  границю

$$1. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$2. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = \infty.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \geq 2, \\ x^2, & \text{якщо } x < 2, \end{cases} a = 2.$$

$$4. f(x) = \cos \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{якщо } x \geq 3, \\ x^2, & \text{якщо } x < 3, \end{cases} a = 2.$$

$$6. f(x) = \cos \frac{1}{x}, a = \infty.$$

$$7. f(x) = \arcsin x, a = -1.$$

$$8. f(x) = \arccos x, a = 1.$$

$$9. f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, a = 0.$$

$$10. f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, a = \infty.$$

$$11. f(x) = \frac{x+1}{|x+1|}, a = -1.$$

$$12. f(x) = [x], a = 1.$$

$$13. f(x) = 2^x, a = \infty.$$

$$14. f(x) = \frac{2^x + 1}{2^x - 1}, a = \infty.$$

**38.** Знайдіть  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  і  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)$  та з'ясуйте, чи існує границя  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$

$$1. f(x) = x^2 \sin x, a = 0. \quad 2. f(x) = \frac{\cos x}{x}, a = \infty.$$

$$3. f(x) = x + \sin \frac{1}{x}, a = 0. \quad 4. f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{1+x}, a = \infty.$$

$$5. f(x) = e^{\frac{\cos \frac{1}{x^2}}{x^2}}, a = 0. \quad 6. f(x) = e^{\frac{\cos \frac{1}{x^2}}{x^2}}, a = \infty.$$

$$7. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, a = 0. \quad 8. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, a = \infty.$$

$$9. f(x) = \operatorname{arctg} x, a = 0. \quad 10. f(x) = (1 + \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x + 1}}, a = \infty.$$

$$11. f(x) = \operatorname{sgn} \cos x, a = 0. \quad 12. f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}, a = 0.$$

$$13. f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}, a = 0. \quad 14. f(x) = \operatorname{arcctg} x, a = \infty.$$

$$15. f(x) = \left( \frac{1+x}{1+2x} \right)^x, a = \infty. \quad 16. f(x) = \left( \frac{1}{x} \right)^{\frac{2x+1}{2x+2}}, a = 0.$$

$$17. f(x) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{1}{x}}, a = 0. \quad 18. f(x) = e^{-x^2}, a = \infty.$$

$$19. f(x) = \left( \frac{2x+1}{3x-1} \right)^{x+1}, a = \infty. \quad 20. f(x) = \left( \frac{5x+1}{2+2x} \right)^{-x+2}, a = \infty.$$

$$21. f(x) = 2^x, a = \infty. \quad 22. f(x) = 2^{1/x}, a = 0.$$

$$23. f(x) = \left( \frac{5x+1}{2+2x} \right)^{-x}, a = \infty. \quad 24. f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x), a = 0.$$

$$25. f(x) = \operatorname{sgn}(\arcsin x), a = 0. \quad 26. f(x) = \operatorname{sgn} \left( \arccos x - \frac{\pi}{2} \right), a = 0.$$

$$27. f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arctg} x), a = 0. \quad 28. f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{arcctg} x - \pi/2), a = 0.$$

$$29. f(x) = \frac{\cos x}{x}, a = 0. \quad 30. f(x) = \frac{\cos x}{x}, a = \infty.$$

$$31. f(x) = \frac{\sin x}{x}, a = \infty. \quad 32. f(x) = \frac{\sin x}{x}, a = 0.$$

$$33. f(x) = \frac{\sin x}{x}, a = \pi/2. \quad 34. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = 0.$$

$$35. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = \infty. \quad 36. f(x) = \sin \frac{1}{x}, a = \frac{4}{\pi}.$$

39. Подайте функцію  $f$  у вигляді  $f(x) = A + \alpha(x)$ , де  $A$  – стала, а  $\alpha$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow a$

$$1. f(x) = \frac{\sin x}{x}, a = 0.$$

$$2. f(x) = \frac{e^x - 1}{x}, a = 0.$$

$$3. f(x) = (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, a = 1.$$

40. Подайте функцію  $f$  у вигляді  $f(x) = A + B(x-a) + \alpha(x)(x-a)$ , де  $A$  і  $B$  – сталі, а  $\alpha$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow a$

$$1. f(x) = e^x, a = 0. \quad 2. f(x) = \cos \sqrt{x}, a = 0.$$

$$3. f(x) = \sin x, a = 0. \quad 4. f(x) = x + x^3, a = 1.$$

$$5. f(x) = x^x, a = 1.$$

41. Подайте функцію  $f$  у вигляді  $f(x) = A + B(x-a) + C(x-a)^2 + \beta(x)(x-a)^2$ , де  $A$ ,  $B$  і  $C$  – сталі, а  $\beta$  – нескінченно мала функція при  $x \rightarrow a$

$$1. f(x) = e^x, a = 0. \quad 2. f(x) = \cos \sqrt{x}, a = 0.$$

$$3. f(x) = \sin x, a = 0. \quad 4. f(x) = x + x^3, a = 1.$$

$$5. f(x) = x^x, a = 1.$$

42. Знайдіть границю  $\lim_{H \ni x \rightarrow a} f(x)$

$$1. f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}, a = 1, H = (1; +\infty).$$

$$2. f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}, \quad a = 1, \quad H = (-\infty; -1).$$

$$3. f(x) = \sin x, \quad a = +\infty, \quad H = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2\pi n : n \in \mathbb{N} \right\}.$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = -3, \\ 2x, & \text{якщо } -1 < x < 2, \end{cases} \quad a = 0, \quad H = [-1; 2] \cup \{-3\}.$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = -3, \\ 2x, & \text{якщо } -1 < x < 2, \end{cases} \quad a = 1, \quad H = [-1; 2] \cup \{-3\}.$$

$$6. f(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x = -3, \\ 2x, & \text{якщо } -1 < x < 2, \end{cases} \quad a = 3, \quad H = [-1; 2] \cup \{-3\}.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{якщо } x = 1, \\ 2, & \text{якщо } x = 3, \end{cases} \quad a = 0, \quad H = (-\infty; 1] \cup \{3\}.$$

$$8. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{якщо } x = 1, \\ 2, & \text{якщо } x = 3, \end{cases} \quad a = 1, \quad H = (-\infty; 1] \cup \{3\}.$$

$$9. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{якщо } x = 1, \\ 2, & \text{якщо } x = 3, \end{cases} \quad a = 3, \quad H = (-\infty; 1] \cup \{3\}.$$

$$10. f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 \leq x < 1, \\ 1, & \text{якщо } x = 1, \\ 2, & \text{якщо } x = 3, \end{cases} \quad a = 0,5, \quad H = (-\infty; 1] \cup \{3\}.$$

$$11. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 < x < 2, \\ 1, & \text{якщо } 2 \leq x < 3, \\ -x, & \text{якщо } x > 3, \end{cases} a = 0, H = \{1\} \cup (3; +\infty).$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 < x < 2, \\ 1, & \text{якщо } 2 \leq x < 3, \\ -x, & \text{якщо } x > 3, \end{cases} a = 1, H = \{1\} \cup (3; +\infty).$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 < x < 2, \\ 1, & \text{якщо } 2 \leq x < 3, \\ -x, & \text{якщо } x > 3, \end{cases} a = 2, H = \{1\} \cup (3; +\infty).$$

$$14. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x < 0, \\ x, & \text{якщо } 0 < x < 2, \\ 1, & \text{якщо } 2 \leq x < 3, \\ -x, & \text{якщо } x > 3, \end{cases} a = 3, H = \{1\} \cup (3; +\infty).$$

**43.** З'ясуйте, чи існує скінченна або нескінченна границя  $\lim_{H \ni x \rightarrow a} f(x)$

1.  $f(x) = \sqrt{\cos x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

2.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

3.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = (0; +\infty)$ .

4.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = (-\infty; 0)$ .

5.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{N}$ .

6.  $f(x) = \sqrt{\sin x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{Z}$ .

7.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $a = 0$ ,  $H = (-\infty; 0)$ .

8.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

9.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $a = 0$ ,  $H = (0; +\infty)$ .

10.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{N}$ .

11.  $f(x) = e^x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = (-\infty; 0)$ .

19.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

20.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = (0; +\infty)$ .

21.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = (-\infty; 0)$ .

22.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{N}$ .

23.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{Z}$ .

24.  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = \mathbb{R}$ .

25.  $f(x) = \operatorname{arcctg} x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = (0; +\infty)$ .

26.  $f(x) = \arccos x$ ,  $a = 1$ ,  $H = (-1; 1)$ .

12.  $f(x) = e^x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = (0; +\infty)$ .  
 13.  $f(x) = e^x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = \mathbb{N}$ .  
 14.  $f(x) = e^x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = \mathbb{Z}$ .  
 15.  $f(x) = e^{\cos \frac{1}{x^2}}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{R}$ .  
 16.  $f(x) = e^{\cos \frac{1}{x^2}}$ ,  $a = 0$ ,  $H = (0; +\infty)$ .  
 17.  $f(x) = e^{\cos \frac{1}{x^2}}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{N}$ .  
 18.  $f(x) = e^{\cos \frac{1}{x^2}}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{Z}$ .  
 34.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{N}$ .  
 35.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = -1$ ,  $H = D(f)$ .  
 36.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = (1; 8)$ .  
 37.  $f(x) = \text{arcctg } x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = \mathbb{N}$ .  
 38.  $f(x) = \text{arcctg } x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = \mathbb{Z}$ .  
 39.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = 1$ ,  $H = \mathbb{R}$ .  
 40.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = 1$ ,  $H = (0; +\infty)$ .  
 27.  $f(x) = \arccos x$ ,  $a = 1$ ,  $H = D(f)$ .  
 28.  $f(x) = \arccos x$ ,  $a = 1$ ,  $H = \mathbb{N}$ .  
 29.  $f(x) = \arccos x$ ,  $a = 1$ ,  $H = \mathbb{Z}$ .  
 30.  $f(x) = \text{arcctg } x$ ,  $a = \infty$ ,  $H = (-\infty; 0)$ .  
 31.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = \mathbb{R}$ .  
 32.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = (0; +\infty)$ .  
 33.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $a = 0$ ,  $H = (-\infty; 0)$ .  
 41.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = 1$ ,  $H = (-1; 1)$ .  
 42.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = 1$ ,  $H = D(f)$ .  
 43.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = 1$ ,  $H = \mathbb{N}$ .  
 44.  $f(x) = \arcsin x$ ,  $a = 1$ ,  $H = \mathbb{Z}$ .  
 45.  $f(x) = \arccos x$ ,  $a = 1$ ,  $H = \mathbb{R}$ .  
 46.  $f(x) = \arccos x$ ,  $a = 1$ ,  $H = (0; +\infty)$ .

### 31. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.

- 13.31.  $(-1; +\infty)$ . 13.32.  $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ . 13.33.  $(-\infty; +\infty)$ . 13.34.  $[0; +\infty)$ . 13.35.  $(0; 2)$ . 13.36.  $\left[ \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}; \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \right]$ . 13.37.  $[-2; 1]$ . 13.38.  $(-3; 3)$ . 13.39.  $[0; 1]$ . 13.40.  $[0; 1]$ . 13.41.  $[-4; 4]$ . 13.42.  $(-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ . 13.43.  $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ . 13.44.  $(-\infty; +\infty)$ . 13.45.  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$ . 13.46.  $[0; +\infty)$ . 17.31. парна. 17.32. непарна. 17.33. ні парна, нінепарна. 17.34. ні парна, нінепарна. 17.35. парна. 17.36. ні парна, нінепарна. 17.37. непарна. 17.38. ні парна, нінепарна. 17.39. парна. 17.40. ні парна, нінепарна. 17.41. не можна досліджувати на парність чи непарність, оскільки область визначення функції не є симметричною відносно початку координат. 17.42. див. 17.41. 17.43. парна. 17.44. непарна. 17.45. непарна. 17.46. парна. 17.47. ні парна, нінепарна. 17.48. ні парна, нінепарна. 17.49. непарна. 17.50. непарна. 17.51. непарна. 17.52. парна. 18.31. періодична. 18.32. періодична. 18.33. періодична. 18.34. неперіодична. 18.35. неперіодична. 18.36. неперіодична. 18.37. неперіодична. 18.38. періодична.

**18.39.** неперіодична. **18.40.** неперіодична. **18.41.** неперіодична. **18.42.** періодична. **18.43.** неперіодична. **18.44.** періодична. **18.45.** неперіодична. **18.46.** періодична. **18.47.** періодична. **18.48.** неперіодична. **25.31.**  $1/3$ . **25.32.**  $3/7$ . **25.33.**  $7/3$ . **25.34.**  $10$ . **25.35.**  $-\infty$ . **25.36.**  $\infty$ . **25.37.**  $0$ . **25.38.**  $0$ . **25.39.**  $2/3$ . **25.40.**  $-2/3$ . **25.41.**  $-4/5$ . **25.42.**  $6/7$ . **25.43.**  $5/7$ . **25.44.**  $4/7$ . **25.45.**  $3/5$ . **25.46.**  $4/3$ . **25.47.**  $-1$ . **25.48.**  $4/9$ . **25.49.**  $1/2$ . **25.50.**  $1$ . **25.51.**  $1/2$ . **25.52.**  $3$ . **25.53.**  $-3$ . **25.54.**  $\infty$ . **25.55.**  $\infty$ . **25.56.**  $\infty$ . **25.57.**  $\infty$ . **25.58.**  $\infty$ . **25.59.**  $\infty$ . **25.60.**  $\infty$ . **25.61.**  $\infty$ . **25.62.**  $-\infty$ . **25.63.**  $1$ . **25.64.**  $\infty$ . **25.65.**  $0$ . **25.66.**  $3/2$ . **25.67.**  $n/m$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ . **25.68.**  $10$ . **25.69.**  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . **25.70.**  $6$ . **25.71.**  $1$ . **25.72.**  $-1/7$ . **25.73.**  $\frac{n(n+1)}{2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . **25.74.**  $49/24$ . **25.75.**  $\infty$ . **25.76.**  $\infty$ . **25.77.**  $3$ . **25.78.**  $0$ . **26.31.**  $1$ . **26.32.**  $1/2$ . **26.33.**  $-1/2$ . **26.34.**  $-5$ . **26.35.**  $0$ . **26.36.**  $0$ . **26.37.**  $0$ . **26.38.**  $0$ . **26.39.**  $-\infty$ . **26.40.**  $\infty$ . **26.41.**  $-\infty$ . **26.42.**  $-\infty$ . **26.43.**  $\infty$ . **26.44.**  $\infty$ . **26.45.**  $\infty$ . **26.46.**  $-\infty$ . **27.31.**  $\sqrt{2}/2$ . **27.32.**  $1/\sqrt[3]{4}$ . **27.33.**  $0$ . **27.34.**  $\sqrt{2}/2$ . **27.35.**  $1/16$ . **27.36.**  $1/4$ . **27.37.**  $1/4$ . **27.38.**  $1/2$ . **27.39.**  $2/3$ . **27.40.**  $3/2$ . **27.41.**  $-2$ . **27.42.**  $0$ . **27.43.**  $0$ . **27.44.**  $5$ . **27.45.**  $\infty$ . **27.46.**  $\frac{1}{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . **27.47.**  $1$ . **27.48.**  $0$ . **27.49.**  $-5/6$ . **27.50.**  $\infty$ . **27.51.**  $3/2$ . **27.52.**  $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ . **27.53.**  $\frac{2-\sqrt{13}}{\sqrt[3]{9}}$ . **27.54.**  $\frac{\sqrt[n]{2}}{2n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . **27.55.**  $1$ . **27.56.**  $1$ . **27.57.**  $0$ . **27.58.**  $0$ . **27.59.**  $1/2$ . **27.60.**  $1$ . **27.61.**  $\infty$ . **27.62.**  $\infty$ . **27.63.**  $0$ . **27.64.**  $\infty$ . **28.31.**  $2$ . **28.32.**  $2$ . **28.33.**  $0$ . **28.34.**  $0$ . **28.35.**  $0$ . **28.36.**  $1/3$ . **28.37.**  $2/3$ . **28.38.**  $1$ . **28.39.**  $0$ . **28.40.**  $-\infty$ . **28.41.**  $1/3$ . **28.42.**  $-\infty$ . **28.43.**  $2$ . **28.44.**  $0$ . **28.45.**  $1$ . **28.46.**  $3/2$ . **28.47.**  $\infty$ . **28.48.**  $4/3$ . **28.49.**  $\sqrt{2}$ . **28.50.**  $\sqrt{2}/8$ . **28.51.**  $4/\pi$ . **28.52.**  $\sqrt{2}/2$ . **28.53.**  $1/2$ . **28.54.**  $2$ . **28.55.**  $-2/\pi$ . **28.56.**  $2/\pi$ . **28.57.**  $7/8$ . **28.58.**  $2/\pi$ . **28.59.**  $0$ . **28.60.**  $0$ . **28.61.**  $\sqrt{2}$ . **28.62.**  $4/3$ . **28.63.**  $1$ . **28.64.**  $\pi$ . **28.65.**  $-3/2$ . **28.66.**  $-1/2$ . **28.67.**  $\frac{1}{2\pi}$ . **28.68.**  $\pi$ . **28.69.**  $0$ . **28.70.**  $0$ . **28.71.**  $1$ . **28.72.**  $1$ . **28.73.**  $1$ . **28.74.**  $1$ . **28.75.**  $2/3$ . **28.76.**  $3/2$ . **28.77.**  $1/3$ . **28.78.**  $3/2$ . **29.1.**  $-\pi/2$ . **29.2.**  $\pi/2$ . **29.3.**  $1$ . **29.4.**  $1$ . **29.5.**  $1$ . **29.6.**  $0$ . **29.7.**  $1$ . **29.8.**  $3$ . **29.9.**  $1$ . **29.10.**  $0$ . **29.11.**  $1$ . **29.12.**  $0$ . **29.13.**  $1$ . **29.14.**  $2$ . **30.31.**  $\sqrt{e}$ . **30.32.**  $e^2$ . **30.33.**  $e^{-2}$ . **30.34.**  $e^{-1/2}$ . **30.35.**  $e^{-3}$ . **30.36.**  $e^{-2}$ . **30.37.**  $e^6$ . **30.38.**  $e^{27}$ . **30.39.**  $e^{-1}$ . **30.40.**  $2/e$ . **30.41.**  $e$ . **30.42.**  $\infty$ . **30.43.**  $4$ . **30.44.**  $4$ . **30.45.**  $1$ . **30.46.**  $1$ . **30.47.**  $e$ . **30.48.**  $e^2$ . **30.49.**  $1$ . **30.50.**  $1$ . **31.31.**  $0$ . **31.32.**  $\infty$ . **31.33.**  $\infty$ . **31.34.**  $0$ . **31.35.**  $0$ . **31.36.**  $\infty$ . **31.37.**  $0$ . **31.38.**  $\infty$ . **31.39.**  $1/\sqrt[4]{3}$ . **31.40.**  $2$ . **32.31.**  $\sqrt{2}$ . **32.32.**  $\sqrt{3}/9$ . **32.33.**  $0$ . **32.34.**  $-\sqrt{2}$ . **32.35.**  $-1/12$ . **32.36.**  $2/15$ . **32.37.**  $4/3$ . **32.38.**  $1/4$ . **32.39.**

2. 32.40.  $-1$ . 32.41.  $-\frac{1}{2}\ln 2$ . 32.42.  $-2$ . 32.43.  $\frac{\ln 10}{\ln 5}$ . 32.44.  $-\ln 3$ . 32.45.  $\infty$ .  
 32.46.  $e$ . 32.47.  $2$ . 32.48.  $\infty$ . 32.49.  $-3$ . 32.50.  $0$ . 32.51.  $\frac{1}{4\ln 2}$ . 32.52.  $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ . 32.53.  
 $0$ . 32.54.  $\frac{1}{e}$ . 32.55.  $1$ . 32.56.  $0$ . 32.57.  $\sqrt{2}$ . 32.58.  $0$ . 32.59.  $\sqrt{2}/2$ . 32.60.  $\sqrt{3}/3$ .  
 32.61.  $\ln 2$ . 32.62.  $\pi/2$ . 32.63.  $\sqrt{2}/2$ . 32.64.  $\infty$ . 32.65.  $5$ . 32.66.  $\infty$ . 32.67.  $0$ .  
 32.68.  $-\frac{8}{\pi}$ . 32.69.  $\frac{9}{\pi}\ln 3$ . 32.70.  $0$ . 32.71.  $\frac{1}{e\pi^2}$ . 32.72.  $-\frac{1}{8}$ . 32.73.  $-2$ . 32.74.  
 $-\frac{1}{3}\ln 2$ . 32.75.  $\ln 4$ . 32.76.  $2\ln 6 - 3\ln 5$ . 32.77.  $3$ . 32.78.  $\frac{3}{5}\ln 2 - \ln 3$ . 32.79.  $\infty$ .  
 32.80.  $\infty$ . 32.81.  $1/2$ . 32.82.  $8/3$ . 32.83.  $-2$ . 32.84.  $2/3$ . 32.85.  $(1 + \ln 2)/2$ .  
 32.86.  $\sqrt{3}$ . 32.87.  $\infty$ . 32.88.  $\sqrt{3}/3$ . 33.31.  $e$ . 33.32.  $e^{-1/2}$ . 33.33.  $\pi/2$ . 33.34.  $e^{5/2}$ .  
 . 33.35.  $3$ . 33.36.  $\pi/8$ . 33.37.  $1$ . 33.38.  $e^{1/\pi}$ . 33.39.  $\cos(\pi e)$ . 33.40.  $\sin 1$ . 33.41.  
 $\pi/3$ . 33.42.  $\pi/6$ . 33.43.  $2$ . 33.44.  $1/5$ . 33.45.  $3\exp(\operatorname{ctg} 3)$ . 33.46.  $e^2$ . 33.47.  $2$ .  
 33.48.  $0$ . 33.49.  $\operatorname{tg}(1/\sqrt{2})$ . 33.50.  $0$ . 33.51.  $\infty$ . 33.52.  $7$ . 33.53.  $\cos a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .  
 33.54.  $-\sin a$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . 33.55.  $a^a \ln(a/e)$ ,  $a > 0$ . 33.56.  $a^a \ln(ae)$ ,  $a > 0$ . 33.57.  
 $1/\sqrt{ab}$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ . 33.58.  $a^{a^a} \ln a$ ,  $a > 0$ . 33.59.  $3$ . 34.31.  $1$ . 34.32.  $-e/2$ .  
 34.33.  $1$ . 34.34.  $-1/2$ . 34.35.  $1$ . 34.36.  $-1$ . 34.37.  $1/(\ln 4)$ . 34.38.  $-1$ . 34.39.  $-\infty$ .  
 34.40.  $3$ . 34.41.  $1/2$ . 34.42.  $1$ . 34.43.  $1$ . 34.44.  $0$ . 34.45.  $\pi/6$ . 34.46.  $\pi/3$ . 34.47.  
 $\ln(\pi/2)$ . 34.48.  $0$ . 34.49.  $\sqrt{2}/4$ . 34.50.  $(m-n)/2$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 34.51.  
 $\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{R}$ . 34.52.  $2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . 34.53.  $0$ , якщо  $x \in [0; 1)$ ;  $1/2$ ,  
 якщо  $x = 1$ ;  $1$ , якщо  $x \in (1; +\infty)$ . 34.54.  $1$ , якщо  $x \in [0; 1]$ ;  $x$ , якщо  $x \in (1; +\infty)$ .  
 34.55.  $0$ . 34.56.  $\sqrt{2}$ . 34.57.  $1$ . 34.58.  $0$ . 34.59.  $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ . 34.60.  $\infty$ . 34.61.  $\infty$ . 34.62.  
 $-\infty$ . 34.63.  $0$ . 34.64.  $1$ . 34.65.  $0$ . 34.66.  $-1/10$ . 38.31.  
 $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0$ . 38.32.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .  
 38.33.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x} = \underline{\lim}_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{\sin x}{x} = \frac{2}{\pi}$ . 38.34.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 1$ ;  $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = -1$ ;  
 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  – не існує. 38.35.  $\overline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \underline{\lim}_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{x} = 0$ . 43.31.  
 $\lim_{\mathbb{R} \ni x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$ .

## Розділ 4. Неперервність функцій в $\mathbb{R}$

Поняття неперервності функції є математичною моделлю інтуїтивних уявлень про неперервність часу, потоку води, телефонної лінії і т.д. Природні явища описуються певними функціями. Якщо якесь явище відбувається неперервно, то не відбувається різких змін. Тому дослідження неперервності функцій має важливе практичне значення. Разом з цим, неперервність функції дає можливість обґрунтувати існування розв'язків відповідних рівнянь, що має також важливе теоретичне значення.

**1. Неперервність в точці функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Неперервність суми, добутку і частки.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (1)$$

Докладніше умову неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  можна виразити у вигляді трьох умов: 1) функція повинна бути визначеною в деякому околі точки  $a$ ; 2) в точці  $a$  вона повинна мати скінченну границю; 3) ця границя повинна дорівнювати значенню функції в точці  $a$ .

Як і означення границі, означення неперервності можна сформулювати в наступних еквівалентних формах: на мові " $\varepsilon - \delta$ ", на мові околів, на мові послідовностей, на мові приростів (еквівалентність цих означень впливає безпосередньо з відповідних теорем про границі).

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для кожного  $\varepsilon$ -околу  $U(f(a); \varepsilon)$  точки  $f(a)$  знайдеться такий  $\delta$ -окіл  $U(a; \delta)$  точки  $a$ , образ якого належить  $U(f(a); \varepsilon)$ , тобто  $f(U(a; \delta)) \subset U(f(a); \varepsilon)$ .

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для будь-якої послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(a) = 0$ , де  $\Delta f(a) = f(a + \Delta x) - f(a)$  – приріст функції в точці  $a$ .

Інколи приріст функції позначають також через  $\Delta y$ .

В означенні неперервності на мові ” $\varepsilon - \delta$ ” нерівність  $|x - a| < \delta$  можна замінити нерівністю  $0 < |x - a| < \delta$ , бо в точці  $x = a$  нерівність  $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$  виконується. З таких же причин в означенні неперервності на мові околів  $\delta$ -окіл  $U(a; \delta)$  можна замінити проколотим  $\delta$ -околом  $\overset{\circ}{U}(a; \delta)$ , а в означенні неперервності на мові послідовностей можна додатково вимагати, щоб  $x_n \neq a$ .

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , називається розривною в цій в точці.

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = x^2$ , то

$$\Delta f(a) = (a + \Delta x)^2 - a^2 = a^2 + 2a\Delta x + (\Delta x)^2 - a^2 = 2a\Delta x + (\Delta x)^2.$$

**Приклад 2.** Стала функція  $f(x) = C$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} C = C = f(a)$ .

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x = a = f(a)$ .

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = x^2$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 = f(a)$ .

**Приклад 5.** Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  функція  $f(x) = x^n$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n = f(a)$ .

**Приклад 6.** Функція  $f(x) = \sin x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$\sin x - \sin a = 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}.$$

Тому  $|\sin x - \sin a| = 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \left| \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq |x-a|$  і нерівність  $|\sin x - \sin a| < \varepsilon$  буде виконуватись, якщо  $|x-a| < \varepsilon$ . Таким чином,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x-a| < \delta) : |\sin x - \sin a| < \varepsilon,$$

тобто  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

**Приклад 7.** Функція  $f(x) = |x|$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ . Справді,  $||x| - |a|| \leq |x-a|$  і тому  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} |x| = |a| = f(a)$ .

**Теорема 1.** Якщо функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервними в точці  $a$ , то в цій точці є неперервними також функції  $f_1 + f_2$  і  $f_1 f_2$ . Якщо, крім цього,  $f_2(a) \neq 0$ , то функція  $f_1/f_2$  також є неперервною в точці  $a$ .

**Доведення.** Нехай  $f = f_1/f_2$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f_1(x)}{\lim_{x \rightarrow a} f_2(x)} = \frac{f_1(a)}{f_2(a)} = f(a),$$

тобто частка є неперервною. Інші твердження теореми доводяться аналогічно. ►

**Приклад 8.** Функція  $f(x) = x \sin x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$  як добуток двох неперервних функцій.

**Приклад 9.** Функція  $f(x) = \operatorname{tg} x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$  як частка двох неперервних функцій.

**Приклад 10.** Функції  $f_1(x) = \sin x - \operatorname{sgn} x$  і  $f_2(x) = \operatorname{sgn} x$  не є неперервними в точці  $a = 0$ , але їхня сума є функцією, неперервною в цій точці.

**Приклад 11.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  і  $f(a) \neq 0$  для деякого  $a \in \mathbb{R}$ , то знайдеться таке  $\delta > 0$ , що  $f(x) \neq 0$  для всіх  $x \in [a - \delta; a + \delta]$ . Справді, оскільки  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \neq 0$  і  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = |f(a)| \neq 0$ , то за властивостями границь, знайдеться таке  $\delta > 0$ , що  $|f(x)| \geq |f(a)|/2$  для всіх  $x \in [a - \delta; a + \delta]$ .

**2. Неперервність композиції функцій. Граничний перехід під знаком неперервної функції.** Композицією функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається функція  $F = f \circ \varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , визначена формулою  $F(t) = f(\varphi(t))$ . Композицію двох функцій називають інколи складеною функцією.

**Теорема 1.** Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi(\alpha) = a$  і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то функція  $F(t) = f(\varphi(t))$  є неперервною в  $\alpha$ .

**Доведення.** Справді, згідно з означенням границі

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \sigma > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \sigma) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

і

$$(\forall \sigma > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \mathbb{R}, |t - \alpha| < \delta) : |\varphi(t) - \varphi(\alpha)| < \sigma.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \in \mathbb{R}, |t - \alpha| < \delta) : |f(\varphi(t)) - f(\varphi(\alpha))| < \varepsilon. \blacktriangleright$$

**Приклад 1.** Функція  $F(t) = \sin t^2$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $F(t) = f(\varphi(t))$ , де  $f(x) = \sin x$  і  $\varphi(t) = t^2$  – неперервні функції.

**Приклад 2.** Функція  $F(t) = \cos t$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , бо  $F(t) = f(\varphi(t))$ , де  $f(x) = \sin x$  і  $\varphi(t) = -t + \pi/2$  – неперервні функції.

**Теорема 2.** Якщо існує  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a \in \mathbb{R}$  і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a$ , то  $\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = f\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$ .

**Доведення.** Справді, нехай  $\tilde{\varphi}(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \neq \alpha, \\ a, & t = \alpha. \end{cases}$  Тоді функція  $\tilde{\varphi}$  є

неперервною в точці  $\alpha$ ,  $\tilde{\varphi}(\alpha) = a$  і за попередньою теоремою функція  $F(t) = f(\tilde{\varphi}(t))$  є неперервною в точці  $\alpha$ . Тому

$$\lim_{t \rightarrow \alpha} f(\varphi(t)) = \lim_{t \rightarrow \alpha} f(\tilde{\varphi}(t)) = f(\tilde{\varphi}(\alpha)) = f(a) = f\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right). \blacktriangleright$$

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = \sin x$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ .

Тому  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \sin(\varphi(t)) = \sin\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$ , якщо існує  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t) = a \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 4.** 
$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{\frac{\pi x}{2}}\right)\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

**Приклад 5.**  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(\pi \operatorname{sgn} x) = -1$ . Разом з цим, границя  $\lim_{x \rightarrow 0} \pi \operatorname{sgn} x$  не існує.

### 3. Однобічна неперервність. Точки розриву та їх класифікація.

Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  зліва, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = f(a), \quad (1)$$

тобто якщо  $f(a-) = f(a)$ . Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  справа, якщо

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = f(a), \quad (2)$$

тобто якщо  $f(a+) = f(a)$ .

**Теорема 1.** Для того щоб функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  була неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною в цій точці зліва і справа, тобто щоб  $f(a-) = f(a+) = f(a)$ .

**Доведення.** Ця теорема впливає безпосередньо з означення та відповідної теореми про однобічні границі.  $\blacktriangleright$

Точка  $a \in \mathbb{R}$ , в якій функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не є неперервною, називається точкою розриву функції  $f$ . Як правило, розглядають ізольовані точки розриву, тобто такі, в деякому околі яких немає інших точок розриву. Точка  $a \in \mathbb{R}$

розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається точкою розриву першого роду, якщо існують скінченні границі  $f(a-) := \lim_{x \rightarrow a-} f(x)$  і  $f(a+) := \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ . При цьому число  $f(a+) - f(a-)$  називається стрибком функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ . Точка  $a \in \mathbb{R}$  розриву першого роду, для якої  $f(a+) = f(a-)$ , називається точкою усувного розриву. Останній термін пов'язаний з тим, що приписавши в точці  $a$  функції  $f$  значення  $f(a) = f(a+) = f(a-)$ , отримаємо функцію, неперервну в точці  $a$ , тобто розрив можна усунути. Таким чином, функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має усувний розрив в точці  $a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли існує  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$  (точка  $a$  може належати області визначення функції, а може і не належати).

Точка розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є точкою розриву першого роду, називається точкою розриву другого роду.

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  є неперервною в усіх точках  $a \neq 0$ , оскільки є часткою двох всюди неперервних функцій. В точці  $a = 0$  функція не є визначеною, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, і має в цій точці усувний розрив, бо  $\lim_{x \rightarrow 0-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ , тобто  $f(0+) = f(0-) = 1$ . Якщо прийняти  $f(0) = 1$ , то одержимо функцію, неперервну в кожній точці

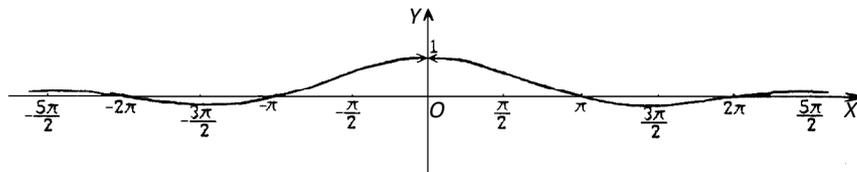


Рис. 1.

$x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 - 2x}{x - 1}, & \text{якщо } x \neq 1, \\ 3, & \text{якщо } x = 1, \end{cases}$  є неперервною в усіх

точках  $a \neq 1$ . В точці  $a = 1$  функція має усувний розрив, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, бо  $\lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = 2 \neq 3 = f(1)$ , тобто  $f(1-) = f(1+) \neq f(1)$ . Якщо змінити значення функції в точці  $a = 1$ , прийнявши  $f(1) = 2$ , то одержимо функцію, неперервну в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ .

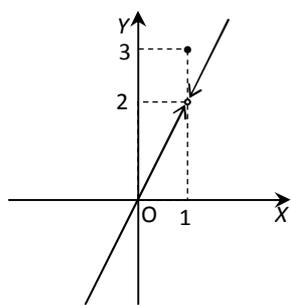


Рис.2.

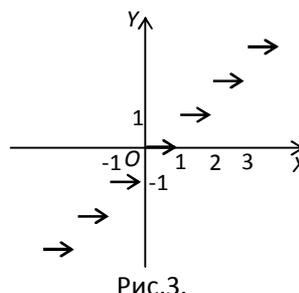


Рис.3.

**Приклад 3.** Функція  $f(x)=[x]$  є неперервною в усіх точках  $x \neq k$ . В кожній точці  $a_k = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , має неусувний розрив першого роду зі стрибком  $f(k+) - f(k-) = 1$ , не є неперервною зліва і є неперервною справа, бо  $\lim_{x \rightarrow k-} [x] = k - 1$  і  $\lim_{x \rightarrow k+} [x] = k$ , тобто  $f(k) = f(k+) \neq f(k-)$ . Значення розглядуваної функції в точках  $a_k = k$  не можна змінити так, щоб вона стала неперервною в них.

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = \operatorname{tg} x$  є неперервною в усіх точках  $a_k \neq k\pi + \pi/2$ , як частка двох всюди неперервних функцій. В кожній точці  $a_k = k\pi + \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , має розрив другого роду, не є неперервною зліва і не є

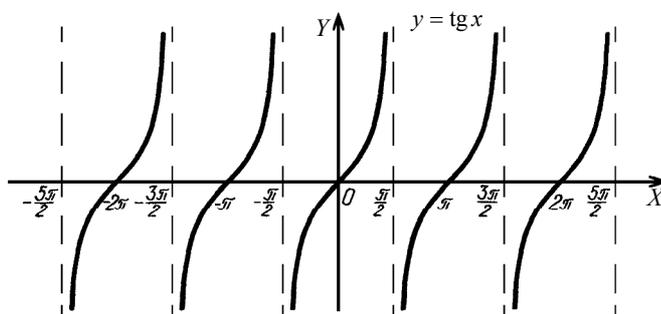


Рис.4.

неперервною справа, бо  $\lim_{x \rightarrow a_k-} \operatorname{tg} x = +\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow a_k+} \operatorname{tg} x = -\infty$ . Цій функції не можна приписати в точках  $a_k$  певних значень так, щоб вона стала неперервною в цих точках.

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  є неперервною в усіх точках  $a \neq 0$ , як композиція неперервних функцій. В точці  $a = 0$  функція має розрив другого роду, не є неперервною зліва і не є неперервною справа, бо границі  $\lim_{x \rightarrow 0-} \sin \frac{1}{x}$  і  $\lim_{x \rightarrow 0+} \sin \frac{1}{x}$  не існують. Цій функції не можна приписати в точці  $a = 0$  певного значення так, щоб вона стала неперервною в ній.

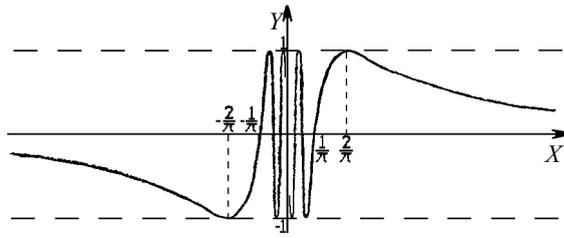


Рис.5.

**Приклад 6.** Функція  $f(x) = \ln x$ , як функція з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , має розриви другого роду в кожній точці проміжку  $(-\infty; 0]$  і є неперервною, в чому переконаємось згодом, в кожній точці проміжку  $(0; +\infty)$ .

**Приклад 7.** Функція  $f(x) = \arcsin x$ , як функція з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , має розриви другого роду в кожній точці проміжку  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$  і є неперервною, в чому переконаємось згодом, в кожній точці проміжку  $(-1; 1)$ .

Точка розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається ізольованою точкою розриву, якщо існує її  $\varepsilon$ -окіл, який не містить інших точок розриву. Точка розриву функції, яка не є ізольованою, називається неізольованою точкою розриву.

**Приклад 8.** Точка  $a = 0$  є неізольованою точкою розриву функції

$$f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}.$$

**Зауваження 1.** Множина точок розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  може бути досить довільною множиною. Зокрема, можна довести, що існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  і кожна точка  $a \in \mathbb{Q}$  є її точкою розриву. Проте можна довести, що не існує такої функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка б була неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{Q}$  і кожна точка  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  є її точкою розриву.

**4. Неперервність функції за множиною.** Разом з поняттям неперервності функції розглядають і неперервність функції за множиною  $H$ . Власне, функція  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  за множиною  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо  $a \in H$  і  $\lim_{H \ni x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Точка  $a \in \mathbb{R}$  називається точкою розриву функції  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо  $a \in H$  і в цій точці функція не є неперервною за множиною  $H$ . Якщо точка  $a \in H$  є ізольованою точкою множини  $H$  і  $a \in D(f)$ , то функція  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  в цій точці вважається неперервною за множиною  $H$ . За аналогією формулюються означення одnobічної неперервності та відповідних типів точок

розриву (усувного, першого роду, другого роду, стрибка). Зокрема, функція  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною справа в точці  $a \in \mathbb{R}$  за множиною  $H \subset \mathbb{R}$ , якщо  $a \in H$  і  $\lim_{H \ni x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ .

Зі сказаного вище випливає, що функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо вона є неперервною в точці  $a$  за множиною  $H = \mathbb{R}$ . Про неперервність функції  $f$  за множиною  $H$  говорять, як правило, тоді коли розглядають функції  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$ . Вибір множини  $H$  мотивується конкретною розглядуваною задачею. Часто при розгляді конкретних функцій беруть  $H = D(f)$ . Іноколи множина  $H$  не вказується, хоч неперервність розуміється за певною множиною, що приводить до непорозумінь.

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 2), \\ x^2, & x \notin [0; 2), \end{cases}$  є неперервною в точці  $a = 2$  за

множиною  $H = [0; 1] \cup \{2\}$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 2), \\ x^2, & x = 3, \end{cases}$  не є неперервною в точці  $a = 2$  за

множиною  $H = [0; 1] \cup \{2\}$ , оскільки точка  $a = 2$  не належить її області визначення.

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 2), \\ x^2, & x \notin [0; 2), \end{cases}$  не є неперервною в точці  $a = 2$

за множиною  $H = [0; 1] \cup \{3\}$ , оскільки  $a \notin H$ .

**Приклад 4.** Неперервність функції  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  у точці  $a \in \mathbb{R}$  за множиною  $H = [a; +\infty)$  рівносильна неперервності функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в цій точці справа.

**Приклад 5.** Неперервність функції  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  у точці  $a \in \mathbb{R}$  за множиною  $H = (-\infty; a]$  рівносильна неперервності функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в цій точці зліва.

**Приклад 6.** Функція  $f(x) = \arcsin x$  не має точок розриву як функція з  $[-1; 1]$  в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 7.** Функція  $f(x) = \ln x$  не має точок розриву як функція з  $(0; +\infty)$  в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 8.** Функція  $f(x) = \operatorname{tg} x$  не має точок розриву як функція з  $D(\operatorname{tg})$  в  $\mathbb{R}$ .

**Приклад 9.** Функція  $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$  не має точок розриву як функція з  $D(f)$

в  $\mathbb{R}$ .

**Зауваження 1.** Вводячи вище поняття неперервності та точок розриву (цих означень ми дотримуємося далі) функції  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  і, зокрема, функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ми виходили з того, що предметом розгляду є визначені множиною  $H$  класи функцій  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$ , що частіше і буває на практиці, і тому розглядати елементи, які не належать  $H$ , не доцільно. Вибір множини  $H$  зумовлюється розглядуваною задачею, або певними суб'єктивними мотивами: функції  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ ,  $f(x) = \operatorname{tg} x$  та  $f(x) = 1/x$  доцільніше розглядати, як функції з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ , функції  $f(x) = \arcsin x$  та  $f(x) = \arccos x$  доцільніше розглядати, як функції з  $[-1; 1]$  в  $\mathbb{R}$ , функцію  $f(x) = \ln x$  доцільніше розглядати, як функцію з  $(0; +\infty)$  в  $\mathbb{R}$  і т.д. Якщо ж вважати, що предметом розгляду є кожна конкретна функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , то, можливо, краще прийняті означення модифікувати. Наведемо два приклади, які найчастіше зустрічаються в літературі. Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною (це означення співпадає з означенням неперервності за множиною  $H = D(f)$ ) в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо  $\lim_{D(f) \ni x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Точка  $a \in \mathbb{R}$  називається точкою розриву (це означення відрізняється від означення точки розриву за множиною  $H = D(f)$ , оскільки точка  $a$  може і не належати  $D(f)$ , і співпадає з відповідним означенням за множиною  $H = D(f) \cup \partial D(f)$ , де  $\partial D(f)$  – множина граничних точок області визначення функції) функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо вона не є неперервною в цій точці і точка  $a$  є граничною точкою множини визначення цієї функції. Це означення є зручним при розгляді елементарних функцій (точка  $a = 0$  є єдиною точкою розриву функції  $f(x) = \ln x$ , функції  $f(x) = \arcsin x$  та  $f(x) = \arccos x$  не мають точок розриву, точки  $a = \pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ , є точками розриву функції  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ , функція  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ 2, & x = -1, \end{cases}$  є неперервною в точці  $a = -1$  і точка  $a = 0$  є її єдиною точкою розриву функції, точки  $a = 1/(\pi k)$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ , є точками розриву функції  $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$ ). Інколи означення неперервності і точок розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  формулюють наступним чином. Функція

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною (це означення співпадає з наведеним в попередньому пункті) в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ . Точка  $a \in \mathbb{R}$  називається (це означення відрізняється від всіх наведених вище) точкою розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо вона не є неперервною в цій точці і  $\mathring{U}(a; \delta) \subset D(f)$  для деякого  $\delta > 0$  (функції  $f(x) = \ln x$ ,  $f(x) = \arcsin x$  та  $f(x) = \arccos x$  не мають точок розриву, точки  $a = \pi k$ , де  $k \in \mathbb{Z}$ , є точками розриву функції  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ , функція  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ 2, & x = -1, \end{cases}$  не є неперервною в точках  $a = -1$  та  $a = 0$  і ці точки не є її точками розриву, точка  $a = 0$  не є точкою розриву функції  $f(x) = \frac{1}{\sin \frac{1}{x}}$ ).

**5. Неперервність функції на множині.** Функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною на проміжку  $(a; b)$ , якщо вона є неперервною в кожній точці цього проміжку. Функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною на замкненому проміжку  $[a; b]$ , якщо вона є неперервною в кожній точці проміжку  $(a; b)$ , неперервною в точці  $a$  справа і неперервною в точці  $b$  зліва. Функція  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною на множині  $H$ , якщо вона є неперервною в кожній точці множини  $H$  за множиною  $H$ . Для  $H = (a; b)$  і  $H = [a; b]$  останнє означення співпадає з вище наведеними.

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = [x]$  є неперервною на проміжку  $(0; 1)$ , є неперервною на проміжку  $[0; 1)$ , але не є неперервною на проміжку  $[0; 1]$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = \begin{cases} 2, & x = 4, \\ x^2, & x \in [0; 1], \end{cases}$  є неперервною на множині

$$H = [0; 1] \cup \{4\}.$$

**6. Точна верхня межа функції.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається обмеженою на множині  $H$ , якщо

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall x \in H): |f(x)| \leq K.$$

Точною верхньою межею функції  $f$  на множині  $H \subset D(f)$  називається точна верхня межа множини значень звуження  $f_H$  функції  $f$  на множину  $H$ , тобто це точна верхня межа множини  $\{f(x) : x \in H\}$ . Точна верхня межа функції  $f$  на

множині  $H$  позначається так  $M_0(f; H) = \sup\{f(x) : x \in H\}$  або так  $M_0(f; H) = \sup_{x \in H}\{f(x)\}$ . Найбільшим значенням функції  $f$  на множині  $H$  називається найбільший елемент множини  $\{f(x) : x \in H\}$ . Найбільше значення функції  $f$  на множині  $H$  позначається так  $M(f; H) = \max_{x \in H}\{f(x)\}$  або так  $M(f; H) = \max\{f(x) : x \in H\}$ . Якщо функція  $f$  приймає найбільше значення на множині  $H$ , то  $M(f; H) = M_0(f; H)$ . Кажуть, що функція  $f$  досягає на множині  $H$  своєї точної верхньої межі або приймає найбільше значення, якщо  $(\exists x_0 \in H) : f(x_0) = M_0(f; H)$ , тобто якщо  $M(f; H) = M_0(f; H)$ . Аналогічно визначається точна нижня межа і найменше значення функції  $f$  на множині  $H$ . Це є відповідно точна нижня межа і найменший елемент множини  $\{f(x) : x \in H\}$ . Вони позначаються відповідно так  $m_0(f; H) = \inf\{f(x) : x \in H\}$  і  $m(f; H) = \min\{f(x) : x \in H\}$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = x^2$  і  $H = [-1; 1]$ , то  $M_0(f; H) = M(f; H) = 1 = f(-1) = f(1)$  і  $m_0(f; H) = m(f; H) = 0 = f(0)$ , тобто точна верхня межа цієї функції на множині  $H = [-1; 1]$  досягається в точках  $x_1 = -1$  і  $x_2 = 1$ , а точна нижня межа – в точці  $x_3 = 0$ .

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = x^2$  і  $H = [-\infty; +\infty]$ , то  $m_0(f; H) = m(f; H) = 0 = f(0)$ ,  $\max_{x \in H}\{f(x)\}$  не існує,  $\sup_{x \in H}\{f(x)\} = +\infty$  і функція  $f$  не досягає своєї точної верхньої межі на цій множині.

**Приклад 3.** Якщо функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є строго монотонною на проміжку  $(a; b)$ , то  $(\forall x \in (a; b)) : \alpha < f(x) < \beta$ ,  $\alpha = \inf\{f(x) : x \in (a; b)\}$  і  $\beta = \sup\{f(x) : x \in (a; b)\}$ .

## 7. Властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку.

**Теорема 1 (перша теорема Вейєрштрасса).** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a; b]$ , то вона є обмеженою на ньому.

**Доведення.** Потрібно показати, що

$$(\exists c_1 \in \mathbb{R})(\forall x \in [a; b]) : |f(x)| \leq c_1. \quad (1)$$

Припустимо протилежне, тобто що

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in [a; b]) : |f(x_n)| > n. \quad (2)$$

Послідовність  $(x_n)$  є обмеженою. За теоремою Больцано-Вейерштрасса існує її збіжна підпослідовність  $(x_{n_k})$ . Нехай  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \tilde{x}$ . Тоді  $\tilde{x} \in [a; b]$ . В точці  $\tilde{x}$  функція є неперервною. Тому  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\tilde{x})$ , а збіжна послідовність  $(f(x_{n_k}))$  є обмеженою. З іншого боку, згідно з (2) послідовність  $(f(x_{n_k}))$  є необмеженою. Суперечність. ►

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = 1/x$  є неперервною на відкритому проміжку  $(0; 1)$ , але не є обмеженою на ньому. Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі 1, є істотною.

**Теорема 2 (друга теорема Вейерштрасса).** Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a; b]$ , то вона досягає на цьому проміжку своєї точної верхньої і точної нижньої меж, тобто

$$(\exists x_0 \in [a; b]) : \max \{f(x) : x \in [a; b]\} = \sup \{f(x) : x \in [a; b]\} = f(x_0),$$

$$(\exists x_1 \in [a; b]) : \min \{f(x) : x \in [a; b]\} = \inf \{f(x) : x \in [a; b]\} = f(x_1).$$

**Доведення.** За теоремою 1 функція  $f$  є обмеженою на  $[a; b]$ . Тому  $\sup \{f(x) : x \in [a; b]\} = \beta \in \mathbb{R}$ . За означенням точної верхньої межі  $(\forall x \in [a; b]) : f(x) \leq \beta$ . Припустимо, що  $f$  не досягає своєї точної верхньої межі на  $[a; b]$ . Тоді  $(\forall x \in [a; b]) : f(x) < \beta$ . Отже, функція  $F(x) = \frac{1}{\beta - f(x)}$  є неперервною на  $[a; b]$ . Тому вона є обмеженою на  $[a; b]$ , тобто  $(\exists \beta_1 \in (0; +\infty)) (\forall x \in [a; b]) : F(x) \leq \beta_1$ . Таким чином,  $(\forall x \in [a; b]) : f(x) \leq \beta - 1/\beta_1$ . Оскільки  $\beta - 1/\beta_1 < \beta$ , то останнє співвідношення суперечить тому, що  $\beta = \sup \{f(x) : x \in [a; b]\}$  ( $\beta$  є найменшим числом, для якого  $(\forall x \in [a; b]) : f(x) \leq \beta$ ). Отже, першу частину теореми доведено, а друга доводиться аналогічно. ►

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = 1/x$  є неперервною на відкритому проміжку  $(0; 1)$ , але не досягає на цьому проміжку своєї точної верхньої межі. Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі 2, є істотною.

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = -\frac{1}{1-x^2}$  є неперервною на відкритому проміжку  $(-1; 1)$  і не є неперервною на замкненому проміжку  $[-1; 1]$ , але

приймає на проміжку  $(-1;1)$  найбільше значення в точці  $0$ , але не досягає на  $(-1;1)$  своєї точної нижньої межі.

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = \begin{cases} -2, & x = 0, \\ [x], & x \in (0;1), \\ 3, & x = 1, \end{cases}$  не є неперервною на замкненому

проміжку  $[-1;1]$ , але досягає на  $[-1;1]$  своїх точної нижньої і точної верхньої меж.

**Теорема 3 (перша теорема Больцано-Коші).** Якщо функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і на кінцях цього проміжку приймає значення протилежних знаків, то  $(\exists c \in (a;b)) : f(c) = 0$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $f(a) < 0$  і  $f(b) > 0$ . Поділимо проміжок  $[a;b]$  точкою  $\frac{a+b}{2}$  на два рівні. Якщо  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$ , то точка  $c = \frac{a+b}{2}$  є шуканою і теорема 3 доведена. Якщо  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) \neq 0$ , то через  $[a_1; b_1]$  позначаємо той з двох одержаних проміжків, для якого  $f(a_1) < 0$  і  $f(b_1) > 0$ . Ділимо проміжок  $[a_1; b_1]$  точкою  $\frac{a_1 + b_1}{2}$  на два рівні і т.д. В результаті або через скінченне число кроків прийдемо до шуканої точки  $c = \frac{a_k + b_k}{2}$ ,  $f\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) = 0$  (тоді теорема доведена), або одержимо нескінченну систему  $\{[a_k; b_k] : k \in \mathbb{N}\}$  замкнених вкладених проміжків таких, що:

- 1)  $[a;b] \supset [a_1; b_1] \supset [a_2; b_2] \supset \dots \supset \dots$ ;
- 2)  $b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$ ;
- 3)  $f(a_k) < 0$  і  $f(b_k) > 0$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$ .

Згідно з принципом вкладених проміжків існує точка  $c$ , для якої  $a \leq a_k \leq c \leq b_k \leq b$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$ . З умови 2) випливає, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = c$ . Функція  $f$  є неперервною в точці  $c$ . Тому  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(a_k) = f(c)$ . Але  $f(a_k) < 0$ . Тому  $f(c) \leq 0$ . Аналогічно,  $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = c$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(b_k) = f(c)$ ,  $f(b_k) > 0$  і, отже,  $f(c) \geq 0$ . Таким чином,  $0 \leq f(c) \leq 0$ . Отже,  $f(c) = 0$ . ►

Теорему 3 інакше можна сформулювати так. Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і на його кінцях приймає значення протилежних знаків, то її графік принаймні один раз перетинає вісь  $OX$  в точці, яка належить проміжку  $(a;b)$ , тобто рівняння  $f(x)=0$  має принаймні один корінь на проміжку  $(a;b)$ .

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і на кінцях цього проміжку приймає значення протилежних знаків, то рівняння  $f(x)=0$  на проміжку  $(a;b)$  має принаймні один корінь.

**Наслідок 2.** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і строго монотонною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і на кінцях цього проміжку приймає значення протилежних знаків, то рівняння  $f(x)=0$  на проміжку  $(a;b)$  має єдиний корінь.

**Приклад 5.** Функція  $f(x)=x^2+3$  є неперервною на замкненому проміжку  $[1;3]$ , проте  $f(x) \neq 0$  для всіх  $x \in [1;3]$ . Тому вимога, щоб функція на кінцях проміжку приймала значення протилежних знаків, в теоремі 3 є істотною.

**Приклад 6.** Функція  $f(x)=x^2-4$  є неперервною на замкненому проміжку  $[-4;4]$ , на його кінцях приймає значення одного знаку і має два нулі на цьому проміжку. Тому вимога, щоб функція на кінцях проміжку приймала значення протилежних знаків, в теоремі 3 не є необхідною.

**Приклад 7.** Функція  $f(x)=\begin{cases} -2, & x < 0, \\ 3, & x \geq 0, \end{cases}$  на кінцях замкненого проміжку  $[-1;1]$  приймає значення протилежних знаків і не має нулів на цьому проміжку. Тому вимога, щоб функція була неперервною, в теоремі 3 є істотною.

**Приклад 8.** Функція  $f(x)=\begin{cases} 2, & x=1, \\ (x-2)^2, & x \in (1;4) \\ 3, & x=4, \end{cases}$  на кінцях замкненого проміжку  $[1;4]$  приймає значення одного знаку, не є неперервною і має один нуль на цьому проміжку. Тому вимога, щоб функція була неперервною, в теоремі 3 не є необхідною.

**Приклад 9.** Функція  $f(x) = x^5 + x - 1$  є неперервною на проміжку  $[-2; 1]$ ,  $f(-2) < 0$  і  $f(1) > 0$ . Тому рівняння  $x^5 + x - 1 = 0$  має принаймні один розв'язок, який належить проміжку  $[-2; 1]$ .

**Приклад 10.** Функція  $f(x) = \sin x$  на проміжку  $[-\pi/2; 5\pi/2]$  задовольняє всі умови теореми 3 і має на вказаному проміжку три нулі. Тому за виконання умов теореми 3 точок  $c$ , про існування яких говориться в теоремі 3, може бути декілька.

**Теорема 4 (друга теорема Больцано-Коші).** Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a; b]$ , то для будь-якого  $D$ , що лежить між  $f(a)$  і  $f(b)$  знайдеться така точка  $c \in [a; b]$ , що  $f(c) = D$ .

**Доведення.** Якщо  $f(a) = D$  або  $f(b) = D$ , то твердження теореми є очевидним. Це ж можна сказати, якщо  $f(a) = f(b)$ . Нехай жодна з цих умов не виконується. Тоді функція  $F(x) = f(x) - D$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$  і на його кінцях приймає значення протилежних знаків. Тому за першою теоремою Больцано-Коші існує таке  $c \in [a; b]$ , що  $F(c) = 0$ , тобто  $f(c) = D$ . ►

**Наслідок 3.** Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a; b]$ , то  $f([a; b]) = [m; M]$ , де  $M = \max\{f(x) : x \in [a; b]\}$  і  $m = \min\{f(x) : x \in [a; b]\}$ .

**Наслідок 4.** Якщо функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і строго монотонною на проміжку  $(a; b)$ , то  $f((a; b)) = (m_0; M_0)$ , де  $M_0 = \sup\{f(x) : x \in (a; b)\}$  і  $m_0 = \inf\{f(x) : x \in (a; b)\}$ .

**Наслідок 5.** Якщо функція  $f: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на проміжку  $[a; b)$ , то  $f([a; b)) = [m; M_0)$ , де  $M_0 = \sup\{f(x) : x \in (a; b)\}$  і  $m = \min\{f(x) : x \in [a; b)\}$ .

**Приклад 11.** Число 2,5 лежить між  $f(-1) = -1$  і  $f(3) = 3$ , якщо  $f(x) = [x]$ . Проте  $f(x) \neq 2,5$  для всіх  $x \in [-1; 3]$ . Тому вимога неперервності функції в теоремі 4 є істотною.

**Приклад 12.** Якщо  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 2, \\ 0, & x = 2, \end{cases}$  то для будь-якого  $D$ , що лежить

між  $f(-3)$  і  $f(4)$  знайдеться точка  $c \in [-3; 4]$ , що  $f(c) = D$ . Тому вимога, щоб функція була неперервною, в теоремі 3 не є необхідною.

**Приклад 13.** Якщо  $f(x)=1$ , то  $f((2;3))=1$ . Тому вимога строгої монотонності функції в наслідку 4 є істотною. На це ж вказує приклад

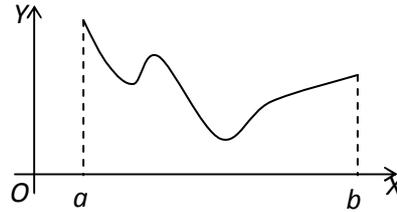


Рис. 1.

функції, графік якої зображено вище.

**Приклад 14.** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$  і  $f([a;b]) \subset [a;b]$ , то рівняння  $f(x)=x$  має принаймні один корінь на проміжку  $[a;b]$ . Справді, нехай  $F(x)=x-f(x)$ . Якщо  $f(a)=a$  або  $f(b)=b$ , то твердження обґрунтовано. Якщо ж  $f(a) \neq a$  і  $f(b) \neq b$ , то  $F(a)=a-f(a) < 0$  і  $F(b)=b-f(b) > 0$ . Тому за теоремою Больцано-Коші рівняння  $F(x)=0$  має на проміжку  $[a;b]$  принаймні один корінь.

**Наслідок 6.** Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $(a;b)$  і  $\{x_k : k \in \overline{1;n}\}$ ,  $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ , – множина її нулів, то на кожному проміжку  $(x_k; x_{k+1})$ ,  $k \in \overline{0;n}$ , функція  $f$  приймає значення одного знаку (додатні або від'ємні), де  $x_0 = a$  і  $x_{n+1} = b$ .

На наслідку 6 базується метод проміжків розв'язування нерівностей.

**Приклад 15.** Функція  $f(x) = \frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1}$  є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і має нулі в точках  $x_1 = -3$ ,  $x_2 = 0$  та  $x_3 = 2$ . Згідно з наслідком 6 на кожному з проміжків  $(-\infty; -3)$ ,  $(-3; 0)$ ,  $(0; 2)$  та  $(2; +\infty)$  функція зберігає знак. Оскільки  $f(-4) > 0$ ,  $f(-2) < 0$ ,  $f(1) > 0$  і  $f(3) > 0$ , то розв'язком нерівності  $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1} > 0$  є множина  $(-\infty; -3) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$ , а розв'язком нерівності  $\frac{x(x+3)(x-2)^2}{x^2+1} < 0$  є множина  $(-3; 0)$ .

**Приклад 16.** Функція  $f(x) = \frac{(x+3) \operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{x-1}$  є неперервною на кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; 1)$  та  $(1; +\infty)$  і має нуль в точці  $x_1 = -3$ . Згідно з наслідком

б на кожному з проміжків  $(-\infty; -3)$ ,  $(-3; 0)$ ,  $(0; 1)$  та  $(1; +\infty)$  ця функція зберігає знак. Оскільки  $f(-4) < 0$ ,  $f(-2) > 0$ ,  $f(1/2) < 0$  і  $f(3) > 0$ , то розв'язком

нерівності  $\frac{(x+3)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x-1} > 0$  є множина  $(-3; 0) \cup (1; +\infty)$ , а розв'язком

нерівності  $\frac{(x+3)\operatorname{arctg}\frac{1}{x}}{x-1} < 0$  є множина  $(-\infty; -3) \cup (0; 1)$ .

**8. Обернена функція.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається оборотною, якщо для кожного  $y \in E(f)$  рівняння  $f(x) = y$  має єдиний розв'язок  $x \in D(f)$ , тобто якщо образами різних точок  $x \in D(f)$ , є різні точки  $y \in E(f)$ . Можна також сказати, що функція  $f$  називається оборотною, якщо з рівності  $f(x_1) = f(x_2)$  випливає, що  $x_1 = x_2$ . Оберненою до оборотної функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається така функція  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $D(f^{-1}) = E(f)$  і образом кожного  $y \in D(f^{-1})$  є таке  $x \in D(f)$ , для якого  $f(x) = y$ . З означення випливає, що  $D(f^{-1}) = E(f)$ ,  $E(f^{-1}) = D(f)$  і

$$(\forall x \in D(f)): f^{-1}(f(x)) = x, \quad (1)$$

$$(\forall y \in D(f^{-1})): f(f^{-1}(y)) = y. \quad (2)$$

Зауваживши, що точки  $(x_0; y_0)$  і  $(y_0; x_0)$  є симетричними відносно прямої  $y = x$  переконуємось, що графіки функцій  $y = f(x)$  і  $y = f^{-1}(x)$  є також симетричними відносно цієї ж прямої. Якщо функція задана формулою  $y = f(x)$ , то щоб знайти формулу  $y = f^{-1}(x)$ , яка задає обернену функцію, потрібно з формули  $y = f(x)$  виразити  $x$  через  $y$ , а потім  $x$  і упоміняти місцями. Разом з цим, не кожна функція має обернену. Тому природним є питання про існування оберненої функції та її неперервність.

**Приклад 1.** Якщо  $y = 2x - 1$ , то  $x = \frac{1}{2}(y + 1)$  і формула  $y = \frac{1}{2}(x + 1)$  задає обернену функцію до функції  $y = 2x - 1$ .

**Приклад 2.** Функція  $y = x^2$  не має оберненої, бо не є оборотною. Проте, звуження цієї функції на проміжок  $[0; +\infty)$  має обернену і нею є функція  $y = \sqrt{x}$

. Звуження функції  $y = x^2$  на проміжок  $(-\infty; 0]$  має обернену функцію і нею є функція  $y = -\sqrt{x}$ .

**Приклад 3.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою, то вона є оборотною. Справді, якщо  $x_1 < x_2$ , то  $f(x_1) < f(x_2)$  і тому  $f(x_1) \neq f(x_2)$ , якщо  $x_1 \neq x_2$ .

**Приклад 4.** Якщо існує така функція  $f^{-1}: E(f) \rightarrow \mathbb{R}$ , що виконується (1), то функція  $f$  є оборотною. Справді, якщо  $f(x_1) = f(x_2)$ , то  $f^{-1}(f(x_1)) = f^{-1}(f(x_2))$ , тобто  $x_1 = x_2$ .

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = \operatorname{sh} x$ , тобто функція  $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , є зростаючою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Тому є оборотною. Для знаходження оберненої функції маємо рівняння  $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$ , з якого знаходимо  $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$ . Отже, функція  $f^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$  є оберненою до функції  $f(x) = \operatorname{sh} x$  на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Для позначення цієї функції використовується позначення  $\operatorname{arsh} x$ . Отже,  $\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ .

**Приклад 6.** Функція  $f(x) = \operatorname{ch} x$ , тобто функція  $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  не є оборотною. Проте розглянемо рівняння  $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = y$ . Воно має два розв'язки  $x = \ln\left(y - \sqrt{y^2 - 1}\right)$  і  $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 1}\right)$ . Функція  $y = \operatorname{arch}_+ x$ , де  $\operatorname{arch}_+ x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ , є оберненою до функції  $y = \operatorname{ch} x$ , розглядуваної на проміжку  $[0; +\infty)$ , а функція  $y = \operatorname{arch}_- x$ , де  $\operatorname{arch}_- x = \ln\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$ , є оберненою до функції  $y = \operatorname{ch} x$ , розглядуваної на проміжку  $(-\infty; 0]$ .

**Теорема 1.** Якщо функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і строго монотонною на проміжку  $(a; b)$ , то вона має обернену функцію  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , область визначення якої є проміжок  $(\alpha; \beta)$ , де  $\alpha = \inf\{f(x): x \in (a; b)\}$  і  $\beta = \sup\{f(x): x \in (a; b)\}$ . На  $(\alpha; \beta)$  обернена функція є неперервною. Обидві функції  $f$  і  $f^{-1}$  є одночасно зростаючими або спадними.

**Доведення** проведемо для зростаючих функцій. За наслідком з другої теореми Больцано-Коші множиною значень звуження функції  $f$  на проміжок  $(a;b)$  є проміжок  $(\alpha;\beta)$  і це звуження є оборотним, оскільки  $f$  є зростаючою. Тому існує обернена функція  $f^{-1}$ , яка також є зростаючою. Справді, якщо б існували такі  $y_1 \in (\alpha;\beta)$  і  $y_2 \in (\alpha;\beta)$ , що  $y_1 < y_2$  і  $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ , то  $f(f^{-1}(y_1)) \geq f(f^{-1}(y_2))$  і з (2) ми б отримали, що  $y_1 \geq y_2$ . Суперечність. Залишилося довести неперервність. Нехай  $y_0 \in (\alpha;\beta)$  і  $x_0 = f^{-1}(y_0)$ . Тоді  $x_0 \in (a;b)$ . Візьмемо  $\varepsilon > 0$  настільки малим, щоб  $a < x_0 - \varepsilon < x_0 < x_0 + \varepsilon < b$ . Нехай  $y_1 = f(x_0 - \varepsilon)$  і  $y_2 = f(x_0 + \varepsilon)$ . Тоді  $\alpha < y_1 < y_0 < y_2 < \beta$ . Виберемо  $\delta > 0$  настільки малим, щоб  $\alpha < y_1 < y_0 - \delta < y_0 < y_0 + \delta < y_2 < \beta$ . Тоді  $(\forall y, |y - y_0| < \delta) : |f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| \leq |f^{-1}(y_2) - f^{-1}(y_1)| = 2\varepsilon$ , тобто функція  $f^{-1}$  є неперервною в точці  $y_0$ . Оскільки  $y_0$  – довільна точка з проміжку  $(\alpha;\beta)$ , то теорему доведено. ►

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і строго монотонною на проміжку  $(a;b)$ , то рівняння  $f(y) = x$  має розв'язок  $y \in (a;b)$  для тих і тільки тих  $x$ , які належать проміжку  $(\alpha;\beta)$ , і для кожного

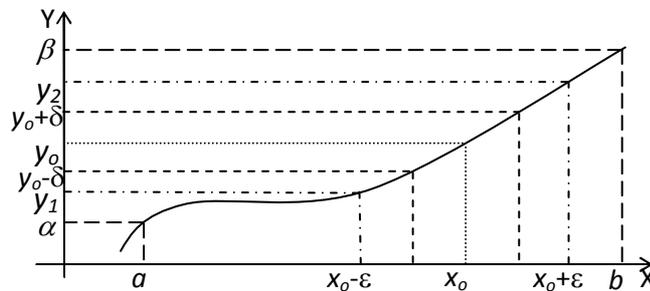


Рис. 1.

$x \in (\alpha;\beta)$  існує єдиний розв'язок цього рівняння і ним є  $y = f^{-1}(x)$ , де  $\alpha = \inf\{f(x) : x \in (a;b)\}$  і  $\beta = \sup\{f(x) : x \in (a;b)\}$ .

**Теорема 2.** Якщо функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і строго монотонною на проміжку  $[a;b]$ , то вона має обернену функцію  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , область визначення якої є замкнений проміжок  $[c;d]$  з кінцями в точках  $f(a)$  і  $f(b)$ . На цьому проміжку функція  $f^{-1}$  є строго монотонною і неперервною. Обидві функції  $f$  і  $f^{-1}$  є одночасно зростаючими або спадними.

**Доведення** цієї теореми є таким же, як і попередньої. ►

**Наслідок 2.** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і строго монотонною на проміжку  $[a;b]$ , то рівняння  $f(y) = x$  має розв'язок  $y \in [a;b]$  для тих і тільки тих  $x$ , які належать проміжку  $[c;d]$  з кінцями в точках  $f(a)$  і  $f(b)$ , і для кожного  $x \in [c;d]$  існує єдиний розв'язок цього рівняння і ним є  $y = f^{-1}(x)$ .

**Приклад 7.** Стала функція  $f(x) = C$  є неспадною і не є оборотною. Тому вимога строгої монотонності функції в останніх двох теоремах є істотною.

**Зауваження 1.** Оборотні і тільки оборотні функції мають обернену. Якщо функція  $f^{-1}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є оберненою до функції  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , то функція  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є оберненою до функції  $f^{-1}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Зауваження 2.** Означення оберненої функції можна сформулювати і так. Функція  $f^{-1}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається оберненою до функції  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо  $D(f^{-1}) = E(f)$  і виконується (1). Справді, якщо виконується (1), то функція  $f$  є оборотною, а умова (1) означає, що для функції  $f^{-1}$  образом кожного  $y \in D(f^{-1})$  є таке  $x \in D(f)$ , для якого  $f(x) = y$ .

**Зауваження 3.** Якщо для деякої функції  $f^{-1}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  виконується (2), то функція  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  не обов'язково є оборотною. Справді, нехай  $f(x) = x^2$  і  $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ . Тоді функція  $f$  не є оборотною,  $D(f^{-1}) = E(f) = [0; +\infty)$  і виконується (2).

**Зауваження 4.** Означення оберненої функції можна сформулювати і так. Функція  $f^{-1}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається оберненою до оборотної функції  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо  $D(f^{-1}) = E(f)$  і виконується (2). Справді, якщо функція  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є оборотною, то з (2) випливає (1).

**Зауваження 5.** Згідно з означенням, функція  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – це така сукупність  $f$  упорядкованих пар  $(x; y)$  дійсних чисел, що  $y_1 = y_2$ , якщо  $(x_1; y_1) \in f$  і  $(x_1; y_2) \in f$ . Функція  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є оборотною тоді і тільки тоді, коли  $y_1 \neq y_2$ , якщо  $(x_1; y_1) \in f$ ,  $(x_2; y_2) \in f$  і  $x_1 \neq x_2$ . Означення оберненої функції можна сформулювати і так. Оберненою функцією до оборотної функції  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається така функція  $f^{-1}:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $(y; x) \in f^{-1}$  тоді і тільки тоді, коли  $(x; y) \in f$ . Останнє означення ми повинні були б взяти як

основне. Але в математичному аналізі функції задаються, як правило, деякою формулою і останнє означення в цьому зв'язку не є дуже зручним.

**9. Рівномірна неперервність. Теорема Кантора.** Означення неперервності функції  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  на проміжку  $[a;b]$  можна сформулювати так. Функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервною на проміжку  $[a;b]$ , якщо

$$(\forall \tilde{x} \in [a;b])(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a;b], |x - \tilde{x}| < \delta) : |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon. \quad (1)$$

В цьому означенні  $\delta$  може залежати від  $\tilde{x}$  і  $\varepsilon$ . Функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається рівномірно неперервною на  $[a;b]$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \{x; \tilde{x}\} \subset [a;b], |x - \tilde{x}| < \delta) : |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon. \quad (2)$$

Істотна різниця між (1) і (2) в тому, що в (2)  $\delta$  не залежить від  $\tilde{x}$ . Таким чином, кожна рівномірно неперервна функція є неперервною на  $[a;b]$ . Наступна теорема показує, що справедливе і обернене твердження.

**Теорема 1 (Кантора).** Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на замкненому проміжку  $[a;b]$ , то вона є рівномірно неперервною на  $[a;b]$ .

**Доведення.** Припустимо, що  $f$  не є рівномірно неперервною. Тоді

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists \{x; \tilde{x}\} \subset [a;b], |x - \tilde{x}| < \delta) : |f(x) - f(\tilde{x})| \geq \varepsilon. \quad (3)$$

Візьмемо  $\delta = 1/n$ . Тоді

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\exists \{x_n; \tilde{x}_n\} \subset [a;b], |x_n - \tilde{x}_n| < 1/n) : |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon. \quad (4)$$

Послідовність  $(\tilde{x}_n)$  є обмеженою, бо  $\tilde{x}_n \in [a;b]$ . Тому, згідно з теоремою Больцано-Вейерштрасса, існує її збіжна підпослідовність  $(\tilde{x}_{n_k})$  і  $\tilde{x}_{n_k} \rightarrow \alpha \in [a;b]$ . Функція  $f$  є неперервною в точці  $\alpha$ . Отже,  $f(\tilde{x}_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$ . Але  $|x_{n_k} - \tilde{x}_{n_k}| < 1/n_k \rightarrow 0$ . Тому  $x_{n_k} \rightarrow \alpha$  і  $f(x_{n_k}) \rightarrow f(\alpha)$ . Звідси випливає, що знайдеться таке  $k \in \mathbb{N}$ , що  $|f(x_{n_k}) - f(\alpha)| < \varepsilon/2$  і  $|f(\tilde{x}_{n_k}) - f(\alpha)| < \varepsilon/2$ . Тому

$$\begin{aligned} |f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})| &\leq |f(x_{n_k}) - f(\alpha) + f(\alpha) - f(\tilde{x}_{n_k})| \\ &\leq |f(x_{n_k}) - f(\alpha)| + |f(\tilde{x}_{n_k}) - f(\alpha)| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,  $(\exists k) : |f(x_{n_k}) - f(\tilde{x}_{n_k})| < \varepsilon$ , а це суперечить (4). ►

Функція  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  називається рівномірно неперервною на множині  $H$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \{x; \tilde{x}\} \subset H, |x - \tilde{x}| < \delta): |f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon.$$

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = x^2$  є неперервною на проміжку  $[0; 1]$ . Тому згідно з теоремою Кантора є рівномірно неперервною на  $[0; 1]$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 3], \\ 1, & x = 4, \end{cases}$  є рівномірно неперервною на множині  $H = [0; 3] \cup \{4\}$ , що випливає безпосередньо з означення.

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = 1/x$  є неперервною на проміжку  $(0; 1)$ , але не є рівномірно неперервною на ньому. Справді, нехай  $x_n = \frac{1}{2+n}$  і  $\tilde{x}_n = \frac{1}{1+n}$ . Тоді  $x_n \in (0; 1)$ ,  $\tilde{x}_n \in (0; 1)$ ,  $x_n - \tilde{x}_n \rightarrow 0$  і  $f(x_n) - f(\tilde{x}_n) = (2+n) - (1+n) = 1$ . Тому

$$(\exists \varepsilon = 1/2)(\forall \delta > 0)(\exists \{x_n; \tilde{x}_n\} \subset (0; 1), |x_n - \tilde{x}_n| < \delta): |f(x_n) - f(\tilde{x}_n)| \geq \varepsilon,$$

а це означає, що функція  $f(x) = 1/x$  не є рівномірно неперервною на проміжку  $(0; 1)$ . Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі Кантора є істотною.

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = \cos x$  є рівномірно неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Справді,

$$|\cos x - \cos \tilde{x}| = \left| -2 \sin \frac{x + \tilde{x}}{2} \sin \frac{x - \tilde{x}}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - \tilde{x}}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - \tilde{x}}{2} \right| = |x - \tilde{x}|.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon > 0)(\forall \{x; \tilde{x}\} \subset \mathbb{R}, |x - \tilde{x}| < \delta): |\cos x - \cos \tilde{x}| < \varepsilon,$$

а це і означає, що функція  $f(x) = \cos x$  є рівномірно неперервною на  $\mathbb{R}$ . Таким чином, вимога замкненості проміжку в теоремі Кантора не є необхідною.

**Приклад 5.** Якщо функція  $f$  є рівномірно неперервною на скінченному проміжку  $(a; b)$ , то існують скінченні границі  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ . Справді, це випливає безпосередньо з означення рівномірної неперервності і критерію Коші існування границі функції.

**10. Натуральний степінь дійсного числа. Неперервність одночленів, багаточленів і раціональних функцій.** Добуток  $n$  співмножників, кожний з яких дорівнює  $a$  називають  $n$ -им степенем числа  $a$  і позначають через  $a^n$ . Число  $a$  називають основою степеня, а число  $n$  – показником степеня. Отже,

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-співмножників}}.$$

При цьому вважають, що  $a^1 = a$  для будь-якого натурального числа  $a$ . Основні властивості степеня з натуральним показником містяться в наступних прикладах

**Приклад 1.** Степінь добутку дорівнює добутку степенів співмножників, тобто  $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$  для будь-яких  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  та  $n \in \mathbb{N}$ . Справді,

$$(a \cdot b)^n = \underbrace{(a \cdot b) \cdot (a \cdot b) \cdot \dots \cdot (a \cdot b)}_{n\text{-співмножників}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-співмножників}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot \dots \cdot b}_{n\text{-співмножників}} = a^n \cdot b^n.$$

**Приклад 2.** При піднесенні степеня до степеня показники перемножуються, тобто  $(a^n)^m = a^{nm}$  для будь-яких  $a \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N}$  та  $n \in \mathbb{N}$ . Справді,

$$(a^n)^m = \underbrace{a^n \cdot a^n \cdot \dots \cdot a^n}_{m\text{-співмножників}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{nm\text{-співмножників}} = a^{nm}.$$

**Приклад 3.** При множенні степенів з однаковими основами показники степенів додаються, тобто  $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ . Справді,

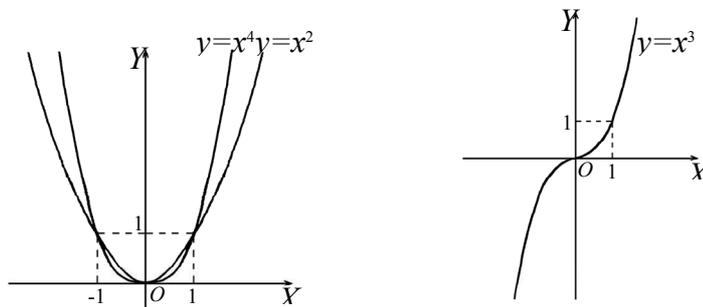


Рис. 1.

$$a^n \cdot a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{-співмножників}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{m\text{-співмножників}} = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n+m\text{-співмножників}} = a^{n+m}.$$

**Приклад 4.**  $a^n < a^m$ , якщо  $a \in (1; +\infty)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  і  $n < m$ .

**Приклад 5.**  $a^n > a^m$ , якщо  $a \in (0; 1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  і  $n < m$ .

**Приклад 6.**  $a^n < b^n$ , якщо  $a < b$  і  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 1.** Функція  $f(x) = x^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ . Якщо  $n$  – непарне число, то  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ , функція  $f(x) = x^n$  є непарною і зростаючою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і  $E(f) = (-\infty; +\infty)$ . Якщо  $n$  – парне число, то  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ , функція  $f(x) = x^n$  є парною, зростаючою на проміжку  $[0; +\infty)$  і спадною на проміжку  $(-\infty; 0]$ , і  $E(f) = [0; +\infty)$ .

**Доведення.** Висновки про множину значень функції  $f(x) = x^n$  впливають з другої теореми Больцано-Вейерштрасса та наслідків з неї, а інші є очевидними. ►

**Наслідок 1.** Якщо  $n$  – непарне число, то для кожного  $a \in \mathbb{R}$  рівняння  $b^n = a$  має один і тільки один розв'язок.

**Наслідок 2.** Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  рівняння  $b^n = 0$  має один і тільки один розв'язок.

**Наслідок 3.** Для кожного  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  і кожного парного  $n \in \mathbb{N}$  рівняння  $b^n = a$  має рівно два розв'язки і ці розв'язки мають однаковий модуль.

Багаточлен (многочлен, поліном)  $n$ -го степеня – це функція  $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_i$  – деякі числа, які називаються коефіцієнтами багаточлена, і  $a_n \neq 0$ . Ця функція є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  як скінченна сума неперервних функцій. Раціональна функція – це така функція, яка подається у вигляді частки двох багаточленів  $P$  і  $Q$ , тобто  $f(x) = P(x)/Q(x)$ . Ця функція є неперервною у всіх точках  $x \in \mathbb{R}$ , за винятком точок, які є нулями полінома  $Q$ .

**11. Існування кореня  $n$ -го степеня.** Функція  $y = \sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Коренем  $n$ -го степеня, де  $n \in \mathbb{N}$ , з числа  $a$  називається таке число  $b$ ,  $n$ -ий степінь якого дорівнює  $a$ , тобто  $b^n = a$ . Тому корінь  $n$ -го степеня з числа  $a$  це число  $b$ , яке є розв'язком рівняння  $b^n = a$ . Чи для всякого  $a \in \mathbb{R}$  існує  $\sqrt[n]{a}$ ?

**Теорема 1.** Якщо  $n$  – непарне натуральне число, то для кожного  $a \in \mathbb{R}$  існує єдине число  $b$ , яке є коренем  $n$ -го степеня з числа  $a$ . Якщо  $n$  – парне натуральне число, то корінь  $n$ -го степеня існує тільки з невід’ємних чисел, коренем  $n$ -го степеня з числа  $0$  є тільки число  $0$  і для кожного  $a > 0$  існують рівно два числа, які є його коренем  $n$ -го степеня і ці числа мають однаковий модуль.

**Доведення.** Ця теорема випливає з властивостей функції  $f(x) = x^n$ . ►

Якщо  $n$  – непарне натуральне число, то корінь  $n$ -го степеня з числа  $a$  позначаємо через  $\sqrt[n]{a}$ . Якщо  $n$  – парне натуральне число, то через  $\sqrt[n]{a}$  позначаємо невід’ємний корінь  $n$ -го степеня з невід’ємного числа  $a$ , а друге значення кореня  $n$ -го степеня через  $-\sqrt[n]{a}$ . Невід’ємне значення кореня  $n$ -го степеня з невід’ємного числа  $a$ , називається арифметичним значенням кореня  $n$ -го степеня і для його позначення використовують символи  $\sqrt[n]{a}$ ,  $+\sqrt[n]{a}$ ,  $\sqrt[n]{a}$  та інші. Основні властивості кореня  $n$ -го степеня містяться в наступних прикладах.

**Приклад 1.**  $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$  для будь-якого  $a \in \mathbb{R}$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 2.**  $\sqrt[n]{a^n} = |a|$  для будь-якого  $a \in \mathbb{R}$  і будь-якого парного  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 3.**  $\sqrt[n]{a^n} = a$  для будь-якого  $a \in \mathbb{R}$  і будь-якого непарного  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 4.**  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  для будь-якого  $a \in \mathbb{R}$  і будь-якого непарного  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 5.**  $(\sqrt[n]{a})^n = a$  для будь-якого  $a \geq 0$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 6.**  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$  для будь-якого  $a \in \mathbb{R}$ , будь-якого  $b \in \mathbb{R}$  і будь-якого непарного  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 7.**  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$  для будь-якого  $a \geq 0$ , будь-якого  $b \geq 0$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 8.**  $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{|a|}\sqrt[n]{|b|}$  для будь-яких  $a \in \mathbb{R}$  і  $b \in \mathbb{R}$  таких, що  $\text{sgn}(ab) \geq 0$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 9.**  $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$  для будь-якого  $a \geq 0$ , будь-якого  $m \in \mathbb{N}$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 10.**  $\sqrt[n]{a} \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}$  для будь-якого  $a \geq 0$ , будь-якого  $m \in \mathbb{N}$  і будь-якого  $n \in \mathbb{N}$ .

**Приклад 11.**  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a}$ , якщо  $a \in (1; +\infty)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  і  $n > m$ .

**Приклад 12.**  $\sqrt[n]{a} > \sqrt[m]{a}$ , якщо  $a \in (0; 1)$ ,  $m \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  і  $n > m$ .

**Приклад 13.**  $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$ , якщо  $a < b$  і  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 2.** Якщо  $n$  – непарне натуральне число, то функція  $y = \sqrt[n]{x}$  є оберненою до функції  $y = x^n$ , її областю визначення і множиною значень є проміжок  $(-\infty; +\infty)$ , на цьому проміжку вона є зростаючою і неперервною. Якщо  $n$  – парне натуральне число, то функція  $y = \sqrt[n]{x}$  є оберненою до звуження функції  $y = x^n$  на проміжок  $[0; +\infty)$ , її областю визначення і множиною значень є проміжок  $[0; +\infty)$ , на цьому проміжку вона є зростаючою і неперервною.

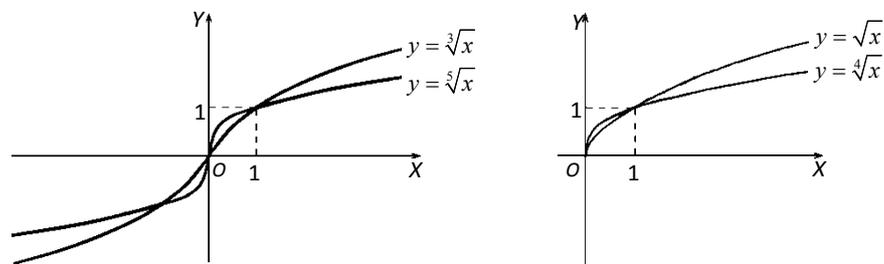


Рис. 1.

**Доведення.** Ця теорема випливає з властивостей функції  $f(x) = x^n$ . ►

**12. Означення степеня з довільним раціональним показником.** За означенням  $a^0 = 1$ ,  $a^x = \frac{1}{a^n}$ , якщо  $x = -n$ , де  $n \in \mathbb{N}$ , і  $a^x = (\sqrt[q]{a})^p$ , якщо  $x = \frac{p}{q}$  – нескоротний дріб, де  $p \in \mathbb{Z}$  і  $q \in \mathbb{N}$ . Ми визначили  $a^x$  для будь-якого  $a > 0$  і будь-якого  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ . Зокрема,  $a^{1/q} = \sqrt[q]{a}$ . Якщо  $x = \frac{p}{q}$  – нескоротний дріб, де  $p \in \mathbb{Z}$  і  $q$  – непарне натуральне число, то  $a^x = (\sqrt[q]{a})^p$  має зміст і для від’ємних  $a \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 1.** Якщо  $a$  і  $b$  – довільні додатні числа, а  $x$  і  $y$  – довільні раціональні числа, то: 1)  $a^0 = 1$ ; 2)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ; 3)  $(a^x)^y = a^{xy}$ ; 4)  $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ; 5)  $a^{-x} = 1/a^x$ ; 6)  $a^x < a^y$ , якщо  $x < y$  і  $a > 1$ ; 7)  $a^x > a^y$ , якщо  $x < y$  і  $0 < a < 1$ ; 8)  $a^x < b^x$ , якщо  $a < b$  і  $x > 0$ ; 9)  $a^x > b^x$ , якщо  $a < b$  і  $x < 0$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає з властивостей степеня з натуральним показником та властивостей кореня  $n$ -го степеня. ►

**13. Означення степеня з довільним дійсним показником.** Нехай тепер  $x$  – довільне дійсне число,  $(\underline{x}_n)$  і  $(\bar{x}_n)$  – послідовності його десяткових наближень з недостачею і надлишком відповідно. Тоді  $\underline{x}_{n-1} \leq \underline{x}_n \leq x \leq \bar{x}_n \leq \bar{x}_{n-1}$  і  $0 \leq \bar{x}_n - \underline{x}_n \leq \frac{1}{10^n}$ . Тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = x$ . Поставимо питання: що розуміти під  $a^x$ , якщо  $x$  – ірраціональне число?

Нехай  $a > 0$  і  $x$  – довільні дійсні числа, а  $(\underline{x}_n)$  – послідовність десяткових наближень числа  $x$  з недостачею. За означенням

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\underline{x}_n}.$$

**Теорема 1.** Для будь-яких  $a > 0$  і  $x \in \mathbb{R}$  існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\underline{x}_n}. \quad (1)$$

**Доведення.** Нехай, наприклад,  $a > 1$ . За властивістю б) степеня з раціональним показником  $a^{\underline{x}_n} \leq a^{\underline{x}_{n+1}}$ , тобто послідовність  $(a^{\underline{x}_n})$  є неспадною. Оскільки  $\lim_{n \rightarrow \infty} \underline{x}_n = x$ , то послідовність  $(\underline{x}_n)$  є обмеженою. Тому існує раціональне число  $\alpha$  таке, що  $(\forall n \in \mathbb{N}): \underline{x}_n \leq \alpha$ . За властивістю б) степеня з раціональним показником  $(\forall n \in \mathbb{N}): a^{\underline{x}_n} \leq a^\alpha$ . Отже, послідовність  $(a^{\underline{x}_n})$  є обмеженою зверху. Тому, за теоремою Вейерштрасса границя (1) існує і є скінченною. ►

**Зауваження 1.** Якщо  $a > 0$  і  $x \in \mathbb{R}$ , то

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{x}_n}. \quad (2)$$

Справді, нехай  $\delta_n = \bar{x}_n - \underline{x}_n$ . Тоді  $\delta_n$  – раціональні числа і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ . За властивістю 2) степеня з раціональним показником і вже доведеною раніше рівністю  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\delta_n} = 1$  отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{x}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\bar{x}_n} a^{\delta_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\underline{x}_n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\delta_n} = a^x.$$

**Зауваження 2.** Рівність (2) також можна приймати за означення  $a^x$ . Таким чином, якщо  $a > 1$  і  $x \in \mathbb{R}$ , то  $a^x$  – це таке число  $y$ , що  $a^{\underline{x}_n} \leq y \leq a^{\bar{x}_n}$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 2.** Якщо  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$  і  $y \in \mathbb{R}$  – довільні дійсні числа, то:  
 1)  $a^0 = 1$ ; 2)  $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$ ; 3)  $(a^x)^y = a^{xy}$ ; 4)  $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ ; 5)  $a^{-x} = 1/a^x$ ;  
 6)  $a^x < a^y$ , якщо  $x < y$  і  $a > 1$ ; 7)  $a^x > a^y$ , якщо  $x < y$  і  $0 < a < 1$ ; 8)  $a^x < b^x$  якщо  $a < b$  і  $x > 0$ ; 9)  $a^x > b^x$ , якщо  $a < b$  і  $x < 0$ .

**Доведення.** Обмежимося доведенням властивості 2) (інші доводяться подібно). Нехай  $(\underline{x}_n)$ ,  $(\underline{y}_n)$  і  $(\underline{z}_n)$  – послідовності десяткових наближень з нестачею чисел  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$  і  $z = x + y$  відповідно. Тоді  $\underline{z}_n = \underline{x}_n + \underline{y}_n + \delta_n$ , де  $\delta_n$  – раціональні числа і  $\delta_n \rightarrow 0$ . Тому за властивостями степеня з раціональним показником маємо

$$a^{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\underline{z}_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\underline{x}_n} a^{\underline{y}_n} a^{\delta_n} = a^x a^y. \blacktriangleright$$

**14. Показникова функція і її неперервність.** Функція  $f(x) = a^x$ , де  $a \in (0; +\infty)$  і  $a \neq 1$ , називається показниковою. У випадку  $a = e$  використовується також позначення  $e^x = \exp(x)$ .

**Теорема 1.** Функція  $f(x) = a^x$  має наступні властивості: 1)  $a^0 = 1$ ; 2)  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ; 3)  $f$  зростаючою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , якщо  $a > 1$ ; 4)  $f$  спадною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , якщо  $a \in (0; 1)$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ , якщо  $a > 1$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ , якщо  $a > 1$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ , якщо  $a \in (0; 1)$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ , якщо  $a \in (0; 1)$ ; 9)  $f$  неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ ; 10)  $E(f) = (0; +\infty)$ .

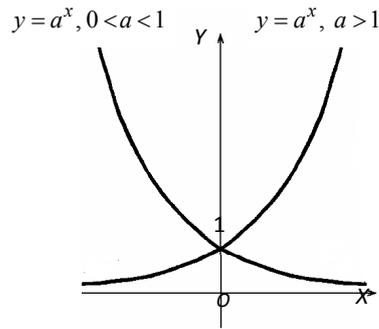


Рис. 1.

**Лема 1.** Якщо  $(\delta_n)$  – довільна послідовність дійсних чисел, для якої  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \delta_n \neq 0$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\delta_n} = 1$ .

**Доведення.** Нехай  $(m_n)$  – збіжна до нескінченності послідовність натуральних чисел така, що  $-\frac{1}{m_n} \leq \delta_n \leq \frac{1}{m_n}$ ,  $n \geq n_0$ . Тоді, вважаючи, що, наприклад,  $a > 1$ , маємо  $a^{-\frac{1}{m_n}} \leq a^{\delta_n} \leq a^{\frac{1}{m_n}}$ . Але  $a^{1/m_n} \rightarrow 1$ . Тому з останньої нерівності отримуємо потрібний висновок. ►

**Доведення теореми 1.3** леми 1 впливає, що  $\lim_{t \rightarrow 0} a^t = 1$ . Тому

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} \lim_{t \rightarrow 0} a^t = a^{x_0}$$

для кожного  $x_0 \in (-\infty; +\infty)$ . Отже, властивість 9) доведено. Інші твердження теореми є наслідком властивості 9), властивостей степеня з дійсним показником, теореми Больцано-Коші (властивості 4)–8) вже були доведені раніше). ►

### 15. Існування логарифма дійсного числа. Логарифмічна функція.

Логарифмом числа  $b$  при основі  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ , називається таке число  $d = \log_a b$ , що  $a^d = b$ . Іншими словами логарифм числа  $b$  при основі  $a$  це число  $d$ , яке є розв'язком рівняння  $a^d = b$ .

**Теорема 1.** Якщо  $0 < a < +\infty$  і  $a \neq 1$ , то рівняння  $a^d = b$  має розв'язок  $d$  тоді і тільки тоді, коли  $b > 0$  і для кожного  $b > 0$  існує єдиний розв'язок цього рівняння.

**Доведення.** Розглянемо функцію  $f(x) = a^x$ . Ця функція є неперервною, строго монотонною,  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $E(f) = (0; +\infty)$ . Звідси та з наслідків із теореми про обернену функцію отримуємо потрібний висновок. ►

**Наслідок 1.** Тільки додатні числа мають логарифми.

**Теорема 2.** Якщо  $0 < a < +\infty$  і  $a \neq 1$ , то: 1)  $a^{\log_a b} = b$  для кожного  $b \in (0; +\infty)$ ; 2)  $\log_a a^x = x$  для кожного  $x \in \mathbb{R}$ ; 3)  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$  для кожного  $b \in (0; +\infty)$  і будь-якого  $c \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з означення логарифма. ►

**Зауваження 1.** Важливу роль відіграють логарифми за основою  $a = e$ . Для них використовують позначення (в даний час частіше друге)  $\ln b$  і  $\log b$ . Таким чином,  $e^{\ln b} = b$  і  $e^{\log b} = b$ .

Функція  $y = \log_a x$ , де  $0 < a < +\infty$  і  $a \neq 1$ , називається логарифмічною.

**Теорема 3.** Функція  $f(x) = \log_a x$  має наступні властивості: 1) є оберненою до функції  $y = a^x$ ; 2)  $D(f) = (0; +\infty)$ ; 3)  $E(f) = (-\infty; +\infty)$ ; 4) є неперервною на проміжку  $(0; +\infty)$ ; 5) є зростаючою на проміжку  $(0; +\infty)$ , якщо  $1 < a < +\infty$ ; 6) є спадною на проміжку  $(0; +\infty)$ , якщо  $0 < a < 1$ ; 7)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ , якщо  $1 < a < +\infty$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ , якщо  $1 < a < +\infty$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ , якщо  $0 < a < 1$ ; 10)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ , якщо  $0 < a < 1$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з означення логарифма

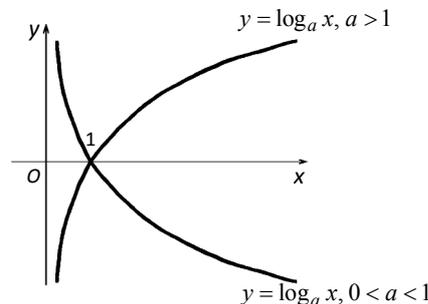


Рис. 1.

та теореми про обернену функцію. ►

**16. Загальна степенева функція.** Функція  $y = x^\mu$ , де  $\mu \in \mathbb{R}$  називається загальною степеневою функцією.

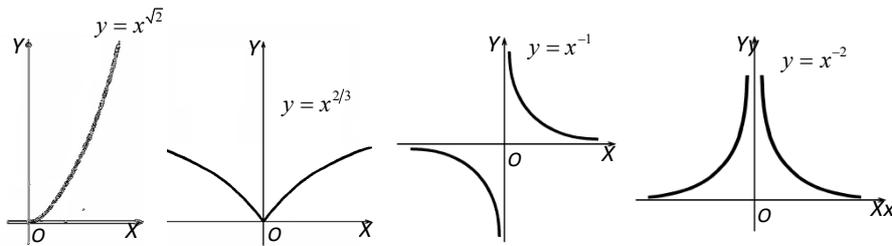


Рис. 1.

**Теорема 1.3** *За будь-якого  $\mu \in \mathbb{R}$  області визначення загальної степеневі функції належить проміжок  $(0; +\infty)$  і на цьому проміжку ця функція є неперервною.*

**Доведення.** Справді, згідно з означенням степеня  $x^\mu$  з довільним дійсним показником за будь-якого  $\mu \in \mathbb{R}$  проміжок  $(0; +\infty)$  належить області визначення розглядуваної функції. Крім цього,  $x^\mu = e^{\mu \ln x}$ . Функція  $\varphi(x) = \mu \ln x$  є неперервною на проміжку  $(0; +\infty)$ , а функція  $f(y) = e^y$  є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Тому за теоремою про неперервність композиції функцій функція  $f(\varphi(x)) = e^{\mu \ln x}$  є неперервною на проміжку  $(0; +\infty)$ . ►

**17. Функція  $\sin$ .** Візьмемо на колі радіуса  $R > 0$  з центром в точці  $O(0;0)$  точку  $A(R;0)$  і повернемо вектор  $\overline{OA}$  навколо точки  $O$  на кут  $x$  радіан. Тоді точка  $A$  перейде в точку  $M(\alpha; \beta)$ . Синусом числа  $x$  називається число  $\sin x$ , яке дорівнює відношенню ординати точки  $M$  до  $R$ , тобто  $\sin x = \frac{\beta}{R}$ .

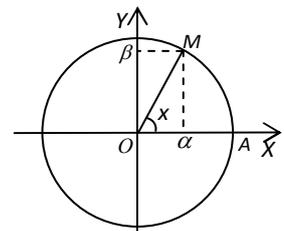


Рис. 1.

**Теорема 1.** *Функція  $y = \sin x$  має наступні властивості:*

- 1)  $D(\sin) = (-\infty; +\infty)$ ;
- 2) є зростаючою на кожному з проміжків  $[2\pi k - \pi/2; 2\pi k + \pi/2]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 3) є спадною на кожному з проміжків  $[2\pi k + \pi/2; 2\pi k + 3\pi/2]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 4)  $\sin(2\pi k + \pi/2) = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 5)  $\sin(2\pi k - \pi/2) = -1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 6)  $\sin(\pi k) = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 7) є періодичною і кожне з чисел  $T = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , є її періодом;
- 8) є непарною;
- 9) є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ ;
- 10)  $E(\sin) = [-1; 1]$ .

**Доведення.** Справді,

$$|\sin x - \sin x_0| = \left| 2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cos \frac{x + x_0}{2} \right| \leq |x - x_0|.$$

Тому

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta) : |\sin x - \sin x_0| < \varepsilon,$$

тобто функція  $\sin$  є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Інші властивості впливають безпосередньо з означення  $\sin$  та теореми Больцано-Коші. ►

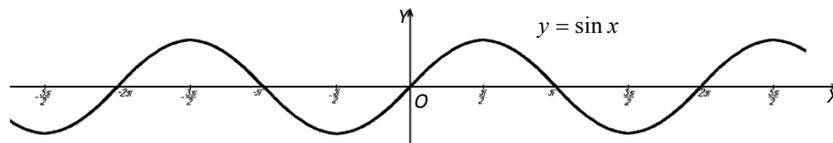


Рис. 2.

**18. Функція  $\cos$ .** Візьмемо на колі радіуса  $R > 0$  з центром в точці  $O(0;0)$  точку  $A(R;0)$  і повернемо вектор  $\overrightarrow{OA}$  навколо точки  $O$  на кут  $x$  радіан. Тоді точка  $A$  перейде в точку  $M(\alpha; \beta)$ . Косинусом числа  $x$  називається число  $\cos x$ , яке дорівнює відношенню абсциси точки  $M$  до  $R$ , тобто  $\cos x = \frac{\alpha}{R}$ .

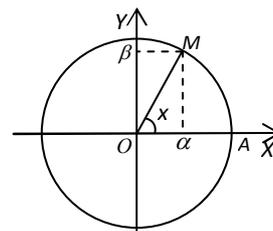


Рис. 1.

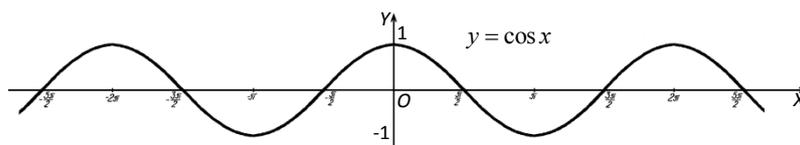


Рис. 2.

**Теорема 1.** Функція  $y = \cos x$  має наступні властивості:

- 1)  $D(\cos) = (-\infty; +\infty)$ ; 2) є зростаючою на кожному з проміжків  $[2\pi k - \pi; 2\pi k]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 3) є спадною на кожному з проміжків  $[2\pi k; 2\pi k + \pi]$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 4)  $\cos(2\pi k) = 1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 5)  $\cos(2\pi k - \pi) = -1$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 6)  $\cos(\pi k + \pi/2) = 0$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; 7) є періодичною і кожне з чисел  $T = 2\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , є її періодом; 8) є парною; 9) є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ ; 10)  $E(\cos) = [-1; 1]$ .

**Доведення.** Справді,

$$|\cos x - \cos x_0| = \left| -2 \sin \frac{x + x_0}{2} \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq 2 \left| \frac{x - x_0}{2} \right| = |x - x_0|.$$

Тому

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta) : |\cos x - \cos x_0| < \varepsilon,$$

тобто функція  $\cos$  є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Інші властивості впливають безпосередньо з означення  $\cos$  та теореми Больцано-Коші. ►

**19. Функція  $\operatorname{tg}$ .** За означенням  $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ . Для позначення цієї функції

використовують також символ  $\tan x$ .

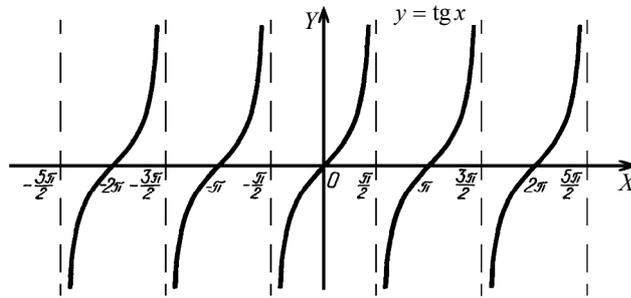


Рис. 1.

**Теорема 1.** Функція  $y = \operatorname{tg} x$  має наступні властивості:

- 1)  $D(\operatorname{tg}) = (-\infty; +\infty) \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- 2) є зростаючою на кожному з проміжків  $(\pi k - \pi/2; \pi k + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \pi k + \pi/2 -} \operatorname{tg} x = +\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow \pi k + \pi/2 +} \operatorname{tg} x = -\infty$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 4) є періодичною і кожне з чисел  $T = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , є її періодом;
- 5) є непарною;
- 6) є неперервною на кожному проміжку  $(\pi k - \pi/2; \pi k + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 7)  $E(\operatorname{tg}) = (-\infty; +\infty)$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з означення, властивостей функцій  $\sin$  і  $\cos$  та другої теореми Больцано-Коші. ►

**20. Функція  $\operatorname{ctg}$ .** За означенням  $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ . Для позначення цієї функції

використовують також символ  $\operatorname{cot} x$ .

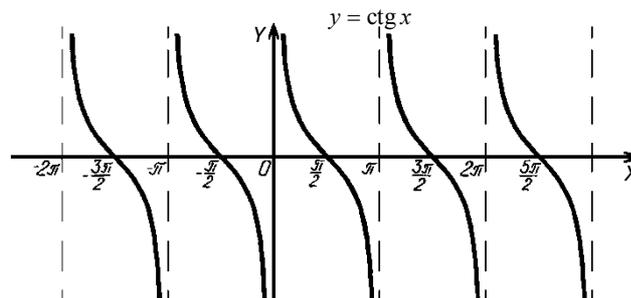


Рис. 1.

**Теорема 1.** Функція  $y = \operatorname{ctg} x$  має наступні властивості:

- 1)  $D(\operatorname{ctg}) = (-\infty; +\infty) \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ ;
- 2) є спадною на кожному з проміжків  $(\pi k; \pi k + \pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 3)  $\lim_{x \rightarrow \pi k -} \operatorname{ctg} x = -\infty$  і  $\lim_{x \rightarrow \pi k +} \operatorname{ctg} x = +\infty$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 4) є періодичною і кожне з чисел  $T = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , є її періодом;
- 5) є непарною;
- 6) є неперервною на кожному проміжку  $(\pi k; \pi k + \pi)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ;
- 7)  $E(\operatorname{ctg}) = (-\infty; +\infty)$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з означення, властивостей функцій  $\sin$  і  $\cos$  та другої теореми Больцано-Коші. ►

**21. Функція  $\arcsin$ .** Арксинусом числа  $a$  називається таке число  $b = \arcsin a \in [-\pi/2; \pi/2]$ , що  $\sin b = a$ , тобто  $\arcsin a$  – це число  $b$  з проміжку  $[-\pi/2; \pi/2]$ , яке є розв'язком рівняння  $\sin b = a$ .

**Теорема 1.** Рівняння  $\sin b = a$  має розв'язок для тих і тільки тих  $a \in \mathbb{R}$ , для яких  $|a| \leq 1$ . Для кожного  $a \in [-1; 1]$  рівняння  $\sin b = a$  має єдиний розв'язок  $b$ , який належить проміжку  $[-\pi/2; \pi/2]$ .

**Доведення.** Функція  $f^{-1}(x) = \sin x$ , розглядувана на проміжку  $[-\pi/2; \pi/2]$ , є зростаючою, неперервною і множиною її значень є проміжок  $[-1; 1]$ . Звідси випливає твердження теореми. ►

**Наслідок 1.**  $\arcsin a$  існує для кожного  $a \in [-1; 1]$ .

**Теорема 2.** Функція  $f(x) = \arcsin x$  має наступні властивості: 1) є оберненою до функції  $y = \sin x$ , розглядуваної на проміжку  $[-\pi/2; \pi/2]$ ; 2)  $D(f) = [-1; 1]$ ; 3)  $E(f) = [-\pi/2; \pi/2]$ ; 4)  $\sin(\arcsin x) = x$ , якщо  $x \in [-1; 1]$ ; 5)  $\arcsin(\sin x) = x$ , якщо  $x \in [-\pi/2; \pi/2]$ ; 6) є неперервною на проміжку  $[-1; 1]$  як функція з  $[-1; 1]$  в  $\mathbb{R}$ ; 7) є зростаючою на проміжку  $[-1; 1]$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з властивостей функції  $\sin$  та властивостей обернених функцій. ►

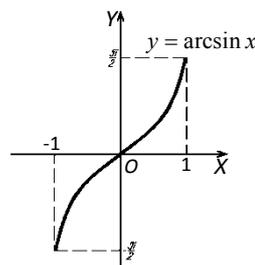


Рис. 1.

**22. Функція  $\arccos$ .** Арккосинусом числа  $a$  називається таке число  $b = \arccos a \in [0; \pi]$ , що  $\cos b = a$ , тобто  $\arccos a$  – це число  $b$  з проміжку  $[0; \pi]$ , яке є розв'язком рівняння  $\cos b = a$ .

**Теорема 1.** Рівняння  $\cos b = a$  має розв'язок для тих і тільки тих  $a \in \mathbb{R}$ , для яких  $|a| \leq 1$ . Для кожного  $a \in [-1; 1]$  рівняння  $\cos b = a$  має єдиний розв'язок  $b$ , який належить проміжку  $[0; \pi]$ .

**Наслідок 1.**  $\arccos a$  існує для кожного  $a \in [-1; 1]$ .

**Теорема 2.** Функція  $f(x) = \arccos x$  має наступні властивості: 1) є оберненою до функції  $y = \cos x$ , розглядуваної на проміжку  $[0; \pi]$ ; 2)  $D(f) = [-1; 1]$ ; 3)  $E(f) = [0; \pi]$ ; 4)  $\cos(\arccos x) = x$ , якщо  $x \in [-1; 1]$ ; 5)  $\arccos(\cos x) = x$ , якщо  $x \in [0; \pi]$ ; б) є неперервною на проміжку  $[-1; 1]$  як функція з  $[-1; 1]$  в  $\mathbb{R}$ ; 7) є спадною на проміжку  $[-1; 1]$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з властивостей функції  $\cos$  та властивостей обернених функцій. ►

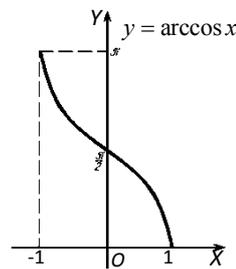


Рис. 1.

**23. Функція  $\operatorname{arctg}$ .** Арктангенсом числа  $a$  називається таке число  $b = \operatorname{arctg} a \in (-\pi/2; \pi/2)$ , що  $\operatorname{tg} b = a$ , тобто  $\operatorname{arctg} a$  – це число  $b$  з проміжку  $(-\pi/2; \pi/2)$ , яке є розв'язком рівняння  $\operatorname{tg} b = a$ . Для позначення  $\operatorname{arctg} x$  використовується також символ  $\operatorname{arctan} x$ .

**Теорема 1.** Для кожного  $a \in \mathbb{R}$  рівняння  $\operatorname{tg} b = a$  має єдиний розв'язок  $b$ , який належить проміжку  $(-\pi/2; \pi/2)$ .

**Доведення.** Функція  $f^{-1}(x) = \operatorname{tg} x$ , розглядувана на проміжку  $(-\pi/2; \pi/2)$ , є зростаючою, неперервною і множиною її значень є проміжок  $(-\infty; +\infty)$ . Звідси випливає твердження теореми. ►

**Теорема 2.** Функція  $f(x) = \operatorname{arctg} x$  має наступні властивості: 1) є оберненою до функції  $y = \operatorname{tg} x$ , розглядуваної на проміжку  $(-\pi/2; \pi/2)$ ;

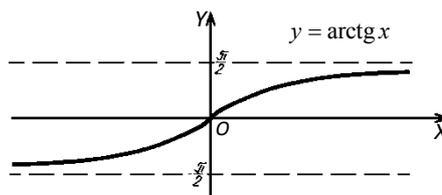


Рис. 1.

2)  $D(f) = \mathbb{R}$ ; 3)  $E(f) = (-\pi/2; \pi/2)$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x = -\pi/2$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arctg} x = \pi/2$

; 6)  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ , якщо  $x \in \mathbb{R}$ ; 7)  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ , якщо  $x \in (-\pi/2; \pi/2)$ ; 8) є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ ; 9) є зростаючою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з властивостей функції  $\operatorname{tg}$  та властивостей обернених функцій. ►

**24. Функція  $\operatorname{arcsctg}$ .** Арккотангенсом числа  $a$  називається таке число  $b = \operatorname{arcsctg} a \in (0; \pi)$ , що  $\operatorname{ctg} b = a$ , тобто  $\operatorname{arcsctg} a$  – це число  $b$  з проміжку  $(0; \pi)$ , яке є розв'язком рівняння  $\operatorname{ctg} b = a$ . Для позначення  $\operatorname{arcsctg} x$  використовується також символ  $\operatorname{arccot} x$ .

**Теорема 1.** Для кожного  $a \in \mathbb{R}$  рівняння  $\operatorname{ctg} b = a$  має єдиний розв'язок  $b$ , який належить проміжку  $(0; \pi)$ .

**Доведення.** Функція  $f^{-1}(x) = \operatorname{ctg} x$ , розглядувана на проміжку  $(0; \pi)$ , є спадною, неперервною і множиною її значень є проміжок  $(-\infty; +\infty)$ . Звідси випливає твердження теореми. ►

**Теорема 2.** Функція  $f(x) = \operatorname{arcsctg} x$  має наступні властивості: 1) є оберненою до функції  $y = \operatorname{ctg} x$ , розглядуваної на проміжку  $(0; \pi)$ ; 2)  $D(f) = \mathbb{R}$ ; 3)  $E(f) = (0; \pi)$ ; 4)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arcsctg} x = \pi$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arcsctg} x = 0$ ; 6)  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcsctg} x) = x$ , якщо  $x \in \mathbb{R}$ ; 7)  $\operatorname{arcsctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ , якщо  $x \in (0; \pi)$ ; 8) є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ ; 9) є спадною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .

**Доведення.** Ця теорема випливає безпосередньо з властивостей функції  $\operatorname{ctg}$  та властивостей обернених функцій. ►

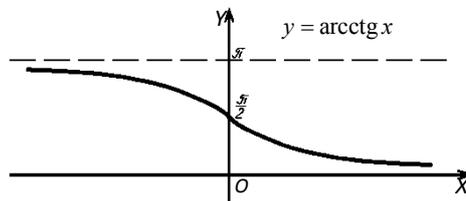


Рис. 1.

**25. Багатозначні (многозначні) функції.** Коли говорять про функцію, то часто додають слово “однозначна”, тобто говорять “однозначна функція”. Це означає, що жодному дійсному числу не відповідає більше одного дійсного числа. Багатозначною функцією в  $\mathbb{R}$  називається така відповідність в  $\mathbb{R}$ , за якої принаймні одному дійсному числу відповідає більше, ніж одне дійсне число.

**Приклад 1.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  число  $y$ , яке є розв'язком рівняння  $y^2 = x$ . В даному випадку кожному додатному дійсному числу ставиться у відповідність два дійсні числа  $\pm\sqrt{x}$ . Числу 0 ставиться у відповідність одне дійсне число – число 0, а від'ємному дійсному числу не ставиться у відповідність жодне дійсне число. Отже, така відповідність є багатозначною функцією, але не є функцією.

За такого означення багатозначної функції, функція (однозначна) не є багатозначною функцією. Інколи, функції (однозначні) також відносять до багатозначних. Тоді багатозначна функція – це будь-яка відповідність в  $\mathbb{R}$ . Таким чином, термін “багатозначна функція” вживається в двох розуміннях (частіше в другому). Це не призводить до непорозуміннь, бо з тексту завжди зрозуміло, що мається на увазі.

Багатозначні функції задаються і позначаються так само як і однозначні. Проте, слід мати на увазі, що для багатозначних функцій  $f(x)$  – це множина. Однозначною гілкою багатозначної функції  $f$  називається така функція (однозначна)  $f_1$ , що  $(\forall x \in D(f_1)) : f_1(x) \in f(x)$ .

**Приклад 2.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  число  $y$ , яке є розв'язком рівняння  $y^2 = x$ . Отримаємо багатозначну функцію

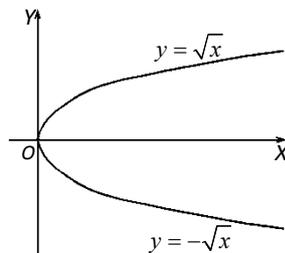


Рис.1.

$f(x) = \pm\sqrt{x}$ . Функції  $f_1(x) = \sqrt{x}$  і  $f_2(x) = -\sqrt{x}$  є її однозначними гілками.

**Приклад 3.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  число  $y$ , яке є розв'язком рівняння  $\sin y = x$ . Отримаємо багатозначну функцію  $f(x) = \text{Arcsin } x$ . Функції  $f_1(x) = \arcsin x$  і  $f_2(x) = \pi - \arcsin x$  є її однозначними гілками.

**Приклад 4.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  число  $y$ , яке є розв'язком рівняння  $\cos y = x$ . Отримаємо багатозначну функцію

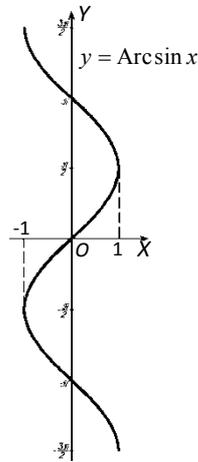


Рис. 2.

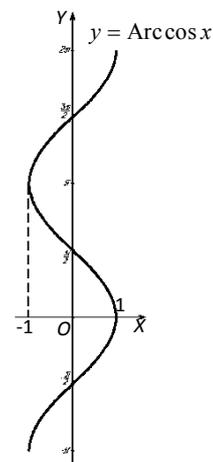


Рис. 3.

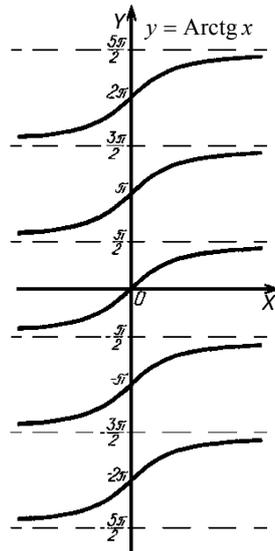


Рис. 4.

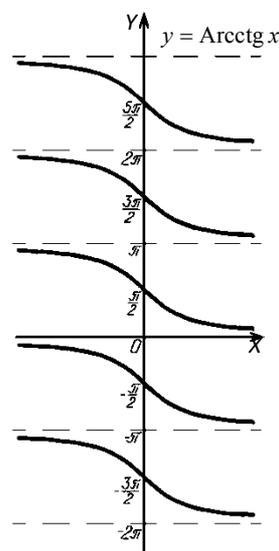


Рис. 5.

$$f(x) = \text{Arccos } x.$$

**Приклад 5.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  число  $y$ , яке є розв'язком рівняння  $\text{tg } y = x$ . Отримаємо багатозначну функцію  $f(x) = \text{Arctg } x$ .

**Приклад 6.** Поставимо у відповідність кожному дійсному числу  $x$  число  $y$ , яке є розв'язком рівняння  $\text{ctg } y = x$ . Отримаємо багатозначну функцію  $f(x) = \text{Arcctg } x$ .

**26. Функціональні рівняння.** Функціональним називається рівняння, невідомими в якому є функції. Функціональні рівняння діляться на різні типи (інтегральні, диференціальні, різницеві та інші). Тут розглянемо найпростіші

функціональні рівняння, які можна назвати алгебраїчними функціональними рівняннями. Вони характеризуються тим, що для їхніх розв'язків справедливі певні алгебраїчні формули.

**Приклад 1.** Розглянемо рівняння

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Розв'язком такого рівняння назвемо таку функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $f(x+y) = f(x) + f(y)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$  і всіх  $y \in \mathbb{R}$ . Лінійна функція  $f(x) = ax$ , де  $a$  – довільне число, є розв'язком цього рівняння. Навпаки, якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $\mathbb{R}$  і є розв'язком рівняння (1), то  $f(0+0) = f(0) + f(0)$ , тобто  $f(0) = 2f(0)$ . Тому  $f(0) = 0$ . Крім цього,

$$f(nt) = f(\underbrace{t+t+\dots+t}_n) = \underbrace{f(t) + f(t) + \dots + f(t)}_n = nf(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Аналогічно,

$$f\left(n\frac{1}{t}\right) = nf\left(\frac{1}{t}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \neq 0,$$

і

$$f\left(\frac{m}{n}t\right) = \frac{m}{n}f(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, для кожного раціонального числа  $x = \frac{m}{n}$  виконується  $f(x) = ax$ , де  $a = f(1)$ . Нехай  $(x_n)$  – деяка послідовність раціональних чисел, збіжна до довільного наперед заданого числа  $x$ . Тоді  $f(x_n) = ax_n$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Тому  $f(x) = ax$  для кожного  $x \in \mathbb{R}$ . Таким чином, неперервна на  $\mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є розв'язком розглядуваного рівняння тоді і тільки тоді, коли вона лінійною:  $f(x) = ax$ . При цьому,  $a = f(1)$ . Разом з цим, можна довести, що існують розривні функції, які є розв'язками рівняння (1).

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = x^\mu$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ , є розв'язком рівняння

$$f(xy) = f(x)f(y), \quad x \in (0; +\infty), \quad y \in (0; +\infty), \quad (2)$$

Навпаки, якщо неперервна на  $(0; +\infty)$  функція  $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \neq 0$ , є розв'язком рівняння (2), то  $f(x) = x^\mu$ , де  $\mu \in \mathbb{R}$  – деяке число. Справді, нехай  $\phi(t) = f(e^t)$ . Тоді  $\phi(t_1 + t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2)$ . Тому  $\phi(nt) = \phi^n(t)$ , де  $n \in \mathbb{N}$  і  $t \in \mathbb{R}$ . Крім цього,  $\phi(t) = \phi^2(t/2)$  і  $\phi(t_2) = \phi(t_1)\phi(t_2 - t_1)$ . Тому  $\phi(t_1) \neq 0$  для всіх  $t_1 \in \mathbb{R}$  (інакше  $f \equiv 0$ ). Далі,  $\phi(0) = \phi(0+0) = (\phi(0))^2$ . Отже,  $\phi(0) = 1$ . До того ж,  $\phi(0) = \phi(t-t) = \phi(t)\phi(-t)$ ,  $\phi(1) = \phi\left(2 \cdot \frac{1}{2}\right) = \phi^2\left(\frac{1}{2}\right) > 0$  і  $\phi(-t) = 1/\phi(t)$ . Тому  $\phi(xt) = (\phi(t))^x$ , якщо  $x = \frac{m}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  і  $m \in \mathbb{Z}$ . Таким чином,  $\phi(x) = a^x$ , тобто  $f(x) = x^\mu$ , де  $a = \phi(1) = f(e)$ ,  $x$  – довільне раціональне число і  $\mu = \ln a$ . Нехай  $(x_n)$  – деяка послідовність раціональних чисел, збіжна до довільного наперед заданого числа  $x \in (0; +\infty)$ . Тоді  $f(x_n) = x_n^\mu$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^\mu$ . Тому  $f(x) = x^\mu$ . Функція  $f(x) = 0$  також є розв'язком рівняння (2). Розв'язком цього ж рівняння є розривна функція  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ .

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = a^x$ ,  $a \in (0; +\infty)$ , є розв'язком рівняння

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

Навпаки, якщо неперервна на  $\mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \neq 0$ , є розв'язком рівняння (3), то  $f(x) = a^x$ , де  $a \in (0; +\infty)$  – деяке число. Справді,  $f(x) = f^2(x/2)$ . Тому  $f(x) \geq 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Крім цього, оскільки  $f \neq 0$ , то існує  $x_0 \in \mathbb{R}$ , для якого  $f(x_0) \neq 0$ . Але  $f(x)f(x_0 - x) = f(x_0)$ . Тому  $f(x) > 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Нехай  $\phi(x) = \ln f(x)$ . Тоді ця функція  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $\mathbb{R}$  і

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тому (дивись приклад 1)  $\phi(x) = cx$ , де  $c$  – деяке число. Отже,  $\ln f(x) = cx$ , тобто  $f(x) = a^x$ , де  $a = e^c$ .

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = \log_a x$ ,  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ , є розв'язком рівняння

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad x \in (0; +\infty), \quad y \in (0; +\infty). \quad (4)$$

Навпаки, якщо неперервна на  $(0; +\infty)$  функція  $f: (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \neq 0$ , є розв'язком рівняння (4), то  $f(x) = \log_a x$ , де  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$  – деяке число. Справді, нехай  $\phi(t) = f(e^t)$ . Тоді ця функція  $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $\mathbb{R}$  і

$$\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Тому (дивись приклад 1)  $\varphi(x) = cx$ , де  $c$  – деяке число. Отже,  $f(e^t) = ct$ , тобто  $f(x) = c \ln x$ , звідки  $f(x) = \log_a x$ , де  $a = e^c$ .

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = \cos ax$ , де  $a \in \mathbb{R}$  – довільне число, є розв'язком рівняння

$$f(y+x) + f(y-x) = 2f(x)f(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

Навпаки, якщо неперервна на  $\mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \neq 0$ , є розв'язком рівняння (5) і  $0 < f(x) \leq 1$  для всіх  $x \in (0; c]$ , де  $c > 0$  – деяке число, то  $f(x) = \cos ax$ . Справді, якщо  $y \in \mathbb{R}$  є таким, що  $f(y) \neq 0$ ,  $f(y+0) + f(y-0) = 2f(0)f(y)$ , тобто  $f(0) = 1$ . Крім цього,  $f(0+x) + f(0-x) = 2f(x)f(0)$ , тобто  $f(-x) = f(x)$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . При цьому, знайдеться таке  $\theta \in (0; \pi/2]$ , що  $f(c) = \cos \theta$ . Тому

$$f(2c) = 2f^2(c) - f(0) = 2\cos^2 \theta - 1 = \cos 2\theta, \quad f(3c) = 2f(2c)f(c) - f(0) = \cos 3\theta,$$

і методом математичної індукції переконуємось, що

$$f(mc) = f(c)(2f(c) - 1)^{m-1} = \cos ma, \quad m \in \mathbb{N}.$$

До того ж,

$$f^2\left(\frac{1}{2}c\right) = \frac{f(c) + f(0)}{2} = \frac{\cos \theta + 1}{2} = \cos^2 \frac{1}{2}\theta, \quad f\left(\frac{1}{2}c\right) = \cos \frac{1}{2}\theta,$$

і методом математичної індукції переконуємось, що

$$f\left(\frac{1}{2^n}c\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{2^2} + \sqrt{\frac{1}{2^3} + \dots + \sqrt{\frac{1}{2^n} + \frac{f(c)}{2^n}}}} = \cos\left(\frac{1}{2^n}\theta\right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Таким чином,

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \cos\left(\frac{m}{2^n}a\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отже,  $f(cx) = \cos \theta x$ , якщо  $x = \frac{m}{2^n}$ , де  $n \in \mathbb{N}$  і  $m \in \mathbb{N}$ . Нехай тепер  $x \in (0; +\infty)$  – довільне число,  $m = [x2^n]$  і  $x_n = \frac{m}{2^n}$ . Тоді  $f(cx_n) = \cos ax_n$  і  $x_n \rightarrow x$ . Тому  $f(cx) = \cos \theta x$  для всіх  $x \in [0; +\infty)$  і, завдяки парності функції,  $f(x) = \cos ax$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , де  $a = \theta / c$ .

**Приклад 6.** Функція  $f(x) = \operatorname{ch} ax$ , де  $a \in \mathbb{R}$  – довільне число, є розв'язком рівняння (5). Навпаки, якщо неперервна на  $\mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , є розв'язком рівняння (5),  $f(x) > 1$  для всіх  $x \in (0; c]$ , де  $c > 0$  – деяке число, то  $f(x) = \operatorname{ch} ax$ . Справді, як і вище переконуємось, що  $f(0) = 1$  і функція  $f$  є парною. При цьому, знайдеться таке  $\theta > 0$ , що  $f(c) = \operatorname{ch} \theta$ . Тоді, як і вище, переконуємось, що

$$f\left(\frac{m}{2^n}c\right) = \operatorname{ch}\left(\theta \frac{m}{2^n}\right), \quad n \in \mathbb{N}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Тому  $f(x) = \operatorname{ch} ax$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 7.** Функція  $f(x) = 0$  є розв'язком рівняння (5).

**Приклад 8.** Функція  $f(x) = 1$  є розв'язком рівняння (5).

## 27. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці.
2. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці на мові “ $\varepsilon - \delta$ ”.
3. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці на мові околів.
4. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці на мові послідовностей.
5. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці на мові приростів.
6. Чи є функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .
7. Чи є функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , якщо для будь-якої послідовності  $(x_n)$  такої, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , виконується  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ .

8. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність суми, добутку та частки.
9. Наведіть приклад таких функцій  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що вони не є неперервними в точці  $a = 0$ , але їхній добуток є функцією, неперервною в цій точці.
10. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність композиції функцій.
11. Сформулюйте і доведіть теорему про граничний перехід під знаком неперервної функції.
12. За яких умов справедлива рівність  $\lim_{t \rightarrow \alpha} \cos(\varphi(t)) = \cos\left(\lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)\right)$ ?
13. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  справа.
14. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  зліва.
15. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  справа на мові послідовностей.
16. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  зліва на мові послідовностей.
17. Сформулюйте означення точки розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
18. Сформулюйте означення точки розриву першого роду і стрибка функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
19. Сформулюйте означення точки усунютого розриву функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
20. Сформулюйте означення точки розриву другого роду функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
21. Сформулюйте критерій неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в термінах однобічних неперервностей.
22. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка має усунютий розрив у точці  $a = 1$  і є неперервною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
23. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка має розрив першого роду в точці  $a = 0$ , розрив другого роду в точці  $a = 1$  і є неперервною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
24. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є неперервною зліва в точці  $a = 0$ , не є неперервною справа в цій точці, має розрив другого роду в точці  $a = 1$  і є неперервною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
25. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є неперервною в кожній точці проміжку  $[0; 1)$  і є розривною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .
26. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка має розрив другого роду в точках  $a = -1$ ,  $a = 0$  і є неперервною в усіх інших точках  $a \in \mathbb{R}$ .

27. Сформулюйте означення неперервності функції  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  у точці  $a$  за множиною  $H \subset \mathbb{R}$ .
28. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є розривною в точці  $a = -1$ , але є неперервною в цій точці за множиною  $H = [-1; 1]$ .
29. Сформулюйте означення функції, неперервної на проміжку  $(a; b)$ .
30. Сформулюйте означення функції, неперервної на проміжку  $[a; b]$ .
31. Сформулюйте означення функції, неперервної на множині  $H$ .
32. Сформулюйте і доведіть першу теорему Вейерштрасса.
33. Сформулюйте і доведіть другу теорему Вейерштрасса.
34. Сформулюйте і доведіть першу теорему Больцано-Коші.
35. Сформулюйте і доведіть другу теорему Больцано-Коші.
36. Сформулюйте означення рівномірної неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  на множині  $H$ .
37. Сформулюйте і доведіть теорему Кантора.
38. Наведіть приклад функції  $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є неперервною на проміжку  $(0; 1)$ , але не є рівномірно неперервною на ньому.
39. Наведіть приклад функції  $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є рівномірно неперервною на проміжку  $(0; 1)$ .
40. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , але не є рівномірно неперервною на ньому.
41. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є рівномірно неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .
42. Сформулюйте означення оберненої функції.
43. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $f^{-1}(f(x)) = x$ ?
44. Для яких  $y \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $f(f^{-1}(y)) = y$ ?
45. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність оберненої функції.
46. Сформулюйте означення степеня з натуральним показником.
47. Доведіть неперервність функції  $f(x) = x^2$ .
48. Зобразіть графіки функцій  $y = x$ ,  $y = x^2$ ,  $y = x^3$ ,  $y = x^4$ ,  $y = x^5$ .
49. Сформулюйте означення кореня  $n$ -го степеня.
50. Обґрунтуйте існування кореня  $n$ -го степеня.
51. Доведіть неперервність функції  $f(x) = \sqrt{x}$ .
52. Зобразіть графіки функцій  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$ ,  $y = \sqrt[5]{x}$ ,  $y = \sqrt[6]{x}$ .
53. Сформулюйте означення степеня з довільним раціональним показником.
54. Зобразіть графіки функцій  $y = x^{2/3}$ ,  $y = x^{3/2}$ ,  $y = x^{3/4}$ ,  $y = x^{4/3}$ .

55. Сформулюйте означення степеня з довільним дійсним показником.
56. Опишіть основні властивості степеня з довільним дійсним показником і обґрунтуйте одну з них.
57. Зобразіть графіки функцій  $y = x^{\sqrt{2}}$ ,  $y = x^{-\sqrt{2}}$ .
58. Доведіть теорему про неперервність функції  $y = a^x$ .
59. Зобразіть графіки функцій  $y = 2^x$ ,  $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ .
60. Сформулюйте означення логарифма і обґрунтуйте його існування.
61. Доведіть неперервність функції  $y = \log_a x$ .
62. Зобразіть графіки функцій  $y = \log_2 x$ ,  $y = \log_{0,5} x$ .
63. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $e^{\ln x} = x$ ?
64. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\ln e^x = x$ ?
65. Доведіть неперервність функції  $y = \sin x$ .
66. Зобразіть графік функції  $y = \sin x$ .
67. Доведіть неперервність функції  $y = \cos x$ .
68. Зобразіть графік функції  $y = \cos x$ .
69. Доведіть неперервність функції  $y = \operatorname{tg} x$ .
70. Зобразіть графік функції  $y = \operatorname{tg} x$ .
71. Доведіть неперервність функції  $y = \operatorname{ctg} x$ .
72. Зобразіть графік функції  $y = \operatorname{ctg} x$ .
73. Сформулюйте означення арксинуса.
74. Обґрунтуйте існування арксинуса.
75. Опишіть основні властивості функції  $y = \arcsin x$ .
76. Доведіть неперервність функції  $y = \arcsin x$ .
77. Зобразіть графік функції  $y = \arcsin x$ .
78. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\arcsin(\sin x) = x$ ?
79. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\sin(\arcsin x) = x$ ?
80. Сформулюйте означення арккосинуса.
81. Обґрунтуйте існування арккосинуса.
82. Опишіть основні властивості функції  $y = \arccos x$ .
83. Доведіть неперервність функції  $y = \arccos x$ .
84. Зобразіть графік функції  $y = \arccos x$ .
85. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\arccos(\cos x) = x$ ?
86. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\cos(\arccos x) = x$ ?

87. Сформулюйте означення арктангенса.
88. Обґрунтуйте існування арктангенса.
89. Опишіть основні властивості функції  $y = \operatorname{arctg} x$ .
90. Доведіть неперервність функції  $y = \operatorname{arctg} x$ .
91. Зобразіть графік функції  $y = \operatorname{arctg} x$ .
92. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ ?
93. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ ?
94. Сформулюйте означення арккотангенса.
95. Обґрунтуйте існування арккотангенса.
96. Опишіть основні властивості функції  $y = \operatorname{arcctg} x$ .
97. Доведіть неперервність функції  $y = \operatorname{arcctg} x$ .
98. Зобразіть графік функції  $y = \operatorname{arcctg} x$ .
99. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ ?
100. Для яких  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ ?

## 28. Вправи і задачі теоретичного характеру.

### 1. Доведіть твердження

1. Якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| \leq \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ , то функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ .
2. Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| \leq \delta) : |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ .
3. Якщо  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, 0 < |x - a| \leq \delta) : |f(x) - f(a)| \leq \varepsilon$ , то функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ .
4. Якщо для кожного проколеного  $\varepsilon$ -околу  $\overset{\circ}{U}(f(a); \varepsilon)$  точки  $f(a)$  знайдеться такий  $\delta$ -окіл  $U(a; \delta)$  точки  $a \in \mathbb{R}$ , образ якого належить  $\overset{\circ}{U}(f(a); \varepsilon)$ , тобто  $f(U(a; \delta)) \subset \overset{\circ}{U}(f(a); \varepsilon)$ , то функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ .
5. Існує така неперервна в деякій точці  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що для жодного проколеного околу  $\overset{\circ}{U}(f(a); \varepsilon)$  точки  $f(a)$  не існує такого  $\delta$ -околу  $U(a; \delta)$  точки  $a$ , що  $f(U(a; \delta)) \subset \overset{\circ}{U}(f(a); \varepsilon)$ .
6. Існує така розривна в деякій точці  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої знайдеться така послідовність  $(x_n)$ , що  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \neq f(a)$ .

7. Функція  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  є розривною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$  і
- $$(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \delta > 0)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
8. Якщо  $(\exists a \in \mathbb{R})(\forall \delta > 0)(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \delta) : |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ , то функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою на  $\mathbb{R}$ .
9. Функція  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  є розривною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$  і
- $$(\forall a \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(a)| < \varepsilon) : |x - a| < \delta.$$
10. Існує таке  $c \in \mathbb{R}$ , що функція  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x < 0, \\ x - c, & x \geq 0, \end{cases}$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ .
11. Функція Рімана  $f(x) = \begin{cases} 1/q, & x = p/q \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  де  $p/q$  – нескоротний дріб, є розривною в кожній точці  $a \in \mathbb{Q}$  і є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .
12. Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною на  $\mathbb{R}$ , то вона не має розривів другого роду.
13. Якщо  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка функція, то
- $$\sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : x_1 \in H, x_2 \in H\} = \sup\{f(x_2) - f(x_1) : x_1 \in H, x_2 \in H\}.$$
14. Якщо функція  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  є обмеженою на множині  $H$ , то
- $$\sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : x_1 \in H, x_2 \in H\} = \sup\{f(x_2) : x_2 \in H\} - \inf\{f(x_1) : x_1 \in H\}.$$
15. Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $\mathbb{R}$ , то для кожного  $c > 0$  функція  $f_c(x) = \begin{cases} -c, & f(x) < -c, \\ f(x), & |f(x)| \leq c, \\ c, & f(x) > c, \end{cases}$  є неперервною на  $\mathbb{R}$ .
16. Для кожної функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обмеженої в деякому околі точки  $a \in \mathbb{R}$ , існує скінченна границя  $\omega_f(a) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(a; \delta)$ , де
- $$\omega_f(a; \delta) = \sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : x_1 \in (a - \delta; a + \delta), x_2 \in (a - \delta; a + \delta)\}.$$
17. Для кожної функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обмеженої в деякому околі точки  $a \in \mathbb{R}$ , існує скінченна границя
- $$\omega_f(a) := \max\left\{\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) - f(a); \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) - \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x); f(a) - \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x)\right\},$$
- $$\omega_f(a; \delta) = \sup\{|f(x_2) - f(x_1)| : x_1 \in (a - \delta; a + \delta), x_2 \in (a - \delta; a + \delta)\},$$

$$\omega_f(a) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(a; \delta).$$

18. Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(a; \delta) = 0, \text{ де}$$

$$\omega_f(a; \delta) = \sup \{|f(x_2) - f(x_1)| : x_1 \in (a - \delta; a + \delta), x_2 \in (a - \delta; a + \delta)\}.$$

19. Якщо функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервними на  $\mathbb{R}$ , то функція

$$f(x) = \min\{f_1(x); f_2(x)\} \text{ є неперервною на } \mathbb{R}.$$

20. Якщо функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервними на  $\mathbb{R}$ , то функція

$$f(x) = \max\{f_1(x); f_2(x)\} \text{ є неперервною на } \mathbb{R}.$$

21. Якщо  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$ , то і функція

$$m(x) = \min\{f(t) : t \in [a; x]\} \text{ є неперервною на } [a; b].$$

22. Якщо  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$ , то і функція

$$M(x) = \max\{f(t) : t \in [a; x]\} \text{ є неперервною на } [a; b].$$

23. Якщо функція  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною і обмеженою на проміжку

$[0; +\infty)$ , то для кожного  $d \in \mathbb{R}$  знайдеться така послідовність  $(x_n)$ , що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty \text{ і } \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n + d) - f(x_n)) = 0.$$

24. Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною на проміжку  $[a; b]$ , всі числа, які

лежать між  $f(a)$  і  $f(b)$  належать множині її значень, то ця функція є

неперервною на  $[a; b]$ .

25. Не існує функції  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервної на проміжку  $[0; 1]$ , для якої

$$f([0; 1]) = (2; 4).$$

26. Не існує функції  $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервної на проміжку  $[0; 1]$ , для якої

$$f([0; 1]) = [2; 4] \cup [5; 6].$$

27. Не існує функції  $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервної на проміжку  $(0; 1)$ , для якої

$$f((0; 1)) = (2; 4) \cup [5; 6].$$

28. Існує функція  $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервна на проміжку  $(0; 1)$ , для якої

$$f((0; 1)) = [5; 6].$$

29. Функція  $f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  приймає на проміжку  $[0; 1]$  всі значення, які

лежать між  $f(0)$  та  $f(1)$  і не є неперервною на  $[0; 1]$ .

30. Якщо функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичними, неперервними на  $\mathbb{R}$  і

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_2(x) - f_1(x)) = 0, \text{ то } f_1 = f_2.$$

31. Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $(a;b)$ ,  $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = A$  і

$\overline{\lim}_{x \rightarrow b^-} f(x) = \bar{A}$ , то для кожного  $A \in [A; \bar{A}]$  знайдеться така послідовність  $(x_n)$ ,

що  $x_n \in (a;b)$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ .

32. Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $(a;b)$ , то для кожного  $n \in \mathbb{N}$  і будь-яких точок  $x_1, x_2, \dots, x_n$  з  $(a;b)$ , знайдеться таке  $c \in (a;b)$ , що

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = f(c).$$

## 2. Доведіть твердження

1. Для кожного  $\varepsilon \in (0;1)$  функція  $f(x) = x - \varepsilon \sin x$  є оборотною.

2. Для кожного  $k \in \mathbb{R}$  рівняння  $\operatorname{ctg} x = kx$  має на проміжку  $(0; \pi)$  єдиний корінь.

3. Якщо  $x > 0$ ,  $0 < y_0 < 2/x$  і  $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1/x$ .

4. Якщо  $x > 0$ ,  $x_0 = a$  і  $x_n = a + \varepsilon \sin x_{n-1}$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$ , то існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$  і  $\tilde{x}$  є коренем рівняння  $x - \varepsilon \sin x = a$ .

5. Якщо  $x_0 = 1$  і  $x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}}$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$ , то існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$ ,  $\tilde{x}$  є коренем рівняння  $x = \frac{1}{1 + x}$ .

6. Якщо  $x \in [0;1]$ ,  $y_1 = x/2$  і  $y_{n+1} = \frac{x}{2} - \frac{y_n^2}{2}$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \sqrt{1+x} - 1$ .

7. Якщо  $x \in [0;1]$ ,  $y_1 = x/2$  і  $y_{n+1} = \frac{x}{2} + \frac{y_n^2}{2}$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 1 - \sqrt{1-x}$ .

8. Якщо  $a \in \mathbb{R}$ ,  $x_0 = a$  і  $x_n = a + \varepsilon \sin x_{n-1}$ , якщо  $n \in \mathbb{N}$ , то існує границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \tilde{x}$  і  $\tilde{x}$  є коренем рівняння  $x - \varepsilon \sin x = a$ .

9. Функція  $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{sgn} x$  є оборотною, розривною і її обернена функція є неперервною.

10. Функція  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  є оборотною і немонотонною на  $\mathbb{R}$ .

11. Функція  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  є розривною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ , немонотонною і оборотною.

12. Якщо  $f(x) = x$ , то  $f^{-1} = f$ .

13. Якщо  $f(x) = -x$ , то  $f^{-1} = f$ .

14. Якщо  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ -x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  то  $f^{-1} = f$ .

15. Якщо  $D(f) = \mathbb{R}$  і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(a)| < \varepsilon) : |x - a| < \delta,$$

то функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є оборотною і обернена функція є неперервною на  $D(f^{-1})$ .

16. Функція  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & x \in \mathbb{Q}, \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  є розривною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ ,

$D(f) = \mathbb{R}$  і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x) - f(a)| < \varepsilon) : |x - a| < \delta.$$

17. Для того щоб функція  $f: H \rightarrow \mathbb{R}$  була оборотною і  $f^{-1} = f$ , необхідно і достатньо, щоб  $(\forall x \in D(f)) : f(f(x)) = x$ .

18. Якщо  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є строго монотонною на проміжку  $[a; b]$ ,  $x_n \in [a; b]$  і  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ , то  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

19. Існують функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервна на проміжку  $[a; b]$ , і послідовність  $(x_n)$  такі, що  $x_n \in [a; b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$  і границя  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  не існує.

20. Якщо  $c \in (a; b)$  і функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є рівномірно неперервною на проміжках  $[a; c]$  і  $[c; b]$ , то вона є рівномірно неперервною на проміжку  $[a; b]$ .

21. Функція  $f(x) = \frac{|\sin x|}{x}$  є рівномірно неперервною на проміжках  $[-1; 0)$  і  $(0; 1]$ , але не є рівномірно неперервною на множині  $H = [-1; 0) \cup (0; 1]$ .

22. Якщо функція  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[0; +\infty)$  і існує скінченна границя  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ , то ця функція є рівномірно неперервною на проміжку  $[0; +\infty)$ .

23. Існує рівномірно неперервна на проміжку  $[0; +\infty)$  функція  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

24. Функція  $f(x) = \sin x^2$  є обмеженою і неперервною на  $\mathbb{R}$ , але не є рівномірно неперервною на  $\mathbb{R}$ .

25. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є рівномірно неперервною на  $\mathbb{R}$ , то вона є рівномірно неперервною на кожному проміжку  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ .

26. Якщо функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є монотонною і обмеженою на проміжку  $(a; b)$ ,

то вона є рівномірно неперервною на ньому.

27. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є обмеженою, рівномірно неперервною і немонотонною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .
28. Сума двох функцій, рівномірно неперервних на деякій множині, є функція, рівномірно неперервна на цій множині.
29. Добуток двох функцій, рівномірно неперервних на деякій множині, є функція, рівномірно неперервна на цій множині.
30. Функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є рівномірно неперервною на проміжку  $(a; b)$  тоді і тільки тоді, коли  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_f(\delta; (a; b)) = 0$ , де  $\omega_f(\delta; (a; b)) = \sup \{ |f(x_2) - f(x_1)| : x_1 \in (a; b), x_2 \in (a; b), |x_2 - x_1| \leq \delta \}$  – модуль неперервності функції  $f$ .
31. Якщо функція є рівномірно неперервною на скінченному проміжку  $(a; b)$ , то існують скінченні границі  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow b-} f(x)$ .
32. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є рівномірно неперервною на  $(-\infty; +\infty)$ , а границі  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  і  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  не існують.
33. Якщо функція є рівномірно неперервною на скінченному проміжку  $(a; b)$ , то вона є обмеженою на ньому.
34. Для того щоб існувало неперервне продовження функції  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  на проміжок  $[a; b]$ , необхідно і достатньо, щоб функція  $f$  була рівномірно неперервною на  $(a; b)$ .
35. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $\mathbb{R}$  і є розв'язком рівняння  $f(2x) = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , то  $f$  – стала функція.
36. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $\mathbb{R}$  і є розв'язком рівняння  $f(x) + f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , то  $f(x) = ax^2$ , де  $a$  – стала.
37. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $\mathbb{R}$  і є розв'язком рівняння  $f(x)f(y) = f(\sqrt{x^2 + y^2})$ ,  $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ , то  $f(x) = \exp(ax^2)$ , де  $a$  – стала.

### 3. Доведіть твердження

- Існують такі функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що вони не є неперервними в точці  $a = 0$ , але їхній добуток є функцією, неперервною в цій точці.
- Існують такі функції  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $f_1$  є неперервною в точці  $a = 0$ , функція  $f_2$  є розривною в точці  $a = 0$ , але їхній добуток є функцією, неперервною в цій точці.
- Якщо функція  $f_1: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$  і функція  $f_1 + f_2$  є

неперервною в точці  $a$ , то і функція  $f_2$  є неперервною в цій точці.

4. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то і функція  $f^2$  є неперервною в точці  $a$ .
5. Існує всюди розривна функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої функція  $f^2$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ .
6. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то і функція  $|f|$  є неперервною в точці  $a$ .
7. Існує всюди розривна функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої функція  $|f|$  є неперервною в кожній точці  $a \in \mathbb{R}$ .
8. Багаточлен непарного степеня має принаймні один нуль.
9. Якщо багаточлен  $f$  непарного степеня є монотонною функцією на  $\mathbb{R}$ , то для кожного  $D \in \mathbb{R}$  рівняння  $f(x) = D$  має в  $\mathbb{R}$  єдиний корінь.
10. Існує багаточлен парного степеня, який не має жодного нуля.
11. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є рівномірно неперервною на кожному проміжку  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ , але не є рівномірно неперервною на  $\mathbb{R}$ .
12. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є необмеженою і рівномірно неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .

### 29. Вправи і задачі розрахункового характеру.

#### 1. Знайдіть $\Delta f(a)$

1.  $f(x) = 2x + 1$ ,  $a = 1$ .                      2.  $f(x) = x^2 + x$ ,  $a = 2$ .
3.  $f(x) = 2x^3 - x$ ,  $a = -1$ .      4.  $f(x) = -x^4 + 2x^2$ ,  $a = -2$ .

#### 2. Для функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , чисел $a$ і $\varepsilon > 0$ знайти за графіком такий окіл $U(a; \delta)$ , що $f(U(a; \delta)) \subset U(f(a); \varepsilon)$ , якщо

1.  $f(x) = 2x + 1$ ,  $a = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ .                      2.  $f(x) = x^2$ ,  $a = -2$ ,  $\varepsilon = 0,5$ .
3.  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \pi / 2$ ,  $\varepsilon = 0,5$ .                      4.  $f(x) = e^x$ ,  $a = 1$ ,  $\varepsilon = 1$ .

#### 3. Виходячи з означення неперервності функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ доведіть неперервність функції в точці $a$

1.  $f(x) = 2x^3 + 1$ ,  $a = 1$ .                      2.  $f(x) = -4x^5 + 1$ ,  $a = -1$ .

$$2. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 3x}{x}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0, \end{cases} \quad a = 0. \quad 4. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{e^x - 1}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \quad a = 0.$$

4. Виходячи з означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  доведіть неперервність функції в точці  $a$

1.  $f(x) = x^2$ ,  $a = 2$ .      2.  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $a = -1$ .

3.  $f(x) = 2^x$ ,  $a = 0$ .      4.  $f(x) = \sin x$ ,  $a = \pi / 2$ .

5. Виходячи з означення неперервності функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  на мові “ $\varepsilon - \delta$ ” доведіть неперервність функції в точці  $a$

1.  $f(x) = 2x + 1$ ,  $a = 1$ .      2.  $f(x) = -4x + 1$ ,  $a = -1$ .

3.  $f(x) = x^2$ ,  $a = -2$ .      4.  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $a = 2$ .

5.  $f(x) = \sin 3x$ ,  $a = \pi / 2$ .      6.  $f(x) = \cos 2x$ ,  $a = \pi$ .

6. Дослідіть функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  на неперервність, неперервність справа, неперервність зліва, знайдіть точки розриву і їхній тип

1.  $f(x) = 2^{1/(x-3)}$ .      2.  $f(x) = 5^{1/(x-3)} + 1$ .

3.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sin x}$ .      4.  $f(x) = \arcsin \frac{1}{\operatorname{tg} x}$ .

5.  $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x-2}$ .      6.  $f(x) = \frac{x+3}{(x-4)(x+5)}$ .

7.  $f(x) = \frac{x-8}{(x^2+1)(x-7)}$ .      8.  $f(x) = \frac{2^{1/x}}{x+7}$ .

9.  $f(x) = \frac{x+2}{2^{1/x}}$ .      10.  $f(x) = \operatorname{tg} \left( \frac{1}{\sin x} \right)$ .

11.  $f(x) = \frac{e^x - 1}{\sin x}$ .      12.  $f(x) = \frac{2^x - 1}{\operatorname{tg} x}$ .

13.  $f(x) = \frac{x+7}{\cos x}$ .      14.  $f(x) = \frac{x+1}{-x^2+x+3}$ .

15.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4x+5}$ .      16.  $f(x) = \frac{2x}{x^2-1}$ .

17.  $f(x) = \sin \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$ .      18.  $f(x) = \cos \frac{1}{\operatorname{arctg} x}$ .

19.  $f(x) = \ln \sin x$ .

20.  $f(x) = \frac{x \operatorname{tg} x}{x+7}$ .

21.  $f(x) = \frac{x \operatorname{ctg} x}{x-2}$ .

22.  $f(x) = \frac{\cos x}{x+1}$ .

23.  $f(x) = \frac{\cos x}{x+3}$ .

24.  $f(x) = \frac{\ln x}{x-3}$ .

25.  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ .

26.  $f(x) = \ln \ln(1+x)$ .

27.  $f(x) = \operatorname{ctg} \frac{1}{\arccos x}$ .

28.  $f(x) = \frac{1}{x^2 \sin^2 x}$ .

29.  $f(x) = \frac{x}{\operatorname{tg}^2 x}$ .

30.  $f(x) = \frac{2^{1/x} + 1}{2^{1/x} + 2}$ .

31.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x}$ .

32.  $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ .

33.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2+x+1}$ .

34.  $f(x) = \frac{1}{-x^2+2x+3}$ .

35.  $f(x) = \frac{x+1}{x^2+4x+3}$ .

36.  $f(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$ .

37.  $f(x) = \frac{e^{1/x} + 1}{e^x - 1}$ .

38.  $f(x) = 2^{x/(x-1)}$ .

39.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}$ .

40.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$ .

41.  $f(x) = \frac{\sin x}{|\sin x|}$ .

42.  $f(x) = \frac{\cos x}{|\cos x|}$ .

43.  $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(x+1)}{x+1}, & x \neq -1, \\ x+4, & x = -1. \end{cases}$

44.  $f(x) = \begin{cases} \frac{x \arcsin(x-1)}{(x-1)}, & x \neq 1, \\ 2x+1, & x = 1. \end{cases}$

$$45. f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$46. f(x) = \begin{cases} \cos^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 2x, & x = 0. \end{cases}$$

$$47. f(x) = \frac{x^2}{\sin x}.$$

$$48. f(x) = \frac{x^2}{\operatorname{tg}(2x^2)}.$$

$$49. f(x) = \arcsin |x|.$$

$$50. f(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

$$51. f(x) = \begin{cases} -1/x, & x < 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3, & 3 < x < 5, \\ 2x - 4, & x = 5. \end{cases}$$

$$52. f(x) = \begin{cases} -1/x, & -2 \leq x < -1, \\ -2, & x = -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 2, \\ 3, & 2 < x < 4, \\ 1, & x = 4. \end{cases}$$

$$53. f(x) = \max \{x^2; x^4\}.$$

$$54. f(x) = \min \{\sqrt{x}; \sqrt[3]{x}\}.$$

$$55. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x^n + 3).$$

$$56. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n+1}.$$

$$57. f(x) = \frac{\sin x}{|x|}.$$

$$58. f(x) = \frac{|x|}{\cos x}.$$

7. Дослідіть функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  на неперервність, неперервність справа, неперервність зліва, знайдіть точки розриву і їхній тип та зобразіть графік

$$1. f(x) = \begin{cases} x + 4, & x < -1, \\ x^2 + 2, & -1 \leq x < 1, \\ 2x, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x + 1, & x \leq 0, \\ (x + 1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x + 2, & x \leq -1, \\ (x + 1)^2, & 0 < x \leq 2, \\ -x + 4, & x > 2. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} \frac{|x-1|}{x-1}, & x < 2, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx} x^2}{1 + e^{nx}}, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1, \\ 2x, & 1 < x \leq 3, \\ x + 2, & x > 3. \end{cases}$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x - 3, & x < 0, \\ x + 1, & 0 \leq x < 4, \\ 3 + x, & x > 4. \end{cases}$$

$$7. f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 0, \\ 0, & 0 < x \leq 2, \\ x-2, & x > 2. \end{cases}$$

$$8. f(x) = \begin{cases} [x], & x \leq 0, \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$9. f(x) = \begin{cases} \operatorname{ctg} x, & x < 0, \\ x \sin(1/x), & x > 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$10. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq \pi/2, \\ 0, & \pi/2 < x < \pi, \\ 2, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$11. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 2, \\ 2x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0, \\ x^2-1, & 0 \leq x < 1, \\ x+1, & x \geq 1. \end{cases}$$

$$13. f(x) = \begin{cases} x-1, & x < 0, \\ \sin x, & 0 \leq x < \pi, \\ 3, & x \geq \pi. \end{cases}$$

$$14. f(x) = \begin{cases} -x+1, & x < -1, \\ x^2+1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$15. f(x) = \begin{cases} 3x+4, & x \leq -1, \\ x^2-2, & -1 < x < 2, \\ x, & x \geq 2. \end{cases}$$

$$16. f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1, \\ (x-2)^2, & 1 < x < 3, \\ -x+6, & x \geq 3. \end{cases}$$

$$17. f(x) = x[x].$$

$$18. f(x) = \left[ \frac{1}{x} \right].$$

$$19. f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{tg} x).$$

$$20. f(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ x^2-1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} x^3, & x < -1, \\ x-1, & -1 \leq x \leq 3, \\ -x+5, & x > 3. \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} -1, & x < 0, \\ \cos x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ 1-x, & x > \pi. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \arccos(\cos x).$$

$$24. f(x) = \cos(\arccos x)$$

$$25. f(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0, \\ x^2, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ \sin x, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x).$$

$$28. f(x) = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x).$$

$$29. f(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0, \\ x, & 1 \leq x < 2, \\ 3, & 2 \leq x < 3. \end{cases} \quad 30. f(x) = \begin{cases} 2^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$31. f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 27}{x - 3}, & x \neq 3, \\ 2, & x = 3. \end{cases} \quad 32. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x + 3}, & x \neq -3, \\ 2, & x = -3. \end{cases}$$

$$33. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x < 0, \\ 2, & 0 \leq x < \pi/2, \\ \sin x, & x \geq \pi/2. \end{cases} \quad 34. f(x) = \begin{cases} 2, & x < -1, \\ 1 - x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \ln x, & x > 1. \end{cases}$$

$$35. f(x) = \begin{cases} x, & x - \text{раціональне}, \\ 0, & x - \text{іраціональне}. \end{cases} \quad 36. f(x) = \begin{cases} \arcsin x, & x \in (0; 1], \\ \arccos x, & x \in (-1; 0]. \end{cases}$$

$$37. f(x) = \arcsin(\sin x). \quad 38. f(x) = \sin(\arcsin x).$$

$$39. f(x) = \operatorname{sgn} x. \quad 40. f(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x).$$

$$41. f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x). \quad 42. f(x) = \operatorname{sgn}(2x - 1).$$

$$43. f(x) = \operatorname{sgn}(\operatorname{ctg} x). \quad 44. f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

$$45. f(x) = x - [x]. \quad 46. f(x) = (-1)^{[x]}.$$

$$47. f(x) = [\sin x]. \quad 48. f(x) = [\operatorname{tg} x].$$

$$49. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{4n} - 2}{x^{4n} + 2}. \quad 50. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x.$$

$$51. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}. \quad 52. f(x) = \begin{cases} [x] \sin \pi x, & x < 0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nx}{n+1}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$53. f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ x \operatorname{sgn}(\sin(1/x)), & x < 0. \end{cases} \quad 54. f(x) = \begin{cases} x[x], & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ |x^2 - 1|/(x - 1), & x > 1. \end{cases}$$

8. Продовжіть функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точку  $a$  так, щоб це продовження функції було неперервним в точці  $a$

1.  $f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{3x}, \quad a = 0.$

2.  $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}, \quad a = 0.$

3.  $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}, \quad a = 1.$

4.  $f(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}, \quad a = 0.$

5.  $f(x) = \frac{1 - e^{x/2}}{x}, \quad a = 0.$

6.  $f(x) = \frac{1 - \cos(x-1)}{x-1}, \quad a = 1.$

9. З'ясуйте, чи можна продовжити функцію  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точку  $a$  так, щоб це продовження функції було неперервним в точці  $a$

1.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad a = 0.$

2.  $f(x) = \cos \frac{1}{x}, \quad a = 0.$

3.  $f(x) = \operatorname{tg}^2 x, \quad a = \pi/2.$

4.  $f(x) = \operatorname{ctg} x, \quad a = \pi.$

5.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad a = 0.$

6.  $f(x) = \operatorname{arcctg} \frac{1}{x}, \quad a = 0.$

7.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{|x|}, \quad a = 0.$

8.  $f(x) = \left| \operatorname{arcctg} \frac{1}{x} \right|, \quad a = 0.$

9.  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad a = 0.$

10.  $f(x) = x^2 \cos \frac{1}{x}, \quad a = 0.$

11.  $f(x) = \frac{e^x - 1}{2 \operatorname{tg} x}, \quad a = 0.$

12.  $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x^2}, \quad a = 0.$

10. Дослідіть функцію  $f$  на неперервність, неперервність справа, неперервність зліва, знайдіть точки розриву і їхній тип, розглядаючи її: а) як функцію з  $\mathbb{R}$  в  $\mathbb{R}$ ; б) як функцію з  $H$  в  $\mathbb{R}$ ; в) як функцію з  $D(f)$  в  $\mathbb{R}$

1.  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ 2, & x = -1, \end{cases} \quad H = [0; +\infty) \cup \{-1\}.$

2.  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases} \quad H = [0; +\infty).$

3.  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ 2, & x = -1, \end{cases} \quad H = (0; +\infty) \cup \{-3\}.$

4.  $f(x) = \begin{cases} \ln x, & x > 0, \\ 2, & x = -3, \end{cases} \quad H = (0; +\infty) \cup \{-3\}.$

$$5. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1; 0), \\ x^2, & x \in [0; 2), \\ 2x, & x \in [2; 3], \end{cases} \quad H = [-1; 3].$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x-1, & x \in [-1; 0), \\ x^2, & x \in [0; 2), \\ 2x, & x \in [2; 3], \end{cases} \quad H = [-2; 3].$$

$$7. f(x) = \arcsin(x-1), \quad H = [0; 4].$$

$$8. f(x) = \frac{\arccos x}{x-1}, \quad H = [0; 4].$$

$$9. f(x) = \frac{1}{\cos \frac{1}{x^2}}, \quad H = [0; +\infty).$$

$$10. f(x) = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{1}{x}}, \quad H = (0; +\infty).$$

$$11. f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in [0; 2), \\ x^2, & x \in [2; 4), \end{cases} \quad H = (-2; 4) \cup \{5\}.$$

$$12. f(x) = \begin{cases} -x+1, & x \in [-1; 1), \\ x^2, & x \in [1; 3], \end{cases} \quad H = [-1; 3) \cup \{4\}.$$

**11.** Знайдіть  $\sup\{f(x): x \in D(f)\}$  та  $\inf\{f(x): x \in D(f)\}$  і з'ясуйте, чи існує  $\max\{f(x): x \in D(f)\}$  та  $\min\{f(x): x \in D(f)\}$

$$1. f(x) = \sin^2 x.$$

$$2. f(x) = \ln x.$$

$$3. f(x) = \arccos x.$$

$$4. f(x) = \arcsin |x|.$$

$$5. f(x) = x - [x].$$

$$6. f(x) = |x^2 - 1|.$$

$$7. f(x) = 2^{x-1}.$$

$$8. f(x) = 2^x + 1.$$

$$9. f(x) = (x+1)^3.$$

$$10. f(x) = |-x^2 + 3x - 2|.$$

$$11. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

$$12. f(x) = \operatorname{arctg} x + \pi / 2.$$

$$13. f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$14. f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

15.  $f(x) = \max\{x^2; x^{-4}\}$ .

16.  $f(x) = \min\{1/\sqrt{x}; \sqrt[3]{x}\}$ .

12. Доведіть, що рівняння  $f(x) = 0$  має принаймні один корінь

1.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ .

2.  $f(x) = x^4 + 3x^2 - x - 2$ .

3.  $f(x) = x2^x - 1$ .

4.  $f(x) = 2^x - 4x$ .

5.  $f(x) = 3\sin^3 x - 5\sin x + 1$ .

6.  $f(x) = 2^{3x} - 3 \cdot 2^x - 1$ .

13. З'ясуйте, чи функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є оборотною

1.  $f(x) = \sin 2x$ .

2.  $f(x) = \arcsin 2x$ .

3.  $f(x) = \arccos^2 x$ .

4.  $f(x) = \arccos x^2$ .

5.  $f(x) = 2^{\sqrt{x}}$ .

6.  $f(x) = 2^{x^2}$ .

7.  $f(x) = \sqrt{x}$ .

8.  $f(x) = x^2$ .

9.  $f(x) = e^{\ln^2 x}$ .

10.  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

14. Знайдіть функцію  $y = f^{-1}(x)$ , обернену до функції  $y = f(x)$

1.  $y = 2x$ .

2.  $y = -4x - 1$ .

3.  $y = \sqrt{x}$ .

4.  $y = \sqrt[3]{x+1}$ .

5.  $y = 2 + \ln(x-1)$ .

6.  $y = \lg \sqrt[3]{x+1}$ .

7.  $y = 2^{x-1} + 1$ .

8.  $y = 10^{\sqrt{x}}$ .

9.  $y = e^{\sqrt{\ln x}} + 1$ .

10.  $y = \sqrt{e^{1-\ln x}} + 1$ .

11.  $y = 2 - \arcsin(x-1)$ .

12.  $y = \sqrt{\operatorname{arctg} 2x}$ .

13.  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty; 0), \\ x^2, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$

14.  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in (-\infty; 0), \\ -x, & x \in [0; +\infty). \end{cases}$

15.  $f(x) = \frac{x}{1-x}$ .

16.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt{x}}$ .

15. Вкажіть множину  $A \subset \mathbb{R}$ , звуження на яку функції  $f$  є оборотною функцією і знайти обернену функцію до цього звуження

1.  $f(x) = 2x^2 + 3$ .

2.  $f(x) = |x|$ .

3.  $f(x) = \sin 2x$ .

4.  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ .

5.  $f(x) = e^{\ln^2 x}$ .

6.  $f(x) = e^{-\ln x^2}$ .

**16. Знайдіть**

1.  $\sin(\arccos x)$ .

2.  $\cos(\arcsin x)$ .

3.  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)$ .

4.  $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)$ .

5.  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x)$ .

6.  $\operatorname{tg}(\arccos x)$ .

7.  $\sin(2 \arcsin x)$ .

8.  $\operatorname{tg}(\arcsin x)$ .

9.  $\arcsin(\sin x)$ .

10.  $\arccos(\cos x)$ .

11.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ .

12.  $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ .

**17. Доведіть тотожності**

1.  $\arcsin x + \arcsin(-x) = 0, x \in [-1; 1]$ .

2.  $\arccos(-x) - \pi + \arccos x = 0, x \in [-1; 1]$ .

3.  $\arcsin x + \arccos x = \pi / 2, x \in [-1; 1]$ .

4.  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x) = 0, x \in \mathbb{R}$ .

5.  $\operatorname{arcctg}(-x) - \pi + \operatorname{arcctg} x = 0, x \in \mathbb{R}$ .

6.  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \pi / 2, x \in \mathbb{R}$ .

7.  $\arcsin(\sin x) = x, x \in [-\pi / 2; \pi / 2]$ .

8.  $\sin(\arcsin x) = x, x \in [-1; 1]$ .

9.  $\arccos(\cos x) = x, x \in [0; \pi]$ .

10.  $\cos(\arccos x) = x, x \in [-1; 1]$ .

11.  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in \mathbb{R}$ .

12.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in (-\pi / 2; \pi / 2)$ .

13.  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, x \in \mathbb{R}$ .

14.  $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in (0; \pi)$ .

15.  $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}, x \in [0; 1]$ .

16.  $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1)$ .

$$17. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in (0;1].$$

$$18. \arccos x = \arcsin \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [0;1].$$

$$19. \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in (0;1].$$

$$20. \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [0;1].$$

$$21. \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad x \in (0;+\infty).$$

$$22. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x \in (0;+\infty).$$

$$23. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad x \in (-\infty;0).$$

$$24. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$25. \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$26. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad x \in (-1;+\infty).$$

$$27. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = -\frac{3\pi}{4}, \quad x \in (-\infty;-1).$$

$$28. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{1-xy}{x+y}, \quad xy < 1.$$

$$29. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \pi, \quad xy > 1, \quad x \in (0;+\infty).$$

$$30. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} - \pi, \quad xy > 1, \quad x \in (-\infty;0).$$

$$31. \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \quad x \in (-\infty;0), \quad y \in (-\infty;0).$$

$$32. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{xy-1}{x+y}, \quad x \in (0;+\infty), \quad y \in (0;+\infty).$$

$$33. \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1;1].$$

$$34. \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1;1].$$

$$35. \sin(2\arcsin x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad x \in [-1;1].$$

$$36. \cos(2 \arccos x) = 2x^2 - 1, \quad x \in [-1; 1].$$

$$37. \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$38. \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 1] \setminus \{0\}.$$

$$39. \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$40. \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in [-1; 1] \setminus \{0\}.$$

**18.** З'ясуйте, чи є функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  рівномірно неперервною на множині  $H$

$$1. f(x) = 2x - 5, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$2. f(x) = x + \sin 2x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$3. f(x) = x \cos x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$4. f(x) = x \sin x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$5. f(x) = 2x^2, \quad H = [0; 1].$$

$$6. f(x) = 3x^4 + x, \quad H = [-1; 1].$$

$$7. f(x) = x^2, \quad H = [-r; r], \quad r \in (0; +\infty).$$

$$8. f(x) = x^3, \quad H = [-r; r], \quad r \in (0; +\infty).$$

$$9. f(x) = x^2, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$10. f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad H = (0; 1).$$

$$11. f(x) = \sin x^2, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$12. f(x) = x^3, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$13. f(x) = x \cos \frac{1}{x}, \quad H = (0; \pi / 2].$$

$$14. f(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad H = (0; \pi].$$

$$15. f(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad H = (0; \pi].$$

$$16. f(x) = x + \cos \frac{1}{x}, \quad H = (0; \pi / 2].$$

$$17. f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$18. f(x) = x + \operatorname{arcctg} x, \quad H = \mathbb{R}.$$

$$19. f(x) = \sqrt{x}, \quad H = [0; +\infty).$$

$$20. f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad H = \mathbb{R}.$$

**19.** Знайдіть всі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які є неперервними на  $\mathbb{R}$  і є розв'язками рівняння  $f(x^2) = f^4(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**20.** Знайдіть всі функції  $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$ , які є неперервними на проміжку  $(0; 1)$  і є розв'язками рівняння  $f(x^2) = 2f(x)$ ,  $x \in (0; 1)$ .

**21.** Знайдіть всі функції  $f : (0;1) \rightarrow \mathbb{R}$ , які є неперервними на проміжку  $(0;1)$  і є розв'язками рівняння  $f(x^2) = f^2(x)$ ,  $x \in (0;1)$ .

### 30. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.

**6.31.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{-1;0\}$ , точки  $a = -1$  і  $a = 0$  – точки розриву другого роду. **6.32.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$ , точки  $a = -1$  і  $a = 1$  – точки розриву другого роду. **6.33.** неперервна на  $\mathbb{R}$ . **6.34.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{-1;3\}$ , точки  $a = -1$  і  $a = 3$  – точки розриву другого роду. **6.35.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{-3;-1\}$ , точка  $a = -3$  – точка розриву другого роду, точка  $a = -1$  – точка усувного розриву. **6.36.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{1;2\}$ , точка  $a = 1$  – точка усувного розриву, точка  $a = 2$  – точка розриву другого роду. **6.37.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , точка  $a = 0$  – точка розриву другого роду. **6.38.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , точка  $a = 1$  – точка розриву другого роду. **6.39.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , точка  $a = 0$  – точка усувного розриву. **6.40.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , точка  $a = 0$  – точка розриву першого роду. **6.41.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ , точки  $a = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – точки розриву першого роду. **6.42.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ , точки  $a = \pi k + \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – точки розриву першого роду. **6.43.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , точка  $a = -1$  – точка усувного розриву. **6.44.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , точка  $a = 1$  – точка усувного розриву. **6.45.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , точка  $a = 0$  – точка розриву другого роду. **6.46.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , точка  $a = 0$  – точка розриву другого роду. **6.47.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ , точки  $a = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ , – точки розриву другого роду, точка  $a = 0$  – точка усувного розриву. **6.48.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{\pi k} : k \in \mathbb{Z}_+\}$ , точки  $a = \pm\sqrt{\pi k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , – точки розриву другого роду, точка  $a = 0$  – точка усувного розриву. **6.49.** неперервна на проміжку  $(-1;1)$ , має розриви другого роду на кожному з проміжків  $(-\infty;-1]$  і  $[1;+\infty)$ , в точці  $a = -1$  – неперервна справа, в точці  $a = 1$  – неперервна зліва. **6.50.** неперервна на кожному з проміжків  $(-\infty;-1)$  і  $(1;+\infty)$ , має розриви другого роду в кожній точці проміжку  $(-1;1)$ , в точці  $a = -1$  – неперервна зліва, в точці  $a = 1$  – неперервна справа. **6.51.** неперервна на проміжках  $(-\infty;0)$ ,  $(1;2)$  і  $(3;5)$ , має розриви другого роду на кожному з проміжків  $[0;1]$ ,  $[2;3]$  і  $[5;+\infty)$ , в точці  $a = 1$  є неперервною справа, в точці  $a = 2$  є неперервною зліва. **6.52.** неперервна на проміжках  $(-2;-1)$ ,  $(-1;2)$  і  $(2;4)$ , має розриви другого роду на кожному з проміжків  $(-\infty;-2]$  і  $[4;+\infty)$ , в точці  $a = -2$  є неперервною справа, в точці

$a = -1$  має розрив першого роду, в точці  $a = 2$  є неперервною зліва.  
**6.53.** неперервна на  $\mathbb{R}$ . **6.55.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ , має розриви другого роду в точках  $a = -1$  і  $a = 1$ . **6.56.** неперервна на  $\mathbb{R}$ . **6.57.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , точка  $a = 0$  – точка розриву першого роду. **6.58.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}$ , точки  $a = \pi k + \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – точки розриву другого роду.  
**7.31.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ , точка  $a = 3$  – точка усувного розриву, не є неперервною зліва і не є неперервною справа. **7.32.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ , точка  $a = 3$  – точка усувного розриву, не є неперервною зліва і не є неперервною справа. **7.33.** неперервна на проміжках  $(-\infty; 0)$ ,  $(0; \pi/2)$  і  $(\pi/2; +\infty)$ , точки  $a = 0$  і  $a = \pi/2$  – точки розриву першого роду, є неперервною справа в точках  $a = 0$  і  $a = \pi/2$ . **7.34.** неперервна на  $\mathbb{R}$ . **7.35.** має розриви другого роду на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , в точці  $a = 0$  – неперервна. **7.36.** неперервна на проміжках  $(-1; 0)$  і  $(0; 1)$ , має розриви другого роду на кожному з проміжків  $(-\infty; -1]$  і  $[1; +\infty)$ , точка  $a = 0$  – точка розриву першого роду, є неперервною зліва в точках  $a = 0$  і  $a = 1$ , і не є неперервною справа. **7.37.** неперервна на  $\mathbb{R}$ . **7.38.** неперервна на проміжку  $(-1; 1)$ , має розриви другого роду на проміжках  $(-\infty; -1]$  і  $[1; +\infty)$ , в точці  $a = -1$  є неперервною справа, а в точці  $a = 1$  є неперервною зліва. **7.39.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , точка  $a = 0$  – точка розриву першого роду. **7.40.** неперервна на  $\mathbb{R}$ . **7.41.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ , точки  $a = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – неусувні точки розриву першого роду і усувні точки розриву зліва або справа функції. **7.42.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{1/2\}$ , точка  $a = 1/2$  – точка розриву першого роду. **7.45.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{k : k \in \mathbb{Z}\}$ , точки  $a = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – точки розриву першого роду, не є неперервною зліва і є неперервною справа. **7.46.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{k : k \in \mathbb{Z}\}$ , точки  $a = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – точки розриву першого роду, не є неперервною зліва і є неперервною справа. **7.49.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$ , точки  $a = -1$  і  $a = 1$  – точки розриву першого роду, не є неперервною зліва і не є неперервною справа. **7.50.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}$ , точки  $a = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – точки усувного розриву, не є неперервною зліва і не є неперервною справа. **7.51.** неперервна на  $(\pi k - \pi/6; \pi k + \pi/6)$  і  $(\pi k + \pi/6; \pi k + 5\pi/6)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , точки  $a = \pm\pi/6 + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , – точки розриву першого роду. **7.52.** неперервна на  $\mathbb{R}$ . **7.53.** неперервна на  $\mathbb{R}$ . **7.54.** неперервна на  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ , точка  $a = 1$  – неусувна точка розриву першого роду, не є неперервною зліва і не є неперервною справа. **18.1.** рівномірно неперервна. **18.2.** рівномірно неперервна. **18.3.** не є рівномірно неперервною. **18.4.** не є рівномірно неперервною. **18.5.** рівномірно неперервна. **18.6.** рівномірно неперервна. **18.7.** рівномірно неперервна. **18.8.** рівномірно неперервна. **18.9.** не є рівномірно неперервною. **18.10.** не є рівномірно

---

неперервною. **18.11.** не є рівномірно неперервною. **18.12.** не є рівномірно неперервною. **18.13.** рівномірно неперервна. **18.14.** рівномірно неперервна. **18.15.** рівномірно неперервна. **18.17.** рівномірно неперервна. **18.18.** рівномірно неперервна. **18.19.** рівномірно неперервна. **18.20.** рівномірно неперервна

## Розділ 5. Похідна функції в $\mathbb{R}$

Похідна функції є одним з основних інструментів дослідження функцій, рівнянь, багатьох природних явищ та суспільних проблем. Власне саме це поняття і було введено в зв'язку з дослідженням рухів та інших фізичних процесів.

**1. Означення похідної. Неперервність функції, яка має похідну.** Похідною функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $x_0$  називається границя відношення приросту функції в цій точці до приросту аргументу, коли останній прямує до нуля:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1)$$

де  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  – приріст функції  $f$  у точці  $x_0$ . Якщо границя (1) існує і є скінченною, то кажуть, що в точці  $x_0$  функція  $f$  має похідну, а якщо границя (1) не існує або рівна  $\infty$ , то кажуть, що функція  $f$  у точці  $x_0$  похідної не має. Інколи, правда, коли границя рівна  $-\infty$ ,  $+\infty$  або  $\infty$ , кажуть, що в точці  $x_0$  функція має відповідну нескінченну похідну. Означення похідної можна записати і так:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (2)$$

Для позначення похідної використовують також символи

$$\frac{df}{dx}(x_0), \frac{df(x_0)}{dx}, f', y', \dot{y}, Dy, \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

та інші, априоріст функції  $f$  у точці  $x_0$  позначають через  $\Delta y$ . Тому означення похідної можна записати і так:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Природним чином, визначаються права

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

і ліва

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

похідні функції  $f$  в точці  $x_0$ .

**Теорема 1.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $x_0$ , то вона є неперервною в цій точці.

**Доведення.** Якщо функція  $f$  має похідну в точці  $x_0$ , то за теоремами про нескінченно малі

$$f'(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \varepsilon_1(x), \quad (3)$$

де  $\varepsilon_1(x)$  – нескінченно мала функція, якщо  $x \rightarrow x_0$ . Тому

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) - \varepsilon_1(x)(x - x_0),$$

звідки випливає, що  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ , тобто  $f$  є неперервною в точці  $x_0$ . ►

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = x^2$ , то

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x_0\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0, \quad x_0 \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

тобто  $(x^2)' = 2x$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = |x|$  не має похідної в точці  $x_0 = 0$ . Справді,  $\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = |\Delta x|$ . Отже,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1, \quad f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1.$$

Тому розглядувана функція не має похідної в точці  $x_0 = 0$ . Функція  $f(x) = |x|$  є неперервною в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$  і цей приклад показує, що твердження, обернене до теореми 1, не є справедливим. Більше того, існують неперервні всюди функції, які не мають похідної в жодній точці  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = x^{1/3}$ , то

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^{1/3}}{\Delta x} = \infty.$$

**Приклад 4.**  $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}$ ,  $x \in (0; +\infty)$ ,  $\mu \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$\begin{aligned} (x^\mu)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x + \Delta x)^\mu - x^\mu}{\Delta x} = x^\mu \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\mu - 1}{\frac{\Delta x}{x} \cdot x} \\ &= x^{\mu-1} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)^\mu - 1}{t} = \mu x^{\mu-1}. \end{aligned}$$

**Приклад 5.**  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Справді, використовуючи неперервність косинуса, отримуємо

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x. \end{aligned}$$

**Приклад 6.**  $(\cos x)' = -\sin x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Справді, використовуючи неперервність синуса, отримуємо

$$\begin{aligned}
 (\cos x)' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)}{\Delta x} \\
 &= - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sin \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right) = - \sin x.
 \end{aligned}$$

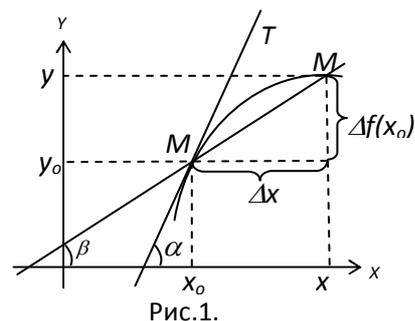
**Приклад 7.**  $(e^x)' = e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$(e^x)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{x+\Delta x} - e^x}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x.$$

Кажуть, що функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $[a; b]$ , якщо вона має похідну в кожній точці  $x \in (a; b)$ , має праву похідну в точці  $a$  і має ліву похідну в точці  $b$ .

**Зауваження 1.** Похідна функції, якщо вона існує, в точці  $x_0$  – це число  $f'(x_0)$ . Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в кожній точці деякої множини  $E$ , то ми отримуємо функцію  $f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка називається похідною функції  $f$ . Зокрема, якщо  $f(x) = x^2$ , то  $f'(x) = 2x$ . Оператор  $D$ , який функції  $f$  ставить у відповідність функцію  $f'$ , називається оператором диференціювання. Отже,  $D(f) = f'$ .

**2. Дотична до графіка функції. Геометричний зміст похідної.** Графік функції  $y = f(x)$  геометрично в прямокутній декартовій системі координат зображається у вигляді деякої лінії. Візьмемо на графіку дві точки  $M_0(x_0; y_0)$  і  $M(x; y)$ , і проведемо через ці точки пряму, яку будемо називати січною. Дотичною до графіка функції  $y = f(x)$  в точці  $M_0(x_0; y_0)$  називається така пряма  $T$ , яка проходить через цю точку і є граничним положенням січної  $M_0M$ , коли  $M$  прямує до  $M_0$  по графіку функції. Якщо  $T$  перпендикулярна до осі  $Ox$ , то  $T$  називається вертикальною дотичною, а в протилежному випадку – похилою дотичною.



**Теорема 1.** *Графік неперервної в точці  $x_0$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в точці  $(x_0; y_0)$ , де  $y_0 = f(x_0)$ , похилу дотичну тоді і тільки тоді, коли  $f$  має скінченну похідну в точці  $x_0$  і при цьому рівняння дотичної має вигляд*

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0). \quad (1)$$

*Графік неперервної в точці  $x_0$  функції  $f$  має в точці  $(x_0; y_0)$  вертикальну дотичну тоді і тільки тоді, коли  $f$  має нескінченну похідну в точці  $x_0$  і при цьому рівняння вертикальної дотичної має вигляд*

$$x = x_0. \quad (2)$$

**Доведення.** Рівняння січної  $M_0M$  має вигляд

$$y = y_0 + k(\Delta x)(x - x_0), \quad (3)$$

де  $k(\Delta x)$  – кутовий коефіцієнт січної  $M_0M$  і  $\Delta x = x - x_0$ . Бачимо, що граничне положення січної (тобто дотична) існує тоді і тільки тоді, коли існує

$$\lim_{x \rightarrow x_0} k(\Delta x) = k. \quad (4)$$

Але

$$k(\Delta x) = \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}.$$

Тому границя (4) існує тоді і тільки тоді, коли існує  $f'(x_0)$  і в цьому випадку  $k = f'(x_0)$  і, отже, у випадку  $f'(x_0) \neq \infty$  граничним положенням січної буде пряма (1). У випадку  $f'(x_0) = \infty$  рівність (3) можна переписати так

$$\frac{y - y_0}{k(\Delta x)} = x - x_0,$$

і бачимо, що тепер граничним положенням січної (тобто дотичною) буде пряма (2). ►

З доведеної теореми випливає такий геометричний зміст похідної: похідна функції  $f$  в точці  $x_0$  рівна кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції  $f$  в точці  $(x_0; f(x_0))$ , тобто  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , де  $\alpha$  – кут, утворений дотичною з додатним променем осі абсцис. Зокрема,  $f'(x_0) = 0$  тоді і тільки

тоді, коли дотична до графіка функції в точці  $(x_0; f(x_0))$  є паралельною осі абсцис.

В означенні дотичної використовувалось поняття граничного положення січної. Граничним положенням січної  $M_0M$ , коли  $M$  прямує до  $M_0$  по графіку функції  $f$ , називається така пряма, яка проходить через точку  $M_0$  і для якої для будь-якого  $\varepsilon > 0$  знайдеться таке  $\delta > 0$ , що для всіх точок  $M \in \text{graf}(f)$ , для яких  $M_0M < \delta$ , пряма  $M_0M$  лежить у двох вертикальних кутах, для яких  $T$  є бісектрисою і величина яких є меншою за  $\varepsilon$ .

**Приклад 1.** Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = \sin x$  у точці  $(x_0; y_0)$ , для якої  $x_0 = \pi/3$ . Оскільки  $f'(x) = \cos x$ ,  $f(x_0) = \sqrt{3}/2$  і  $f'(x_0) = 1/2$ , то  $y = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(x - \pi/3)$  – шукане рівняння.

**Приклад 2.** Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = x^3$  у точці  $(x_0; y_0)$ , для якої  $x_0 = 0$ . Оскільки  $f'(x) = 3x^2$ ,  $f(x_0) = 0$  і  $f'(x_0) = 0$ , то  $y = 0$  – шукане рівняння.

**Приклад 3.** Знайдемо рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  у точці  $(x_0; y_0)$ , для якої  $x_0 = 0$ . Оскільки  $f'(x) = 1/(3x^{2/3})$ , функція  $f$  є неперервною у точці  $x_0$  і  $f'(x_0) = \infty$ , то  $x = 0$  – шукане рівняння.

**Приклад 4.** Знайдемо ті точки графіка функції  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + 1$ , дотична в яких є паралельною осі абсцис. Оскільки  $f'(x) = x^2 + 3x - 4$ , то  $f'(x) = 0$ , якщо  $x = -4$  або  $x = 1$ . Тому точки  $\left(-4; \frac{59}{3}\right)$  і  $\left(1; -\frac{7}{6}\right)$  є шуканими.

Нормаллю до графіка функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $(x_0; y_0)$  називається така пряма, яка проходить через цю точку і є перпендикулярною до дотичної, проведеної в цій же точці. З умов перпендикулярності двох прямих випливає, що  $y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$  є рівнянням нормалі.

**Зауваження 1.** Наведене вище означення дотичної з великим сумнівом можна вважати означенням, оскільки в ньому присутні геометричні терміни, які також потребують означення. Проте ми вибрали його, щоб до чисто формальних означень підключити геометричну інтуїцію до вивчення похідної. Ми могли б взяти як основне наступне означення. Дотичною до графіка функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  у точці  $(x_0; y_0)$  називається така пряма  $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ , що  $|A| + |B| \neq 0$ ,  $y_0 = f(x_0)$  і  $\lim_{x \rightarrow x_0} \left( \frac{Bf(x) - Bf(x_0)}{x - x_0} + BA \right) = 0$ .

**3. Механічний зміст похідної.** Якщо матеріальна точка, рухаючись прямолінійно і рівномірно, за час  $\Delta t$  пройшла шлях  $\Delta S$ , то її швидкість  $v$  в будь-який момент часу  $t$  знаходиться за формулою

$$v = \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (1)$$

Нехай тепер матеріальна точка рухається прямолінійно і не обов'язково рівномірно. Нехай вона за час  $t$  пройшла шлях  $S(t)$  і потрібно знайти її швидкість в момент часу  $t_0$ . Для цього візьмемо малий проміжок часу  $\Delta t$ . Тоді за проміжок часу від  $t_0$  до  $t_0 + \Delta t$  матеріальна точка пройде шлях  $\Delta S(t_0) = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$ . Якщо  $\Delta t$  є достатньо малим, то можна приблизно вважати, що на проміжку  $[t_0; t_0 + \Delta t]$  точка рухалась рівномірно. Тому можна вважати, що в момент часу  $t_0$  її швидкість приблизно рівна  $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ , тобто

$$v(t_0) \approx \frac{\Delta S}{\Delta t}. \quad (2)$$

Чим менше  $\Delta t$ , тим менше права частина співвідношення (2) відрізняється від  $v(t_0)$ . Тому за швидкість матеріальної точки в час  $t_0$  приймають границю

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Але права частина останньої рівності рівна  $S'(t_0)$ . Отже,

$$v(t_0) = S'(t_0). \quad (3)$$

Тому похідна від шляху рівна швидкості. Рівність (3) виражає механічний зміст похідної.

Похідна характеризує швидкість зміни функції: в тих точках, в яких похідна велика, функція міняється швидко, а в точках, в яких похідна мала, функція міняється мало.

**Зауваження 1.** Вище ми бачили, що похідна використовується у фізиці для знаходження швидкості матеріальної точки. Проте, аналогічним

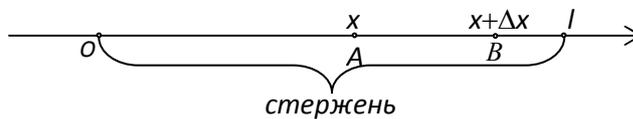


Рис. 1.

способом за допомогою похідної знаходять багато інших величин. Нехай, наприклад, задано стержень довжини  $l$ . Припустимо, що  $t(x)$  маса частини  $OA$  стержня. Потрібно знайти лінійну щільність стержня в точці  $A(x)$ . Якщо стержень однорідний, то його лінійна щільність  $\rho$  в будь-якій

точці  $x$  є сталою і  $\rho = \frac{\Delta m(x)}{\Delta x}$ , де  $\Delta m(x) = m(x + \Delta x) - m(x)$ . Якщо стержень

не є однорідним, то для малих  $\Delta x$  його лінійна щільність  $\rho = \rho(x)$  в точці

$A(x)$  приблизно рівна:  $\rho \approx \frac{\Delta m}{\Delta x}$ . Тому за лінійну щільність стержня в точці

$A(x)$  приймають границю  $\rho(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}$ . Отже,  $\rho(x) = t'(x)$ .

#### 4. Похідна сталої, суми, добутку і частки.

**Теорема 1.** Похідна сталої функції дорівнює нулеві, тобто  $(C)' = 0$ .

**Доведення.** Якщо функція  $f$  є сталою на деякому проміжку  $q$ , то знайдеться таке число  $C \in \mathbb{R}$ , що  $f(x) = C$  для всіх  $x \in q$ . Тоді

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{C - C}{\Delta x} = 0, \quad x_0 \in q. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 2.** Похідна суми двох функцій  $u$  і  $v$  дорівнює сумі похідних, якщо останні існують:  $(u + v)' = u' + v'$ .

**Доведення.** Якщо  $f = u + v$ , то

$$\Delta f(x) = (u(x + \Delta x) + v(x + \Delta x)) - (u(x) + v(x)) = \Delta u(x) + \Delta v(x).$$

Тому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x},$$

тобто  $f'(x) = u'(x) + v'(x)$ . ►

**Теорема 3.** Похідна добутку двох функцій  $u$  і  $v$  знаходиться за формулою  $(uv)' = u'v + uv'$ , якщо похідні  $u'$  і  $v'$  існують.

**Доведення.** Якщо  $f = uv$ , то

$$\begin{aligned} \Delta f(x) &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) \\ &= u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)v(x) + u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x) \\ &= u(x + \Delta x)(v(x + \Delta x) - v(x)) + (u(x + \Delta x) - u(x))v(x) \\ &= u(x + \Delta x)\Delta v(x) + \Delta u(x)v(x), \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta u(x)}{\Delta x}v(x) + u(x + \Delta x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}. \quad (1)$$

Якщо функція  $u$  має похідну в точці  $x$ , то вона є неперервною в цій точці. Отже,  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u(x + \Delta x) = u(x)$ . Таким чином, перейшовши в рівності (1) до границі, якщо  $\Delta x \rightarrow 0$ , одержуємо

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad \blacktriangleright$$

**Наслідок 1.** Сталу можна виносити за знак похідної, тобто  $(Cu)' = Cu'$  для довільної сталої  $C$ , якщо  $u'$  існує.

**Доведення.** Справді, згідно з теоремами 3 і 1

$$(Cu)'(x) = C'u(x) + Cu'(x) = Cu'(x). \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 4.** Похідна частки двох функцій  $u$  і  $v$  знаходиться за формулою

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)},$$

якщо похідні  $u'(x)$  і  $v'(x)$  існують і  $v(x) \neq 0$ .

**Доведення.** Нехай  $f(x) = \frac{1}{v(x)}$ . Тоді

$$\Delta f(x) = \frac{1}{v(x + \Delta x)} - \frac{1}{v(x)} = -\frac{\Delta v(x)}{v(x)v(x + \Delta x)},$$

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = -\frac{\frac{\Delta v(x)}{\Delta x}}{v(x)v(x + \Delta x)},$$

звідки

$$f'(x) = -\frac{v'(x)}{v^2(x)},$$

або

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = \frac{-v'(x)}{v^2(x)}.$$

Тому на основі теореми 3 отримуємо

$$\left(\frac{u}{v}\right)'(x) = u'(x)\frac{1}{v(x)} + u(x)\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = u'(x)\frac{1}{v(x)} - u(x)\frac{v'(x)}{v^2(x)},$$

звідки випливає потрібна формула. ►

**Приклад 1.**  $(x + \sin x)' = (x)' + (\sin x)' = 1 + \cos x.$

**Приклад 2.**  $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x.$

**Приклад 3.**  $\left(\frac{x^2}{4}\right)' = \left(\frac{1}{4}x^2\right)' = \frac{1}{4}(x^2)' = \frac{1}{4} \cdot 2x = \frac{1}{2}x.$

**Приклад 4.**  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}.$  Справді,

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - (\cos x)' \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

**Приклад 5.**  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$  Справді,

$$(\operatorname{ctg} x)' = \left( \frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - (\sin x)' \cos x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

**Приклад 6.** Функції  $u(x) = |x|$  і  $v(x) = \sin x - |x|$  не мають похідної в точці  $x = 0$ , проте їхня сума функція  $f(x) = \sin x$  має похідну в цій точці.

### 5. Таблиця похідних основних елементарних функцій.

1.  $(C)' = 0.$

2.  $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \mu \in \mathbb{R}.$

3.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

4.  $(e^x)' = e^x.$

5.  $(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

6.  $(\sin x)' = \cos x.$

7.  $(\cos x)' = -\sin x.$

8.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

9.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

10.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

11.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

12.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

13.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

14.  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

15.  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

16.  $(a^x)' = a^x \ln a, a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}.$

17.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}.$

Ці формули справедливі в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$ , в якій обидві частини відповідної рівності мають зміст. Частина цих формул вже доведена в попередніх пунктах. Решту формул отримаємо в наступних пунктах.

**Зауваження 1.** Правильніше, можливо, було б записувати ці формули трохи інакше. Наприклад,  $\sin' x = \cos x$ ,  $(t \rightarrow t^\mu)'(x) = \mu x^{\mu-1}$ . Проте так зручніше для обчислювальних цілей.

### 6. Похідна композиції.

**Теорема 1.** Якщо функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $x_0$ , а функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $y_0 = \varphi(x_0)$ , то функція  $F(x) = f(\varphi(x))$  має похідну в точці  $x_0$  і

$$F'(x_0) = f'(\varphi(x_0))\varphi'(x_0), \quad (1)$$

тобто  $(f \circ \varphi)' = (f' \circ \varphi) \cdot \varphi'$ .

**Доведення.** Функція  $f$  має похідну в точці  $y_0$ . Тому

$$(f(y_0 + \Delta y) - f(y_0)) / \Delta y = f'(y_0) + \varepsilon(\Delta y),$$

де  $\varepsilon(\Delta y) \rightarrow 0$ , якщо  $\Delta y \rightarrow 0$ . Звідси

$$\Delta f(y_0) = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y. \quad (2)$$

Якщо вважати, що  $\varepsilon(0) = 0$ , то функція  $\varepsilon(\Delta y)$  буде неперервною в точці 0 і рівність (2) буде справедливою і для  $\Delta y = 0$ . Оскільки  $y_0 = \varphi(x_0)$  і  $\Delta f(y_0) = \Delta f(\varphi(x_0)) = \Delta F(x_0)$ , тоз (2) одержуємо, що

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f'(y_0) \frac{\Delta y}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y) \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (3)$$

Врахуємо, що  $\Delta y = \Delta \varphi(x_0)$ . Тоді

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \varphi'(x_0).$$

Крім цього,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varepsilon(\Delta y) = \varepsilon\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y\right) = \varepsilon(0) = 0.$$

Тому із (3) випливає (1). ►

В довільній точці  $x$  рівність (1) можна записати і в інших формах:

$$F'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x), \quad (f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x),$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}, \quad z'_x = z'_y \cdot y'_x, \quad (f \circ \varphi)'(x) = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

Таким чином, за виконання відповідних умов  $(e^\varphi)' = e^\varphi \varphi'$ ,  
 $(\sin \varphi)' = \cos \varphi \cdot \varphi'$ ,  $(\cos \varphi)' = -\sin \varphi \cdot \varphi'$ ,  $(\ln \varphi)' = \frac{\varphi'}{\varphi}$ ,  $\left(\frac{1}{\varphi}\right)' = -\frac{\varphi'}{\varphi^2}$  і т.д.

**Приклад 1.**  $(\sin 2x)' = \sin'(2x)(2x)' = 2 \cos 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 2.**  $(e^{x^2})' = e^{x^2} (x^2)' = e^{x^2} 2x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 3.**  $(e^{-x})' = e^{-x} (-x)' = -e^{-x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 4.**

$$(\sin^4 2x^3)' = 4 \sin^3 2x^3 \cos 2x^3 (2x^3)' = 24x^2 \sin^3 2x^3 \cos 2x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 5.**

$$(\operatorname{ch} x)' = \left( \frac{e^x + e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} ((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 6.**

$$(\operatorname{sh} x)' = \left( \frac{e^x - e^{-x}}{2} \right)' = \frac{1}{2} ((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 7.**  $(a^x)' = a^x \ln a$ ,  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Справді,

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a} (x \ln a)' = a^x \ln a.$$

**Приклад 8.**  $(\sin^3 x)' = 3 \sin^2 x (\sin x)' = 3 \sin^2 x \cos x$ .

**Приклад 9.**  $(e^{\sin x})' = e^{\sin x} (\sin x)' = e^{\sin x} \cos x$ .

**Приклад 10.**  $(e^{\sin^2 3x})' = e^{\sin^2 3x} \cdot 2 \sin 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 3e^{\sin^2 3x} \sin 6x$ .

**Приклад 11.**  $(\ln|x|)' = 1/x$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Справді, якщо  $x > 0$ , то  
 $(\ln|x|)' = (\ln x)' = 1/x$ . Якщо ж  $x < 0$ , то

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x} (-x)' = \frac{1}{x}.$$

**Приклад 12.** Якщо  $f(x) = \sin 2x + \cos^3 2x$ , то

$$f'(x) = 2\cos 2x + 6\cos^2 2x \sin 2x \text{ і } f'(0) = 2.$$

**Зауваження 1.** Слід розрізняти позначення  $f'(\varphi(x))$  та  $(f(\varphi(x)))' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ .

**Приклад 13.** Якщо  $f'(x) - xf(x) = 1$  і  $F(t) = f(e^t)$ , то  $F'(t) = f'(e^t)e^t$  і  $f'(e^t) - e^t f(e^t) = 1$ . Отже,  $F'(t) - e^{2t}F(t) = e^t$ .

**Приклад 14.** Якщо  $y'(x) + y(x) = x$  і  $y(t) = u(e^t)$ , то  $u(t) = y(\ln t)$ ,  $u'(t) = y'(\ln t)\frac{1}{t}$ . Отже,  $u'(t) + \frac{u(t)}{t} = \frac{\ln t}{t}$ . Можна було міркувати і так.

Оскільки  $y'(t) = u'(e^t)e^t$ , то  $u'(e^t)e^t + u(e^t) = t$ . Тому  $u'(t) + \frac{u(t)}{t} = \frac{\ln t}{t}$ .

**7. Похідні показниково-степеневих функцій. Логарифмічна похідна.** Часто функція  $f$  задається формулою  $y = u^v$ , де  $u$  і  $v$  – функції, які мають похідні в точці  $x$ . Для знаходження похідної такої функції слід скористатись такою формулою  $u = e^{\ln u}$ . Тоді  $u^v = e^{v \ln u}$ . Отже, за виконання відповідних умов

$$y' = (u^v)' = (e^{v \ln u})' = e^{v \ln u} (v \ln u)' = e^{v \ln u} \left( v' \ln u + v \frac{u'}{u} \right).$$

**Приклад 1.**

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} (\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

**Зауваження 1.** Іноколи похідну функції  $y = u^v$  простіше знаходити наступним чином. Оскільки  $\ln y = v \ln u$ , то  $\frac{y'}{y} = (v \ln u)'$ ,

$$y' = y \cdot (v \ln u)' = u^v (v \ln u)'.$$

**Приклад 2.** Якщо  $y = x^x$ , то  $\ln y = x \ln x$ ,  $\frac{y'}{y} = \ln x + 1$  і

$$y' = y(\ln x + 1) = x^x (\ln x + 1).$$

Похідна логарифма функції називається логарифмічною похідною:

$$(\ln f)' = \frac{f'}{f}.$$

**Приклад 3.** Якщо  $y = x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}}$ , то

$$\ln y = \ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2-1) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1), \quad \frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{x}{x^2-1} - \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4-1},$$

*i*

$$y' = y \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4-1} \right) = x\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \left( \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^4-1} \right) = \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \left( 1 + \frac{2x^2}{x^4-1} \right).$$

## 8. Похідна оберненої функції.

**Теорема 1.** Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є строго монотонною і неперервною на проміжку  $(a;b)$  і має похідну  $f'(x_0) \neq 0$  в точці  $x_0 \in (a;b)$ , то функція  $f^{-1}$ , обернена до  $f$ , має похідну в точці  $y_0 = f(x_0)$  і

$$f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad (1)$$

**Доведення.** Справді,

$$\begin{aligned} f^{-1'}(y_0) &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{-1}(f(x)) - f^{-1}(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

**Зауваження 1.** Формулу 1 можна записати так:

$$f^{-1'}(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}. \quad (2)$$

Отже, в точці  $x$  похідна оберненої функції знаходиться за формулою

$$f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}. \quad (3)$$

Формулу (1) записують також так:  $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = \sin x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \arcsin x$  є оберненою до звуження функції  $f$  на проміжок  $[-\pi/2; \pi/2]$ . Тому

$$\begin{aligned} \arcsin' x &= \frac{1}{f'(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = \cos x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \arccos x$  є оберненою функцією до звуження функції  $f$  на проміжок  $[0; \pi]$ . Тому

$$\begin{aligned} \arccos' x &= \frac{1}{f'(\arccos x)} = \frac{-1}{\sin(\arccos x)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \operatorname{arctg} x$  є оберненою до звуження функції  $f$  на проміжок  $(-\pi/2; \pi/2)$ . Тому

$$\operatorname{arctg}' x = \frac{1}{f'(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \operatorname{arcctg} x$  є оберненою до звуження функції  $f$  на проміжок  $(0; \pi)$ . Тому

$$\begin{aligned} \operatorname{arcctg}' x &= \frac{1}{f'(\operatorname{arcctg} x)} = -\frac{1}{\sin^2(\operatorname{arcctg} x)} \\ &= \frac{-1}{1 + \operatorname{ctg}^2(\operatorname{arcctg} x)} = -\frac{1}{1 + x^2}, x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = e^x$ , то функція  $f^{-1}(x) = \ln x$  є оберненою до функції  $f$ . Тому

$$\ln' x = \frac{1}{f'(\ln x)} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty).$$

**Приклад 6.** Якщо  $f(x) = a^x$ ,  $a \in (0; +\infty) \setminus \{1\}$  то функція  $f^{-1}(x) = \log_a x$  є оберненою до функції  $f$ . Тому

$$\log'_a x = \frac{1}{f'(\log_a x)} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}, \quad x \in (0; +\infty).$$

**Приклад 7.** Якщо  $f(x) = x^x$  (ця функція є оборотною на кожному з проміжків  $(0; -1/e)$  і  $(-1/e; +\infty)$ ), то  $f'(x) = x^x(\ln x + 1)$ . Тому

$$f^{-1'}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{(f^{-1}(x))^{f^{-1}(x)} (\ln f^{-1}(x) + 1)}.$$

**Приклад 8.** Якщо  $f'(x) + x^2 f(x) = 1$ , то за виконання відповідних умов

$$f'(f^{-1}(t)) + f^{-12}(t) f(f^{-1}(t)) = 1 \quad \text{і} \quad \frac{1}{f^{-1'}(t)} + f^{-12}(t)t = 1. \quad \text{Тому}$$

$$f^{-1'}(t) = \frac{1}{1 - f^{-12}(t)t}.$$

**9. Диференціал.** Функція  $f$  називається диференційовною в точці  $x_0$ , якщо її приріст  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  в цій точці можна подати у вигляді

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x, \quad (1)$$

де  $A$  – деяке число, яке від  $\Delta x$  не залежить ( $A$  залежить від функції  $f$  і від  $x_0$ ), а  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$ , якщо  $\Delta x \rightarrow 0$ . Якщо функція  $f$  є диференційованою, то  $A \cdot \Delta x$  називається її диференціалом в точці  $x_0$  і позначається  $df(x_0)$ ,  $dy$ ,  $d(f(x_0); \Delta x)$  і т.д. Отже,  $df(x_0) = A \cdot \Delta x$ . Замість  $\Delta x$  часто пишуть  $dx$  і тоді  $df(x_0) = A \cdot dx$ . Бачимо, що за сталого  $x_0$  диференціал є лінійною функцією змінної  $\Delta x$ .

**Приклад 1.** Нехай  $f(x) = x^2$ . Тоді  $\Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta x$ . Отже,  $df(x_0) = 2x_0 dx$ .

**Теорема 1.** Для того щоб функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  була диференційовною в точці  $x_0$ , необхідно і достатньо, щоб вона мала похідну в цій точці. Якщо ця умова виконана, то

$$df(x_0) = f'(x_0)dx. \quad (2)$$

**Доведення. Необхідність.** Нехай функція  $f$  є диференційовною в точці  $x_0$ . Тоді виконується (1). З (1) одержуємо, що

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \varepsilon(\Delta x).$$

Тому

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A.$$

Отже, функція  $f$  має похідну і  $f'(x_0) = A$ .

**Достатність.** Нехай функція  $f$  має похідну в точці  $x_0$ . Тоді

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x), \quad (3)$$

де  $\varepsilon(\Delta x) \rightarrow 0$ , якщо  $\Delta x \rightarrow 0$ . Тому  $\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$ , тобто функція  $f$  є диференційовною. ►

Отже, функція має похідну в точці тоді і тільки тоді, коли вона є диференційовна в цій точці. Тому функції, які мають похідну, часто називають диференційовними, а правила знаходження похідних – правилами диференціювання.

**Зауваження 1.** Формулу (2) в довільній точці  $x$  записують так

$$dy = f'(x)dx. \quad (4)$$

В цій формулі  $dx = \Delta x$  – довільне число, яке не залежить від  $x$ .

**Приклад 2.** Нехай  $f(x) = e^{2x}$ . Тоді  $f'(x) = 2e^{2x}$ . Отже,  $df(x) = 2e^{2x} dx$ . Зокрема,  $d(f(0); 0,1) = 0,2$ .

**Теорема 2.** Якщо  $c$  – стала функція, а  $u = u(x)$  і  $v = v(x)$  – диференційовні функції в точці  $x$ , то: 1)  $d(c) = 0$ ; 2)  $d(u + v) = du + dv$ ; 3)  $d(uv) = vdu + udv$ ; 4)  $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$ , якщо  $v(x) \neq 0$ .

**Доведення.** Оскільки  $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , то

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \left(\frac{u}{v}\right)' dx = \frac{u'v - uv'}{v^2} dx = \frac{u'dxv - uv'dx}{v^2} = \frac{vdu - udv}{v^2}$$

і твердження 4) доведено, а інші доводяться аналогічно. ►

**Приклад 3.**  $d(xe^x) = xd(e^x) + e^x dx = xe^x dx + e^x dx = (xe^x + e^x) dx$ .

**Зауваження 2.** При розгляді багатьох питань в різних розділах математики в термін “диференціал функції  $f$ ” вкладають різний зміст. Під цим терміном можна також розуміти похідну  $f'(x)$ , лінійну функцію  $F(t) = f'(x_0)t$ , функцію  $F(x) = f'(x)dx$ , функцію  $F(x; t) = f'(x)t$  двох змінних, а також оператори, які функції  $f$  ставлять у відповідність вказані функції. Часто ці нюанси вживання терміну є дуже важливими для розуміння відповідного матеріалу.

**10. Геометричний зміст диференціала. Диференціал як головна частина приросту функції.** Нехай функція  $f$  є диференційовною в точці  $x_0$ . Тоді її приріст  $\Delta f(x_0) = \Delta(f(x_0); \Delta x)$  можна подати у вигляді  $\Delta f(x_0) = df(x_0) + \varepsilon(\Delta x) \cdot \Delta x$  і  $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$ . Якщо  $f'(x_0) \neq 0$ , то для малих  $\Delta x$  маємо  $\Delta f(x_0) \approx df(x_0)$ . Отже,  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ . Ця наближена формула інколи використовується для наближеного знаходження значення функції  $f$  у точці  $x$ , якщо відомим є значення в близькій точці  $x_0$ .

**Приклад 1.** Для знаходження наближеного значення  $\sqrt[4]{17}$  розглянемо функцію  $f(x) = \sqrt[4]{x}$  та її значення в точках  $x = 17$  і  $x_0 = 16$ . Тоді  $f(16) = 2$ ,  $x - x_0 = 1$ ,  $f'(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}$ ,  $f'(16) = \frac{1}{4}(16)^{-3/4} = \frac{1}{32}$ . Тому  $\sqrt[4]{17} \approx 2 + \frac{1}{32} = \frac{65}{32}$ .

Подивимось на диференціал іще з одного боку. Диференційовна в точці  $x_0$  функція  $f$  має в цій точці дотичну і з графіка видно, що диференціал функції в точці  $x_0$  дорівнює приросту функції  $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  (приросту ординати дотичної), що відповідає приросту  $\Delta x = x - x_0$  незалежної змінної.

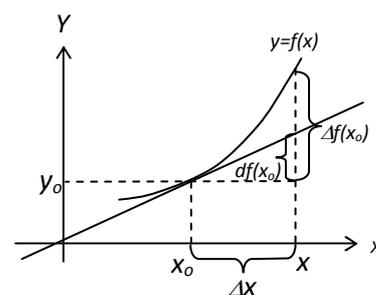


Рис. 1.

**11. Інваріантність форми першого диференціала.** Нехай функція  $f$  є диференційовною в кожній точці проміжку  $(a; b)$ . Тоді її диференціал в точці  $x \in (a; b)$  знаходиться за формулою

$$dy = f'(x)dx. \quad (1)$$

Нехай тепер на проміжку  $(\alpha; \beta)$  задано функцію  $x: (\alpha; \beta) \rightarrow (a; b)$ , яка диференційовна на  $(\alpha; \beta)$ . Тоді диференціал функції  $y = f(x(t))$  знаходиться за формулою  $dy = f'(x(t))x'(t)dt$  або  $dy = f'(x(t))dx(t)$ . Опустивши в останній формулі  $t$ , знову маємо

$$dy = f'(x)dx. \quad (2)$$

Отже, незалежно від того, чи є  $x$  незалежною змінною, чи  $x$  є функцією, диференціал функції  $y = f(x)$  знаходиться за формулами (1)-(2). Ця властивість називається інваріантністю форми першого диференціала. Вона часто використовується на практиці. Формули (1)-(2) однакові за формою, але вони різні за змістом. У формулі (1)  $dx = \Delta x$  – довільне число, а в формулі (2)  $dx$  – це диференціал функції  $x = x(t)$  і не завжди в цьому випадку  $dx = \Delta x$ .

**Зауваження 1.3** інваріантності форми першого диференціала впливає, що похідна функції в якійсь точці дорівнює частці диференціалів:

$y'_x = \frac{dy}{dx}$ . При цьому знаходити значення диференціалів можна по будь-якій змінній.

**Приклад 1.** Якщо  $\varphi(x) = e^x$ ,  $x(t) = t^2$  і  $f(t) = e^{t^2}$ , то  $\varphi'(x) = e^x$  і

$$\varphi'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{e^{t^2} 2tdt}{2tdt} = e^{t^2} = e^x.$$

**Приклад 2.**

$$\begin{aligned} d(\ln^2 \sin^3 4x) &= 2 \ln \sin^3 4x d(\ln \sin^3 4x) = \frac{2 \ln \sin^3 4x}{\sin^3 4x} d(\sin^3 4x) \\ &= \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin^3 4x} \sin^2 4x d(\sin 4x) = \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} d(\sin 4x) \\ &= \frac{6 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} \cos 4x d(4x) = \frac{24 \ln \sin^3 4x}{\sin 4x} \cos 4x dx. \end{aligned}$$

**12. Похідні вищих порядків.** Нехай функція  $f$  має похідну в кожній точці  $x \in (a; b)$ . Тоді функція  $f' : x \rightarrow f'(x)$  називається похідною функцією функції  $f$  або першою похідною функції  $f$ . Похідна функції  $f'$  в точці  $x_0$  називається другою похідною функції  $f$  в точці  $x_0$  і позначається через  $f''(x_0)$ . Отже,

$$f''(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x_0 + \Delta x) - f'(x_0)}{\Delta x}.$$

Другу похідну позначають також так  $y''$ ,  $f^{(2)}(x_0)$ ,  $\frac{d^2 f}{dx^2}(x_0)$ ,  $\ddot{y}$ ,  $y''_{x_2}(x_0)$  і т.д.

Означення другої похідної можна також записати так:  $f''(x_0) = (f'(x))'|_{x=x_0}$ . Аналогічно даємо означення похідної  $n$ -го порядку:  $f^{(n)}(x_0) = (f^{(n-1)}(x))'(x_0)$ . Крім цього, за означенням  $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$  – похідна нульового порядку.

**Теорема 1.**  $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)}$  для довільних  $C \in \mathbb{R}$  і  $n \in \mathbb{N}$ , якщо  $u^{(n)}$  існує.

**Доведення.** Справді, для  $n = 1$  формула справедлива. Тому, припустивши, що вона справедлива для  $n = m - 1$ , отримуємо  $(Cu)^{(m)} = ((Cu)^{(m-1)})' = (C(u)^{(m-1)})' = C((u)^{(m-1)})' = Cu^{(m)}$ . Отже, на основі принципу математичної індукції приходимо до потрібного висновку. ►

**Теорема 2.**  $(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$  для довільного  $n \in \mathbb{N}$ , якщо похідні  $u^{(n)}$  і  $v^{(n)}$  існують.

**Доведення.** Справді, для  $n = 1$  формула справедлива. Тому, припустивши, що вона справедлива для  $n = m - 1$ , отримуємо

$$(u + v)^{(m)} = \left( (u + v)^{(m-1)} \right)' = \left( (u)^{(m-1)} + (v)^{(m-1)} \right)' = \left( (u)^{(m-1)} \right)' + \left( (v)^{(m-1)} \right)' = u^{(m)} + v^{(m)}.$$

Отже, на основі принципу математичної індукції приходимо до потрібного висновку. ►

**Теорема 3 (формула Лейбніца).**  $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$  для довільного  $n \in \mathbb{N}$ , якщо похідні  $u^{(n)}$  і  $v^{(n)}$  існують.

**Доведення.** Справді, для  $n = 1$  формула справедлива. Тому, припустивши, що вона справедлива для  $n = m - 1$ , отримуємо

$$\begin{aligned} (uv)^{(m)} &= \left( (uv)^{(m-1)} \right)' = \left( \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k u^{(k)} v^{(m-1-k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \left( u^{(k)} v^{(m-1-k)} \right)' = \sum_{k=0}^{m-1} C_{m-1}^k \left( u^{(k+1)} v^{(m-1-k)} + u^{(k)} v^{(m-k)} \right) \\ &= u^{(m)} v^{(0)} + \sum_{j=1}^{m-1} \left( C_{m-1}^{j-1} + C_{m-1}^j \right) u^{(j)} v^{(m-j)} + u^{(0)} v^{(m)} \\ &= u^{(m)} v^{(0)} + \sum_{j=1}^{m-1} C_m^j u^{(j)} v^{(m-j)} + u^{(0)} v^{(m)} = \sum_{k=0}^m C_m^k u^{(k)} v^{(m-k)}. \end{aligned}$$

Отже, на основі принципу математичної індукції приходимо до потрібного висновку. ►

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = xe^x$ , то

$$f''(x) = (xe^x)'' = \left( (xe^x)' \right)' = (e^x + xe^x)' = e^x + e^x + xe^x = e^x(2 + x).$$

Зокрема,  $f''(0) = 2$ .

**Приклад 2.** Знайдемо  $n$ -ну похідну функції  $f(x) = \sin x$ . Маємо,  $f'(x) = \cos x = \sin(x + \pi/2)$ ,  $f''(x) = -\sin x = \sin(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2})$ . На основі принципу математичної індукції робимо висновок, що  $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$ .

Зокрема,

$$f^{(n)}(0) = \sin \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } n - \text{парне,} \\ (-1)^{(n-1)/2}, & \text{якщо } n - \text{непарне.} \end{cases}$$

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = \cos x$ , то

$$f^{(n)}(x) = \left( \sin \left( x + \frac{\pi}{2} \right) \right)^{(n)} = \sin \left( x + \frac{\pi}{2} + n \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \cos \left( x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = x^\mu$ , то  $f'(x) = \mu x^{\mu-1}$ ,  $f''(x) = \mu(\mu-1)x^{\mu-2}$  і на основі принципу математичної індукції переконуємось, що

$$f^{(n)}(x) = \mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = \ln x$ , то  $f'(x) = \frac{1}{x}$ ,  $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$  і на основі принципу математичної індукції переконуємось, що

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Приклад 6.** Якщо  $f(x) = (x^2 - 1)e^x$ , то позначивши  $u = x^2 - 1$  і  $v = e^x$ , отримуємо, що  $v^{(n)} = e^x$ ,  $u^{(0)} = x^2 - 1$ ,  $u' = 2x$ ,  $u'' = 2$ ,  $u''' = 0$ ,  $u^{(4)} = 0$ , .... Тому, скориставшись формулою Лейбніца, одержуємо

$$\begin{aligned} f^{(20)}(x) &= \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k u^{(k)} v^{(20-k)} = C_{20}^0 u^{(0)} v^{(20)} + C_{20}^1 u^{(1)} v^{(19)} + C_{20}^2 u^{(2)} v^{(18)} \\ &= (x^2 - 1)e^x + 40xe^x + 380e^x = (x^2 + 40x + 379)e^x. \end{aligned}$$

**Приклад 7.** Якщо функція  $\varphi$  має другу похідну в точці  $x_0$ , а функція  $f$  має другу похідну в точці  $y_0 = \varphi(x_0)$ , то функція  $F(x) = f(\varphi(x))$  має другу похідну в точці  $x_0$  і

$$F''(x_0) = f''(y_0)\varphi'^2(x_0) + f'(y_0)\varphi''(x_0). \quad (1)$$

Справді, за правилом знаходження похідної складної функції

$$\begin{aligned} F''(x_0) &= (F'(x))' \Big|_{x=x_0} = (f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x))' \Big|_{x=x_0} \\ &= (f''(\varphi(x))\varphi'^2(x) + f'(\varphi(x))\varphi''(x)) \Big|_{x=x_0} \end{aligned}$$

$$= f''(y_0)\varphi'^2(x_0) + f'(y_0)\varphi''(x_0).$$

Зауважимо, що формулу (1) коротко записують так

$$z''_{x^2} = z''_{y^2}y'_x{}^2 + z'_y y''_{x^2}.$$

**Приклад 8.** Якщо  $f''(x) + x^2 f'(x) - xf(x) = 1$  і  $F(t) = f(e^t)$ , то за виконання відповідних умов  $f''(e^t) + e^{2t} f'(e^t) - e^t f(e^t) = 1$ ,  $F'(t) = f'(e^t)e^t$ ,  $f'(e^t) = e^{-t} F'(t)$ ,

$$F''(t) = (f'(e^t)e^t)' = f''(e^t)e^{2t} + f'(e^t)e^t = f''(e^t)e^{2t} + F'(t),$$

$$f''(e^t) = e^{-2t}(F''(t) - F'(e^t)) \quad \text{і} \quad e^{-2t}(F''(t) - F'(t)) + e^t F'(t) - e^t F(t) = 1.$$

Отже,  $F''(t) + (e^{3t} - 1)F'(t) - e^{3t}F(t) = e^{2t}$ .

**Приклад 9.** Нехай функція  $f$  задовольняє всі умови теореми про похідну оберненої функції і в точці  $x_0$  має другу похідну. Тоді

$$\begin{aligned} f^{-1''}(y_0) &= (f^{-1}')'(y_0) = \left( \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \right)' \Big|_{y=y_0} \\ &= \left( \frac{-f''(f^{-1}(y)) \cdot f^{-1'}(y)}{f'^2(f^{-1}(y))} \right) \Big|_{y=y_0} = - \left( \frac{f''(f^{-1}(y))}{f'^3(f^{-1}(y))} \right) \Big|_{y=y_0} \\ &= - \frac{f''(f^{-1}(y_0))}{f'^3(f^{-1}(y_0))} = - \frac{f''(x_0)}{f'^3(x_0)}. \end{aligned}$$

**Приклад 10.** Якщо  $f''(x) + xf'(x) - x^2 f(x) = 1$ , то за виконання відповідних умов

$$f''(f^{-1}(t)) + f^{-1}(t)f'(f^{-1}(t)) - f^{-12}(t)t = 1, \quad f^{-1'}(t) = \frac{1}{f'(f^{-1}(t))},$$

$$f^{-1''}(t) = -\frac{f''(f^{-1}(t))}{f'^3(f^{-1}(t))}, \quad f''(f^{-1}(t)) = -f'^3(f^{-1}(t))f^{-1''}(t) = -\frac{f^{-1''}(t)}{f^{-1'3}(t)}i$$

$$-\frac{f^{-1''}(t)}{f^{-1'3}(t)} + \frac{f^{-1}(t)}{f^{-1'}(t)} - f^{-12}(t)t = 1.$$

Тому

$$f^{-1''}(t) - f^{-1}(t)f^{-1'2}(t) + f^{-12}(t)tf^{-1'3}(t) + f^{-1'3}(t) = 0.$$

**13. Диференціали вищих порядків.** Якщо функція  $f$  є диференційовною на  $(a;b)$ , то її диференціал в кожній точці  $x \in (a;b)$  знаходиться за формулою

$$dy = f'(x)dx, \quad (1)$$

який називається ще першим диференціалом функції  $f$ . Перший диференціал є функцією двох змінних:  $x$  і  $dx$ . При цьому  $dx$  від  $x$  не залежить. При сталому  $dx$  функція  $dy$  є функцією в  $\mathbb{R}$ . Якщо вона диференційовна, то її диференціал  $\delta(dy)$  знаходиться за формулою

$$\delta(dy) = (f'(x)dx)' \delta x = f''(x)dx \delta x,$$

де  $dx$  і  $\delta x$  – довільні числа. Значення диференціала від першого диференціала при  $\delta x = dx$  називається другим диференціалом функції  $f$  в точці  $x$  і позначається  $d^2y$ . Таким чином, другий диференціал знаходиться за формулою

$$d^2y = f''(x)dx^2, \quad (2)$$

де  $dx^2 := dx \cdot dx = (dx)^2$  і  $dx$  – довільна стала, незалежна від  $x$ . Аналогічно дається означення диференціала  $n$ -го порядку. Для знаходження диференціала  $n$ -го порядку справедлива формула

$$d^n y = f^{(n)}(x)dx^n.$$

**Зауваження 1.** Слід розрізняти позначення  $d^n x$ ,  $dx^n$  та  $d(x^n)$ :

$$d^n x = \begin{cases} 0, n > 1, \\ dx, n = 1, \end{cases} \quad dx^n = (dx)^n, \quad d(x^n) = nx^{n-1}dx.$$

**Зауваження 2.** Другий диференціал не має властивості інваріантності форми. Справді, нехай  $x: (\alpha; \beta) \rightarrow (a; b)$  – двічі диференційовна функція. Тоді для функції  $y = f(x(t))$  маємо  $y'_t = f'(x(t))x'(t)$ ,  $y''_t = f''(x(t))x'^2(t) + f'(x(t))x''(t)$ . Тому

$$\begin{aligned} d^2 y &= y''_t dt^2 = f''(x(t))(x'(t)dt)^2 + f'(x(t))x''(t)dt^2 \\ &= f''(x(t))(dx(t))^2 + f'(x(t))d^2 x(t). \end{aligned}$$

Опустивши букву  $t$ , одержуємо

$$d^2 y = f''(x)dx^2 + f'(x)d^2 x. \quad (3)$$

Бачимо, що формула (3) відрізняється від формули (2) другим доданком, який не обов'язково дорівнює нулеві. Він дорівнює нулеві, якщо  $x = x(t)$  має вигляд  $x(t) = a_0 t + b_0$ , де  $a_0$  і  $b_0$  – сталі. Формула (3) показує, що другий диференціал не має властивості інваріантності, тобто форма формули для знаходження другого диференціала міняється, якщо  $x$  є функцією.

**Теорема 1.**  $d^n(u + v) = d^n u + d^n v$  для кожного  $n \in \mathbb{N}$ , якщо диференціали  $d^n u$  та  $d^n v$  існують.

**Доведення.** Справді,

$$d^n(u + v) = (u + v)^{(n)} dx = u^{(n)} dx + v^{(n)} dx = d^n u + d^n v. \blacktriangleright$$

**Теорема 2.**  $d^n(Cu) = Cd^n u$  для кожного  $n \in \mathbb{N}$  і кожного  $C \in \mathbb{R}$ , якщо диференціал  $d^n u$  існує.

**Доведення.** Справді,

$$d^n(Cu) = (Cu)^{(n)} dx = Cu^{(n)} dx = Cd^n u. \blacktriangleright$$

**Теорема 3.**  $d^n(uv) = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} u d^k v$  для кожного  $n \in \mathbb{N}$ , якщо диференціали  $d^n u$  та  $d^n v$  існують.

**Доведення.** Справді,

$$d^n(uv) = (uv)^{(n)} dx^n = \left( \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)} \right) dx^n = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} dx^{n-k} v^{(k)} dx^k = \sum_{k=0}^n C_n^k d^{n-k} u d^k v$$



**Зауваження 3.** Символічноостанню формулу записують так  $d^n(uv) = \{du + dv\}^{(n)}$ . В цих формулах  $u$  і  $v$   $n$ -раз диференційовні функції і  $d^0 u = u$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = e^x$ , то  $f''(x) = e^x$ . Тому  $d^2 f(x) = e^x dx^2$ .

**Зауваження 4.** У відповідності з формулою (2)  $y''_{x^2} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ . Проте в цій формулі вже не можна диференціали брати по будь-якій змінній, а тільки по змінній  $x$ , що впливає з формули (3).

**14. Параметрично задані функції та їхні похідні.** Функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається заданою параметрично системою

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in (\alpha; \beta), \quad (1)$$

якщо  $\psi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  – деякі функції, функція  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  має обернену функцію і  $f(x) = \psi(\varphi^{-1}(x))$ .

**Теорема 1.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задана параметрично системою (1), а функції  $\psi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: (\alpha; \beta) \rightarrow \mathbb{R}$  мають похідні в точці  $t$  і  $\varphi'(t) \neq 0$ , то функція  $f$  має похідну в точці  $x = \varphi(t)$  і

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad (2)$$

**Доведення.** За теоремами про похідну складеної і оберненої функції

$$f'(x) = (\psi(\varphi^{-1}(x)))' = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \varphi^{-1}'(x) = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \quad \blacktriangleright$$

Формулу (2) коротко записують так  $y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$ .

Щоб знайти другу похідну функції  $f$  слід  $f'$  розглядати як функцію, задану параметрично системою

$$\begin{cases} y = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, & t \in (\alpha; \beta). \\ x = \varphi(t), \end{cases}$$

Тоді за виконання відповідних умов

$$f''(x) = \frac{\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'_t}{\varphi'(t)},$$

або коротше

$$y''_{x^2} = \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t}.$$

**Приклад 1.** Знайдемо другу похідну функції  $f(x)$ , заданої параметрично системою

$$\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t, & t \in [0; \pi / 2], \end{cases}$$

в точці  $x = \sqrt{2}$ . Маємо

$$f'(x) = \frac{2 \cos t}{-2 \sin t} = -\operatorname{ctg} t, \quad f''(x) = \frac{(-\operatorname{ctg} t)'_t}{(2 \cos t)'_t} = -\frac{1}{2 \sin^3 t}.$$

Якщо  $x = \sqrt{2}$ , то  $t = \pi / 4$ . Тому  $f''(\sqrt{2}) = -1 / (2 \sin^3(\pi / 4)) = -\sqrt{2}$ .

**Зауваження 1.** Другу і вищі похідні функції, заданої параметрично, можна знаходити іншим методом, використовуючи інваріантність форми першого диференціала і формули

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y''_{x^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{dx d^2 y - d^2 x dy}{dx^3}.$$

**Приклад 2.** Якщо  $f'(x) - xf(x) = 1$  і  $F(t) = f(\eta(t))$ , де функція  $\eta$  задана параметрично системою  $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t, \end{cases}$  то за виконання відповідних умов

$$f'(\eta(t)) - \eta(t)f''(\eta(t)) = 1, \quad F'(t) = f'(\eta(t))\eta'(t) = -f'(\eta(t))\operatorname{ctgt},$$

$$f'(\eta(t)) = -F'(t)\operatorname{tgt} \text{ і } -F'(t)\operatorname{tgt} - \eta(t)F''(t) = 1.$$

**Приклад 3.** Нехай функція  $f$  задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = \rho(\varphi)\cos\varphi, \\ y = \rho(\varphi)\sin\varphi. \end{cases}$$

Тоді за виконання відповідних умов

$$f'(x) = \frac{\rho' \sin\varphi + \rho \cos\varphi}{\rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi}, \quad f''(x) = \frac{\left( \frac{\rho' \sin\varphi + \rho \cos\varphi}{\rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi} \right)'}{\rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi} = \frac{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}{(\rho' \cos\varphi - \rho \sin\varphi)^3}.$$

### 15. Теорема про середнє для функцій, які мають похідну.

**Теорема 1 (Ферма).** Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $c \in (a;b)$  приймає найбільше або найменше значення на цьому проміжку  $(a;b)$  і існує похідна  $f'(c)$ , то  $f'(c) = 0$ .

**Доведення.** Нехай в точці  $c \in (a;b)$  функція  $f$  приймає найбільше значення. Тоді  $(\forall x \in (a;b)) : f(x) - f(c) \leq 0$ . Тому

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0, \quad x \in (a;c).$$

Таким чином,

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0.$$

Крім цього,

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0, \quad x \in (c;b).$$

Тому

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0.$$

Отже,  $f'(c) = 0$ . ►

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = x$  приймає на замкненому проміжку  $[0;1]$  найбільше значення в точці  $c=1$ , але її похідна в цій точці не дорівнює нулеві. Тому для замкненого проміжку теорема Ферма не є справедливою.

**Наслідок 1.** Якщо виконуються умови теореми Ферма, то дотична до графіка функції  $f$  у точці  $(c; f(c))$  є паралельною осі абсцис.

**Теорема 2 (Ролля).** Нехай функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови: 1) є неперервною на проміжку  $[a;b]$ ; 2) має похідну на проміжку  $(a;b)$ ; 3)  $f(b) = f(a)$ . Тоді  $(\exists c \in (a;b)) : f'(c) = 0$ .

**Доведення.** За другою теоремою Вейерштрасса функція  $f$  приймає на  $[a;b]$  найбільше і найменше значення. Нехай  $M = \max\{f(x) : x \in [a;b]\}$  і  $m = \min\{f(x) : x \in [a;b]\}$ . Якщо  $m = M$ , то  $(\forall x \in [a;b]) : f(x) = M$ , тобто  $f$  є сталою на  $[a;b]$  і тому в цьому випадку  $(\forall c \in (a;b)) : f'(c) = 0$ . Нехай  $m \neq M$ . Оскільки  $f(b) = f(a)$ , то принаймні одне із значень  $m$  або  $M$  функція  $f$  приймає в якійсь точці  $c \in (a;b)$ . Тоді за теоремою Ферма  $f'(c) = 0$ . ►

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = |x| - 3$  є неперервною на проміжку  $[-1;1]$ ,  $f(-1) = f(1) = -2$  і не існує такої точки  $c$ , що  $f'(c) = 0$ .

**Теорема 3 (Лагранжа).** Нехай функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови: 1) є неперервною на проміжку  $[a;b]$ ; 2) має похідну на проміжку  $(a;b)$ . Тоді

$$(\exists c \in (a;b)) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \quad (1)$$

**Доведення.** Нехай

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x.$$

Тоді  $F(a) = F(b) = \frac{f(a)b - f(b)a}{b - a}$  і функція  $F$  задовольняє всі умови теореми

Ролля. Тому  $(\exists c \in (a;b)) : F'(c) = 0$ . Але

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Отже, існує  $c \in (a;b)$ , для якого

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

звідки випливає твердження теореми. ►

**Приклад 3.**  $\sin 2 - \sin 1 = \cos c$ ,  $c \in (1; 2)$ .

**Приклад 4.** Якщо  $x_1 \in \mathbb{R}$ ,  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ , то  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ ,  $\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1)$ ,  $c \in (x_1; x_2)$ . Тому

$$|\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1| \leq |x_2 - x_1|, \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad x_2 \in \mathbb{R}.$$

**Наслідок 2.** Якщо виконуються умови теореми Лагранжа, то існує така точка  $c \in (a; b)$ , що дотична до графіка функції  $f$  у точці  $(c; f(c))$  є паралельною прямою, яка проходить через точки  $(a; f(a))$  і  $(b; f(b))$ .

**Зауваження 1.** Нехай  $\theta = \frac{c-a}{b-a}$ . Тоді  $c = a + \theta(b-a)$  і  $0 < \theta < 1$ . Тому співвідношення (1) можна переписати так:

$$(\exists \theta \in (0; 1)): f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b-a))(b-a). \quad (2)$$

**Зауваження 2.** Нехай  $a = x$ ,  $b - a = \Delta x$ . Тоді  $b = x + \Delta x$  і співвідношення (2) можна переписати так:

$$(\exists \theta \in (0; 1)): f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x. \quad (3)$$

**Теорема 4 (Коші).** Нехай функції  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняють наступні умови: 1) є неперервними на проміжку  $[a; b]$ ; 2) мають похідні на проміжку  $(a; b)$ ; 3)  $(\forall x \in (a; b)): \varphi'(x) \neq 0$ . Тоді

$$(\exists c \in (a; b)): \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}.$$

**Доведення.** З теореми Ролля випливає, що  $\varphi(a) \neq \varphi(b)$ . Крім цього, функція

$$F(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} \varphi(x)$$

задовольняє всі умови теореми Ролля. Тому  $(\exists c \in (a; b)): F'(c) = 0$ , а це рівносильне твердженню теореми 4. ►

**Зауваження 3.** Як і в теоремі Лагранжа, в теоремі 4 можна записати  $c = a + \theta(b - a)$  і  $0 < \theta < 1$ .

## 16. Правила Лопіталя.

**Теорема 1 (перше правило Лопіталя: невизначеність  $0/0$ ).** Нехай функції  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняють наступні умови: 1) вони диференційовні на проміжку  $(a; b)$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = 0$ ; 3)  $\varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a; b)$ ; 4) існує границя (скінченна або нескінченна)  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k$ .

$$\text{Тоді } \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**Доведення.** Функції  $f$  і  $\varphi$  не є визначеними в точці  $x = a$ . Продовжимо їх в цю точку поклавши  $f(a) = \varphi(a) = 0$ . Тоді ці функції будуть задовольняти всі умови теореми Коші на кожному проміжку  $[a; x]$ ,  $a < x < b$ . За цією теоремою

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{\varphi(x) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad a < c < x.$$

Якщо  $x \rightarrow a+$ , то  $c \rightarrow a+$ . Тому

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c \rightarrow a+} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = k. \quad \blacktriangleright$$

**Теорема 2 (друге правило Лопіталя: невизначеність  $\infty/\infty$ ).** Нехай функції  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняють наступні умови: 1) вони диференційовні на  $(a; b)$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = \infty$ ; 3)  $\varphi'(x) \neq 0$  для всіх  $x \in (a; b)$ ; 4) існує границя (скінченна або нескінченна)  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = k$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**Доведення.** Візьмемо довільні  $x$  і  $x_0$ ,  $a < x < x_0 < +\infty$ . За теоремою Коші

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{\varphi(x) - \varphi(x_0)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad x < c < x_0,$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \cdot \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}. \quad (1)$$

Тепер не можна стверджувати, що  $c \rightarrow a+$ , якщо  $x \rightarrow a+$ . Тому завершується доведення теореми наступними міркуваннями. Нехай спочатку  $k = \infty$ . Підберемо для заданого як завгодно великого  $\varepsilon > 0$  число  $x_0 > a$  настільки близьким до  $a$ , щоб

$$\left| \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} \right| \geq 2\varepsilon, \quad \left| \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| \geq \frac{1}{2}$$

для всіх  $x \in (a; x_0)$ . Тоді

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} \right| \geq 2\varepsilon.$$

Таким чином, з (1) отримуємо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta): \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} \right| > \varepsilon.$$

Тому  $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$  і в даному випадку теорема 2 доведена. Нехай тепер

$k \neq \infty$ . Тоді з (1) отримуємо

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - k = \left( \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - k \right) \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} + k \frac{\frac{f(x_0)}{f(x)} - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}}. \quad (2)$$

Для заданого як завгодно малого  $\varepsilon \in (0; 1)$  підберемо  $x_0$  так, щоб

$$\left| \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} - k \right| < \varepsilon / 2, \quad \left| \frac{1 - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| \leq 2, \quad \left| k \frac{\frac{f(x_0)}{f(x)} - \frac{\varphi(x_0)}{\varphi(x)}}{1 - \frac{f(x_0)}{f(x)}} \right| < \varepsilon$$

для всіх  $c \in (a; x_0)$ . Тоді з (2) випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < a - x < \delta) : \left| \frac{f(x)}{\varphi(x)} - k \right| \leq 2\varepsilon$$

і теорему доведено. ►

**Зауваження 1.** Ми сформулювали і довели правила Лопіталя для правої границі. Проте, вони залишаються справедливими з відомими змінами у формулюванні і для лівої границі, і для границі, а також для  $a = -\infty$ ,  $a = +\infty$  та  $a = \infty$ . Останні випадки можна звести до випадку  $a = 0$  шляхом розгляду функцій  $f_1(t) = f(1/t)$  і  $\varphi_1(t) = \varphi(1/t)$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_1(t)}{\varphi_1(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f_1'(t)}{\varphi_1'(t)} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{\varphi'(1/t)(-1/t^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

**Зауваження 2.** При застосуванні правил Лопіталя потрібно дивитись, чи виконуються відповідні умови, бо можна прийти, інколи, до неправильних висновків. Правила Лопіталя можна застосовувати і до інших невизначеностей ( $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $\infty^0$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  і т.д.).

**Приклад 1.**  $\frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1.$

**Приклад 2.**

$$\frac{0}{0} : \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1 - x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^x - 1)'}{(2x)'} = \frac{1}{2}.$$

**Приклад 3.**  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{1 + \cos x}{2 + \cos x} = \frac{1}{2}.$  В той же час

$$\lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{(1 + \cos x)'}{(2 + \cos x)'} = \lim_{x \rightarrow \pi/2} \frac{-\sin x}{-\sin x} = 1. \text{ Бачимо, що тут правило Лопіталя}$$

приводить до хибного результату. Це пов'язано з тим, що не виконується умова 2) теореми 1.

**Приклад 4.**  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin x}{x + \cos x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\cos x}{x}} = 1.$  Разом з цим,  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x + \sin x)'}{(x + \cos x)'} =$

не існує і тому правила Лопіталя тут застосувати не можна.

$$\text{Приклад 5. } 0 \cdot \infty : \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

**Приклад 6.**

$$\begin{aligned} \infty - \infty : \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1-x}{x \ln x + x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-1}{\ln x + 2} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Приклад 7. } 0^0 : \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \exp\left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x\right) = 1.$$

$$\text{Приклад 8. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

**Приклад 9.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = 0$  для кожного  $a > 1$  і кожного  $\mu \in \mathbb{R}$ , бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\mu}{a^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu x^{\mu-1}}{a^x \ln a} = \dots = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu(\mu-1) \cdot \dots \cdot (\mu-n+1)x^{\mu-n}}{a^x \ln^n a} = 0,$$

якщо  $n \geq \mu$ .

**Приклад 10.**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = 0$  для кожного  $\varepsilon > 0$ , бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\varepsilon} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\varepsilon x^{\varepsilon-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varepsilon x^\varepsilon} = 0.$$

**Приклад 11.** При використанні правил Лопіталя до знаходження границь доцільно знаходити границі тих співмножників (але не доданків) в чисельнику та знаменнику, які мають скінченні і ненульові границі без правил Лопіталя. Зокрема,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)\sqrt{2+x^2}}{(1+3\sqrt{\cos x})\sin^2 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{\sin^2 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x^2}}{1+3\sqrt{\cos x}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin^2 2x} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{4 \sin 2x \cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 2x} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{16} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2 \cos 2x} = \frac{\sqrt{2}}{32} = \frac{1}{16\sqrt{2}}.
\end{aligned}$$

**Приклад 12.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \sin^2 \sqrt{x}\right)^{(1+\sqrt{x})\ln x} &= \lim_{x \rightarrow 0+} \left(1 - \sin^2 \sqrt{x}\right)^{\frac{-\sin^2 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\ln x}{-\sin^2 \sqrt{x}}} \\
&= e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \sin^2 \sqrt{x}(1+\sqrt{x})\ln x} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \sin^2 \sqrt{x} \ln x} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\sin^2 \sqrt{x} x \ln x}{x}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x} \\
&= \exp\left(-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \exp\left(-\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

**17. Формула Тейлора для багаточлена.** Багаточленом (многочленом, поліномом)  $n$ -го степеня називається функція

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n, \quad (1)$$

де  $a_0, \dots, a_n$  – деякі числа, які називаються коефіцієнтами багаточлена і  $a_n \neq 0$ . Візьмемо довільне число  $a \in \mathbb{R}$  і запишемо рівність

$$f(x) = a_0 + a_1((x-a) + a) + \dots + a_n((x-a) + a)^n.$$

Попідносивши до степенів, отримуємо

$$f(x) = \sum_{k=0}^n A_k (x-a)^k = A_0 + A_1(x-a) + \dots + A_n(x-a)^n, \quad (2)$$

де  $A_k, k \in \overline{0;n}$ , – деякі числа.

**Теорема 1.** Для довільного  $a \in \mathbb{R}$  кожний багаточлен  $f$  степеня  $n$  можна записати у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad (3)$$

тобто

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n.$$

**Доведення.** Переписавши рівність (1) у вигляді (2), послідовно отримуємо

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + \dots + A_n(x-a)^n,$$

$$f'(x) = A_1 + 2A_2(x-a) + \dots + nA_n(x-a)^{n-1},$$

...

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2A_n.$$

Тому

$$f(a) = A_0, \quad f'(a) = A_1, \quad f''(a) = 2!A_2, \quad \dots, \quad f^{(n)}(a) = n!A_n,$$

і ми приходимо до потрібного твердження. ►

Формула (3) називається формулою Тейлора для багаточлена.

У випадку  $a = 0$  формула (3) приймає вигляд

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k.$$

**Наслідок 1.** Для коефіцієнтів багаточлена (2) справедлива формула

$$A_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k \in \overline{0;n}.$$

**Приклад 1.** Запишемо багаточлен  $f(x) = x^4$  у вигляді

$$f(x) = A_0 + A_1(x-1) + A_2(x-1)^2 + A_3(x-1)^3 + A_4(x-1)^4.$$

Маємо

$$f'(x) = 4x^3, \quad f''(x) = 12x^2, \quad f'''(x) = 24x, \quad f^{(4)}(x) = 24.$$

Тому

$$f(1) = 1, \quad f'(1) = 4, \quad f''(1) = 12, \quad f'''(1) = 24, \quad f^{(4)}(1) = 24.$$

Отже,

$$x^4 = 1 + 4(x-1) + 6(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4.$$

Нулем функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається таке число  $a \in \mathbb{R}$ , що  $f(a) = 0$ , тобто нуль функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – це корінь рівняння  $f(x) = 0$ . Кажуть,  $m$  раз неперервно диференційовна в точці  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в цій точці нуль, порядку  $m \in \mathbb{N}$ , або нуль, кратності  $m \in \mathbb{N}$ , якщо

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0. \quad (1)$$

Нуль, порядку  $m = 1$ , називається простим нулем.

**Наслідок 1.** Нехай  $f$  – багаточлен степеня  $n$  і  $m \leq n$ . Тоді еквівалентними є наступні умови: 1) в точці  $a \in \mathbb{R}$  багаточлен  $f$  має нуль, порядку  $m$ ; 2)  $f(x) = (x-a)^m g(x)$ , де  $g$  – багаточлен степеня  $n-m$  і  $g(a) \neq 0$ ; 3)  $f(x) = \sum_{k=m}^n A_k (x-a)^k$ , де  $A_m \neq 0$ .

**Приклад 2.** Багаточлен  $f(x) = (x-1)^4(x+3)$  є багаточленом степеня  $n = 5$ , має нуль порядку  $m = 4$  у точці  $a_1 = 1$  і має нуль, порядку  $m = 1$ , у точці  $a_2 = -3$ .

**Зауваження 1.** Згідно з основною теоремою алгебри (її доводять в інших розділах математики) кожний поліном, степеня  $n$ , має не більше, ніж  $n$  дійсних нулів (має рівно  $n$  комплексних нулів, якщо кожен нуль, порядку  $m$ , враховувати  $m$  раз). Цей факт варто весь час мати на увазі при вивченні математичного аналізу.

**18. Формула Тейлора для довільної функції.** Багаточленом Тейлора степеня  $n$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  називається багаточлен

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k.$$

Нехай  $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$ . Тоді  $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$  або

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + r_n(x). \quad (1)$$

Формула (1) називається формулою Тейлора в точці  $a \in \mathbb{R}$  функції  $f$ , а  $r_n(x)$  – додатковим членом формули Тейлора. Якщо  $a = 0$ , то формула Тейлора (1) приймає вигляд

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + r_n(x),$$

Останню формулу інколи називають формулою Маклорена.

Що являє собою  $r_n(x)$ ? Якщо  $f$  – це багаточлен степеня  $n$ , то  $r_n(x) = 0$  для кожного  $x \in \mathbb{R}$ . В загальному випадку,  $r_n(x)$  не обов'язково дорівнює нулеві.

**Теорема 1.** *Якщо для деякого  $h > 0$  на проміжку  $[a-h; a+h]$  функція  $f$  має похідні до порядку  $n+1$  включно, то  $r_n(x)$  можна подати у вигляді Лагранжа*

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, \quad (2)$$

де  $x \in [a-h; a+h]$  і  $0 < \theta < 1$ .

**Доведення.** Нехай  $x$  – довільне число з проміжку  $[a-h; a+h]$ ,  $\psi(t) = (x-t)^{n+1}$  і  $\varphi(t) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(t)}{k!} (x-t)^k$ . Застосуємо до проміжку  $[a; x]$  і функцій  $\varphi$  та  $\psi$  теорему Коші. Тоді

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\psi(x) - \psi(a)} = \frac{\varphi'(c)}{\psi'(c)}, \quad c = a + \theta(x-a), \quad 0 < \theta < 1.$$

Але  $\varphi(x) = 0$ ,  $\varphi(a) = r_n(x)$ ,  $\psi(x) = 0$ ,  $\psi(a) = (x-a)^{n+1}$ ,  $\psi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ ,

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -\sum_{k=0}^n \left( \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!} (x-t)^k - \frac{k}{k!} f^{(k)}(t) (x-t)^{k-1} \right) \\ &= -\left( f'(t) - f'(t) + \frac{f''(t)}{1!} (x-t) - \frac{f''(t)}{1!} (x-t) + \frac{f'''(t)}{2!} (x-t)^2 - \dots \right) \end{aligned}$$

$$-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} + \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n \Big) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Тому

$$\varphi'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad \psi'(c) = -(n+1)(x-c)^n.$$

Отже,

$$\frac{0 - r_n(x)}{0 - (x-a)^{n+1}} = \frac{-\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n}{-(n+1)(x-c)^n},$$

звідки

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \blacktriangleright$$

Формула (1), додатковий член якої записаний у формі (2), називається формулою Тейлора з додатковим членом у формі Лагранжа.

Якщо  $a = 0$ , то формула (2) приймає вигляд

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (3)$$

**Теорема 2.** Якщо виконуються умови теореми 1, то додатковий член формули Тейлора можна записати у вигляді Коші

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1}, \quad (4)$$

де  $x \in [a-h; a+h]$  і  $0 < \theta < 1$ .

**Доведення** теореми 2 аналогічне доведенню теореми 1, тільки тепер потрібно взяти  $\psi(t) = x-t$ .  $\blacktriangleright$

Формула (1), в якій  $r_n(x)$  записаний у формі (4), називається формулою Тейлора з додатковим членом у формі Коші.

**Теорема 3.** Якщо функція  $f$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  має похідні до порядку  $n$  включно, то додатковий член формули Тейлора можна записати також у формі Пеано:  $r_n(x) = \varepsilon(x)(x-a)^n$ , де  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow a$ .

**Доведення.** Оскільки  $f(a) = P_n(a)$ , ...,  $f^{(n)}(a) = P_n^{(n)}(a)$ , то  $r_n(a) = r_n'(a) = \dots = r_n^{(n)}(a) = 0$ . Тому за правилом Лопітала

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{r_n'(x)}{n(x-a)^{n-1}} = \dots = \frac{r_n^{(n)}(a)}{n!} = 0. \blacktriangleright$$

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f$  в точці  $a \in \mathbb{R}$  має похідні до порядку  $n+1$  включно, то додатковий член формули Тейлора можна записати також у формі:  $r_n(x) = \beta(x)(x-a)^{n+1}$ , де  $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – функція, обмежена в деякому проколеному околі точки  $a$ .

**Доведення.** Справді,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + r_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + r_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} + \varepsilon(x)(x-a)^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \left( \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \varepsilon(x) \right) (x-a)^{n+1}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = e^x$ , то  $f^{(k)}(x) = e^x$  і  $f^{(k)}(0) = 1$ . Тому

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + r_n(x).$$

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = \sin x$ , то  $f^{(m)}(x) = \sin(x + m\pi/2)$  і

$$f^{(m)}(0) = \sin(m\pi/2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 2k, \\ (-1)^k, & \text{якщо } m = 2k+1. \end{cases}$$

Тому

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + r_n(x).$$

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = \cos x$ , то  $f^{(m)}(x) = \cos(x + m\pi / 2)$  і

$$f^{(m)}(0) = \cos(m\pi / 2) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 2k + 1, \\ (-1)^k, & \text{якщо } m = 2k. \end{cases}$$

Тому

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + r_n(x).$$

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то

$$f^{(k)}(x) = (1+x)^{\alpha-n} \prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1) \quad \text{і} \quad f^{(k)}(0) = \prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1). \quad \text{Тому}$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k!} x^k + r_n(x).$$

$$\text{Тут } \prod_{j=1}^0 (\alpha - j + 1) := 1.$$

$$\text{Приклад 5. } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + r_n(x).$$

Часто виникає необхідність заміни функції в околі точки  $a \in \mathbb{R}$  багаточленом. Для цього можна скористатися формулою Тейлора. Тоді

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k. \quad (5)$$

Абсолютна похибка цієї наближеної формули дорівнює  $|r_n(x)|$ . Зокрема, можна записати

$$f(x) \approx f(a), \quad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a),$$

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2.$$

При цьому,  $f(a)$  називається нульовим наближенням,  $f(a) + f'(a)(x-a)$  – афінним або лінійним наближенням і  $f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$  – квадратичним наближенням функції  $f$  в околі точки  $a$ . Перший, другий і третій доданки формули (5) називаються відповідно нульовим, лінійним і квадратичним членами наближення. Якщо для всіх  $n \in \mathbb{N}$  виконується  $f^{(n)}(a) \neq 0$ , то для  $x$  близьких до  $a$  найбільшим доданком у формулі (5) є перший доданок. В свою чергу третій доданок є значно меншим за другий. Чим більше беремо доданків у формулі (5), тобто чим більше  $n$ , тим менше наближене значення функції, знайдене за формулою (5), відрізняється від точного.

**Приклад 6.** Нехай функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови: 1) є неперервною на проміжку  $[a; b]$ ; 2) має похідну на проміжку  $(a; b)$ ; 3) існують скінченні границі  $f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$  і  $f'_-(b) = \lim_{x \rightarrow b^-} f'(x)$ . Тоді функція  $f$  є диференційовною на  $[a; b]$ ,  $f'_+(a) = f'_+(a)$  і  $f'_-(b) = f'_-(b)$ .

Справді,  $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a + \theta(a - x))$ ,  $x \in (a; b)$ ,  $0 < \theta < 1$ . Тому  $f'_+(a) = f'_+(a)$ . Аналогічно,  $f'_-(b) = f'_-(b)$ .

Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається неперервно диференційовною в точці  $x_0$ , якщо вона має похідну в деякому околі цієї точки і функція  $f'$  є неперервною в точці  $x_0$ . Функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається нескінченно диференційовною в точці  $x_0$ , якщо вона має в ній всі похідні (отже, має всі похідні і в деякому околі точки  $x_0$ ). Множину всіх функцій  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , які мають на проміжку  $[a; b]$  неперервні похідні до порядку  $k$  включно, позначають  $C^{(k)}[a; b]$ . При цьому в точках  $a$  і  $b$  під похідними розуміють відповідні однобічні похідні, а під неперервністю – відповідну однобічну неперервність. Через  $C[a; b] = C^{(0)}[a; b]$  позначають множину всіх функцій  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервних на  $[a; b]$ . Функції, які мають на проміжку  $[a; b]$  неперервні похідні до порядку  $k$  включно, називають  $k$  раз неперервно диференційовними на  $[a; b]$ . Аналогічний зміст мають символи  $C^{(k)}(a; b)$  та  $C^{(k)}(G)$ , де  $G \subset \mathbb{R}$  – деяка множина. Функції  $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ , які належать до  $C^{(k)}(G)$  називаються гладкими степеня  $k$ .

**Зауваження 1.** Останній приклад показує, що кожну функцію  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ , диференційовну (неперервно диференційовну) на  $(a; b)$ , для якої існують скінченні границі  $f(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$ ,  $f'(a+) = \lim_{x \rightarrow a+} f'(x)$ ,  $f(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} f(x)$  і  $f'(b-) = \lim_{x \rightarrow b-} f'(x)$ , можна продовжити до функції  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , диференційовної (неперервно диференційовної) на  $[a; b]$ .

**Приклад 7.** Функція  $f(x) = e^x$  є нескінченно диференційовною на  $\mathbb{R}$ .

**19. Умови постійності функцій.** Функція  $f : H \rightarrow \mathbb{R}$  називається сталою на множині  $H$ , якщо  $(\exists c)(\forall x \in H) : f(x) = c$ .

**Теорема 1.** Для того щоб функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  була сталою на проміжку  $\Delta$  (відкритому, замкненому, напіввідкритому), необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною на ньому і  $f'(x) = 0$  у всіх внутрішніх точках проміжку  $\Delta$ .

**Доведення. Достатність.** Нехай  $a_0$  – довільна точка проміжку  $\Delta$  і  $x \in \Delta$ . Тоді за теоремою Лагранжа.

$$f(x) - f(a_0) = f'(c)(a_0 - x), \quad c \in (a_0; x).$$

Але  $f'(c) = 0$ . Тому  $(\forall x \in \Delta) : f(x) = f(a_0)$  і достатність доведена, а необхідність є очевидною. ►

**Приклад 1.**  $(\forall x \in (-1; +\infty)) : \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}$ . Справді, позначимо ліву частину цієї рівності через  $f(x)$ . Тоді

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2} \cdot \frac{-(1+x) - (1-x)}{(1+x)^2} = 0$$

для всіх  $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ . Але  $f(1) = \pi / 4$ . Тому  $(\forall x \in (-1; +\infty)) : f(x) = \pi / 4$ . Зауваживши, що  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\pi / 2 - \pi / 4 = -3\pi / 4$ , маємо  $(\forall x \in (-\infty; -1)) : f(x) = -3\pi / 4$ .

## 20. Умови монотонності функцій.

**Теорема 1.** Якщо функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $\Delta$  і  $f'(x) > 0$  у всіх внутрішніх точках  $x$  проміжку  $\Delta$ , то функція  $f$  є

зростаючою на  $\Delta$ . Якщо функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $\Delta$  і  $f'(x) < 0$  у всіх внутрішніх точках  $x$  проміжку  $\Delta$ , то функція  $f$  є спадною на  $\Delta$ .

**Доведення** (для зростаючих). За теоремою Лагранжа  $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$ ,  $x_1 < c < x_2$ . Тому якщо  $x_1 < x_2$ ,  $x_1 \in \Delta$  і  $x_2 \in \Delta$ , то  $f(x_2) - f(x_1) > 0$ , тобто функція  $f$  є зростаючою на  $\Delta$ . ►

**Теорема 2.** Якщо функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $\Delta$  і  $f'(x) > 0$  у всіх внутрішніх точках  $x$  проміжку  $\Delta$ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то функція  $f$  є зростаючою на  $\Delta$ . Якщо функція  $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $\Delta$  і  $f'(x) < 0$  у всіх внутрішніх точках  $x$  проміжку  $\Delta$ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то функція  $f$  є спадною на  $\Delta$ .

**Доведення.** Для отримання цієї теореми досить попередню теорему застосувати до кожного проміжку, на які поділили  $\Delta$  вказані виняткові точки і скористатись означенням монотонної функції. ►

В більшості випадків досліджувати функцію на монотонність можна в наступній послідовності: 1) знайти область визначення функції; 2) знайти ті точки з області визначення, в яких похідна дорівнює нулеві або не існує, та точки, які є кінцями проміжків, що входять в область визначення функції; 3) користуючись методом проміжків знайти знак похідної на кожному з проміжків, утворених вказаними точками; 4) скористатись теоремами 1 та 2 і означенням, якщо потрібно, монотонної функції. В деяких випадках дослідження доцільніше проводити тільки на основі означення.

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = (1 - x^2)^3$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = -6x(1 - x^2)^2$ . Тоді  $6x(1 - x^2)^2 = 0$ , якщо  $f'(x) = 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = -\infty$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$  і  $x_5 = +\infty$ . Таким чином, розглядаємо проміжки  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$  і  $(1; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-2) = 108 > 0$ ,  $f'(-1/2) = 27/16 > 0$ ,  $f'(1/2) = -27/16 < 0$  і  $f'(2) = -108 < 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (-\infty; -1)$  і  $x \in (-1; 0)$  та  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (0; 1)$  і  $x \in (1; +\infty)$ . Але в точках  $x_2 = -1$  і  $x_4 = 1$  наша функція є неперервною. Отже, розглядувана функція є зростаючою на проміжку  $(-\infty; 0)$  і є спадною на проміжку  $(0; +\infty)$ .

Вона також є зростаючою на проміжку  $(-\infty; 0]$  і є спадною на проміжку  $[0; +\infty)$ .

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = x^2 - 2\ln x$ , то  $D(f) = (0; +\infty)$  і  $f'(x) = 2x - 2/x$ .

Тоді  $\frac{x^2 - 1}{x} = 0$ , якщо  $f'(x) = 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$  і  $x_3 = +\infty$  (область визначення розглядуваної функції  $f$  є проміжок  $(0; +\infty)$  і тому точки  $-\infty$  та  $-1$  не розглядаємо). Таким чином, розглядаємо два проміжки  $(0; 1)$  і  $(1; +\infty)$ . Оскільки  $f'(1/2) = -3 < 0$  і  $f'(2) = 3 > 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (0; 1)$  і  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (1; +\infty)$ . Отже, розглядувана функція є спадною на проміжку  $(0; 1)$  і зростаючою на проміжку  $(1; +\infty)$ . Вона також є спадною на проміжку  $(0; 1]$  і є зростаючою на проміжку  $[1; +\infty)$ .

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = x\sqrt{1-x^2}$ , то  $D(f) = [-1; 1]$  і  $f'(x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ .

Тоді  $\frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$ , якщо  $f'(x) = 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = -1/\sqrt{2}$ ,  $x_3 = 1/\sqrt{2}$  і  $x_4 = 1$ . Таким чином, розглядаємо проміжки  $(-1; -1/\sqrt{2})$ ,  $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$  і  $(1/\sqrt{2}; 1)$ . Оскільки  $f'(-3/4) < 0$ ,  $f'(0) > 0$  і  $f'(3/4) < 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (-1; -1/\sqrt{2})$  і  $x \in (1/\sqrt{2}; 1)$ , а  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ . Отже, розглядувана функція є спадною на проміжках  $(-1; -1/\sqrt{2})$  та  $(1/\sqrt{2}; 1)$  (не можна повторювати типову помилку, говорячи, що вона є спадною на множині  $(-1; -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}; 1)$ , бо  $f(-3/4) < f(3/4)$ !) і є зростаючою на проміжку  $(-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$ . Вона також є спадною на проміжках  $[-1; -1/\sqrt{2}]$  та  $[1/\sqrt{2}; 1]$  і є зростаючою на проміжку  $[-1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2}]$ .

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = x^{2/3}$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ . Тоді

$f'(x) \neq 0$  і  $f'(x)$  не існує в точці 0. Отримуємо точки  $x_1 = -\infty$ ,  $x_2 = 0$  і  $x_3 = +\infty$ . Таким чином, розглядаємо проміжки  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-1) < 0$  і  $f'(1) > 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (-\infty; 0)$  і  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (0; +\infty)$ . Отже, розглядувана функція є спадною на проміжку  $(-\infty; 0)$  і є зростаючою на проміжку  $(0; +\infty)$ . Вона також є спадною на проміжках  $(-\infty; 0]$  і є зростаючою на проміжку  $[0; +\infty)$ .

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = x + 1/x$ , то  $D(f) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$  і  $f'(x) = 1 - 1/x^2$ . Тоді  $f'(x) = 0$ , якщо  $1 - 1/x^2 = 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = -\infty$ ,  $x_2 = -1$ ,  $x_3 = 0$ ,  $x_4 = 1$  і  $x_5 = +\infty$ . Таким чином, розглядаємо проміжки  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 0)$ ,  $(0; 1)$  і  $(1; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-2) > 0$ ,  $f'(-1/2) < 0$ ,  $f'(1/2) < 0$  і  $f'(2) > 0$ , то на основі методу проміжків розв'язування нерівностей робимо висновок, що  $f'(x) < 0$ , якщо  $x \in (-1; 0)$  та  $x \in (0; 1)$  і  $f'(x) > 0$ , якщо  $x \in (-\infty; -1)$  та  $x \in (1; +\infty)$ . Отже, розглядувана функція є зростаючою на проміжках  $(-\infty; -1)$  та  $(1; +\infty)$  і є спадною на проміжках  $(-1; 0)$  та  $(0; 1)$ . Вона також є зростаючою на проміжках  $(-\infty; -1]$  та  $[1; +\infty)$  і є спадною на проміжках  $[-1; 0)$  та  $(0; 1]$ . Проте не є спадною на проміжках  $[-1; 0]$  та  $[0; 1]$ , бо  $0 \notin D(f)$ . В даному випадку можна говорити, що функція є зростаючою на множині  $(-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$  і є спадною на множині  $[-1; 0) \cup (0; 1]$ , бо  $f(x) < 0$ , якщо  $x < 0$  і  $f(x) > 0$ , якщо  $x > 0$ .

**Приклад 6.** Якщо  $f(x) = e^x$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $f'(x)$  існує всюди і  $f'(x) \neq 0$ . Отримуємо точки  $x_1 = -\infty$  та  $x_2 = +\infty$  і розглядаємо проміжок  $(-\infty; +\infty)$ . Оскільки  $f(0) > 0$ , то функція на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  є зростаючою.

**Приклад 7.** Функція  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  не є монотонною на жодному

проміжку  $(a; b) \subset \mathbb{R}$ , що впливає безпосередньо з означення монотонної функції, оскільки між двома різними раціональними числами лежить принаймні одне ірраціональне і навпаки.

**Приклад 8.** Знайдемо проміжки монотонності функції  $f$ , заданої параметрично системою

$$\begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \quad t \in [0; 4\pi]. \end{cases}$$

Множиною визначення цієї функції є проміжок  $D(f) = [0; 4\pi]$ . Далі,

$$f'(x) = \frac{\sin t}{1 - \cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2}.$$

Бачимо, що  $f'(x) = 0$ , якщо  $t = \pi$ , тобто якщо  $x = 2\pi$ . Якщо  $t \in [0; \pi]$ , то  $x \in [0; 2\pi]$  і навпаки. Якщо  $t \in [\pi; 2\pi]$ , то  $x \in [2\pi; 4\pi]$  і навпаки. В точці  $x = x(\pi/2) = 2(\pi/2 - 1) \in (0; 2\pi)$  маємо  $f'(x) = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4} > 0$ . Отже, на проміжку  $[0; 2\pi]$  функція  $f$  зростає. В точці  $x = x(3\pi/2) = 2(3\pi/2 + 1) \in (2\pi; 4\pi)$  маємо  $f'(x) = \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} < 0$ . Отже, на проміжку  $[2\pi; 4\pi]$  функція  $f$  спадає.

**Приклад 9.**  $(\forall x > 0): e^x > 1 + x$ . Справді, нехай  $f(x) = e^x - 1 - x$ . Тоді  $f'(x) = e^x - 1 > 0$ ,  $x \in (0; +\infty)$ . Отже,  $f$  є зростаючою на проміжку  $[0; +\infty)$ . Тому  $f(x) > f(0) = 0$ , якщо  $x \in (0; +\infty)$ , тобто  $e^x - 1 - x > 0$ , якщо  $x \in (0; +\infty)$ .

**21. Екстремум. Необхідна умова екстремуму.** Точка  $x_0$  називається точкою максимуму функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)): f(x) \leq f(x_0).$$

Точка  $x_0$  називається точкою мінімуму функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , якщо

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)): f(x) \geq f(x_0).$$

Точки мінімуму і максимуму мають спільну назву – точки екстремуму. Значення функції в точці максимуму називається максимумом функції, а значення функції в точці мінімуму називається мінімумом функції. Мінімуми і максимуми мають спільну назву – екстремуми функції. Можна сказати, що екстремум функції – це значення функції в точці екстремуму. Наприклад, для функції  $f$ ,

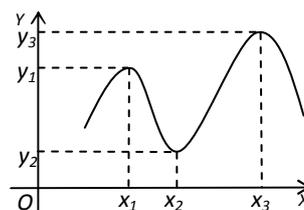


Рис. 1.

графік якої зображений на рис. 1, точки  $x_1$  і  $x_3$  є точками максимуму, точка

$x_2$  є точкою мінімуму, точки  $x_1, x_2, x_3$  є точками екстремуму, числа  $y_1$  і  $y_3$  є максимумами, число  $y_2$  є мінімумом, а числа  $y_1, y_2$  і  $y_3$  є екстремумами. Деколи говорячи про екстремум, мінімум чи максимум функції додають слово локальний, тобто говорять локальний максимум, локальний мінімум і т.д. Слово локальний означає місцевий і підкреслює той факт, що, наприклад, локальний максимум не є обов'язково найбільшим значенням функції, а тільки є найбільшим в досить малому  $\varepsilon$ -околі відповідної точки.

**Теорема 1 (необхідна умова екстремуму).** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в точці  $x_0$  екстремум, то  $f'(x_0)$  не існує або  $f'(x_0) = 0$ .

**Доведення.** Якщо  $f'(x_0)$  не існує, то теорема доведена. Якщо  $f'(x_0)$  існує, то за теоремою Ферма  $f'(x_0) = 0$ . ►

Точки, в яких похідна функції дорівнює нулеві називаються стаціонарними точками функції. Точки з області визначення функції, в яких похідна дорівнює нулеві або не існує називаються критичними точками або точками підозрілими на екстремум. Теорема 1 показує, що екстремум функція може мати лише в критичних точках. Проте не в кожній критичній точці функція має екстремум. Щоб дослідити функцію на екстремум спочатку потрібно знайти критичні точки, а потім перевірити, чи є в кожній критичній точці екстремум. Цю перевірку можна здійснювати використовуючи достатні умови екстремуму або виходячи з означення мінімуму і максимуму шляхом розгляду різниці  $f(x) - f(x_0)$ , де  $x_0$  – критична точка.

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x$ , то  $D(f) = (0; +\infty)$  і  $f'(x) = x - \frac{1}{x}$ .

Тоді  $\frac{x^2 - 1}{x} = 0$ , якщо  $f'(x) = 0$ . Точка  $x_1 = 1$  є стаціонарною точкою і є критичною точкою. Інших критичних точок ця функція не має, бо  $-1 \notin D(f)$  і  $0 \notin D(f)$ .

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = x^{2/3}$ ,  $f'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ . Тоді  $f'(x) \neq 0$  і  $f'(x)$  не існує в точці 0. Ця функція не має стаціонарних точок. Точка  $x_1 = 0$  є її єдиною критичною точкою.

**Приклад 3.** Точка  $x_0 = 0$  є стаціонарною точкою функції  $f(x) = x^3$ , але екстремуму в цій точці ця функція не має.

**Приклад 4.** Критичними точками функції  $f(x) = \begin{cases} 1, & x = 2, \\ 4, & x = 3, \\ 3, & x \notin \{2; 3\}, \end{cases}$  є всі

точки  $x \in \mathbb{R}$ . Безпосередньо з означення видно, що в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$  функція має екстремум.

**Зауваження 1.** Інколи означення точок максимуму і мінімуму дають інакше. Власне, точка  $x_0$  називається точкою максимуму або строгого максимуму функції  $f$ , якщо існує таке  $\delta > 0$ , що для всіх  $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ , виконується  $f(x) < f(x_0)$ . Те, що ми назвали точкою максимуму називають також точкою нестрогого максимуму. Аналогічне можна сказати стосовно точок мінімуму та точок екстремуму. Кожний строгий екстремум є і нестрогим екстремумом, але не навпаки. Наприклад, кожна точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  є точкою нестрогого максимуму сталої функції  $f = 1$ , але жодна точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  не є точкою строгого екстремуму цієї функції.

Функція  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  має нестрогий максимум в кожній точці

$x_0 \in \mathbb{Q}$ , нестрогий мінімум в кожній точці  $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  і строгих екстремумів не має.

## 22. Достатні умови екстремуму.

**Теорема 1 (перша достатня умова екстремуму).** Нехай функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною в точці  $x_0$  і за деякого  $\delta > 0$  має похідну на проміжку  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ , за винятком, можливо, точки  $x_0$ . Тоді: 1) якщо  $(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)): f'(x) > 0$  і  $(\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)): f'(x) < 0$ , то точка  $x_0$  є точкою максимуму; 2) якщо  $(\forall x \in (x_0 - \delta; x_0)): f'(x) < 0$  і  $(\forall x \in (x_0; x_0 + \delta)): f'(x) > 0$ , то точка  $x_0$  є точкою мінімуму; 3) якщо на проміжках  $(x_0 - \delta; x_0)$  і  $(x_0; x_0 + \delta)$  функція  $f'$  приймає значення однакового знаку (+ або -), то  $x_0$  не є точкою екстремуму функції  $f$ .

**Доведення.** З теорем попереднього пункту випливає, що в першому випадку на проміжку  $(x_0 - \delta; x_0)$  функція  $f$  є зростаючою, а на проміжку  $(x_0; x_0 + \delta)$  – спадною. Тому точка  $x_0$  є точкою максимуму. Твердження 2)

доводиться аналогічно. Доведемо 3). Якщо, наприклад,  $f'$  приймає додатні значення на проміжках  $(x_0; x_0 + \delta)$  і  $(x_0 - \delta; x_0)$ , то вона є зростаючою на проміжках  $(x_0 - \delta; x_0)$  і  $(x_0; x_0 + \delta)$ , і тому є зростаючою на проміжку  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ . Отже, в точці  $x_0$  вона екстремуму немає (випадок  $f'(x) < 0$  розглядається подібно). ►

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = x^3 - 12x$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = 3x^2 - 12$ . Точки  $x_1 = -2$  і  $x_2 = 2$  є стаціонарними точками. Тому розглядаємо проміжки  $(-\infty; -2)$ ,  $(-2; 2)$  і  $(2; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-3) > 0$ ,  $f'(0) < 0$  і  $f'(3) > 0$ , то точка  $x_1 = -2$  є точкою максимуму і  $f(-2) = 16$  – максимум, а точка  $x_2 = 2$  є точкою мінімуму і  $f(2) = -16$  – мінімум.

**Приклад 2.** Якщо  $f(x) = x^{1/3}$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = \frac{1}{3x^{2/3}}$ .

Стаціонарних точок ця функція не має. Точка  $x_1 = 0$  є її єдиною критичною точкою. Тому розглядаємо проміжки  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-1) > 0$  і  $f'(1) > 0$ , то точка  $x_1 = 0$  не є точкою екстремуму і екстремумів функція не має.

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = x^3 + x$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $f'(x)$  існує всюди і  $f'(x) \neq 0$ . Тому екстремумів функція не має.

**Приклад 4.** Якщо  $f(x) = (x - 2)^2(x + 1)^3$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = (5x - 4)(x - 2)(x + 1)^2$ . Точки  $x_1 = -1$ ,  $x_2 = 4/5$  і  $x_3 = 2$  є стаціонарними точками. Тому розглядаємо проміжки  $(-\infty; -1)$ ,  $(-1; 4/5)$ ,  $(4/5; 2)$  і  $(2; +\infty)$ . Оскільки  $f'(-2) > 0$ ,  $f'(0) > 0$ ,  $f'(1) < 0$  і  $f'(3) > 0$ , то в точці  $x_1 = -1$  функція екстремуму не має, точка  $x_2 = 4/5$  є точкою максимуму і  $f(4/5) = \frac{26244}{3125}$  – максимум, точка  $x_3 = 2$  є точкою мінімуму і  $f(2) = 0$  – мінімум.

**Зауваження 1.** Зміна знаку похідної є достатньою умовою екстремуму, але не необхідною, на що вказує приклад попереднього пункту. Ще один приклад подібного сорту дає функція

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \left( 4 + \cos \frac{1}{x^2} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

яка має мінімум  $y_{\min} = f(0) = 0$  в точці  $x = 0$ . В той же час, можна переконатись, що для кожного  $\delta > 0$  на кожному з проміжків  $(x_0 - \delta; x_0)$  і  $(x_0; x_0 + \delta)$  функція  $f'$  приймає як від'ємні так і додатні значення.

**Теорема 2 (друга достатня умова екстремуму).** Нехай точка  $x_0 \in$  стаціонарною точкою функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $f''(x_0)$  існує. Тоді: 1) якщо  $f''(x_0) < 0$ , то точка  $x_0$  є точкою максимуму функції  $f$ ; 2) якщо  $f''(x_0) > 0$ , то точка  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f$ .

**Доведення.** За означенням

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0}.$$

Але  $x_0$  – стаціонарна точка функції  $f$ . Отже,  $f'(x_0) = 0$ . Тому

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0}.$$

За означенням границі

$$(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta) : \left| \frac{f'(x)}{x - x_0} - f''(x_0) \right| < \frac{1}{2} |f''(x_0)|,$$

звідки в другому випадку отримуємо, що

$$\frac{f'(x)}{x - x_0} > \frac{1}{2} f''(x_0) > 0, \quad 0 < |x - x_0| < \delta.$$

Тому  $\frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$ , якщо  $0 < |x - x_0| < \delta$ . Отже,  $f'(x) < 0$ , якщо  $x_0 - \delta < x < x_0$ , і  $f'(x) > 0$ , якщо  $x_0 < x < x_0 + \delta$ . Тому за першою достатньою умовою екстремуму  $x_0$  – точка мінімуму. Випадок 1) розглядається подібно. ►

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = x^3 - 3x$ , то  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $f'(x) = 3x^2 - 3$ , точки  $x_1 = -1$  і  $x_2 = 1$  є стаціонарними,  $f''(x) = 6x$ ,  $f''(-1) = -6$  і  $f''(1) = 6$ . Тому точка  $x_1 = -1$  є точкою максимуму і  $f(-1) = 2$  – максимум, а точка  $x_2 = 1$  є точкою мінімуму і  $f(1) = -2$  – мінімум функції.

**Зауваження 2.** Якщо  $f''(x_0) = 0$ , то  $x_0$  може бути точкою екстремуму, а може і не бути, на що вказують функції  $f(x) = x^3$  і  $f(x) = x^4$ , перша з яких не має екстремуму в стаціонарній точці  $x_0 = 0$  і для неї  $f''(x_0) = 0$ , а друга функція має екстремум в стаціонарній точці  $x_0 = 0$  і для неї  $f''(x_0) = 0$ .

**Теорема 3 (третя достатня умова екстремуму).** Нехай в точці  $x_0$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має всі похідні до порядку  $n \in \mathbb{N}$  включно і

$$f^{(m)}(x_0) = 0, \quad m \in \overline{0; n-1}, \quad (1)$$

$$f^{(n)}(x_0) \neq 0. \quad (2)$$

Тоді: 1) якщо  $n$  – парне число, то у випадку  $f^{(n)}(x_0) < 0$  точка  $x_0$  є точкою максимуму функції  $f$ , а у випадку  $f^{(n)}(x_0) > 0$  точка  $x_0$  є точкою мінімуму функції  $f$ ; 2) якщо  $n$  – непарне число, то  $x_0$  не є точкою екстремуму функції  $f$ .

**Доведення.** Розглянемо різницю  $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ . За формулою Тейлора з додатковим членом у формі Пеано

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \varepsilon(x)(x - x_0)^n.$$

Оскільки  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow x_0$ , то для досить малих  $\delta > 0$  знак різниці  $f(x) - f(x_0)$  на проміжках  $(x_0 - \delta; x_0)$  і  $(x_0; x_0 + \delta)$  співпадає зі знаком числа  $\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ . Знаходячи знак останнього числа у відповідних ситуаціях

приходимо до твердження теореми. ►

**Приклад 6.** Якщо  $f(x) = \operatorname{ch} x + \cos x + 2$ , то  $f'(x) = \operatorname{sh} x - \sin x$ ,  $f''(x) = \operatorname{ch} x - \cos x$ ,  $f^{(3)}(x) = \operatorname{sh} x + \sin x$ ,  $f^{(4)}(x) = \operatorname{ch} x + \cos x$ ,  $f'(0) = 0$ ,  $f''(0) = 0$ ,  $f^{(3)}(0) = 0$  і  $f^{(4)}(0) = 2$ . Тому функція  $f(x) = \operatorname{sh} x - \sin x + 2$  має в точці  $x_0 = 0$  мінімум і  $f(0) = 2$ .

**Приклад 7.** Функція  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  має в точці  $x_0 = 0$  мінімум,

що випливає безпосередньо з означення мінімуму, і  $f^{(m)}(x_0) = 0$  для кожного  $m \in \mathbb{N}$ .

**Зауваження 3.** Якщо точка  $x_0 \in D(f)$  не є точкою екстремуму функції  $f$ , то не обов'язково існує проміжок  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ , на якому  $f$  є строго монотонною. В цьому можна переконатись на прикладі функції

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

**Зауваження 4.** Теорема 1-3 і теорема 1 попереднього пункту справедливі і для строгого екстремуму. При цьому частину 3) теореми 1 для строгого екстремуму можна посилити, надавши їй наступну форму: 3') якщо на проміжках  $(x_0 - \delta; x_0)$  і  $(x_0; x_0 + \delta)$  функція  $f'$  приймає значення однакового знаку (+, або -, або 0), тобто звуження функції  $\text{sgn} \circ f'$  на множину  $(x_0 - \delta; x_0) \cup (x_0; x_0 + \delta)$  є сталою функцією, то  $x_0$  не є точкою екстремуму функції  $f$ .

**23. Найбільше і найменше значення функції на замкненому проміжку. Глобальний максимум і глобальний мінімум.** За другою теоремою Вейєрштрасса неперервна на замкненому проміжку  $[a; b]$  функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  приймає на цьому проміжку найбільше і найменше значення. Проте, ця теорема не вказує способу їх знаходження. Найбільше або найменше значення на  $[a; b]$  функція  $f$  може приймати або в середині проміжку або на кінцях проміжку. Якщо найбільше або найменше значення на  $[a; b]$  функція  $f$  приймає у внутрішній точці проміжку, то ця точка є точкою локального екстремуму. Звідси випливає, що найбільше і найменше значення на проміжку  $[a; b]$  функції  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , неперервної на  $[a; b]$  можна знаходити так: 1) знайти всі критичні точки функції  $f$ , які належать  $(a; b)$ ; 2) знайти значення функції в цих критичних точках та на кінцях проміжку і серед цих значень вибрати найбільше і найменше. Найбільше значення функції  $f$  на  $[a; b]$  називається глобальним максимумом  $f$  на  $[a; b]$  і позначається  $M = \max\{f(x) : x \in [a; b]\}$  або  $M = \max_{x \in [a; b]} \{f(x)\}$ , а найменше

значення – глобальним мінімумом на  $[a;b]$  і позначається  $m = \min\{f(x) : x \in [a;b]\}$  або  $m = \min_{x \in [a;b]} \{f(x)\}$ .

Неперервна на відкритому проміжку  $(a;b)$  функція  $f : (a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  не обов'язково приймає на  $(a;b)$  найбільше і найменше значення. Проте, якщо приймає, то відповідна точка є точкою локального екстремуму.

**Приклад 1.** Знайдемо найбільше значення функції  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x$  на проміжку  $[0;3]$ . Оскільки  $f'(x) = x^2 + 3x - 4$ , точки  $x_1 = -4$  і  $x_2 = 1$  є стаціонарними точками функції,  $x_1 \notin [0;3]$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f(1) = -13/6$ ,  $f(3) = 21/2$  і

$$M = \max\{f(x) : x \in [0;3]\} = f(3) = 21/2.$$

**Приклад 2.** Знайдемо множину значень функції  $f(x) = xe^{-x}$ . Оскільки  $D(f) = (-\infty; +\infty)$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty$ ,  $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ , точка  $x_1 = 1$  є єдиною точкою максимуму функції,  $f(1) = 1/e$ , множиною значень функції на проміжках  $(-\infty; 1)$  і  $(1; +\infty)$  є відповідно проміжки  $(-\infty; 1/e)$  і  $(0; 1/e)$ , то  $E(f) = (-\infty; 1/e)$ .

**24. Опуклість і точки перегину.** Функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається опуклою на проміжку  $[a;b]$ , якщо

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad (1)$$

для будь-яких  $x_1 \in [a;b]$ ,  $x_2 \in [a;b]$  і  $\alpha \in [0;1]$ .

**Теорема 1.** Для того щоб функція  $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на проміжку  $[a;b]$ , необхідно і достатньо, щоб

$$f(x) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

для будь-яких  $x_1, x$  і  $x_2$ ,  $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ .

**Доведення.** Справді, нехай функція є опуклою. Тоді виконується (1).

Нехай  $\alpha = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}$ . Тоді  $\alpha \in [0;1]$ ,

$$1 - \alpha = 1 - \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$

$$\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}x_1 + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}x_2 = \frac{x(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = x.$$

Тому виконується (2). Навпаки, нехай виконується (2),  $x_1 < x_2$  і  $x = x_2 + \alpha(x_2 - x_1)$ . Тоді  $x_1 < x < x_2$ ,  $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = \alpha$  і  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = 1 - \alpha$ . Тому з (2) випливає (1). ►

Теорема 1 дає можливість геометрично інтерпретувати опуклі функції. Власне, через точки  $A_1(x_1; f(x_1))$  і  $A_2(x_2; f(x_2))$ , де  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , проведемо пряму. Ця пряма задається рівнянням

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)},$$

тобто

$$y = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

Бачимо, що функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $[a; b]$  тоді і тільки тоді, коли для будь-яких  $x_1$  і  $x_2$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , її графік на проміжку  $[x_1; x_2]$  лежить не вище прямої  $A_1A_2$ .

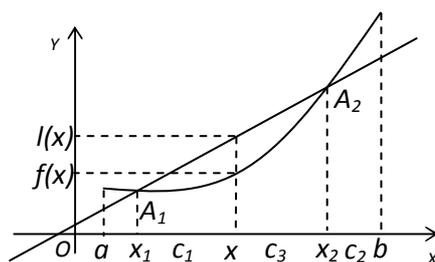


Рис. 1.

Функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  називається опуклою на відкритому проміжку  $(a; b)$ , якщо вона є опуклою на кожному замкненому проміжку  $[a_1; b_1] \subset (a; b)$ .

**Теорема 2 (достатня умова опуклості).** Якщо  $(\forall x \in (a; b)) : f''(x) \geq 0$ , то функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a; b)$ .

**Доведення.** Праву частину рівності (2) позначимо через  $l(x)$ . Застосовуючи теорему Лагранжа спочатку до функції  $f$ , а потім до функції  $f'$  для деяких  $c_1, c_2$  і  $c_3$ ,  $a < c_1 < c_3 < c_2 < b$ , одержуємо

$$\begin{aligned}
 l(x) - f(x) &= \frac{f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1) - f(x)(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{f(x_1)(x_2 - x) + f(x_2)(x - x_1) - f(x)((x_2 - x) + (x - x_1))}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{(f(x_1) - f(x))(x_2 - x) - (f(x_2) - f(x))(x - x_1)}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{f'(c_2)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(c_1)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{(f'(c_2) - f'(c_1))(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \\
 &= \frac{f''(c_3)(c_2 - c_1)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \geq 0. \tag{3}
 \end{aligned}$$

Тому (2) виконується для будь-яких  $x_1$  і  $x_2$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , і, отже, тому функція  $f$  є опуклою на  $(a; b)$ . ►

**Наслідок 1.** Якщо функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[a; b]$  і  $(\forall x \in (a; b)) : f''(x) \geq 0$ , то функція  $f$  є опуклою на  $[a; b]$ .

Функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається вгнутою на проміжку  $[a; b]$ , якщо

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2) \tag{4}$$

для будь-яких  $x_1 \in [a; b]$ ,  $x_2 \in [a; b]$  і  $\alpha \in [0; 1]$ . Функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  називається вгнутою на  $(a; b)$ , якщо вона є вгнутою на кожному проміжку  $[a_1; b_1] \subset (a; b)$ .

**Теорема 3 (достатня умова вгнутості).** Якщо  $(\forall x \in (a; b)) : f''(x) \leq 0$ , то функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є вгнутою на проміжку  $(a; b)$ .

**Доведення** цієї теореми подібне до доведення теореми 2. ►

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = e^x$  є опуклою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , бо  $f''(x) = e^x$  і  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = \ln x$  є вгнутою на проміжку  $(0; +\infty)$ , бо  $f''(x) = -1/x^2$  і  $f''(x) < 0$  для всіх  $x \in (0; +\infty)$ .

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = x$  є вгнутою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і опуклою на цьому проміжку, бо  $f''(x) = 0$  для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

**Приклад 4.** Функція  $f(x) = x^3$  є опуклою на проміжку  $[0; +\infty)$  і вгнутою на проміжку  $(-\infty; 0]$ , бо  $f''(x) = 6x$  і  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in (0; +\infty)$  і  $f''(x) < 0$  для всіх  $x \in (-\infty; 0)$ .

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [0; +\infty), \\ 1, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  є неперервною і опуклою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , а похідної в точці  $x_0 = 0$  не має.

**Приклад 6.** Функція  $f(x) = x^{2/3}$  є неперервною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , вгнутою на кожному з проміжків  $(-\infty; 0]$  і  $[0; +\infty)$ , не є вгнутою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і не має похідної в точці  $x_0 = 0$ .

Точка  $x_0 \in (a; b)$  називається точкою перегину функції  $f$ , якщо вона є неперервною в цій точці і для деякого  $\delta > 0$  на проміжку  $[x_0 - \delta; x_0]$  є вгнутою, а на проміжку  $[x_0; x_0 + \delta]$  є опуклою або навпаки. Якщо точка  $x_0$  є точкою перегину функції  $f$ , то точка  $(x_0; f(x_0))$  називається точкою перегину графіка функції  $f$ .

**Теорема 4.** Якщо функція  $f$  має на проміжку  $(a; b)$  другу похідну, функція  $f''$  є неперервною в точці  $x_0$  і точка  $x_0$  є точкою перегину функції  $f$ , то  $f''(x_0) = 0$ .

**Доведення.** Нехай, наприклад, на проміжку  $[x_0 - \delta; x_0]$  функція  $f$  є вгнутою, а на проміжку  $[x_0; x_0 + \delta]$  – опукла. Тоді за теоремою 2  $f''(x_0) > 0$  для  $x \in (x_0; x_0 + \delta)$ . Тому

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f''(x) \geq 0.$$

З іншого боку, подібно за теоремою 3

$$f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f''(x) \leq 0.$$

Отже,  $f''(x_0) = 0$ . ►

**Теорема 5.** Якщо точка  $x_0$  є точкою перегину функції  $f$ , то  $f''(x_0) = 0$  або  $f''(x_0)$  не існує.

Цю теорему можна отримати довівши теорему про те, що для опуклих функцій в кожній точці існує права похідна, яка є неспадною функцією.

Таким чином, за виконання відповідних умов точки перегину і проміжки опуклості та вгнутості функції можна знаходити наступним чином: 1) знайти точки  $x_k$ , в яких друга похідна функції дорівнює нулеві, або не існує, або є кінцями проміжків визначення; 2) розглянути проміжки  $(x_k; x_{k+1})$ , які належать області визначення функції і знайти знак другої похідної на кожному з них; 3) користуючись означеннями та наведеними вище теоремами знайти проміжки опуклості, проміжки вгнутості та точки перегину.

**Приклад 7.** Якщо  $f(x) = x^3$ , то  $f'(x) = 3x^2$  і  $f''(x) = 6x$ , якщо  $x \neq 0$ . Тому маємо точки  $x_1 = -\infty$ ,  $x_2 = 0$  і  $x_3 = +\infty$  та проміжки  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ . При цьому,  $f''(-1) = -6 < 0$  і  $f''(1) = 6 > 0$ . Отже, розглядувана функція є вгнутою на проміжку  $(-\infty; 0)$ , опуклою на проміжку  $(0; +\infty)$  і точка  $x_2 = 0$  є точкою її перегину.

**Приклад 8.** Якщо  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , то  $f'(x) = 1/\cos^2 x$ ,  $f''(x) = 2 \sin x / \cos^3 x$ ,  $f''(x) = 0$  в точках  $x_k = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  і  $f''(x)$  не існує в точках  $x_k = \pi k + \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тому отримуємо проміжки,  $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  та  $(\pi k; \pi k + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . На кожному з проміжків  $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$  друга похідна є від'ємною, а на кожному з проміжків  $(\pi k; \pi k + \pi/2)$  друга похідна є додатною. Тому проміжки  $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1))$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є проміжками вгнутості, проміжки  $(\pi k; \pi k + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є проміжками опуклості, а точки  $x_k = \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є точками перегину.

**Приклад 9.** Якщо  $f(x) = e^{x^2}$ , то  $f'(x) = 2xe^{x^2}$  і  $f''(x) = 2e^{x^2}(2x^2 + 1)$  і  $f''(x) \neq 0$ . Тому маємо дві точки  $x_1 = -\infty$  і  $x_2 = +\infty$  та проміжок  $(-\infty; +\infty)$ . Оскільки  $f''(0) = 2 > 0$ , то на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  функція є опуклою, а точок перегину нема.

Функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  називається строго опуклою на проміжку  $[a; b]$ , якщо

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2)$$

для будь-яких  $x_1 \in [a; b]$ ,  $x_2 \in [a; b]$  і  $\alpha \in [0; 1]$ . Функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  називається строго опуклою на  $(a; b)$ , якщо вона є строго опуклою на кожному проміжку  $[a_1; b_1] \subset (a; b)$ .

**Наслідок 2.** Якщо  $(\forall x \in (a; b)) : f''(x) > 0$ , то функція  $f$  є строго опуклою на  $(a; b)$ .

**Зауваження 1.** Опуклі і вгнуті функції мають різноманітні застосування. Зокрема, вони використовуються для доведення багатьох нерівностей.

**Приклад 10.** Якщо функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a; b)$ , то  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  для будь-яких точок  $x_1 \in (a; b)$  і  $x_2 \in (a; b)$ . Для отримання цього досить в означенні опуклості взяти  $\alpha = 1/2$ .

**Приклад 11.** Якщо функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a; b)$ , то  $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$  для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$  і будь-яких точок  $x_1 \in (a; b)$ , ...,  $x_n \in (a; b)$ . Справді, для  $n = 1$  і  $n = 2$  твердження є справедливим. Припустимо, що воно є справедливим для  $n = k$ . Тоді

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}}{k+1}\right) &= f\left(\frac{k}{k+1} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} + \frac{1}{k+1} x_{k+1}\right) \\ &\leq \frac{k}{k+1} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right) + \frac{1}{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\leq \frac{k}{k+1} \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} + \frac{1}{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{k+1})}{k+1}. \end{aligned}$$

і на основі принципу математичної індукції приходимо до потрібного висновку.

**Приклад 12.** Функція  $f(x) = e^x$  є опуклою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Тому  $e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$  для будь-яких  $x \in \mathbb{R}$  і  $y \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 13.** Функція  $f(x) = \ln x$  є вгнутою на проміжку  $(0; +\infty)$ . Тому  $\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n}$ , тобто

$$\ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \geq \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n},$$

для кожного  $n \in \mathbb{N}$  і будь-яких  $x_j \in [0; +\infty)$ ,  $j \in \overline{1; n}$ . Таким чином,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}, \quad x_j \in [0; +\infty), \quad j \in \overline{1; n}.$$

**Зауваження 2.** Інколи опуклу функцію називають опуклою вниз або вгнутою, а вгнуту функцію називають опуклою або опуклою вверх.

**25. Асимптоти.** Похилою асимптотою функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в  $+\infty$  або при  $x \rightarrow +\infty$  називається така пряма  $y = kx + b$ , для якої

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0. \quad (1)$$

Число  $\Delta = |f(x) - kx - b|$  – це відстань між точками графіків функцій  $y = kx + b$  і  $y = f(x)$  з однаковою абсцисою, рівною  $x$ .

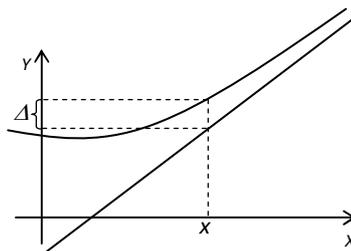


Рис. 1.

**Теорема 1.** Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad (2)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b, \quad (3)$$

то пряма  $y = kx + b$  є похилою асимптотою функції  $f$  в  $+\infty$ . Якщо ж принаймні одна з границь (2) або (3) не існує або рівна  $\infty$ , то похилої асимптоти в  $+\infty$  функція  $f$  не має.

**Доведення.** Якщо виконуються (2) і (3), то виконується і (1). Тому пряма  $y = kx + b$  є асимптотою. Якщо припустити, що (2) не виконується, але пряма  $y = cx + d$  є похилою асимптотою в  $+\infty$ , то матимемо  $f(x) - cx - d = \varepsilon(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$  і  $f(x)/x \rightarrow c$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ . Суперечність. Знову прийдемо до суперечності, якщо припустимо, що (3) не виконується. ►

Аналогічно визначається асимптота в  $-\infty$  і в  $\infty$ .

Вертикальною асимптотою функції  $f$  називається така пряма  $x = x_0$ , що принаймні одна з границь  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$  рівна  $\infty$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$ , то

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - x) = \pm \frac{\pi}{2}.$$

Тому прямі  $y = x + \pi/2$  і  $y = x - \pi/2$  є похилими асимптотами функції  $f$  в  $+\infty$  і в  $-\infty$  відповідно. Похилої асимптоти в  $\infty$  ця функція не має. Не має вона також вертикальних асимптот.

**Приклад 2.** Нехай  $f(x) = 1/x$ . Тоді

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 0) = 0.$$

Тому пряма  $y = 0$  є похилою асимптотою функції  $f$  в  $\infty$ . Крім цього,  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ . Тому пряма  $x = 0$  є вертикальною асимптотою цієї функції.

**26. Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків.** Дослідження функцій і побудову їх графіків можна здійснювати за наступною схемою. Знайти область визначення, множини точок неперервності і точок розриву. Знайти асимптоти функцій. Знайти проміжки монотонності, точки екстремуму і екстремуми. Дослідити функцію на парність і періодичність. Знайти проміжки опуклості і точки перегину графіка функції. Зобразити графік функції. Інколи доцільно ще знайти

координати точок перетину з осями координат та провести додаткові дослідження.

**Приклад 1.** Дослідимо функцію  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$  і зобразимо її графік. 1.

Оскільки задана функція є раціональною, то вона невизначена в тих точках, де знаменник дорівнює нулеві:  $x^2 - 1 = 0$ . Отже, областю визначення заданої функції є множина  $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$ . Функція є неперервною на області визначення. Оскільки

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty,$$

то точки  $x_1 = -1$  і  $x_2 = 1$  є точками розриву другого роду. 2. Знаходимо асимптоти. Оскільки

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{(x^2 - 1)x} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3}{x^2 - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0,$$

то пряма  $y = x$  є похилою асимптотою. Прямі  $x = -1$  і  $x = 1$  є вертикальними асимптотами. 3. Функція є неперіодичною і непарною, бо

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x^3}{x^2 - 1} = -f(x).$$

4. Знайдемо проміжки монотонності. Оскільки

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1) \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} > 0$$

для  $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ , то функція є зростаючою на проміжках  $(-\infty; -\sqrt{3})$ ,  $(\sqrt{3}; +\infty)$  і є спадною на проміжках  $(-\sqrt{3}; -1)$ ,  $(-1; 1)$  і  $(1; \sqrt{3})$ . Знайдемо точки екстремуму і екстремуми. Розв'язавши рівняння  $f'(x) = 0$ , тобто рівняння  $\frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2} = 0$ , знаходимо, що точки  $x_1 = -\sqrt{3}$ ,  $x_2 = 0$  і  $x_3 = \sqrt{3}$  є підозрілими на екстремум. Оскільки похідна в точці  $x_1$  змінює знак з "+" на "-", в точці  $x_2$  не змінює знак, а в точці  $x_3$  змінює знак з "-" на "+", то точка  $x_1$  є точкою максимуму, точка  $x_2$  не є точкою екстремуму, а точка  $x_3$  є точкою мінімуму і

$$y_{\min} = f(\sqrt{3}) = \frac{3\sqrt{3}}{2}, \quad y_{\max} = f(-\sqrt{3}) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

5. Знайдемо проміжки опуклості і точки перегину. Оскільки

$$f''(x) = \frac{(x^2 - 1)^2(4x^3 - 6x) - 2(x^4 - 3x^2)(x^2 - 1)2x}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3} > 0$$

для  $x \in (-1; 0) \cup (1; +\infty)$ , то функція є опуклою на проміжках  $(-1; 0)$ ,  $(1; +\infty)$  і вгнутою на проміжках  $(-\infty; -1)$ ,  $(0; 1)$ . Оскільки єдиним коренем рівняння  $f''(x) = 0$  є  $x = 0$  і в точці  $x = 0$  друга похідна змінює знак з "+" на "-", то ця точка є точкою перегину функції, а точка  $(0; 0)$  є точкою перегину графіка функції. 6. Точка  $(0; 0)$  є точкою перетину графіка функції з осями координат. Дослідимо поведінку функції в точках  $-\infty$  і  $+\infty$ . Маємо

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty.$$

7. Зображуємо графік функції.

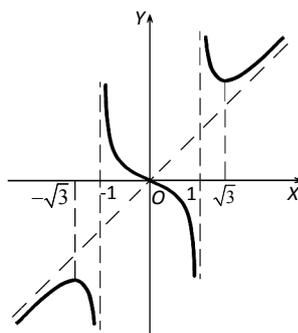


Рис. 1.

**27. Порівняння функцій.  $O$ -символіка.** Часто одну функцію  $f$  в околі точки  $x_0$  замінюють простішою функцією  $\varphi$ . Тоді  $|f(x) - \varphi(x)|$  і  $|(f(x) - \varphi(x)) / \varphi(x)|$  називають відповідно абсолютною і відносною похибками. При розгляді подібних задач використовуються певні символи (символи Ландау).

1°. Символ “ $f(x) = o(1), x \rightarrow a$ ” означає, що  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

2°. Символ “ $f(x) = o(\varphi(x)), x \rightarrow a$ ” означає, що  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) / \varphi(x) = 0$ , тобто що  $f(x) / \varphi(x) = o(1), x \rightarrow a$ .

3°. Символ “ $f(x) = O(1), x \rightarrow a$ ” означає, що функція  $f$  обмежена в деякому проколеному околі точки  $a$ .

4°. Символ “ $f(x) = O(\varphi(x)), x \rightarrow a$ ” означає, що функція  $f(x) / \varphi(x)$  обмежена в деякім проколенім околі точки  $a$ .

5°. Символ “ $f(x) \asymp \varphi(x), x \rightarrow a$ ” означає, що  $f(x) = O(\varphi(x)), x \rightarrow a$  і  $\varphi(x) = O(f(x)), x \rightarrow a$ .

6°. Символ “ $f(x) = O(1), x \in E$ ” означає, що функція  $f$  є обмеженою на множині  $E$ .

7°. Символ “ $f(x) = O(\varphi(x)), x \in E$ ” означає, що  $f(x) / \varphi(x) = O(1), x \in E$ .

8°. Символ “ $f(x) \asymp \varphi(x), x \in E$ ” означає, що  $f(x) = O(\varphi(x)), x \in E$  і  $\varphi(x) = O(f(x)), x \in E$ .

9°. Символ “ $f(x) \sim \varphi(x), x \rightarrow a$ ” означає, що  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) / \varphi(x) = 1$ .

Рівності, які містять символи Ландау, називаються асимптотичними формулами або асимптотичними рівностями. В таких формулах символ  $o(\varphi(x))$  означає будь-яку функцію  $f$  з розглядуваного класу, для якої  $f(x) = o(\varphi(x)), x \rightarrow a$ , або деяку таку функцію. Аналогічне можна сказати про інші розглядувані символи.

**Приклад 1.**  $\operatorname{tg} x = o(1), x \rightarrow 0$ .

**Приклад 2.**  $\operatorname{tg} x \sim x, x \rightarrow 0$ .

**Приклад 3.**  $\sin x = o(1), x \rightarrow 0$ .

**Приклад 4.**  $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$ .

**Приклад 5.**  $\cos x = O(1), x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 6.**  $\sin x = o(1), x \rightarrow 0$ , проте не можна стверджувати, що  $o(1) = \sin x, x \rightarrow 0$ , оскільки символом  $o(1)$  позначається довільна нескінченно мала функція (інколи нею може бути і функція  $\sin x$ ).

**Приклад 7.**  $o(1) + o(1) = o(1), x \rightarrow a$  (сума двох нескінченно малих є нескінченно малою).

**Приклад 8.**  $O(1) \cdot o(1) = o(1), x \rightarrow a$  (добуток обмеженої і нескінченно малої є нескінченно малою).

**Приклад 9.**  $(1 + o(1))(1 + o(1)) = 1 + o(1), x \rightarrow a$ .

**Приклад 10.**  $\frac{1}{1 + o(1)} = 1 + o(1) + o(o(1)) = 1 + o(1), x \rightarrow a$ .

**Приклад 11.**  $O(x^2) + o(x) = o(x) = o(1), x \rightarrow 0$ .

**Приклад 12.**  $x + O(x^3) + x^2 + o(x^2) = x + x^2 + o(x^2)$   
 $= x + O(x^2) = x + o(x) = x(1 + o(1)), x \rightarrow 0$ .

**Приклад 13.**

$$x^4 + O(x) + x^2 + o(x^2) = x^4 + x^2 + o(x^2) = x^4 + O(x^2) = x^4 + o(x^4) = x^4(1 + o(1)),$$

$$x \rightarrow \infty.$$

**Приклад 14.** Число  $A \in \mathbb{R}$  є границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a$  тоді і тільки тоді, коли  $f(x) = A + o(1), x \rightarrow a$ .

**Приклад 15.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $x \in \mathbb{R}$ , то  $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + o(h), h \rightarrow 0$ .

**Приклад 16.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має другу похідну в точці  $x \in \mathbb{R}$ , то  $f(x+h) - f(x) = f'(x)h + O(h^2), h \rightarrow 0$ .

**Приклад 17.**  $\sin(x+h) - \sin x = h \cos x + O(h^2)$ ,  $h \rightarrow 0$ .

**Приклад 18.** Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$ , то  $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ .

**Приклад 19.** Якщо  $0 < \lim_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$ , то  $f(x) \asymp \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ .

**Приклад 20.** Якщо  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$ , то  $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ .

**Приклад 21.** Якщо  $0 < \underline{\lim}_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$ , то  $f(x) \asymp \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ .

**Зауваження 1.** Інколи розглядувані символи вживаються і в трохи загальнішому сенсі. Наприклад, вважають, що  $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  $x \in E$ , якщо існує така обмежена на  $E$  функція  $\eta$ , що  $f(x) = \eta(x)\varphi(x)$ ,  $x \in E$  і вважають, що  $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ , якщо існує така функція  $\eta$ , що  $f(x) = \eta(x)\varphi(x)$  і  $\eta(x) = o(1)$ ,  $x \rightarrow a$ .

Якщо функції  $f$  і  $\varphi$  є нескінченно малими в точці  $a$  і  $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ , то кажуть, що нескінченно мала  $f$  є нескінченно малою вищого порядку, ніж нескінченно мала  $\varphi$ . Якщо функції  $f$  і  $\varphi$  є нескінченно малими в точці  $a$  і  $f(x) \asymp \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ , то кажуть, що нескінченно малі  $f$  і  $\varphi$  мають однаковий порядок в точці  $a$ . Якщо функції  $f$  і  $\varphi$  є нескінченно малими в точці  $a$  і  $f(x) \sim \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ , то кажуть, що нескінченно малі  $f$  і  $\varphi$  є еквівалентними.

**Приклад 22.** Нескінченно мала в точці  $a=0$  функція  $f(x) = x^3$  є нескінченно малою вищого порядку, ніж нескінченно мала в цій точці функція  $\varphi(x) = x^2$ , бо  $x^3 = o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

**Приклад 23.** Нескінченно малі в точці  $a=0$  функції  $f(x) = x^3$  і  $\varphi(x) = \sin 2x^3$  мають однаковий порядок.

**Приклад 24.** Нескінченно малі в точці  $a=0$  функції  $f(x) = x^2$  і  $\varphi(x) = \operatorname{tg}^2 x$  є еквівалентними.

**Приклад 25.** Нескінченно малих точці  $a = 0$  функції  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0; +\infty), \\ x, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  і  $\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  є непорівняльними в тому

розумінні, що жодна з них не є нескінченно малою вищого порядку, ніж інша, вони не є еквівалентними і не є нескінченно малими однакового порядку.

Якщо функції  $f$  і  $\varphi$  є нескінченно великими в точці  $a$  і  $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ , то кажуть, що нескінченно велика  $\varphi$  є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно велика  $f$ .

**Приклад 26.** Нескінченно велика в точці  $a = \infty$  функція  $\varphi(x) = x^3$  є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно велика в цій точці функція  $f(x) = x^2$ , бо  $x^2 = o(x^3)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

**Приклад 27.** Нескінченно велика в точці  $a = +\infty$  функція  $\varphi(x) = e^x$  є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно велика в цій точці функція  $f(x) = x^3$ , бо  $x^3 = o(e^x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

**28. Використання формули Тейлора з додатковим членом у формі Пеано для знаходження границь та асимптотичних формул.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну порядку  $n \in \mathbb{Z}_+$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то справедлива формула Тейлора з додатковим членом у формі Пеано, яку тепер можна записати у формі

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

Якщо всі  $f^{(k)}(a) \neq 0$ , то в сумі  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$  кожний наступний доданок є нескінченно малою вищого порядку в точці  $a$ , ніж попередній. Цю формулу зручно використовувати для знаходження границь та знаходження різноманітних асимптотичних формул.

**Приклад 1.**  $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$ , для кожного

$n \in \mathbb{Z}_+$ .

$$\text{Приклад 2. } \sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + O(x^{2n+3}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + o(x^{2n+2}),$$

$x \rightarrow 0$ , для кожного  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

$$\text{Приклад 3. } \cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + O(x^{2n+2}) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0,$$

для кожного  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

$$\text{Приклад 4. } \ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

для кожного  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

$$\text{Приклад 5. } (1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k} x^k + O(x^{n+1})$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

для кожного  $n \in \mathbb{Z}_+$  і кожного  $\alpha \in \mathbb{R}$ , де  $\prod_{j=1}^0 (\alpha - j + 1) := 1$ .

$$\text{Приклад 6. } \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + O(x^{n+1}) = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Приклад 7. } \sin x - \frac{x}{1-x} &= x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3) - x - x^2 - x^3 + o(x^3) \\ &= -x^2 - \frac{7x^3}{6} + o(x^3), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

$$\text{Приклад 8. } \ln(1+x) - \sin x + O(x^3) + o(x^2)$$

$$= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + o(x^2) + O(x^3) + o(x^2)$$

$$= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + O(x^3) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

**Приклад 9.**  $\frac{1}{1+o(1)} = 1 + o(1) + o(o(1)) = 1 + o(1), x \rightarrow a.$

**Приклад 10.**

$$\ln(1+x+o(x^2)) = x + o(x^2) - \frac{1}{2}(x+o(x^2))^2 + o\left(\left(x+o(x^2)\right)^2\right) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2),$$

$$x \rightarrow 0.$$

**Приклад 11.** Якщо

$$f(x) = x + 2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0,$$

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0,$$

то

$$f(\varphi(x)) = 3x + 4x^2 + o(x^2) + 2(3x + 4x^2 + o(x^2))^2$$

$$+ o\left(\left(3x + 4x^2 + o(x^2)\right)^2\right) = 3x + 22x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

**Приклад 12.** Якщо  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $(1+x)^\alpha = x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), x \rightarrow +\infty$ , бо

$$(1+x)^\alpha - x^\alpha = x^\alpha \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\alpha - 1 \right)$$

$$= x^\alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = \alpha x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), x \rightarrow +\infty.$$

При знаходженні границь за допомогою формули Тейлора слід вдало вибрати  $n$ . Бажано його вибирати як можна меншим (якщо в даній ситуації підходить якийсь  $n$ , то підходить і будь-яке, більше за нього, але не навпаки).

**Приклад 13.** Для знаходження границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

скористаємось формулою Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n), x \rightarrow 0,$$

взявши  $n = 2$ . Тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}.$$

Якщо взяти  $n = 3$ , то знову отримаємо потрібний результат:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o(x) \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Якщо ж ми б взяли  $n = 1$ , то в кінці б отримали границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^2}$ , яку знайти не можна без додаткової інформації про  $o(x)$  (можна думати, що  $o(x) = |x|^{3/2}$ ,  $o(x) = 5x^2$ ,  $o(x) = 7x^3$  і т.д.). Ця додаткова інформація здобувається шляхом збільшення вибору  $n$  у формулі Тейлора.

#### Приклад 14.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt[3]{1+3x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2}}{1 + x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4) - (1 + x^2 - x^4 + o(x^4))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4!} + o(x^4)}{\frac{x^4}{2} + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4!} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = \frac{2}{4!} = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

**29. Поняття про наближені методи розв'язування рівнянь.** Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $[a; b]$  і на кінцях проміжку  $[a; b]$  приймає значення протилежних знаків, то за теоремою Больцано-Коші рівняння

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

має корінь на  $[a; b]$ . Питання полягає в тому як його знайти з достатньою точністю. Є ряд методів. Розглянемо суть деяких з них.

1<sup>0</sup>. Метод вилки. Суть його така. Ділимо проміжок  $[a; b]$  на два рівні точкою  $c_1 = (b + a) / 2$ . Можливі два випадки: а)  $f(c_1) = 0$  і б)  $f(c_1) \neq 0$ . В

першому випадку задача розв'язана, а в другому – ділимо той з двох одержаних проміжків, на кінцях якого функція приймає значення протилежних знаків, точкою  $c_2$  на два рівних. Продовжуючи цей процес, можемо з наперед заданою точністю знайти розв'язок рівняння. Але цей метод базується на першій теоремі Больцано-Коші і є досить трудомістким.

2<sup>0</sup>. Метод дотичних, метод Ньютона. Нехай  $x_0 = b$  і  $x_n = x_{n-1} - f(x_{n-1}) / f'(x_{n-1})$ . За виконання певних умов ця послідовність  $(x_n)$  збігається до кореня рівняння (1).

3<sup>0</sup>. Метод хорд. Нехай  $x_0 = a$  і  $x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})(b - x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})}$ . За виконання певних умов ця послідовність  $(x_n)$  збігається до кореня рівняння (1).

4<sup>0</sup>. Метод послідовних наближень. Запишемо рівняння (1) у вигляді

$$x = F(x). \quad (2)$$

Нехай  $x_0 = a$  і  $x_n = F(x_{n-1})$ . За виконання певних умов ця послідовність  $(x_n)$  збігається до кореня рівняння (2).

Перш ніж вибрати певний наближений метод потрібно з'ясувати скільки коренів має рівняння, знайти кратність кожного кореня та проміжки, які містять єдиний корінь.

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = x^3 + x + 1$  є неперервною на  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  і  $f'(x) = 3x^2 + 1$ . Тому вона є зростаючою на  $\mathbb{R}$ . Отже, рівняння  $x^3 + x + 1 = 0$  має єдиний дійсний корінь. Крім цього,  $f''(x) = 6x$  і  $f(0) = 1 \neq 0$ . Тому цей корінь є простим. Оскільки  $f(-1) = -1 < 0$  і  $f(0) = 1 > 0$ , то корінь міститься на проміжку  $(-1; 0)$ .

**Приклад 2.** Знайдемо ті  $a \in \mathbb{R}$ , для яких рівняння  $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1 = 0$  має дійсні корені, кратності  $m \geq 2$ . Нехай  $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1$ . Тоді  $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2$ . Якщо таке  $a \in \mathbb{R}$  існує, то сумісною є система

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ f'(x) = 0, \end{cases} \text{ тобто система}$$

$$\begin{cases} x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1 = 0, \\ 3x^2 - 6ax + 3a^2 = 0. \end{cases}$$

З другого рівняння випливає, що  $x = a$  і тому  $a^3 - 3aa^2 + 3a^2a - 1 = 0$ . Отже,  $a = 1$ . Тоді  $f(x) = (x-1)^3$ . Отже, рівняння має дійсні корені тільки у випадку  $a = 1$  і тоді воно має єдиний дійсний корінь  $x = 1$ , кратності  $m = 3$ .

**Приклад 3.** Дослідимо рівняння  $x^3 - 3ax + 1 = 0$ . Нехай  $f(x) = x^3 - 3ax + 1$ . Ця функція є неперервною на  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  і  $f'(x) = 3x^2 - 3a$ . Отже, рівняння  $x^3 - 3ax + 1 = 0$  має принаймні один дійсний корінь. Якщо  $a \leq 0$ , то функція є зростаючою на  $(-\infty; +\infty)$  і тому має єдиний дійсний корінь. Якщо  $a > 0$ , то функція є зростаючою на проміжках  $(-\infty; -\sqrt{a})$  та  $(\sqrt{a}; +\infty)$  і є спадною на проміжку  $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$ . В точці  $-\sqrt{a}$  вона має максимум, а в точці  $\sqrt{a}$  – мінімум. При цьому,  $f(-\sqrt{a}) = 2a\sqrt{a} + 1$  і  $f(\sqrt{a}) = -2a\sqrt{a} + 1$ . Оскільки  $f(\sqrt{a}/3)f(-\sqrt{a}/3) < 0$ , при  $a > 1/\sqrt[3]{4}$ , то, якщо  $a \in (1/\sqrt[3]{4}; +\infty)$ , то рівняння має три дійсні корені, які належать проміжкам  $(-\infty; -\sqrt{a})$ ,  $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$  та  $(\sqrt{a}; +\infty)$  і всі ці корені є простими. Якщо  $a \in (0; 1/\sqrt[3]{4})$ , то рівняння має єдиний корінь, він є простим і належить проміжку  $(-\infty; -\sqrt{a})$ . Якщо  $a = 1/\sqrt[3]{4}$ , то рівняння має корінь  $x_1$ , він є простим і належить проміжку  $(-\infty; -\sqrt{a})$ , другий  $x_2 = \sqrt{a}$  має кратність  $m_2 = 2$ .

Докладне дослідження цих методів виходить за рамки даного курсу. Правда четвертий метод ми розглянемо, але пізніше.

**30. Знаходження асимптотики обернених функцій та коренів рівнянь.** Для знаходження формули  $y = f^{-1}(x)$ , якою задається функція  $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обернена до функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , потрібно з рівняння  $y = f(x)$  знайти  $x = f^{-1}(y)$ , а потім поміняти місцями  $x$  та  $y$ . В результаті прийдемо до потрібної формули. При цьому використовуються відомі тотожності

$$f^{-1}(f(x)) = x, \quad x \in D(f).$$

$$f(f^{-1}(y)) = y, \quad y \in E(f).$$

Проте, часто рівняння  $y = f(x)$  розв'язати важко. В зв'язку з цим, в багатьох випадках доцільніше знайти асимптотичну формулу. Подібним чином поступають і при розв'язуванні рівнянь  $f(x) = a$ . Якщо таке рівняння має нескінченну кількість коренів, то в багатьох випадках, подавши  $\mathbb{R}$  у вигляді об'єднання зліченної кількості попарно неперетинних проміжків, на кожному з яких функція  $f$  є оборотною, можна знайти асимптотику коренів, які належать розглядуваним проміжкам.

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = 3x + 6$ , то маємо рівняння  $y = 3x + 6$ , з якого знаходимо, що  $x = \frac{1}{3}y - 2$ . Тому  $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 2$  і  $y = \frac{1}{3}x - 2$  – шукана формула.

**Приклад 2.** З, наприклад, геометричних міркувань випливає, що для всіх  $x \geq x_0$  рівняння  $\ln t = x - 1 + 1/t$  має єдиний корінь  $t = f^{-1}(x) > 1$ . При цьому,  $t = f^{-1}(x) \rightarrow +\infty$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ . Тому  $f^{-1}(x) = \exp(x - 1 + o(1))$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

**Приклад 3.** Якщо  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – дві оборотні функції,  $f(x) \rightarrow a$  і  $f(x) = (1 + o(1))\varphi(x)$ , якщо  $x \rightarrow 0$ , то

$$f^{-1}(x) = \varphi^{-1}((1 + o(1))x), \quad x \rightarrow a,$$

Зокрема, якщо

$$f(x) = (1 + o(1))x, \quad x \rightarrow 0,$$

то

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))x, \quad x \rightarrow 0.$$

**Приклад 4.** Якщо функція  $f: (0;1) \rightarrow \mathbb{R}$  є оборотною і

$$f(x) = ax + bx^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

то

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))x / a, \quad x \rightarrow 0,$$

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x + \frac{b}{a^3}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

якщо  $a \neq 0$  і

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))\sqrt{x/b}, \quad x \rightarrow +0,$$

якщо  $a = 0$  і  $b \neq 0$ . Справді, якщо  $a \neq 0$ , то

$$y = ax + bx^2 + o(x^2), \quad y = a(1 + o(1))x, \quad x = (1 + o(1))y/a, \quad y \rightarrow 0,$$

і тому  $y \rightarrow 0$  тоді і тільки тоді, коли  $x \rightarrow 0$ . Крім цього,

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}x^2 + o(x^2) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}\left((1 + o(1))\frac{1}{a}y\right)^2 \\ &+ o\left(\left((1 + o(1))\frac{1}{a}y\right)^2\right) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a^3}y^2 + o(y^2), \quad y \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Якщо ж  $a = 0$  і  $b \neq 0$ , то

$$y = bx^2 + o(x^2), \quad y = b(1 + o(1))x^2, \quad x = (1 + o(1))\sqrt{y/b}, \quad y \rightarrow 0.$$

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = x + \ln x$  є зростаючою і неперервною на  $(0; +\infty)$ . Тому має обернену функцію. При цьому  $f(x) \rightarrow +\infty$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , якщо  $x \rightarrow 0+$ . Для знаходження оберненої функції маємо рівняння  $y = x + \ln x$ . Його розв'язати не вміємо. Проте,

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))x, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

....

До цих асимптотичних формул приходимо наступним чином.

$$y = x + \ln x, \quad y = (1 + o(1))x, \quad x = (1 + o(1))y, \quad y \rightarrow +\infty;$$

$$x = y - \ln x = y - \ln((1 + o(1))y) = y - \ln y + o(1), \quad y \rightarrow +\infty;$$

$$\begin{aligned}
x &= y - \ln x = y - \ln(y - \ln y + o(1)) = y - \ln y - \ln\left(1 - \frac{\ln y + o(1)}{y}\right) \\
&= y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + o\left(\frac{\ln y}{y}\right), \quad y \rightarrow +\infty; \\
x &= y - \ln x = y - \ln\left(y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + o\left(\frac{\ln y}{y}\right)\right) \\
&= y - \ln\left(y - \ln y + \frac{\ln y}{y}\right) - \ln\left(1 + \frac{o\left(\frac{\ln y}{y}\right)}{y - \ln y + \frac{\ln y}{y}}\right) \\
&= y - \ln(y - \ln y) - \ln\left(1 + \frac{\ln y}{y(y - \ln y)}\right) - \ln\left(1 + \frac{o\left(\frac{\ln y}{y}\right)}{y - \ln y + \frac{\ln y}{y}}\right) \\
&= y - \ln y - \ln\left(1 - \frac{\ln y}{y}\right) - \ln\left(1 + \frac{\ln y}{y(y - \ln y)}\right) - \ln\left(1 + \frac{o\left(\frac{\ln y}{y}\right)}{y - \ln y + \frac{\ln y}{y}}\right) \\
&= y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2\right) + o\left(\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2\right) + o\left(\frac{\ln y}{y^2}\right) \\
&= y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2 + o\left(\left(\frac{\ln y}{y}\right)^2\right), \quad y \rightarrow +\infty.
\end{aligned}$$

....

*Асимптотичні формули*

$$f^{-1}(x) = e^{x+o(1)}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$f^{-1}(x) = e^x + O(e^{2x}), \quad x \rightarrow -\infty.$$

*отримуємо наступним чином.*

$$y = x + \ln x, \quad y = \ln x + o(1), \quad x \rightarrow 0,$$

$$x = e^{y+o(1)}, \quad y \rightarrow -\infty;$$

$$x = e^{y-x} = e^{y-e^{y+o(1)}} = e^y e^{-e^{y+o(1)}} = e^y (1 + O(e^y)) = e^y + O(e^{2y}), \quad y \rightarrow -\infty.$$

Таким чином, якщо  $x = x(y)$  корінь рівняння  $x + \ln x = y$ , то  $x = y - \ln y + o(1)$ ,  $y \rightarrow +\infty$ , і  $x = e^y + O(e^{2y})$ ,  $y \rightarrow -\infty$ .

**Приклад 6.** Нехай  $x_n$  – корінь рівняння  $\operatorname{tg} x = 1/x$ , який належить проміжку  $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$ . Із, наприклад, геометричних міркувань випливає, що для  $\mathbb{N} \ni n \geq 2$  на такому проміжку розглядуване рівняння має єдиний корінь  $x_n = \pi n + \Delta_n$ ,  $\Delta_n \in (-\pi/2; \pi/2)$ . Крім цього,  $\operatorname{tg} \Delta_n = \frac{1}{x_n}$  і

$$x_n = \pi n + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n}. \text{ Таким чином,}$$

$$x_n = \pi n + o(1), \quad n \rightarrow +\infty,$$

Але

$$\operatorname{arctg} x = x + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^3), \quad x \rightarrow 0.$$

Тому

$$\begin{aligned} x_n &= \pi n + \frac{1}{\pi n + o(1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow +\infty, \\ x_n &= \pi n + \frac{1}{\pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)} \right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right) \\ &= \pi n + \frac{1}{\pi n} + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\pi n} \right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right), \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**Приклад 7.** Нехай  $x_{2k}$  і  $x_{2k+1}$  – корені рівняння  $\sin \pi x = 1/x$ , які належать, відповідно, проміжкам  $(2k; 1/2 + 2k)$  та  $(1/2 + 2k; 2(k+1))$ . Із,

наприклад, геометричних міркувань впливає, що для великих  $k$  на кожному з цих проміжків рівняння  $\sin x = 1/x$  має єдиний корінь:  $x_{2k} = 2k + \Delta_{2k}$ ,

$x_{2k+1} = 2k + 1 - \Delta_{2k+1}$ . Крім цього,  $\Delta_n \in (0; \pi/2)$  і  $\sin \pi \Delta_{2k} = \frac{1}{x_{2k}}$ , та

$x_{2k} = 2k + \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x_{2k}}$ . Таким чином,  $x_{2k} = 2k + o(1)$ ,  $k \rightarrow +\infty$ . Але

$\arcsin x = x + o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ . Тому

$$\begin{aligned} x_{2k} &= 2k + \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k + o(1)} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= 2k + \frac{1}{2\pi k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) + o\left(\frac{1}{k^2}\right) = 2k + \frac{1}{2\pi k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

Аналогічно,  $x_{2k+1} = 2k + 1 - \frac{1}{\pi} \arcsin \frac{1}{x_{2k+1}}$ ,

$$x_{2k+1} = 2k + 1 + o(1), \quad k \rightarrow +\infty,$$

$$\begin{aligned} x_{2k+1} &= 2k + 1 - \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{2k + 1 + o(1)} + o\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ &= 2k + 1 - \frac{1}{(2k + 1)\pi} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**31. Інтерполяція.** Рівність  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k$  задає багаточлен  $S_n$ ,  $k$ -

та похідна якого в точці  $a$  приймає значення  $c_k$ :  $S_n^{(k)}(a) = c_k$ ,  $k \in \overline{1; n}$ . Таким

чином, рівністю  $S_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k$  відновлюється багаточлен за відомими

значеннями його похідних в точці  $a$ . Подібні задачі називаються інтерполяційними. Розглянемо ще одну таку задачу – задачу про знаходження

багаточлена  $P(x) = \sum_{k=0}^n p_k x^k$  степеня  $n$ , який в заданих точках  $x_k$ ,  $k \in \overline{0; n}$ ,

$x_0 < x_1 < \dots < x_n$ , приймає ті ж значення  $b_k$ , що і задана функція  $f$ :  $b_k = f(x_k)$ .

Ця задача має єдиний розв'язок, оскільки для знаходження коефіцієнтів  $p_n$  цього багаточлена маємо систему

$$\begin{cases} P_n(x_0) = b_0, \\ \dots \\ P_n(x_n) = b_n, \end{cases}$$

а визначник системи є визначником Вандермонда і він не дорівнює нулеві. Можна показати, що шуканий багаточлен записується у вигляді формули Лагранжа

$$P(x) = \sum_{k=0}^n \frac{b_k Q_{n+1}(x)}{(x - x_k) Q'_{n+1}(x_k)},$$

де  $Q_{n+1}(x) = (x - x_0) \dots (x - x_n)$ . Функція  $r_n(x) = f(x) - P_n(x)$  називається додатковим членом інтерполяційної формули Лагранжа, а формула  $f(x) = P_n(x) + r_n(x)$  називається інтерполяційною формулою Лагранжа. Вона є аналогом формули Тейлора. Проте дослідження цієї формули та використання до розв'язання різноманітних задач виходить за рамки цього курсу.

### 32. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення похідної функції в точці.
2. Сформулюйте означення і напишіть рівняння дотичної до графіка функції.
3. Інтерпретуйте геометричний зміст похідної.
4. Інтерпретуйте фізичний зміст похідної.
5. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  такої, що  $f'(0) = 1$ , а  $f''(0)$  не існує.
6. Наведіть приклад функції, дотична до графіка якої перетинає його в двох точках.
7. Наведіть приклад функції графік якої в точці  $(0; 0)$  має вертикальну дотичну.
8. Сформулюйте означення другої похідної.
9. Сформулюйте означення диференційовної функції і диференціала.
10. Запишіть основні правила знаходження диференціала.
11. Інтерпретуйте геометричний зміст диференціала.
12. Інтерпретуйте інваріантність форми першого диференціала.
13. Сформулюйте означення другої похідної і запишіть основні правила знаходження  $n$ -ої похідної.
14. Сформулюйте означення другого диференціала і запишіть основні формули для знаходження  $n$ -го диференціала.
15. Сформулюйте означення точок мінімуму, максимуму і екстремуму.

16. Сформулюйте означення мінімуму, максимуму і екстремуму.
17. Сформулюйте означення множин  $C[a; b]$  і  $C^{(k)}[a; b]$ .
18. Сформулюйте означення стаціонарних і критичних точок.
19. Сформулюйте необхідну умову екстремуму.
20. Сформулюйте означення опуклої функції.
21. Сформулюйте означення вгнутої функції.
22. Сформулюйте означення точки перегину.
23. Сформулюйте означення похилої і вертикальної асимптот.
24. Наведіть приклад функції такої, що її асимптота перетинає її графік у двох точках.
25. Завершіть написання формули  $(c)' =$  і доведіть її.
26. Завершіть написання формули  $(x^n)' =$  і доведіть її.
27. Завершіть написання формули  $(e^x)' =$  і доведіть її.
28. Завершіть написання формули  $(\ln x)' =$  і доведіть її.
29. Завершіть написання формули  $(\sin x)' =$  і доведіть її.
30. Завершіть написання формули  $(\cos x)' =$  і доведіть її.
31. Завершіть написання формули  $(\operatorname{tg} x)' =$  і доведіть її.
32. Завершіть написання формули  $(\operatorname{ctg} x)' =$  і доведіть її.
33. Завершіть написання формули  $(\arcsin x)' =$  і доведіть її.
34. Завершіть написання формули  $(\arccos x)' =$  і доведіть її.
35. Завершіть написання формули  $(\operatorname{arctg} x)' =$  і доведіть її.
36. Завершіть написання формули  $(\operatorname{arcctg} x)' =$  і доведіть її.
37. Завершіть написання формули  $(\operatorname{sh} x)' =$  і доведіть її.
38. Завершіть написання формули  $(\operatorname{ch} x)' =$  і доведіть її.
39. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність суми, добутку і частки двох неперервних функцій.
40. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність складеної функції.
41. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність функції, яка має похідну.
42. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну суми.
43. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну добутку і наслідок з неї.
44. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну частки.
45. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну композиції функцій.
46. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну оберненої функції.
47. Сформулюйте і доведіть теорему про зв'язок між існуванням похідної і диференційовністю.

48. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну функції, заданої параметрично.
49. Сформулюйте і доведіть теорему Ферма.
50. Чи можна в теоремі Ферма проміжок  $(a;b)$  замінити проміжком: 1.  $[a;b]$ , 2.  $(a;b]$ , 3.  $[a;b)$ ?
51. Сформулюйте і доведіть теорему Ролля.
52. Сформулюйте і доведіть теорему Лагранжа.
53. Чи справедлива теорема Лагранжа на  $[-1;1]$  для функції

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(1/x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} ?$$

54. Чи буде справедливим твердження теорема Лагранжа, якщо в ній замінити умову 1) умовою 1') визначена на  $[a;b]$ ?
55. Чи буде справедливим твердження теорема Лагранжа, якщо в ній замінити умови 1) і 2) умовою 2') має похідну на  $[a;b]$ ?
56. Чи буде справедливим твердження теорема Ролля, якщо в ній замінити: умову 1) умовою 1') визначена на  $[a;b]$ ?
57. Чи буде справедливим твердження теорема Ролля, якщо в ній замінити: умови 1) і 2) умовою 2') має похідну на  $[a;b]$ ?
58. Сформулюйте і доведіть теорему Коші про середнє.
59. За теоремою Лагранжа

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(c)(b - a).$$

Звідси отримуємо  $(f(b) - f(a)) / (\varphi(b) - \varphi(a)) = f'(c) / \varphi'(c)$ . Чому ці викладки не можна вважати доведенням теорема Коші?

60. Сформулюйте і доведіть перше правило Лопітала.
61. Сформулюйте і доведіть друге правило Лопітала.
62. Сформулюйте і доведіть теорему про формулу Тейлора для багаточлена.
63. Сформулюйте і доведіть теорему про формулу Тейлора для довільної функції з додатковим членом у формі Коші і Лагранжа.
64. Сформулюйте і доведіть теорему про формулу Тейлора для довільної функції з додатковим членом у формі Пеано.
65. Сформулюйте і доведіть теорему про умови постійності функції.
66. Сформулюйте і доведіть теорему про умови монотонності функції.
67. Наведіть приклад зростаючої на  $(-\infty; +\infty)$  функції  $f$ , яка не має похідної в трьох точках.

68. Сформулюйте і доведіть теорему про достатні умови екстремуму в термінах першої похідної.
69. Сформулюйте і доведіть теорему про достатні умови екстремуму в термінах другої похідної.
70. Сформулюйте і доведіть теорему про достатні умови екстремуму в термінах  $n$ -ої похідної.
71. Сформулюйте і доведіть теорему про достатні умови опуклості функції.
72. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є опуклою на кожному і проміжжів  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ , але не є опуклою на  $(-\infty; +\infty)$ .
73. Сформулюйте і доведіть теорему про асимптоти функції.
74. Наведіть приклад функції, асимптота якої перетинає її графік.
75. Поясніть зміст символу і ”  $f(x) = o(\varphi(x)), x \rightarrow a$  ”.
76. Поясніть зміст символу ”  $f(x) = o(\varphi(x)), x \rightarrow a$  ”.
77. Поясніть зміст символу ”  $f(x) \sim \varphi(x), x \rightarrow a$  ”.
78. Поясніть зміст символу ”  $f(x) = O(1), x \in E$  ”.
79. Поясніть зміст символу ”  $f(x) = O(\varphi(x)), x \in E$  ”.
80. Поясніть зміст символу ”  $f(x) \asymp \varphi(x), x \in E$  ”.
81. Поясніть зміст символу ”  $f(x) = O(1), x \rightarrow a$  ”.
82. Поясніть зміст символу ”  $f(x) = O(\varphi(x)), x \rightarrow a$  ”.
83. Дайте означення символу ”  $f(x) \asymp \varphi(x), x \rightarrow a$  ”.
84. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(2x) \sim f(x), x \rightarrow +\infty$ .
85. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(2x) = O(f(x)), x \rightarrow +\infty$ .
86. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(x) = o(f(2x)), x \rightarrow +\infty$ .
87. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(x+1) \sim f(x), x \rightarrow +\infty$ .
88. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(x+1) = O(f(x)), x \rightarrow +\infty$ .
89. Наведіть приклад функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f(x)f(x+1) = O(f(x+1)), x \rightarrow +\infty$ .

### 33. Вправи і задачі теоретичного характеру.

#### 1. Доведіть твердження

1. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $x \in \mathbb{R}$ , то
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x+1/n) - f(x)) = f'(x).$$
2. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка в деякій точці  $x \in \mathbb{R}$  має скінченну границю
- $$\lim_{n \rightarrow \infty} n(f(x+1/n) - f(x))$$
- і не має похідної в цій точці.
3. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $x \in \mathbb{R}$ , то

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = f'(x).$$

4. Якщо  $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  то існує скінченна границя  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(-h)}{2h}$ , а

$f'(0)$  не існує.

5. Якщо функції  $u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  мають похідну, то  $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ .

6. Якщо всі функції  $f_j: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j \in \overline{1; n}$ , мають похідну в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то

$$\left( \prod_{j=1}^n f_j \right)'(a) = \sum_{k=1}^n f'_k(a) \prod_{j=1, j \neq k}^n f_j(a).$$

7. Якщо  $f(x) = \prod_{k=1}^n (x+k)$ , то  $f'(0) = n! \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ .

8. Якщо  $f(x) = \prod_{k=1}^n f_k(x)$  і всі функції  $f_k$  мають похідну в точці  $x$ , то

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f'_k(x) f(x)}{f_k(x)}.$$

9.  $(\sin^n x \cos nx)' = n \sin^{n-1} x \cos(n+1)x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

10.  $(\sin^n x \sin nx)' = n \sin^{n-1} x \sin(n+1)x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

11.  $(\cos^n x \sin nx)' = n \cos^{n-1} x \cos(n+1)x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

12.  $(\cos^n x \cos nx)' = -n \cos^{n-1} x \sin(n+1)x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

13. Якщо функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  мають похідну в точці  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\varphi'(a) \neq 0$  і

$$f(a) = \varphi(a) = 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(a)}{\varphi'(a)}.$$

14. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x-a} = f(a) - af'(a).$$

15. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має праву похідну в точці  $x_0 \in \mathbb{R}$ , то вона є неперервною справа в цій точці.

16. Існує функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка має праву похідну в точці  $x_0 = 0$  і не є неперервною в ній.

17. Функція  $f(x) = |x-1| + |x+1|$  не має похідної в точках  $x_0 = -1$  та  $x_1 = 1$ .

18. Існує таке  $a \in \mathbb{R}$ , що функція  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; +\infty), \\ ax, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  має похідну в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$ .

19. Існує таке  $a \in \mathbb{R}$ , що функція  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; +\infty), \\ ax, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  не має похідної в точці  $x = 0$ , але є неперервною в ній.

20. Не існує такого  $a \in \mathbb{R}$ , що функція  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; +\infty), \\ ax, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  має другу похідну в точці  $x = 0$ .

21. Не існує такого  $a \in \mathbb{R}$ , що функція  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; +\infty), \\ ax + 1, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  має похідну в точці  $x = 0$ .

22. Для кожного  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; +\infty), \\ ax + 1, & x \in (-\infty; 0], \end{cases}$  має праву похідну в точці  $x = 0$  і не має лівої похідної в цій точці.

23. Функція  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/(1-x^2)}, & x \in [-1; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1], \end{cases}$  є нескінченно диференційовною на  $\mathbb{R}$ .

24. Якщо  $f'_-(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  і  $f(x) = [x]$ , то  $f'_-(1) = 0$ ,  $f'_-(1-) = 0$  і  $f'_-(1) = +\infty$ .

25. Якщо  $f'_+(x_0) := \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  і  $f(x) = [x]$ , то  $f'_+(1) = 0$ ,  $f'_+(1+) = 0$ ,  $f'_+(1) = 0$  і  $f'_+(1)$  не існує.

26. Якщо  $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; +\infty), \\ 1, & x = 0, \\ 0, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$ , то  $f'_-(0) = 0$ ,  $f'_-(0-) = 0$  і  $f'_-(0) = -\infty$ ,  $f'_+(0) = 1$ ,  $f'_+(1+) = 1$ ,  $f'_+(1) = -\infty$  і  $f'_+(1)$  не існує.

27. Існують такі  $a \in \mathbb{R}$  і  $b \in \mathbb{R}$ , що функція  $f(x) = \begin{cases} 1/|x|^2, & x \in [-1; 1], \\ a + bx, & x \notin [-1; 1], \end{cases}$  не має похідну в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$ .

28. Функція  $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$  має похідну лишень в точці  $x = 0$ .

29. Існують такі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які не мають похідної в точці

$x = 0$ , що  $\varphi(0) = 0$  і функція  $f \circ \varphi$  має похідну в точці  $x = 0$ .

30. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну в кожній  $x \in \mathbb{R}$ , то  $(f(f(f(x))))' = f'(f(f(x)))f'(f(x))f'(x)$ .

31. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на  $\mathbb{R}$  і  $F(x) = f(\ln x)$ , то  $F'(x) = \frac{f'(\ln x)}{x}$ .

32. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є парною і має похідну в кожній точці  $x \in D(f)$ , то функція  $f'$  є непарною.

33. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є непарною і має похідну в кожній точці  $x \in D(f)$ , то функція  $f'$  є парною.

34. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є періодичною і має похідну в кожній точці  $x \in D(f)$ , то функція  $f'$  також є непарною.

## 2. Доведіть твердження

1. Існує така диференційовна на проміжку  $[0; +\infty)$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  існує, а  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  не існує.

2. Існує така диференційовна на проміжку  $[0; +\infty)$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  існує, а  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  не існує.

3. Існує така диференційовна і обмежена на проміжку  $[0; +\infty)$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \infty$ .

4. Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $[a; b]$ , то функція  $f'$  може мати розриви тільки другого роду на  $[a; b]$ .

5. Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $[a; b]$  і має нулі в точках  $a$  і  $b$ , то  $(\exists c \in (a; b)): f'(c) = 0$ .

6. Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $[a; b]$  і  $f'(a)f'(b) < 0$ , то існує точка  $c \in (a; b)$  така, що  $f'(c) = 0$ .

7. Існують такі диференційовні на  $\mathbb{R}$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для яких виконуються обидві наступні умови: а)  $(\forall x \in [0; +\infty)): f(x) \leq \varphi(x)$ ; б)  $(\exists x \in [0; +\infty)): f'(x) > \varphi'(x)$ .

8. Існує неперервна і недиференційовна в точці  $x_0 = 0$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої  $f'(x_0+) = f'(x_0-)$ .

9. Існує зростаюча і неперервна на  $\mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не має похідної в точках  $x_1 = 1$  і  $x_2 = 2$ .

10. Не існує диференційовної на  $(-\infty; +\infty)$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не є

неперервною в точках  $x_1 = -1$  і  $x_2 = 1$ .

11. Якщо  $c \in (a; b)$  і функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $(a; b)$ , має праву похідну  $f'_+(b)$  і існує  $\lim_{x \rightarrow b^+} f'(x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow b^-} f'(x) = f'_-(b)$ .

12. Якщо  $f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, & x \neq 1, \\ 0, & x = 1, \end{cases}$  то  $f'(1-) = f'(1+)$ ,  $f'_+(1)$  не існує і  $f'_-(1)$  не існує.

13. Якщо функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $(a; b)$ , то функція  $f'$  не може мати на  $(a; b)$  усувних розривів.

14. Якщо функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $(a; b)$ , то функція  $f'$  не може мати на  $(a; b)$  розривів першого роду.

15. Функція  $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  має всюди на проміжку  $(-1; 1)$  скінченну

похідну, а функція  $f'$  має в точці  $x = 0$  розрив другого роду.

16. Якщо всі функції  $f_{ij}$  мають похідну в точці  $x$ , то

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} f'_{11}(x) & f'_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f'_{21}(x) & f'_{22}(x) \end{vmatrix}.$$

17. Якщо всі функції  $f_{ij}$  мають похідну в точці  $x$  і  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{i1}(x) & f_{i2}(x) & \dots & f_{in}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \dots & f'_{in}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

18. Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є двічі диференційовною на  $\mathbb{R}$  і  $F(x) = f(\ln x)$ , то

$$F'(x) = \frac{f'(\ln x)}{x}, \quad F''(x) = \frac{f''(\ln x) - f'(\ln x)}{x^2}.$$

19. Якщо в точці  $x$  функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має другу похідну, то

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) + f(x-h) - 2f(x)}{h^2}.$$

20. Якщо  $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  то існує скінченна границя

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) + f(-h) - 2f(0)}{h^2}, \text{ а } f''(0) \text{ не існує.}$$

21. Якщо  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  то  $f^{(n)}(0) = 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

22. Якщо  $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  то  $f^{(n)}(0) = 0$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ .

23. Якщо  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ , то  $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 1$  для всіх  $x \in (0;1)$ .

24. Якщо  $f(x) = (x^2 - 1)^n$ , то  $(x^2 - 1)f^{(n+2)} + 2xf^{(n+1)} - n(n+1)f^{(n)} = 0$ .

25. Якщо  $f(x) = \cos(m \ln x)$ , то

$$x^2 f^{(n+2)} + (2n+1)xf^{(n+1)} + (n^2 + m^2)f^{(n)} = 0.$$

26. Якщо  $m \in \mathbb{N}$  і  $f(x) = \cos(m \arcsin x)$ , то  $(1-x^2)f'' - xf' + m^2 f = 0$ .

27. Якщо  $m \in \mathbb{N}$  і  $f(x) = \sin(m \arcsin x)$ , то  $(1-x^2)f'' - xf' + m^2 f = 0$ .

28. Якщо  $m \in \mathbb{N}$  і  $f(x) = \cos(m \arccos x)$ , то  $(1-x^2)f'' - xf' + m^2 f = 0$ .

29. Якщо  $m \in \mathbb{N}$  і  $f(x) = \sin(m \arccos x)$ , то  $(1-x^2)f'' - xf' + m^2 f = 0$ .

30. Якщо  $F = f\varphi$  і  $f'\varphi' = 1$ , то  $\frac{F''}{F} = \frac{f''}{f} + \frac{\varphi''}{\varphi} + \frac{2}{f\varphi}$  і  $\frac{F'''}{F} = \frac{f'''}{f} + \frac{\varphi'''}{\varphi}$ .

31. Для того щоб пряма  $y = \psi(x)$  була похилою дотичною до графіка функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $(x_0; y_0)$ , необхідно і достатньо, щоб  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - \psi(x)) / (x - x_0) = 0$ .

32. Для того щоб пряма  $y = \psi(x)$  була похилою дотичною до графіка функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $(x_0; y_0)$ , необхідно і достатньо, щоб для кожної прямої  $y = L(x)$ , яка проходить через точку  $(x_0; y_0)$ , в деякому околі точки  $(x_0; y_0)$  виконувалось

$$|f(x) - \psi(x)| \leq |f(x) - L(x)|.$$

### 3. Доведіть твердження

1. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має на проміжку  $(0;1)$  всі похідні до порядку  $n \in \mathbb{N}$  включно, має на проміжку  $[0;1]$  всі похідні до порядку  $n-1 \in \mathbb{N}$  включно і

функція  $f^{(n-1)}$  є неперервною на  $[0;1]$ , то  $\frac{f(x)}{x^n} = f^{(n)}(\theta x)$ ,  $\theta \in (0;1)$ ,  $x \in (0;1]$ .

2. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $(a;b)$  і  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = l \neq \infty$ , то  $(\exists c \in (a;b)): f'(c) = 0$ .

3. Якщо  $f(x) = \sin(\ln x)$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

4. Якщо  $f(x) = \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}$ , то  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  і  $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$  – не існує.

5. Якщо  $f(x) = \frac{\sin x^2}{x}$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  і  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$  – не існує.

6. Якщо функція  $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $(0;1)$ , є неперервною на проміжку  $[0;1]$ ,  $f(0) = 4$ ,  $f(1) = 2$  і  $f'(x) \geq -2$  для всіх  $(0;1)$ , то знайдуться такі числа  $a$  і  $b$ , що  $f(x) = ax + b$ .

7. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і  $f'(x) = a$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , то  $f(x) = kx + d$ , де  $k$  і  $d$  – сталі.

8. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ ,  $f(0) = 1$  і  $f'(x) = e^x$ , то  $f(x) = e^x$ .

9. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є афінною, то  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$  для будь-яких  $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  і  $c \in \mathbb{R}$ .

10. Якщо функція  $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови: 1) є неперервною на проміжку  $[a;b]$ ; 2) має похідну на проміжку  $(a;b)$ ; 3) не є афінною функцією, то

$$(\exists c \in (a;b)): |f(b) - f(a)| < |f'(c)|(b - a).$$

11. Якщо функція  $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови: 1) має другу похідну на проміжку  $[a;b]$ ; 2)  $f'(b) = f'(a) = 0$ , то  $(\exists c \in (a;b)): |f(b) - f(a)| < |f''(c)|(b - a) / 4$ .

12. Якщо функція  $f: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $[a;b]$  і  $(\exists c \in (1; +\infty))(\forall x \in [a;b])(\forall y \in [a;b]): |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^c$ , то  $f$  є сталою функцією.

13. Якщо функція  $f: [0;1] \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $[0;1]$ ,  $f(0) = 0$  і  $(\exists c \in [0;1])(\forall x \in [0;1]): |f'(x)| \leq c|f(x)|$ , то  $f \equiv 0$ .

14. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є двічі диференційовною і обмеженою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , то існує  $f''(x_0) = 0$  для деякого  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

15. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$  і

функція  $f'$  є обмеженою на цьому проміжку, то функція  $f$  є рівномірно неперервною на  $(-\infty; +\infty)$ .

16. Якщо функція  $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $[0; +\infty)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0.$$

17. Якщо функція  $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $[0; +\infty)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0, \text{ то } \lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0.$$

18. Для того щоб диференційовна на проміжку  $(a; b)$  функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  була зростаючою на проміжку  $(a; b)$ , необхідно і достатньо, щоб виконувались дві умови: а)  $(\forall x \in (a; b)) : f'(x) \geq 0$ ; б) не існує такого проміжку  $[a_1; b_1]$ ,  $a < a_1 < b_1 < b$ , що  $(\forall x \in [a_1; b_1]) : f'(x) = 0$ .

19. Якщо  $a < c < b < d$ , функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на проміжках  $(a; c)$  та  $(b; d)$  і  $\lim_{x \rightarrow c-} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow b+} f(x)$ , то функція  $f$  є зростаючою на множині  $(a; c) \cup (b; d)$ .

20. Для кожного полінома  $f$  існує таке  $a > 0$ , що  $f$  є монотонною функцією на кожному з проміжків  $(-\infty; -a)$  і  $(a; +\infty)$ .

21. Якщо функції  $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовними на проміжку  $[0; +\infty)$ , функція  $\varphi$  є неспадною на  $[0; +\infty)$  і  $(\forall x \in [0; +\infty)) : |f'(x)| \leq \varphi(x)$ , то  $(\forall x \in [0; +\infty)) : |f(x) - f(0)| \leq \varphi(x) - \varphi(0)$ .

22. Якщо функція  $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на проміжку  $[0; +\infty)$ ,  $f(0) = 0$  і  $f'(x) > 0$  для всіх  $x \in [0; +\infty)$ , то  $f(x) > 0$  для всіх  $x \in [0; +\infty)$ .

23. Якщо  $n \in \mathbb{N}$ , функція  $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є  $n$  раз диференційовною на проміжку  $[0; +\infty)$ ,  $f^{(k)}(0) = 0$  для всіх  $k \in \overline{0; n-1}$  і  $f^{(n)}(x) > 0$  для всіх  $x \in [0; +\infty)$ , то  $f(x) > 0$  для всіх  $x \in [0; +\infty)$ .

24. Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є зростаючою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , то точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  є точкою максимуму функції  $F(x) = f(\varphi(x))$  тоді і тільки тоді, коли вона є точкою максимуму функції  $\varphi$ .

25. Якщо функція  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є спадною на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , то точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  є точкою максимуму функції  $F(x) = f(\varphi(x))$  тоді і тільки тоді, коли вона є точкою мінімуму функції  $\varphi$ .

26. Якщо точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  є точкою максимуму функцій  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , то вона є і точкою максимуму функції  $F = f + \varphi$ .

27. Існують такі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що деяка точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  не є точкою максимуму жодної з них, але є точкою максимуму функції  $F = f + \varphi$ .
28. Існують такі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що деяка точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  є точкою максимуму кожної з них і є точкою мінімуму функції  $F = f\varphi$ .
29. Існують такі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що деяка точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  є точкою максимуму кожної з них і не є точкою екстремуму функції  $F = f\varphi$ .
30. Існують такі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що деяка точка  $x_0 \in \mathbb{R}$  не є точкою максимуму кожної з них і є точкою екстремуму функції  $F = f\varphi$ .

31. Якщо  $f(x) = \begin{cases} x + x^2 \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  то  $f(x) < f(0)$ , якщо  $x \in (-\infty; 0)$ ,

$f(0) < f(x)$ , якщо  $x \in (-\infty; 0)$ , і ця функція не є зростаючою на жодному проміжку  $[-\delta; \delta]$ ,  $\delta > 0$ .

32. Функція  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  має в точці  $x = 0$  мінімум.

33. Функція  $f(x) = \begin{cases} xe^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$  в точці  $x = 0$  екстремуму не має.

#### 4. Доведіть твердження

1. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , то між двома різними нулями функції  $f$  лежить принаймні один нуль функції  $f'$ .
2. Якщо  $f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)$ , то на кожному проміжку  $(0;1)$ ,  $(1;2)$  і  $(2;3)$  функція  $f'$  має єдиний нуль і інших нулів функція  $f'$  не має.
3. Якщо  $f(x) = (x-1)^3(x-2)^4(x-3)$ , то рівняння  $f'(x) = 0$  має принаймні один корінь на проміжку  $(0;1)$ .
4. Якщо  $p \in \mathbb{N}_0$ ,  $q \in \mathbb{N}_0$  і функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє наступні умови: 1) має на проміжку  $[a; b]$  неперервну похідну, порядку  $p+q$ ; 2) має на проміжку  $(a; b)$  похідну, порядку  $p+q+1$ ; 3)  $f(a) = f'(a) = \dots = f^{(p)}(a) = 0$ ; 4)  $f(b) = f'(b) = \dots = f^{(q)}(b) = 0$ . Тоді  $(\exists c \in (a; b)): f^{(p+q+1)}(c) = 0$ .
5. Якщо  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ , то рівняння  $f(x) = 0$  має не більше двох дійсних коренів.
6. Якщо поліном  $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  з дійсними коефіцієнтами  $a_j$  має лишень дійсні нулі, то поліном  $f'(x)$  також має лише дійсні нулі.
7. Рівняння  $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$  має єдиний додатний корінь і цей корінь

належить проміжку  $(0; 1/2)$ .

8. Рівняння  $x^3 + px - q = 0$ ,  $p > 0$ ,  $q > 0$ , має єдиний додатний корінь і цей корінь належить проміжку  $(0; p/q)$ .
9. Рівняння  $x^3 + px - q = 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , має єдиний дійсний корінь, якщо  $4p^3 + 27q^2 > 0$ .
10. Рівняння  $x^3 + px - q = 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ,  $q \in \mathbb{R}$ , має три дійсних корені, якщо  $4p^3 + 27q^2 < 0$ .
11. Рівняння  $x \arcsin x = 0$  має єдиний дійсний корінь  $x = 0$  і цей корінь має кратність  $m = 2$ .
12. Рівняння  $a^x = bx$  має два дійсні корені, якщо  $a \in (1; +\infty)$  і  $b > e \ln a$ .
13. Рівняння  $a^x = bx$  не має жодного дійсного кореня, якщо  $e \ln a > b > 0$ .
14. Рівняння  $a^x = bx$  має єдиний дійсний корінь, якщо  $a \in (1; +\infty)$  і  $b > 0$ .
15. Рівняння  $x \ln x = a$  не має дійсних коренів, якщо  $a \in (-\infty; -1/e)$ .
16. Рівняння  $x \ln x = a$  має єдиний дійсний корінь, кратності  $m = 2$ , якщо  $a = -1/e$ .
17. Рівняння  $x \ln x = a$  має два простих корені, якщо  $a \in (-1/e; 0)$ .
18. Рівняння  $x \ln x = a$  має єдиний дійсний корінь, якщо  $a \in (0; +\infty)$ .
19. Існує таке  $a \in \mathbb{R}$ , що рівняння  $\log_a x = x$  має принаймні один корінь.
20. Для кожного  $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  рівняння  $x^2 \operatorname{arctg} x = a$  має єдиний дійсний корінь.
21. Якщо  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f(x_0)f'(x_0) < 0$  і  $f(x_0)f''(x_0) < 0$ , то рівняння  $f(x) = 0$  має єдиний корінь на проміжку  $(x_0; x_0 - f(x_0)/f'(x_0))$ .
22. Якщо  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x_0) = 0$  і  $f(x_0)f''(x_0) < 0$ , то рівняння  $f(x) = 0$  має єдиний корінь на кожному з проміжків  $(-\infty; x_0)$  і  $(x_0; +\infty)$ .
23. Якщо  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[0; +\infty)$ , має похідну на проміжку  $(0; +\infty)$ ,  $f(0) < 0$  і  $(\exists c_0 > 0)(\forall x \in (0; +\infty)): f'(x) \geq c_0$ , то на проміжку  $(0; +\infty)$  рівняння  $f(x) = 0$  має єдиний корінь і цей корінь належить проміжку  $(0; -f(0)/c_0)$ .
24. Якщо  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ , і  $a_i = a_{n-i}$  для всіх  $i \in \overline{1; n}$ , то  $\tilde{x} = -1$  є нулем  $P_n(x)$  і  $P_n(x) = (x+1)Q_{n-1}(x)$ , де  $Q_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$  і  $a_i = a_{n-1-i}$  для всіх  $i \in \overline{1; n-1}$ .
25. Якщо  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_i = -a_{n-i}$  для всіх  $i \in \overline{1; n}$  і  $n$  – непарне натуральне число, то  $\tilde{x} = 1$  є нулем  $P_n(x)$ .
26. Якщо  $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ ,  $a_n \neq 0$ ,  $a_i = -a_{n-i}$  для всіх  $i \in \overline{1; k}$  і  $n$

– парне натуральне число, то числа  $\tilde{x} = 1$  і  $\tilde{\tilde{x}} = 1$  є нулями  $P_n(x)$ .

27. Якщо  $n$  – непарне натуральне число,  $a_1 > 0$  і  $a_{2i-1} \geq 0$  для всіх  $i \in \overline{1; k}$ , то рівняння  $x^{2k+1} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$  має єдиний додатний корінь.

28. Рівняння  $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x - a_0 = 0$ , де  $a_0 > 0$  і всі  $a_j \geq 0$  має єдиний додатний корінь.

29. Якщо  $\frac{a_n}{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} + \dots + \frac{a_0}{1} = 0$ , то рівняння  $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$  має принаймні один корінь на проміжку  $[0; 1]$ .

30. Якщо  $a_n \neq 0$ ,  $M_1 = \max\{|a_k| : k \in \overline{0; n-1}\}$ , то  $|\tilde{x}| < 1 + M_1 / |a_n|$  для кожного кореня  $\tilde{x}$  рівняння  $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ .

31. Якщо  $a_0 \neq 0$ ,  $M_0 = \max\{|a_k| : k \in \overline{1; n}\}$ , то  $|\tilde{x}| > (1 + M_1 / |a_0|)^{-1}$  для кожного кореня  $\tilde{x}$  рівняння  $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ .

## 5. Доведіть твердження

1. Якщо всі  $a_j \in \mathbb{R}$  і  $a_n > 0$ , то  $\tilde{x} < 1 + \sqrt[k]{A / a_n}$ , для кожного дійсного кореня  $\tilde{x}$  рівняння  $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$ , де  $A = \max\{|a_j| : a_j < 0, j \in \overline{0; n}\}$  і  $k = \max\{j : a_j < 0\}$ .

2. Якщо  $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ , всі  $a_j \in \mathbb{R}$ ,  $a_n > 0$  і існує таке  $c > 0$ , що  $P_n^{(k)}(c) \geq 0$  для всіх  $k \in \overline{0; n}$ , то  $\tilde{x} < c$ , для кожного дійсного нуля  $\tilde{x}$  багаточлена  $P_n(x)$ .

3. Кількість додатних нулів багаточлена  $P_n(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  з дійсними коефіцієнтами не перевищує кількості змін знаку його коефіцієнтів. (кількість змін знаку коефіцієнтів багаточлена – це кількість пар  $(a_k; a_m)$  таких, що  $k < m$ ,  $a_k a_m < 0$  і  $a_j = 0$  для всіх  $j \in \overline{k; m-1}$ ).

4. Для того щоб функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на проміжку  $(a; b)$ , необхідно і достатньо, щоб  $f(\alpha x_1 + \beta x_2) \leq \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$  для будь-яких  $x_1$  і  $x_2$ ,  $a < x_1 < x_2 < b$ , та будь-яких  $\alpha \in [0; 1]$  і  $\beta \in [0; 1]$ ,  $\alpha + \beta = 1$ .

5. Для того щоб функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на проміжку  $(a; b)$ ,

необхідно і достатньо, щоб  $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \\ 1 & x_3 & f(x_3) \end{vmatrix} \geq 0$  для будь-яких  $x_1$ ,  $x_2$  і  $x_3$ ,

$a < x_1 < x_2 < x_3 < b$ .

6. Для того щоб функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на проміжку  $(a;b)$ , необхідно і достатньо, щоб  $f(x_1\alpha_1 + \dots + x_n\alpha_n) \leq \alpha_1 f(x_1) + \dots + \alpha_n f(x_n)$  для будь-яких  $x_j \in (a;b)$  і  $\alpha_j \in [0;1]$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 1$ ,  $j \in \overline{1;n}$ .
7. Для того щоб функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на проміжку  $(a;b)$ , необхідно і достатньо, щоб для будь-якого  $x_0 \in (a;b)$  функція  $g(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$  була неспадною на множині  $A = (a; x_0) \cup (x_0; b)$ .
8. Існує неперервна на  $\mathbb{R}$  функція  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є опуклою на кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ , але не є опуклою на  $\mathbb{R}$ .
9. Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a;b)$ , то вона є неперервною на  $(a;b)$ .
10. Для того щоб функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на проміжку  $(a;b)$ , необхідно і достатньо, щоб вона була неперервною на  $(a;b)$  і  $f((x_1 + x_2)/2) \leq (f(x_1) + f(x_2))/2$  для будь-яких  $x_1$  і  $x_2$ ,  $a < x_1 < x_2 < b$ .
11. Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a;b)$ , то вона має в кожній точці  $x \in (a;b)$  праву та ліву похідні і  $f'_-(x) \leq f'_+(x)$ .
12. Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a;b)$ , то вона має в кожній точці  $x \in (a;b)$  праву та ліву похідні і  $f'_-(x_1) \leq f'_+(x_1) \leq f'_-(x_2) \leq f'_+(x_2)$ ,  $a < x_1 < x_2 < b$ .
13. Якщо функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a;b)$ , то вона має в кожній точці  $x \in (a;b)$  праву та ліву похідні і  $f'_-(x_1) \leq (f(x_2) - f(x_1))/(x_2 - x_1) \leq f'_+(x_2)$ ,  $a < x_1 < x_2 < b$ .
14. Для того щоб диференційовна на проміжку  $(a;b)$  функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на  $(a;b)$ , необхідно і достатньо, щоб функція  $f'$  була неспадною на  $(a;b)$ .
15. Для того щоб диференційовна на проміжку  $(a;b)$  функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на  $(a;b)$ , необхідно і достатньо, щоб для будь-якого  $x_0 \in (a;b)$  її графік на  $(a;b)$  лежав не нижче дотичної, проведеної до нього в точці  $(x_0; f(x_0))$ .
16. Для того щоб двічі диференційовна на проміжку  $(a;b)$  функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на  $(a;b)$ , необхідно і достатньо, щоб  $(\forall x \in (a;b)): f''(x) \geq 0$ .
17. Для того щоб диференційовна на проміжку  $(a;b)$  функція  $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{R}$  була

вгнутою на  $(a;b)$ , необхідно і достатньо, щоб функція  $f'$  була незростаючою на  $(a;b)$ .

$$18. \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt[n]{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}, \quad x_i \geq 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$19. \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2}, \quad x > 0, \quad y > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

20. Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $[a;b]$  і  $f'_+(a)f'_-(b) \leq 0$ , то знайдеться така точка  $c \in [a;b]$ , що  $f'(c) = 0$ .

21. Якщо функція  $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $[a;b]$ , то для кожного  $D$ , яке лежить між  $f'_+(a)$  і  $f'_-(b)$  знайдеться така точка  $c \in [a;b]$ , що  $f'(c) = D$ .

22. Якщо функція  $\varphi:[0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty)$  є диференційовною на  $[0;+\infty)$  і  $x\varphi'(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , то  $\varphi(ax) \sim \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , для кожного  $a > 0$ .

23. Якщо функція  $\varphi:[0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty)$  є диференційовною на  $[0;+\infty)$  і  $x\varphi'(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , то  $\varphi(x) = o(x^\varepsilon)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , для кожного  $\varepsilon > 0$ .

24. Якщо функція  $p:[0;+\infty) \rightarrow (0;+\infty)$  є диференційовною на  $[0;+\infty)$ ,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \rho \in [0;+\infty), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} xp'(x) \ln x = 0 \quad \text{і} \quad h(x) = x^{p(x)}, \quad \text{то} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(cx)}{h(x)} = c^\rho \quad \text{для}$$

кожного  $c > 0$ .

25. Якщо функція  $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідні до порядку  $n$  включно в точці  $a$ ,  $P_n(x)$  – багаточлен Тейлора степеня  $n$  в точці  $a$ ,  $Q_n(x)$  – довільний багаточлен степеня  $n$ , то знайдеться окіл точки  $a$ , для всіх  $x$  з якого виконується  $|f(x) - P_n(x)| \leq |f(x) - Q_n(x)|$ .

26.  $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : (1-x^2)T_m''(x) - xT_m'(x) + m^2T_m(x) = 0$ , якщо  
 $T_m(x) = \cos(m \arccos x)$  – багаточлен Чебишова.

27.  $(\forall m \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in \mathbb{R}) : (1-x^2)P_m''(x) - 2xP_m'(x) + m(m+1)P_m(x) = 0$ , якщо  
 $P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} ((x^2-1)^m)^{(m)}$  – багаточлен Лежандра.

28.  $(\forall m \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in \mathbb{R}) : xL_m''(x) - (1-x)L_m'(x) + mL_m(x) = 0$ , якщо  
 $L_m(x) = e^x (x^m e^{-x})^{(m)}$  – багаточлен Лагера.

29.  $(\forall m \in \mathbb{N}_0)(\forall x \in \mathbb{R}) : H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0$ , якщо  
 $H_m(x) = (-1)^m e^{x^2} (e^{-x^2})^{(m)}$  – багаточлен Ерміта.

30. Всі багаточлени Лежандра  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} ((x^2 - 1)^n)^{(n)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , мають лише дійсні нулі і всі вони належать проміжку  $(-1; 1)$ .

31. Всі багаточлени Лагера  $L_n(x) = e^x (x^n e^{-x})^{(n)}$  мають лише дійсні нулі.

32. Всі багаточлени Ерміта  $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} (e^{-x^2})^{(n)}$  мають лише дійсні нулі.

### 6. Доведіть твердження

1. Існують функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які не мають похідної в точці  $x = 0$ , а функція  $f + \varphi$  має похідну в цій точці.

2. Існують функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , які не мають похідної в точці  $x = 0$ , а функція  $f\varphi$  має похідну в цій точці.

3. Існують такі функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що функції  $\varphi$  і  $f\varphi$  мають похідну в точці  $x = 0$ , а функція  $f$  не має похідної в цій точці.

4. Існують такі функції  $f: (0; \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: (0; \pi/2) \rightarrow \mathbb{R}$ , диференційовні на проміжку  $(0; \pi/2)$ , що

$$(\forall x \in (0; \pi/2)): f(x) < \varphi(x) \text{ і } (\forall x \in (0; \pi/2)): f'(x) > \varphi'(x).$$

5. Існує така функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка є зростаючою на проміжках  $(a; c)$  та  $(b; d)$  і не є зростаючою на множині  $(a; c) \cup (b; d)$ .

6. Якщо функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервними в точці  $x_0 \in \mathbb{R}$  і мають в цій точці додатні максимуми, то функція  $F = f\varphi$  також має в точці  $x_0$  максимум.

7. Існує диференційовна на проміжку  $[a; b]$  функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , яка в точці  $c \in [a; b]$  приймає найбільше на  $[a; b]$  значення і  $f'(c) \neq 0$ .

8. Рівняння  $xe^x = 2$  має єдиний дійсний корінь і цей корінь належить проміжку  $(0; 1)$ .

9. Якщо  $a \in (1; +\infty)$ , то рівняння  $a^x = ax$  має два дійсні корені.

10. Для того щоб диференційовна на проміжку  $(a; b)$  функція  $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  була неспадною на  $(a; b)$ , необхідно і достатньо, щоб  $(\forall x \in (a; b)): f'(x) \geq 0$ .

11. Функція  $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x \in [0; +\infty), \\ 0, & x \in (-\infty; 0], \end{cases}$  має всі похідні в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$ .

12. Два поліноми  $P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$  і  $Q_m(x) = \sum_{k=0}^m b_k x^k$  є рівними, тобто  $(\forall x \in \mathbb{R}): P_n(x) = Q_m(x)$ , тоді і тільки тоді, коли  $n = m$  і рівними є відповідні коефіцієнти цих поліномів, тобто  $(\forall k \in \overline{0; n}): a_k = b_k$ .

### 34. Вправи і задачі розрахункового характеру.

#### 1. Знайдіть границі

$$1. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \pi/6} \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{a - x}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos a - \cos x}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln a - \ln x}{x - a}, \quad a \in (0; +\infty).$$

$$7. \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ctg} \left( \frac{\pi}{6} + t \right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{6}}{t}.$$

$$8. \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{3} + \Delta x \right) - \operatorname{tg} \frac{\pi}{3}}{\Delta x}.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\operatorname{arctg}(2 + 1/n) - \operatorname{arctg} 2).$$

$$10. \lim_{n \rightarrow \infty} n(\operatorname{arcctg}(a + 2/n) - \operatorname{arcctg} 3).$$

#### 2. Виходячи з означення похідної функції в точці знайдіть $f'(x_0)$ , $f'_+(x_0)$ та $f'_-(x_0)$ або доведіть їх неіснування

$$1. f(x) = x^2 + 2x, \quad x_0 = -1.$$

$$2. f(x) = x + \sin 2x, \quad x_0 = \pi/6.$$

$$3. f(x) = x^2, \quad x_0 = 1.$$

$$4. f(x) = 2x^3 + 1, \quad x_0 = 0.$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [0; +\infty), \\ 1, & x \in (-\infty; 0), \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$6. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [0; +\infty), \\ 3x - 2, & x \in (-\infty; 0), \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$7. f(x) = |\sin x|, \quad x_0 = 0.$$

$$8. f(x) = |x| + |x - 1|, \quad x_0 = 1.$$

$$9. f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$10. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$11. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x - \text{іраціональне}, \\ 0, & \text{якщо } x - \text{раціональне}, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$12. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

3. Наведіть приклад неперервної на  $\mathbb{R}$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , яка не має похідної у вказаних точках

1.  $x_0 = 1$ .

2.  $x_0 = 0$ .

3.  $x_0 = 0, x_1 = 1$ .

4.  $x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$ .

4. Наведіть приклад неперервної на  $\mathbb{R}$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої

1.  $f'(0) = +\infty$ .

2.  $f'(0) = -\infty$ .

3.  $f'_+(0) = +\infty, f'_-(0) = -\infty$ .

4.  $f'_-(0) = +\infty, f'_+(0) = -\infty$ .

5. Знайдіть похідну функції у вказаній точці

1.  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x}, x_0 = 1$ .

2.  $f(x) = \frac{2}{x}, x_0 = -1$ .

3.  $f(t) = \frac{1}{2t}, t_0 = -1$ .

4.  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, x_0 = 1$ .

5.  $f(x) = \frac{2}{x^3}, x_0 = 1$ .

6.  $f(u) = 2u - 4 + \sqrt{2}u^2, u_0 = 0$ .

7.  $f(x) = \frac{x}{4} + \sqrt{2} - \frac{2}{x^2}, x_0 = -1$ .

8.  $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{2}} + x^2\sqrt{2}, x_0 = 1$ .

9.  $f(s) = s^{\sqrt{2}}, s_0 = 1$ .

10.  $f(x) = \sqrt{2}x^{-\sqrt{3}} + \pi^{-\sqrt{2}}, x_0 = 1$ .

11.  $f(x) = e^{\sqrt{\pi}} + x^{\pi^2}, x_0 = 1$ .

12.  $f(x) = x^5\sqrt{x} + 2x\sqrt{2x}, x_0 = 1$ .

13.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x}} + \frac{\sqrt{2x}}{x^3}, x_0 = 1$ .

14.  $f(y) = 4 - 2^y + \log_2 3, y_0 = 0$ .

15.  $f(\tau) = \sqrt{\tau} + \frac{1}{\tau}, \tau_0 = 1$ .

16.  $f(x) = 2 \sin x + \ln 2, x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

17.  $f(x) = e^2 \cos x, x_0 = 0$ .

18.  $f(x) = -2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} 1, x_0 = \frac{\pi}{4}$ .

19.  $f(x) = e^{\sin \sqrt{x}} \operatorname{ch} x, x_0 = 0.$

20.  $f(w) = \frac{\operatorname{sh} w}{e^{\sqrt{2}}}, w_0 = 1.$

21.  $f(x) = e^{\sin \sqrt{x}} + \ln x, x_0 = e.$

22.  $f(x) = \arcsin x + \ln 3, x_0 = -1.$

23.  $f(x) = \sqrt{3} \arccos x, x_0 = 0.$

24.  $f(x) = \operatorname{arctg} x + \ln \frac{1}{2}, x_0 = 1.$

25.  $f(y) = \frac{y^2}{2} + \operatorname{arcctg} y, y_0 = 1.$

26.  $f(x) = \frac{\lg \frac{1}{3}}{2} + \operatorname{arcctg} x, x_0 = 1.$

27.  $f(x) = \frac{\sin x}{4} + \frac{\cos x}{2}, x_0 = \pi / 2.$

28.  $f(x) = 1 + \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x}}}, x_0 = 1.$

29.  $f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{2}} + \frac{\operatorname{arcctg} x}{2}, x_0 = 1.$

30.  $f(x) = \frac{\operatorname{sh} x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \operatorname{ch} x, x_0 = 0.$

**6. Знайдіть похідну функції**

1.  $y = x^2 e^x.$

2.  $y = (x^2 + 1) \ln x.$

3.  $y = (2x^3 + 6) \cos x.$

4.  $y = \sqrt{x} \sin x.$

5.  $y = x \arccos x.$

6.  $y = x^2 \operatorname{arcctg} x.$

7.  $y = x \arcsin x.$

8.  $y = x^2 \arccos x.$

9.  $y = e^x \operatorname{ch} x.$

10.  $y = \ln x \operatorname{ch} x.$

11.  $y = \sin x (\operatorname{tg} x + 1).$

12.  $y = (\cos x + 1) \operatorname{ctg} x.$

13.  $y = \frac{x+1}{x-1}.$

14.  $y = \frac{x^2-1}{2x}.$

15.  $y = \frac{1+x+x^2}{1-x-x^2}.$

16.  $y = \frac{(1+x)^2}{(1-x)^2}.$

17.  $y = \frac{1}{1-\ln x}.$

18.  $y = \frac{1}{1-e^x}.$

19.  $y = \frac{1}{2-\sin x}.$

20.  $y = \frac{1}{3-\cos x}.$

21.  $y = \frac{1}{\sqrt{x} + 2}$ .

22.  $y = \frac{1}{1 - x^4}$ .

23.  $y = \frac{1}{x - \arcsin x}$ .

24.  $y = \frac{1}{2 \operatorname{arctg} x}$ .

25.  $y = \frac{1}{x \operatorname{sh} x}$ .

26.  $y = \frac{1}{2 \operatorname{ch} x}$ .

27.  $y = \frac{1}{x + \operatorname{tg} x}$ .

28.  $y = \frac{1}{x - \operatorname{ctg} x}$ .

29.  $y = \frac{1}{x^3 + 1}$ .

30.  $y = \frac{1}{1 - x^4}$ .

31.  $y = xe^x$ .

32.  $y = x \ln x$ .

33.  $y = x^2 \cos x$ .

34.  $y = x \sin x$ .

35.  $y = \arcsin x \cdot \arccos x$ .

36.  $y = \operatorname{arctg} x \cdot \operatorname{arcctg} x$ .

37.  $y = x^2 \arcsin x$ .

38.  $y = x^3 \arccos x$ .

39.  $y = e^x \operatorname{sh} x$ .

40.  $y = x^2 \operatorname{ch} x$ .

41.  $y = \sin x \operatorname{tg} x$ .

42.  $y = \cos x \operatorname{ctg} x$ .

43.  $y = \frac{x-1}{x+1}$ .

44.  $y = \frac{2x}{x^2 - 1}$ .

45.  $y = \frac{1-x-x^2}{1+x+x^2}$ .

46.  $y = \frac{(1-x)^2}{(1+x)^2}$ .

47.  $y = \frac{1}{2 \ln x}$ .

48.  $y = \frac{1}{e^x + 1}$ .

49.  $y = \frac{1}{\sin x - 1}$ .

50.  $y = \frac{1}{2 \cos x}$ .

51.  $y = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ .

52.  $y = \frac{1}{x^3 - 1}$ .

53.  $y = \frac{1}{3 \arcsin x}$ .

54.  $y = \frac{1}{x \operatorname{arctg} x + 1}$ .

55.  $y = \frac{1}{x \operatorname{sh} x}$ .

56.  $y = \frac{1}{x + \operatorname{ch} x}$ .

57.  $y = \frac{1}{x \operatorname{tg} x}$ .

58.  $y = \frac{1}{4 \operatorname{ctg} x}$ .

59.  $y = \frac{1}{x^2 + 1}$ .

60.  $y = \frac{1}{1 - x^2}$ .

61.  $y = \frac{x \sin x}{\operatorname{tg} x + 1}$ .

62.  $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ .

63.  $y = \sec x$ .

64.  $y = \operatorname{cosec} x$ .

65.  $y = \operatorname{th} x$ .

66.  $y = \operatorname{cth} x$ .

## 7. Знайдіть похідну функції

1.  $y = \sin 2x$ .

2.  $y = \sin(2x + 1)$ .

3.  $y = \operatorname{tg}(1 - x)$ .

4.  $y = \sin^3 x$ .

5.  $y = e^{1-4x}$ .

6.  $y = e^{-3x}$ .

7.  $y = \operatorname{ctg}^3 4x$ .

8.  $y = \arcsin^2(4x - 1)$ .

9.  $y = e^{-x^2}$ .

10.  $y = e^{\frac{1}{x}}$ .

11.  $y = \operatorname{arctg}(2x^3)$ .

12.  $y = \arccos^2(7 - 2x)$ .

13.  $y = e^{\sin^2 x}$ .

14.  $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{5x}$ .

15.  $y = e^{-\sin^2(1-3x)}$ .

16.  $y = \operatorname{tg}^3(1 - 3x^2)$ .

17.  $y = e^{-4 \sin^2 \sqrt{4x}}$ .

18.  $y = \ln \ln^2 x$ .

19.  $y = \ln \ln \ln^2 x$ .

20.  $y = \ln \arcsin x$ .

21.  $y = e^{\sin^3 \operatorname{tg}^2 \sqrt{x}}$ .

22.  $y = \sin e^{2 \cos x}$ .

23.  $y = (1 - 7x)^{10}$ .

24.  $y = (\sqrt{1-x})^{101}$ .

25.  $y = \operatorname{sh}^2(1-x)^8$ .

26.  $y = \operatorname{tg}^2(1-2x^2)^8$ .

27.  $y = e^{\operatorname{arctg}^2 x^2}$ .

28.  $y = \ln^2 \operatorname{ch}^3 4x$ .

29.  $y = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$ .

30.  $y = \frac{1}{1 - \sqrt{1-x^2}}$ .

31.  $y = \cos 2x$ .

32.  $y = \cos(2x+1)$ .

33.  $y = \operatorname{ctg}(1-x)$ .

34.  $y = \sin(1-x)$ .

35.  $y = \ln(1-2x)$ .

36.  $y = e^{2-3x}$ .

37.  $y = \operatorname{ctg}^3 x$ .

38.  $y = \sin^2 x$ .

39.  $y = \cos x^4$ .

40.  $y = \operatorname{tg} x^2$ .

41.  $y = e^{x^2}$ .

42.  $y = \cos(x^2 - x)$ .

43.  $y = \operatorname{arctg}(1-x)$ .

44.  $y = \arccos^2 x$ .

45.  $y = \arcsin x^2$ .

46.  $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ .

47.  $y = \sin^3 x^2$ .

48.  $y = \cos^2(1-x^3)$ .

49.  $y = \operatorname{sh}^2(1-2\sqrt{x})$ .

50.  $y = \operatorname{ch}^3(1-x^2)$ .

51.  $y = e^{\cos^2 x}$ .

52.  $y = \operatorname{arctg} \ln^2 x$ .

53.  $y = \operatorname{arctg}^2 \ln x$ .

54.  $y = \sqrt{\operatorname{tg}(1-3x^2)}$ .

55.  $y = e^{-\sin^2 \ln x}$ .

56.  $y = \ln^2 \ln x$ .

57.  $y = \ln^2 \ln \ln x$ .

58.  $y = \ln \arcsin^2 x$ .

59.  $y = e^{\sin^2 \operatorname{ctg}^3 \sqrt{-x}}$ .

60.  $y = \sin^2 e^{-\cos^3(1-2x)}$ .

61.  $y = \operatorname{sh}^3 \sqrt{\arcsin(-2\ln^2(1-x))}$ .

62.  $y = \sqrt{\arccos \operatorname{ch}^2 \sqrt{1-x} - 1}$ .

$$63. y = \operatorname{ch}\left(e^{-\operatorname{arctg}^2 x^3} - \sqrt[3]{1-2x}\right). \quad 64. y = \ln^2\left(\operatorname{ch}^3 \sqrt[4]{4x+1} + \sin x\right).$$

$$65. y = \frac{1}{1-\sqrt{x+1}}.$$

$$66. y = \frac{1}{1+\sqrt{1-x}}.$$

### 8. Знайдіть похідну функції

$$1. y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$2. y = \frac{e^{2x} + 1}{e^{-2x} + 1}.$$

$$3. y = x^2 \sin^2 x.$$

$$4. y = \sqrt{x-1} e^{-2x}.$$

$$5. y = \operatorname{sh} 2x \cdot \cos 2x.$$

$$6. y = \operatorname{ch}(1-2x) \cdot \sin(1-2x).$$

$$7. y = (1+2x)^5 (1-2x)^{10}.$$

$$8. y = (1-x)^7 (1+2x)^6.$$

$$9. y = x^9 (1-9x)^9.$$

$$10. y = (1-2x)^2 (x-1)(1+2x)^8.$$

$$11. y = x e^x \cos x.$$

$$12. y = x^2 2^x \operatorname{tg} x.$$

$$13. y = x \cdot \cos x \cdot e^x \cdot \operatorname{ctg} x.$$

$$14. y = x^3 \cdot \ln x \cdot \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{arctg} x.$$

$$15. y = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}, \quad a > 0.$$

$$16. y = \frac{\sqrt{3}}{1-2x}.$$

$$17. y = \frac{a^2 + \sqrt{3}}{(1-4x)^2}, \quad a > 0.$$

$$18. y = \frac{1+a^2}{(1-x)^8}, \quad a > 0.$$

$$19. y = \frac{1+2x}{\ln(1+2x)}.$$

$$20. y = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1+x^3}}.$$

$$21. y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}.$$

$$22. y = \frac{1-x}{\ln(1+x)}.$$

$$23. y = \frac{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}.$$

$$24. y = \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x}.$$

$$25. y = \frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 + \sin^2 x}.$$

$$26. y = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

27.  $y = \frac{e^{\sqrt{x}} - e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{2x}}.$

28.  $y = \ln \frac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}.$

29.  $y = \ln \frac{x^2}{\sqrt{\cos x}}.$

30.  $y = \ln \frac{3 - x^2}{2 - x^2}.$

31.  $y = \frac{1}{\sin \sqrt{x}}.$

32.  $y = \frac{1}{\sqrt{\cos x}}.$

33.  $y = \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg} \frac{1}{x}}}.$

34.  $y = \sqrt{\operatorname{arcsin} \frac{1}{x}}.$

35.  $y = \sqrt{1 + x\sqrt{x+3}}.$

36.  $y = x^2 \sqrt{1 + \sqrt{x}}.$

37.  $y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}}.$

38.  $y = \frac{1}{2} \operatorname{arcsin} \frac{2x}{1+x^2}.$

39.  $y = 2^{x \operatorname{tg} x}.$

40.  $y = e^{1/\ln x}.$

41.  $y = 3^{\frac{1}{2x \operatorname{sh} x}}.$

42.  $y = e^{\frac{2}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}}.$

43.  $y = \ln \sqrt{2 \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}.$

44.  $y = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}.$

45.  $y = \sin \left( \sin \left( \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x} \right) \right).$

46.  $y = \cos \left( \cos \frac{1}{2x} \right).$

47.  $y = (1 - \operatorname{sh} \sqrt{x})^{11}.$

48.  $y = \left( 2 - \operatorname{ch} \frac{2}{\sqrt{x}} \right)^{10}.$

49.  $y = 10^{-x \operatorname{arcsin} x}.$

50.  $y = \frac{1}{2^{x^2 \operatorname{arctg} x}}.$

51.  $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt{x}}}.$

52.  $y = \sqrt{\frac{1}{1 + \sqrt{1 + x^2}}}.$

53.  $y = e^{-x \ln^2 x}.$

54.  $y = \left( 1 + \ln \frac{1}{x} \right)^5.$

$$55. y = \frac{\sin^2 x}{1 + \operatorname{tg} x} + \frac{\cos^2 x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

$$56. y = \frac{1 + \sin^2 x}{\cos x^2}.$$

$$57. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), a > 0. \quad 58. y = \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2}), a > 0.$$

$$59. y = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a}, a > 0.$$

$$60. y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}), a > 0.$$

$$61. y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} + \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}|, a > 0.$$

$$62. y = \log_x(x^2 + 4).$$

$$63. y = \ln \frac{\sqrt{a^2 + x - 1}}{a - x} + \sqrt{3} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}}, a > 0.$$

### 9. Знайдіть похідну функції

$$1. y = x^{\frac{x}{\ln x}}.$$

$$2. y = (x^2 + 1)^{2x}.$$

$$3. y = x^{\frac{\ln x}{x}}.$$

$$4. y = \operatorname{tg}^{\frac{x}{\ln x}} x.$$

$$5. y = x^{e^{\sqrt{x}}}.$$

$$6. y = x^{e^{\operatorname{tg} x}}.$$

$$7. y = x^{2^x} 2^x.$$

$$8. y = 9^{x^9} x^9.$$

$$9. y = e^{x^2} \ln x \operatorname{ctg}^x x \sin x. \quad 10. y = 2^{x^3} \sqrt{-x} \arcsin^x x \cos x.$$

$$11. y = \operatorname{arctg} x^{\operatorname{arctg} x}.$$

$$12. y = \operatorname{arcctg}^{\operatorname{arctg} x} x.$$

$$13. y = \arccos x^{\arccos x}.$$

$$14. y = \arccos^{\arccos x} x.$$

$$15. y = \arcsin x^{\arcsin x}.$$

$$16. y = \arcsin^{\arcsin x} x.$$

$$17. y = \ln^x x.$$

$$18. y = \left( \frac{x}{1+x} \right)^{-x}.$$

$$19. y = x^{\cos x \sin x}.$$

$$20. y = x^{\cos^{\sin x} x}.$$

21.  $y = x^{-2x^2}$ .

22.  $y = (\sqrt{x})^{-\sqrt{x}}$ .

23.  $y = (\operatorname{tg} x)^{-\operatorname{ctg} x}$ .

24.  $y = \operatorname{tg} x^{-\operatorname{ctg} x}$ .

25.  $y = \cos x^{\sqrt{x}}$ .

26.  $y = x^{-x^2}$ .

27.  $y = x^{x^{\arcsin x}}$ .

28.  $y = x^{-x^{\arccos x}}$ .

29.  $y = 10^x \sqrt{x} \sin^x x \operatorname{arctg} x$ .

30.  $y = 3^{\sqrt{x}} \sqrt{1-x} \arccos x \operatorname{ch}^x x$ .

31.  $y = x^{-x}$ .

32.  $y = x^{2\sqrt{x}}$ .

33.  $y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} x}$ .

34.  $y = \lg x^{\operatorname{tg} x}$ .

35.  $y = \sin x^{\sqrt{x}}$ .

36.  $y = x^{x^3}$ .

37.  $y = x^{x^x}$ .

38.  $y = x^{x^{\cos x}}$ .

39.  $y = e^x x^2 \operatorname{tg}^x x \arcsin x$ .

40.  $y = 2^x \sqrt{1-x} \arccos^x x \operatorname{sh} x$ .

41.  $y = x^{\sin x^{\cos x}}$ .

42.  $y = x^{\sin^{\cos x} x}$ .

43.  $y = \arcsin x^{\arccos x}$ .

44.  $y = \arccos^{\arcsin x} x$ .

45.  $y = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[3]{(x-5)^2}}$ .

46.  $y = \sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}$ .

47.  $y = x^{x^e} + e^{x^x} + x^{x^e}$ .

**10. Знайдіть похідну функції**

1.  $y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5} - \frac{4}{(x-2)^5}$ .

2.  $y = \sqrt[3]{(x-3)^4} - \frac{3}{2x^3 - 3x + 1}$ .

3.  $y = 2^{\cos x} \operatorname{arctg} 5x^3$ .

4.  $y = 2^{\operatorname{tg} x} \arcsin 7x^4$ .

5.  $y = \frac{e^{-\sin x}}{(x+5)^{10}}$ .

6.  $y = \frac{(x-4)^7}{e^{\operatorname{ctg} x}}$ .

7.  $y = \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\ln(5x+1)}$ .

8.  $y = \frac{\lg^3 x}{\sin 5x^2}$ .

9.  $y = \frac{5 \ln(5x+7)}{(x-7)^2}$ .

10.  $y = \frac{7 \log_4(2x-5)}{(x-1)^5}$ .

11.  $y = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5} - \frac{3}{(x-5)^4}$ .

12.  $y = \sqrt[5]{(x+4)^6} - \frac{2}{2x^2 - 3x + 7}$ .

13.  $y = \sin^2 3x \cdot \operatorname{arctg} 3x^5$ .

14.  $y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x} \cdot \arccos x^4$ .

15.  $y = \frac{(3x+1)^4}{e^{4x}}$ .

16.  $y = \frac{5x^2 + 4x - 2}{e^{-x}}$ .

17.  $y = \frac{\operatorname{tg} \sqrt{x}}{\log_2(7x-5)}$ .

18.  $y = \frac{\ln^3(x-5)}{\operatorname{tg} \frac{1}{x}}$ .

19.  $y = \sqrt{\frac{2x+1}{2x-1}} \log_2(x-3x^2)$ .

20.  $y = \sqrt[5]{\frac{x+1}{x-1}} \log_3(x^2 + x + 4)$ .

21.  $y = \sqrt[5]{3x^2 + 4x - 5} + \frac{4}{(x-4)^4}$ .

22.  $y = \sqrt[4]{(x+4)^5} - \frac{4}{7x^2 - 3x + 2}$ .

23.  $y = \operatorname{sh}^4 3x \cdot \arccos 5x^4$ .

24.  $y = (2-x)^7 \cdot \arccos \sqrt{x}$ .

25.  $y = \frac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$ .

26.  $y = \frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}$ .

27.  $y = \frac{\operatorname{arctg}^4 5x}{\operatorname{sh} \sqrt{x}}$ .

28.  $y = \frac{\arcsin 5x^3}{\operatorname{ch} \sqrt{x}}$ .

29.  $y = \frac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)}$ .

30.  $y = \frac{\sqrt{(x+2)^3(x-1)^4}}{(x+2)^7}$ .

31.  $y = -\sqrt[5]{-x^4 + 3x + 4} + \frac{3}{(x+4)^2}$ .

32.  $y = \sqrt{(x-3)^7} - \frac{9}{7x^2 - 5x - 8}$ .

33.  $y = \operatorname{sh}^3 4x \cdot \arccos \sqrt{x}$ .

34.  $y = \operatorname{ch}^2 5x \cdot \operatorname{arctg} x^4$ .

35.  $y = \frac{e^{\arccos^3 x}}{\sqrt{x+5}}$ .

36.  $y = \frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x}}$ .

37.  $y = \frac{1}{\sqrt{1+e^{-\sqrt{x}}}}$ .

38.  $y = \frac{1+x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$ .

39.  $y = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$ .

40.  $y = \ln \left( \arccos \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ .

41.  $y = \frac{1-10^x}{1+10^x}$ .

42.  $y = \frac{x}{2^{\ln x}}$ .

43.  $y = \frac{x}{4^x}$ .

44.  $y = \frac{x^2 + e^x}{2^x}$ .

**11. Знайдіть диференціали функцій**

1.  $f(x) = \frac{\sqrt{2}}{x^{\sqrt{2}}} + \frac{x^{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}$ .

2.  $f(x) = \sin(x - x^2)$ .

3.  $f(x) = (1-x)^7$ .

4.  $f(x) = (1-2x)^{-5}$ .

5.  $f(x) = \frac{1}{\sin(1-x)}$ .

**12. Знайдіть  $df(x_0)$ , якщо**

1.  $f(x) = 5\sqrt[3]{x}$ ,  $x_0 = 1$ ,  $dx = 0,1$ .

2.  $f(x) = \sin^2 2x$ ,  $x_0 = \pi/4$ ,  $dx = 0,01$ .

3.  $f(x) = 5^{\ln^3 \operatorname{tg} x}$ ,  $x_0 = \pi/4$ ,  $dx = 0,1$ .

4.  $f(t) = \frac{1}{(1-t)^4}$ ,  $t_0 = 2$ ,  $dt = 0,01$ .

**13. Обчисліть приблизно з використанням диференціала**

1.  $\sqrt{9,01}$ .

2.  $\sqrt{\frac{4,1^2 + 4}{4,1^2 - 12}}$ .

3.  $\sqrt{\frac{2,037^2 - 3}{2,037^2 + 5}}$ .

4.  $\operatorname{arctg} 1,05$ .

5.  $\sin 29^\circ$ .

6.  $\cos 151^\circ$ .

**14. Знайдіть  $f'''(x_0)$  або доведіть її неіснування**

$$1. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [0; +\infty), \\ 1, & x \in (-\infty; 0], \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \in [0; +\infty), \\ 3x - 2, & x \in (-\infty; 0), \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$3. f(x) = |\sin x|, \quad x_0 = 0.$$

$$4. f(x) = |x|^3, \quad x_0 = 1.$$

$$5. f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0. \quad 6. f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{якщо } x \text{ — ірраціональне,} \\ 0, & \text{якщо } x \text{ — раціональне,} \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

$$8. f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

**15.** Знайдіть похідну функції вказаного порядку  $n$  у вказаній точці

$$1. f(x) = e^x \cos x, \quad n = 2, \quad x_0 = 0. \quad 2. f(x) = e^{-x} \sin x, \quad n = 2, \quad x_0 = 0.$$

$$3. \varphi(x) = \frac{1}{1 - \sqrt{x}}, \quad n = 2, \quad x_0 = 0. \quad 4. F(x) = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, \quad n = 2, \quad x_0 = 1.$$

$$5. \psi(x) = \frac{x}{3^x}, \quad n = 4, \quad x_0 = 0. \quad 6. f(t) = \frac{2^t}{t}, \quad n = 2, \quad t_0 = 1.$$

$$7. f(y) = \frac{y^2}{1 - y}, \quad n = 2, \quad y_0 = 0. \quad 8. f(x) = \frac{x^2}{1 + x}, \quad n = 2, \quad x_0 = 1.$$

$$9. f(x) = \frac{1}{1 - x}, \quad n = 4, \quad x_0 = -1. \quad 10. f(x) = \cos^2 x, \quad n = 2, \quad x_0 = \pi.$$

$$11. f(x) = \arcsin x, \quad n = 2, \quad x_0 = 1/2. \quad 12. f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad n = 2, \quad x_0 = 1.$$

$$13. f(x) = \arccos x, \quad n = 2, \quad x_0 = 1. \quad 14. f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad n = 2, \quad x_0 = 1.$$

$$15. f(x) = 2^{-x}, \quad n = 3, \quad x_0 = 0. \quad 16. f(x) = \operatorname{sh} 2x, \quad n = 2, \quad x_0 = 0.$$

17.  $f(x) = xe^{-x^2}$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

18.  $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 1$ .

19.  $f(x) = \sqrt{1 - x^2} \arcsin x$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = -1$ .

20.  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

21.  $f(x) = \operatorname{ch}(-x)$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

22.  $f(x) = \operatorname{arctg} 1$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

23.  $f(x) = \operatorname{sh} 2x$ ,  $n = 3$ ,  $x_0 = 0$ .

24.  $f(x) = x \cos x$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

25.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

26.  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

27.  $f(x) = e^{-x}$ ,  $n = 4$ ,  $x_0 = 1$ .

28.  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ,  $n = 3$ ,  $x_0 = 1$ .

29.  $f(x) = x^2 \ln x$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 1$ .

30.  $f(x) = xe^{-x}$ ,  $n = 3$ ,  $x_0 = 0$ .

31.  $f(x) = x^2$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 2$ .

32.  $f(x) = x^3$ ,  $n = 3$ ,  $x_0 = -2$ .

33.  $f(x) = e^{2x}$ ,  $n = 3$ ,  $x_0 = 0$ .

34.  $f(x) = x \sin x$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = \pi$ .

35.  $f(t) = t\sqrt{1 + t^2}$ ,  $n = 2$ ,  $t_0 = 0$ .

36.  $F(x) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$ ,  $n = 2$ ,  $x_0 = 0$ .

37.  $F(y) = \frac{y^6}{2} + \frac{e^{2y}}{3}$ ,  $n = 4$ ,  $y_0 = 0$ .

38.  $B(\tau) = \frac{2}{\tau} + \frac{\tau^2}{2}$ ,  $n = 3$ ,  $\tau_0 = 1$ .

39.  $f(x) = x \ln x$ ,  $n = 4$ ,  $x_0 = 1$ .

40.  $A(x) = x^2 e^{-2x}$ ,  $n = 3$ ,  $x_0 = 0$ .

**16.** Знайдіть похідну порядку  $n$

1.  $y = \frac{\ln x}{x}$ ,  $n = 6$ .

2.  $y = x \ln x$ ,  $n = 5$ .

3.  $y = e^x x^2$ ,  $n = 10$ .

4.  $y = e^x / x$ ,  $n = 8$ .

5.  $y = e^x \sin x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

6.  $y = e^x \cos x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

7.  $y = e^x \operatorname{sh} x$ ,  $n = 4$ .

8.  $y = e^x \operatorname{ch} x$ ,  $n = 4$ .

9.  $y = x^4 \operatorname{sh} x$ ,  $n = 5$ .

10.  $y = x^2 \operatorname{ch} x$ ,  $n = 4$ .

11.  $y = x^3 \ln x$ ,  $n = 5$ .      12.  $y = x^3 \ln(1 + x^2)$ ,  $n = 4$ .
13.  $y = x^4 \cos x$ ,  $n = 7$ .      14.  $y = x^3 \sin x$ ,  $n = 6$ .
15.  $y = \frac{x}{x^2 - 1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      16.  $y = x^3 e^{-x}$ ,  $n = 8$ .
17.  $y = \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      18.  $y = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
19.  $y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}$ ,  $n = 5$ .      20.  $y = (3 - x^2) \ln^2 x$ ,  $n = 5$ .
21.  $y = \frac{1+x}{1-x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      22.  $y = \frac{4x+7}{2x+3}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
23.  $y = (x^2 + 2x + 5)e^{-2x}$ ,  $n = 8$ .      24.  $y = x \cos 2x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
25.  $y = (x^2 + x) \sin 2x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      26.  $y = (x^2 + 1) \sin x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
27.  $y = (x+1)4^{x+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      28.  $y = x \ln(1+x)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
29.  $y = \frac{x}{\sqrt{1+5x}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      30.  $y = \sin 2x + \sin 3x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
31.  $y = \cos 2x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      32.  $y = \sin 2x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
33.  $y = \frac{1}{2x+1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      34.  $y = \frac{1}{2x-1}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
35.  $y = \frac{1}{x(x-1)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      36.  $y = \frac{1}{(x+1)(x-1)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
37.  $y = \sin^2 x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      38.  $y = \cos^2 x$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
39.  $y = e^{-x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      40.  $y = e^{2x}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
41.  $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .      42.  $y = \frac{1}{x^2 + 3x - 4}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
43.  $y = x^2 e^x$ ,  $n = 8$ .      44.  $y = x^3 \sin x$ ,  $n = 10$ .
45.  $y = \operatorname{sh} x$ ,  $n = 8$ .      46.  $y = \operatorname{ch} x$ ,  $n = 7$ .

17. Знайдіть першу та другу похідну функції  $f$ , заданої параметрично

$$1. \begin{cases} x = 2t - t^3, \\ y = 3t - t^2. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x = \cos t - \ln \operatorname{ctg} \frac{1}{t}, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x = \frac{\ln t}{t}, \\ y = t^2 \ln t. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} x = \arccos t, \\ y = \sqrt{1 - t^2}. \end{cases}$$

18. Знайдіть  $f'(x_0)$  і  $f''(x_0)$ , якщо  $f$  задана параметрично

$$1. \begin{cases} x = 3 \cos t, \\ y = 4 \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2], \quad x_0 = 2\sqrt{2}.$$

$$2. \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \quad x_0 = \pi.$$

$$3. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2], \quad x_0 = 1/8.$$

$$4. \begin{cases} x = \cos^{2/3} t, \\ y = \sin^{2/3} t, \end{cases} \quad t \in [\pi/2; \pi], \quad x_0 = 1/\sqrt[3]{4}.$$

19. Якщо  $f(x) = e^x \operatorname{sh} x$ , то  $f'' + 2f' + 2f = 0$ .

20. Якщо  $f(x) = (x^2 - 1)^2$ , то  $(x^2 - 1)f^{(4)} + 2xf^{(3)} - 6f^{(2)} = 0$ .

21. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задана параметрично системою  $\begin{cases} x = 2t + 3t^2, \\ y = t^2 + 2t^3, \end{cases}$  то

$$f'^2 + f'^3 = f.$$

22. Якщо  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задана параметрично системою  $\begin{cases} x = \operatorname{ch} 2t, \\ y = \operatorname{sh} 2t, \end{cases}$  то  $ff' - x = 0$ .

23. Якщо  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  задана параметрично системою  $\begin{cases} x = \sin t, \\ y = \sin \lambda t, \end{cases}$  то

$(1 - x^2)f'' - xf'(x) + \lambda^2 f = 0$ , де  $\lambda$  – довільне число.

24. Для функції  $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  написано висловлення є істинним. Напишіть відповідне висловлення для функції  $u = u(t)$  (тут  $\varphi$  – відома двічі неперервно диференційовна функція)

1.  $(\forall x \in \mathbb{R}): y'(x) + y(x) = 0, \quad u(t) = y(e^t).$

2.  $(\forall x \in \mathbb{R}): y'(x) + y(x) = 0, \quad y(x) = u(e^x).$

3.  $(\forall x \in \mathbb{R}): y'(x) + y(x) = 0, \quad u(t) = y(\varphi(t)).$

4.  $(\forall x \in \mathbb{R}): y'(x) + y(x) = 0, \quad y(x) = u(\varphi(x)).$

5.  $(\forall x \in \mathbb{R}): y''(x) + y(x) = 0, \quad y(x) = u(\varphi(x)).$

6.  $(\forall x \in \mathbb{R}): y''(x) + y(x) = 0, \quad u(t) = y(\varphi(t)).$

25. Напишіть рівняння дотичної і нормалі до графіка функції  $f$  в точці  $(x_0; f(x_0))$

1.  $f(x) = x^3, \quad x_0 = 0.$

2.  $f(x) = x^{2/3}, \quad x_0 = 0.$

3.  $f(x) = \sin x, \quad x_0 = \pi / 2.$

4.  $f(x) = \cos x, \quad x_0 = \pi / 2.$

5.  $f(x) = \ln x, \quad x_0 = 1.$

6.  $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x_0 = \pi / 4.$

7.  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad x_0 = \pi.$

8.  $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad x_0 = 1/8.$

26. Знайдіть точки, в яких дотична до графіка функції  $f$  паралельна вказаній прямій

1.  $f(x) = (x - 1)^2, \quad y = 2x + 1.$

2.  $f(x) = x^3, \quad y = -x + 1.$

3.  $f(x) = \operatorname{tg} x, \quad x + y = 1.$

4.  $f(x) = e^x, \quad y = x.$

27. Напишіть рівняння дотичної до графіка функції  $f(x) = x^2 + 2x - 1$  в точці його перетину з графіком функції  $f(x) = 2x^2$ .

28. Знайдіть таку точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ , що дотичні до графіків функцій  $f_1(x) = x^2$  і  $f_2(x) = x^3$  в точках  $(x_0; f_1(x_0))$  і  $(x_0; f_2(x_0))$ , відповідно, є паралельними.

29. Знайдіть числа  $b$  і  $c$ , для яких пряма  $y = 2x - 1$ , буде дотичною до графіка функції  $y = x^2 + bx + c$  в точці  $(x_0; y_0)$ , для якої  $x_0 = 1$ .
30. Знайдіть кути (кути між дотичними проведеними в точці перетину) під якими перетинаються графіки функцій
1.  $y = \sin x, \quad y = 0.$
  2.  $y = \cos x, \quad y = 0.$
  3.  $y = \operatorname{tg} x, \quad y = 0.$
  4.  $y = \sqrt{8 - x^2}, \quad y = \sqrt{2x}.$
  5.  $y = \sin x, \quad y = \cos x.$
  6.  $y = \operatorname{tg} x, \quad y = \operatorname{ctg} x.$
  7.  $y = x^2, \quad y = \sqrt{x}.$
  8.  $y = x^3, \quad y = \sqrt[3]{x}.$
31. Знайдіть таку точку  $x_0 \in \mathbb{R}$ , що дотична до графіка функції  $f(x) = x^2$  утворює з прямою  $3x - y + 1 = 0$  кут  $\pi / 4$ .
32. Знайдіть таке  $a \in \mathbb{R}$ , що графік функції  $f(x) = \frac{ax - x^2}{4}$  перетинає вісь  $OX$  під кутом  $\pi / 4$ .
33. Матеріальна точка рухається вздовж осі  $OX$  за законом  $x = t^3 + 3t + 1$ . Знайдіть її швидкість у точці  $x_0 = 1$ .
34. Матеріальна точка рухається вздовж прямої  $y = 2x + 1$  так, що її абсциса змінюється зі сталою швидкістю  $v = 4$ . Знайдіть швидкість зміни ординати.
35. По осі абсцис рухаються дві точки за законами  $x = 100 + 5t$  і  $x = t^2 / 2$ . Якими будуть їх швидкості в момент зустрічі?
36. Розпад радію відбувається за законом  $R = R_0 e^{-kt}$ , ( $R_0$  і  $k$  – сталі). Знайдіть швидкість розпаду.
37. Знайдіть диференціали вказаного порядку
1.  $y = \ln \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad n = 2.$
  2.  $y = x^{2/3}, \quad n = 2.$
  3.  $y = (x + 1)^3 (x - 1)^2, \quad n = 2.$
  4.  $y = \frac{e^x}{x}, \quad n = 3.$
  5.  $y = x^3, \quad n = 2.$
  6.  $y = \frac{x}{e^x}, \quad n \in \mathbb{N}.$
38. Знайдіть  $d^2 f(x_0)$ , якщо
1.  $f(x) = xe^x, \quad x_0 = 1, \quad dx = 0,1.$

$$2. f(x) = x^2 \sin x, \quad x_0 = \pi / 4, \quad dx = 0,2.$$

$$3. f(x) = \frac{x}{1-x}, \quad x_0 = 1, \quad dx = 1.$$

### 39. Знайдіть границі

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x)^x.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin x \cdot \ln \operatorname{ctg} x.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} x \right).$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\cos \sqrt{x})^{1/x^2}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 - \cos x)}{\ln \operatorname{tg} x}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{1/x^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 1} x^{1/(x-1)}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\operatorname{tg} x} - 1}{\operatorname{tg} x - x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0^+} (\arcsin 2x)^{\operatorname{tg} 2x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(1-x^4) - 5(1-x^5)}{(1-x^4)(1-x^5)}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x - x + 1}{x - x^x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln \left( \frac{2}{\pi} \arccos \frac{1}{x} \right)}{\ln(1+x)}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} x^{10} \ln x.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2^x - x^2}{x - 2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)^x.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{x^2 + 1} \right)^{1/x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^7 \frac{x^k}{k!}}{x^8}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^2}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3^x}{3^x - 9}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^4 - 4^x}{2^x - 16}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \sin 3x}{\ln \sin 2x}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left( \frac{1}{x^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x} \right).$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\ln^2(1+x)}.$$

25.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{x} \right) \sqrt{x}$ .
26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}$ .
27.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ .
28.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{x} \right)^{1/x^2}$ .
29.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}}{x^4}$ .
30.  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{1/x^2}$ .
31.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$ .
32.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$ .
33.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x$ .
34.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x}$ .
35.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^2}$ .
36.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x - \operatorname{tg} x}$ .
37.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1}{\cos x - 1}$ .
38.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ .
39.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}}{x^3}$ .
40.  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 e^{1/x^2}$ .
41.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$ .
42.  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \left( \frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right)$ .
43.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right)$ .
44.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \operatorname{ctg} x - \frac{1}{x} \right)$ .
45.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$ .
46.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$ .
47.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \ln \frac{1}{x} \right)^x$ .
48.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^x$ .
49.  $\lim_{x \rightarrow 0} (e^x + x)^{1/x}$ .
50.  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$ .

$$51. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{2}{x} + \cos \frac{2}{x} \right)^x.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1-x) + \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}{\operatorname{ctg} \pi x}.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\ln x}.$$

$$54. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \operatorname{tg} \frac{\pi x}{4} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}}.$$

$$55. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{2}{1-x^2} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{4}{1-x^4} - \frac{3}{1-x^3} \right).$$

$$57. \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{x^2} - 1).$$

$$58. \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{x^x - 1}.$$

$$59. \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \right)^{1/x^2}.$$

$$60. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - e^{\sin x}}{\sin^2 x}.$$

$$61. \lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}.$$

$$62. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\sqrt{x}} - 1}{\sqrt{\sin x}}.$$

$$63. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \operatorname{arctg} x}{\ln(1 + 1/x)}.$$

40. Чи можна знайти границі, використовуючи правила Лопітала?

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 + \cos x}{5 + \sin x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - \sin x}{4x + \cos x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right).$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} (4x^2 + 2^x)^{1/x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3 + \ln x}{100 - \ln \sin x}.$$

41. Покажіть, що  $(\forall c_1 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta) : f(x) \geq c_1 \varphi(x)$ , якщо

$$1. f(x) = e^x, \quad \varphi(x) = x^2.$$

$$2. f(x) = e^x, \quad \varphi(x) = x^4.$$

$$3. f(x) = x, \quad \varphi(x) = \ln x.$$

$$4. f(x) = e^x, \quad \varphi(x) = x^\mu.$$

$$5. f(x) = x^\mu, \quad \varphi(x) = \ln x, \quad \mu > 0.$$

$$6. f(x) = a^x, \quad \varphi(x) = x^\mu, \quad a > 1, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

$$7. f(x) = x^x, \quad \varphi(x) = a^x, \quad a > 1.$$

42. Доведіть тотожності

1.  $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi - 2 \operatorname{arctg} x, \quad x \geq 1.$
2.  $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2 \operatorname{arctg} x, \quad -1 < x < 1.$
3.  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = \frac{\pi}{4}, \quad x > -1.$
4.  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x} = -\frac{3\pi}{4}, \quad x < -1.$
5.  $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = -2\pi \operatorname{arctg} x, \quad x \leq 1.$
6.  $2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi, \quad x \geq 1.$
7.  $\cos^2 x + \cos^2 \left( \frac{\pi}{3} + x \right) - \cos x \cdot \cos \left( \frac{\pi}{3} + x \right) = \frac{3}{4}, \quad x \in \mathbb{R}.$
8.  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}, \quad x > 0.$
9.  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2}, \quad x < 0.$
10.  $\arccos x + \arccos(-x) = \pi, \quad -1 \leq x \leq 1.$
11.  $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg}(-x) = \pi, \quad 0 \leq x \leq 1.$
12.  $\arcsin x + \arccos \sqrt{1-x^2} = 0, \quad -1 \leq x \leq 1.$
13.  $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$
14.  $\operatorname{arctg} x = \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \geq 0.$
15.  $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x > 0.$

$$16. \arcsin x + 3 \arccos x + \arcsin(2x\sqrt{1-x^2}) = \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} < x < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$17. \arcsin \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \arccos \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = 0, \quad x \geq 0.$$

$$18. \operatorname{arctg} \frac{1}{2x} = \arccos \frac{2x}{\sqrt{1+4x^2}}, \quad x > 0.$$

$$19. \frac{1}{2} \arccos x = \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$20. 2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{x^2-1}{2x}, \quad x > 0.$$

$$21. 2 \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \frac{1-x^2}{2x}, \quad x > 0.$$

$$22. 2 \arcsin x = \arccos(1-x^2), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

$$23. \arccos \frac{1-x^2}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x, \quad 0 \leq x \leq +\infty.$$

$$24. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} 1 = \operatorname{arctg} \frac{1+x}{1-x}, \quad -\infty < x < 1.$$

$$25. 2 \operatorname{arctg} x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi, \quad 1 \leq x \leq +\infty.$$

$$26. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$27. \operatorname{arctg} x = \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$28. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

$$29. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad x \in (0; 1].$$

$$30. \arccos x = \operatorname{arccctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in [0;1).$$

$$31. \operatorname{arctg} x = \operatorname{arccctg} \frac{1}{x}, \quad x \in (0; +\infty).$$

$$32. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccctg} \frac{2}{x} = -\operatorname{arctg}(x^2 + 2) + \pi, \quad x \in (0; +\infty).$$

**43.** Знайдіть проміжки монотонності функції  $f$

$$1. f(x) = 2 - 3x + x^3.$$

$$2. f(x) = (x^2 - 1)^{3/2}.$$

$$3. f(x) = x \exp(-2x).$$

$$4. f(x) = (2 - x)(x + 1)^2.$$

$$5. f(x) = x^3 - 12x + 11.$$

$$6. f(x) = 2x^2 / (1 - x^2).$$

$$7. f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 1.$$

$$8. f(x) = x^3 + 6x - 7.$$

$$9. f(x) = x + \cos x.$$

$$10. f(x) = x^3 - 3x - 2.$$

$$11. f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}).$$

$$12. f(x) = x^4 - 2x^2 - 8.$$

$$13. f(x) = 2x^2 - \ln x.$$

$$14. f(x) = 4x^3 - 21x^2 + 18x + 7.$$

$$15. f(x) = (1 + 1/x)^x.$$

$$16. f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}.$$

$$17. f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2 - 1}.$$

$$18. f(x) = x^2 \ln x.$$

$$19. f(x) = x^2 - 10 \ln x.$$

$$20. f(x) = \exp(-3x).$$

$$21. f(x) = \exp(x) / x.$$

$$22. f(x) = (x - 1)^3 (2x + 3)^2.$$

$$23. f(x) = 8x^3 - x^4.$$

$$24. f(x) = xe^x.$$

$$25. f(x) = x^3 - 3x - \ln x.$$

$$26. f(x) = 2e^{2x} - 4e^x.$$

$$27. f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}.$$

$$28. f(x) = x^2 + 1/x^2.$$

$$29. f(x) = x + \ln(x^2 - 4).$$

$$30. f(x) = \frac{x^3}{9 - x^3}.$$

31.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ .
32.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x + 1$ .
33.  $f(x) = x^5 + 3x + 2$ .
34.  $f(x) = e^x + x^5$ .
35.  $f(x) = e^{-x} - x^3$ .
36.  $f(x) = -x + e^{-x}$ .
37.  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ .
38.  $f(x) = 2x^2 - \ln x$ .
39.  $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ .
40.  $f(x) = x + \cos x$ .
41.  $f(x) = \frac{x^2}{(x+2)^2}$ .
42.  $f(x) = \frac{x^3}{x^4 - 1}$ .
43.  $f(x) = (x+1)^{10} e^{-x}$ .
44.  $f(x) = x^2 - \ln x^2$ .
45.  $f(x) = \sqrt[3]{(2-x)(x^2 - 4x + 1)}$ .
46.  $f(x) = \sqrt[3]{(1+x)^2} - \sqrt[3]{(2+x)^2}$ .
47.  $f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{2} \sin x)$ .
48.  $f(x) = \ln(\sqrt{2} + \cos x)$ .
49.  $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ x^2 + 1, & x > 0. \end{cases}$
50.  $f(x) = \begin{cases} 4, & x = 2, \\ -3, & x = -2, \\ 1, & x \notin \{-2; 2\}. \end{cases}$
51.  $f(x) = \begin{cases} x, & x < -1, \\ 2 + x, & -1 \leq x \leq 2, \\ 6 - x, & x > 2. \end{cases}$
52.  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ .
53.  $\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi]$ .

**44.** Функція  $f$  називається зростаючою в точці  $x_0$ , якщо при деякому  $\delta > 0$  ( $\forall x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ) знаки чисел  $f(x) - f(x_0)$  і  $x - x_0$  є однаковими. Доведіть, що функція  $f$  є зростаючою на деякому проміжку  $(a; b)$  тоді і тільки тоді, коли вона є зростаючою в кожній точці  $x_0 \in (a; b)$ . На прикладі функції

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 + \sin \frac{2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

і  $x_0 = 0$  переконатись, що функція може бути зростаючою в точці  $x_0$ , але не бути зростаючою на жодному проміжку  $(a; b)$ , який її містить.

**45.** Знайдіть проміжки, звуження на які функції  $f$  є оборотною функцією

1.  $f(x) = x^2 + 3x + 2$ .
2.  $f(x) = x^3 - 4x$ .
3.  $f(x) = x + \ln x$ .
4.  $f(x) = x + e^x$ .
5.  $f(x) = \operatorname{sh} x$ .
6.  $f(x) = \operatorname{ch} x$ .
7.  $f(x) = \operatorname{cth} x$ .
8.  $f(x) = \operatorname{th} x$ .
9.  $f(x) = x - \sin x$ .
10.  $f(x) = 2x^2 - x^4$ .

**46.** Знайдіть екстремуми функцій

1.  $f(x) = 6x - x^3$ .
2.  $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 1$ .
3.  $f(x) = \frac{x}{1+x^3}$ .
4.  $f(x) = \frac{(x+1)^3}{(x-2)^2}$ .
5.  $f(x) = xe^x$ .
6.  $f(x) = x^2e^x$ .
7.  $f(x) = x^3e^{-4x}$ .
8.  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ .
9.  $f(x) = \sin 2x - x$ .
10.  $f(x) = \ln \sin x$ .
11.  $f(x) = e^x - 2x - e^{-x}$ .
12.  $f(x) = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$ .
13.  $f(x) = \frac{2^x}{x}$ .
14.  $f(x) = \frac{(x+3)^3}{(x+1)^2}$ .
15.  $f(x) = x^2\sqrt{e}$ .
16.  $f(x) = 2\sin x + \cos 2x$ .
17.  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 12$ .
18.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ .
19.  $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$ .
20.  $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$ .

21.  $f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$ .

22.  $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ .

23.  $f(x) = x^x$ .

24.  $f(x) = x + \sin x$ .

25.  $f(x) = (x^2 - 3) \ln x - \frac{3}{2} x^2 + 4x$ .

26.  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x}$ .

27.  $f(x) = (1+x)^2(x-2)$ .

28.  $f(x) = x^4 + 6x^2 + 5$ .

29.  $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 2x + 2$ .

30.  $f(x) = \exp(\sqrt[3]{x})$ .

31.  $f(x) = (x+1)e^{2x}$ .

32.  $f(x) = (x+3)^3(x+2)^{-2}$ .

33.  $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x - 14$ .

34.  $f(x) = 3x^3 - 6x$ .

35.  $f(x) = (1-x)^3$ .

36.  $f(x) = x^{2/5}$ .

37.  $f(x) = e^x + x^3$ .

38.  $f(x) = -x^5 - 4x^3 - x$ .

39.  $f(x) = \begin{cases} x^4 + 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$

40.  $f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$ .

41.  $f(x) = \frac{x}{x^4 + 4}$ .

42.  $f(x) = -x^2 \sqrt{x^2 + 2}$ .

43.  $f(x) = x - \ln(1+x)$ .

44.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ .

45.  $f(x) = \ln(1+x^2) - 2 \operatorname{arctg} x$ .

46.  $f(x) = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$ .

47.  $f(x) = x^5 + 5x - 6$ .

48.  $f(x) = x^6 + 4x^2$ .

49.  $f(x) = x^2 - x^8$ .

50.  $f(x) = (x-5)^{5/3} + 2$ .

51.  $f(x) = xe^x$ .

52.  $f(x) = x^4 - 8x^3 + 24x^2$ .

53.  $f(x) = x + \frac{2}{x+1}$ .

54.  $f(x) = x^4 + 8x^3 + 18x + 18$ .

55.  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ .

56.  $f(x) = \exp(\cos x)$ .

57.  $f(x) = \exp(\sin x)$ .

58.  $f(x) = \ln(1+x^3)$ .

59.  $f(x) = x^4(12 \ln x - 7)$ .

60.  $f(x) = (x+1)^4 + 2^x$ .

61.  $f(x) = \ln(1+x^2)$ .

62.  $f(x) = \exp(\arctg x)$ .

63.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ .

64.  $f(x) = x^4 + x^2 + 3^x$ .

65.  $f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$ .

66.  $f(x) = -x^2\sqrt{x^2+2}$ .

67. 
$$\begin{cases} x = \frac{(t+1)^2}{4}, \\ y = \frac{(t-1)^2}{4}. \end{cases}$$

68. 
$$\begin{cases} x = \cos^4 t, \\ y = \sin^4 t. \end{cases}$$

47. Доведіть нерівності

1.  $(1+x)^{3/2} < 1 + \frac{3x}{2} + \frac{3x^2}{8}, \quad x > 0.$

2.  $\operatorname{ch} x \leq e^{x^2/2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

3.  $\exp(2x) < (1+x)/(1-x), \quad 0 < x < 1.$

4.  $\ln(1+x) > x - x^2/2, \quad x > 0.$

5.  $\sin x > -x^3/6, \quad x > 0.$

6.  $|\sin nx| \leq n|\sin x|, \quad x \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$

7.  $2\sqrt{x} > 3 - 1/x, \quad x > 1.$

8.  $\ln(1+x) \geq x - x^2/2, \quad x \geq 0.$

9.  $e^x \leq 1 + x + x^2 e^x, \quad x > 0.$

10.  $\ln x \leq x/e, \quad x > 0.$

11.  $\sqrt{1+x} < 1 + x/2, \quad 0 < x < 8.$

12.  $\sqrt{1+x} > 1 + x/2 - x^2/8, \quad 0 < x < 8.$

13.  $\exp(x) > 1 + x + x^2/2, \quad x > 0.$

14.  $\exp(x) > ex, \quad x \in \mathbb{R}.$

15.  $\ln(1+x) > \frac{x}{x+1}, \quad x > 0.$

16.  $\sin x \geq \frac{2}{\pi}x, \quad 0 \leq x \leq \pi/2.$

17.  $\operatorname{ch} x \geq 1 + x^2/2, \quad x \in \mathbb{R}.$

18.  $\ln x \leq (x-1)/\sqrt{x}, \quad x > 0.$

19.  $\cos x > 1 - x^2/2, \quad x \in \mathbb{R}.$

20.  $1 + x \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \geq \sqrt{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

21.  $1 - 2\ln x \leq 1/x^2, \quad x > 0.$

22.  $\exp(x) > 1 + \ln(1+x), \quad x > 0.$

23.  $\ln(1-x) > -x/(1-x), \quad 0 < x < 1.$

24.  $\arctg x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1+x}, \quad x > 0.$

25.  $\exp(2x) \geq 2x^2, \quad x > 0.$

26.  $\mu(b-a)a^{\mu-1} \leq b^\mu - a^\mu \leq \mu b^{\mu-1}(b-a), \quad \mu \geq 1, \quad 0 < a < b < +\infty.$

$$27. \ln x_2 - \ln x_1 \leq x_2 - x_1, \quad 1 < x_1 < x_2 < +\infty.$$

$$28. n(x_2 - x_1)x_1^{n-1} \leq x_2^n - x_1^n \leq n(x_2 - x_1)x_2^{n-1}, \quad 0 < x_1 < x_2 < +\infty, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$29. (1+t)^\alpha / (1+t^\alpha) \leq 2^\alpha, \quad \alpha > 0 \text{ і } t \geq 0.$$

$$30. t \leq \frac{t^p}{p} + \frac{1}{q}, \quad p > 1, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad t \in [1; +\infty).$$

$$31. (1+t)^\alpha \leq 1+t^\alpha, \quad \alpha \in [0;1], \quad t \geq 0. \quad 32. \operatorname{arctg} x \leq x, \quad x \in [0; +\infty).$$

$$33. 2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1+x^2), \quad x \in [0; +\infty). \quad 34. \ln(1+x) > \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x}, \quad x \in (0; +\infty).$$

$$35. \sin x + \operatorname{tg} x > 2x, \quad x \in (0; \pi/2). \quad 36. \frac{b-a}{b} \leq \ln \frac{b}{a} \leq \frac{b-a}{a}, \quad 0 < a < b < +\infty.$$

$$37. x + \frac{x^3}{6} < \arcsin x, \quad x \in (0;1).$$

48. Знайдіть проміжки опуклості і точки перегину функції

$$1. f(x) = e^{-x} + x^2.$$

$$2. f(x) = e^x + x.$$

$$3. f(x) = \operatorname{tg} x.$$

$$4. f(x) = x^4 - 12.$$

$$5. f(x) = x^x.$$

$$6. f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

$$7. f(x) = \sqrt{1+x^2}.$$

$$8. f(x) = e^{-x^2}.$$

$$9. f(x) = \begin{cases} -e^x + \frac{4}{3}, & x \leq 0, \\ \frac{1}{3}e^x, & x > 0. \end{cases}$$

$$10. f(x) = 1 + |x^2 - 4|.$$

$$11. \begin{cases} x = te^{-t}, \\ y = te^t. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = \frac{t^2}{4(1-t)}, \\ y = \frac{t^3}{8(1-t)}. \end{cases}$$

49. Знайдіть асимптоти функцій

$$1. f(x) = \frac{x^4}{4(x-2)}.$$

$$2. f(x) = 3x - \arcsin \frac{1}{x}.$$

3.  $f(x) = \frac{2x^2}{x-1}$ .

4.  $f(x) = \frac{3}{x^2 - x}$ .

5.  $f(x) = \sqrt{3x^2 - 4}$ .

6.  $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+4)}$ .

7.  $f(x) = \ln \frac{x}{x+2} + 1$ .

8.  $f(x) = x/2 - \operatorname{arctg} x$ .

9.  $f(x) = \frac{x^4}{(1+x^2)(x^2-1)}$ .

10.  $f(x) = \exp(-1/\sin x)$ .

11.  $f(x) = \exp(-1/(x^2 + 2x))$ .

12.  $f(x) = \frac{1}{x} \exp(-1/(x-1))$ .

13.  $f(x) = 2x + 1 - \frac{\sin 3x}{x^2 + 1}$ .

14.  $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ .

15.  $f(x) = \frac{\ln^2 x}{x} - 3x$ .

16.  $f(x) = \frac{e^x}{x}$ .

17.  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

18.  $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ .

19.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2}$ .

20.  $f(x) = \frac{x}{2x-1} + 2x$ .

21.  $f(x) = 2x + \frac{\cos x}{x}$ .

22.  $f(x) = 2x + \frac{\sin^2 x}{x}$ .

23.  $f(x) = 2x + \sin x$ .

24.  $f(x) = -x - \cos x$ .

25.  $f(x) = x + \operatorname{arctg}^2 x$ .

26.  $f(x) = (2x^2 - 1) / \sqrt{x^2 - 2}$ .

27.  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 + 1}$ .

28.  $f(x) = \frac{1 - x\sqrt[3]{x^3 + 1}}{x}$ .

29.  $f(x) = (2x^2 - 9) / \sqrt{x^2 - 1}$ .

30.  $f(x) = (2x^2 - 9) / \sqrt{1 - x^2}$ .

31.  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ .

32.  $f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin x$ .

33.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

34.  $f(x) = \operatorname{ctg} x$ .

35.  $f(x) = \ln x$ .

36.  $f(x) = \frac{x^3}{x-1}$ .

37.  $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ .

38.  $f(x) = 2x - \arccos \frac{1}{x}$ .

39.  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x^2 - 1}$ .

40.  $f(x) = xe^{-1/x}$ .

41.  $f(x) = x^{-2/3}$ .

42.  $f(x) = x^{2/3} + x$ .

43.  $f(x) = 3 \ln \frac{x}{x-1} - 1$ .

44.  $f(x) = \frac{(x+1)\sqrt[3]{x^3+3}}{x}$ .

**50.** Знайдіть асимптоти функції, заданої параметрично

1. 
$$\begin{cases} x = \frac{t}{1+t^3}, \\ y = \frac{t^2}{1+t^3}. \end{cases}$$

2. 
$$\begin{cases} x = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \\ y = \frac{t}{1+t^4}. \end{cases}$$

**51.** Знайдіть найбільше і найменше значення, а також супремум і інфімум функції  $f$  на вказаному проміжку

1.  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 2x - 1}$ ,  $[-4; 6]$ .

2.  $f(x) = \frac{3x^2}{x-2}$ ,  $[-1; 1]$ .

3.  $f(x) = x + 3\sqrt[3]{x}$ ,  $[-10; 1]$

4.  $f(x) = x^2\sqrt[3]{(x+1)^2}$ ,  $[-2; 1]$ .

5.  $f(x) = x^3(x-1)^2$ ,  $[-1; 1]$ .

6.  $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ,  $[1; 4]$ .

7.  $f(x) = x - \ln(1+x)$ ,  $[1; 4]$ .

8.  $f(x) = x \ln x$ ,  $[1/e^2; 1]$ .

9.  $f(x) = x^3 e^{-x}$ ,  $[-1; 4]$ .

10.  $f(x) = e^{2x-x^2}$ ,  $[-2; 2]$ .

11.  $f(x) = \exp(-x)/x$ ,  $[1; 3]$ .

12.  $f(x) = (3-x)e^{-x}$ ,  $[0; 5]$ .

13.  $f(x) = \frac{2x^3}{2x^2-9}$ ,  $[4; 6]$ .

14.  $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 3$ ,  $[0; 2]$ .

15.  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ ,  $[0; 3]$ .

16.  $f(x) = 1/x + \ln x$ ,  $[1; e]$ .

17.  $f(x) = 108x - x^4$ ,  $[-1; 4]$ .

18.  $f(x) = (x+2)e^{1-x}$ ,  $[-1; 2]$ .

19.  $f(x) = \exp(4x - x^2)$ ,  $[1;3]$ .      20.  $f(x) = 3x^4 - 16x^3 + 2$ ,  $[-3;1]$ .
21.  $f(x) = x \exp(x)$ ,  $[-2;0]$ .      22.  $f(x) = 4 - \exp(-x^2)$ ,  $[0;1]$ .
23.  $f(x) = \frac{3^x + 3^{-x}}{\ln 3}$ ,  $[-2;1]$ .
24.  $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 4)$ ,  $[-1;1,5]$ .
25.  $f(x) = 0,25x^4 - 6x^3 + 7$ ,  $[16;20]$ .
26.  $f(x) = 2 \sin x + \cos 2x$ ,  $[0;\pi / 2]$ .
27.  $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 10$ ,  $[0;3]$ .
28.  $f(x) = x - 2 \ln x$ ,  $[1;e]$ .
29.  $f(x) = x^3 - 18x^2 + 96x$ ,  $[0;3]$ .      30.  $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ ,  $[-\pi / 4;\pi / 4]$ .
31.  $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ ,  $[-2;2]$ .      32.  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 2$ ,  $[-1;2]$ .
33.  $f(x) = x^2 + 1$ ,  $[0;2]$ .      34.  $f(x) = e^{2x} - e^x$ ,  $[0;1]$ .
35.  $f(x) = xe^{-x}$ ,  $[0;+\infty)$ .      36.  $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ,  $[2;4]$ .
37.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ ,  $[-\pi / 4;\pi / 2)$ .      38.  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$ ,  $[0;+\infty)$ .
39.  $f(x) = e^{-x^2} \cos x^2$ ,  $(-\infty;+\infty)$ .      40.  $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ,  $[-10;10]$ .

$$41. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ 2x^3 - 9x^2, & x > 0, \end{cases} \quad [\pi / 4;2].$$

$$42. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x, & x < 0, \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

**52.** Зобразіть схематично графік функції  $f$ , якщо

1.  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) > 0$ , для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .
2.  $f(x) > 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) > 0$ , для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .
3.  $f(x) < 0$ ,  $f'(x) > 0$ ,  $f''(x) < 0$ , для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

4.  $f(x) < 0$ ,  $f'(x) < 0$ ,  $f''(x) < 0$ , для всіх  $x \in \mathbb{R}$ .

**53.** Проведіть повне дослідження функції і зобразіть її графік

1.  $f(x) = e^{2-x^2}$ .

2.  $f(x) = 2(x+1)^2 / (x-2)$ .

3.  $f(x) = (4 \exp(x^2) - 1) / \exp(x^2)$ .

4.  $f(x) = x \exp(1/x)$ .

5.  $f(x) = (x+2) \exp(1-x)$ .

6.  $f(x) = (1-x)^3 / (x-2)^2$ .

7.  $f(x) = (x+1) \exp(2x)$ .

8.  $f(x) = x^4 / (x^3 - 1)$ .

9.  $f(x) = \ln(1 - 1/x^2)$ .

10.  $f(x) = (x-2)^2 / (x+1)^2$ .

11.  $f(x) = x - \ln(1+x^2)$ .

12.  $f(x) = -x \ln^2 x$ .

13.  $f(x) = \exp(1/(2-x))$ .

14.  $f(x) = x + \ln(x^2 - 4)$ .

15.  $f(x) = x - \ln(x^2 - 1)$ .

16.  $f(x) = x^2 \exp(-x^2/2)$ .

17.  $f(x) = (2+x)(x+1)^{-2}$ .

18.  $f(x) = x \ln^2 x$ .

19.  $f(x) = x e^x$ .

20.  $f(x) = x^2 / (x+2)^2$ .

21.  $f(x) = (\ln x) / x$ .

22.  $f(x) = x^3 / (9 - x^3)$ .

23.  $f(x) = 4x / (4 + x^2)$ .

24.  $f(x) = \ln(x^2 - 2x + 6)$ .

25.  $f(x) = \ln(4 - x^2)$ .

26.  $f(x) = (x-1)^2 / (x+2)$ .

27.  $f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 4$ .

28.  $f(x) = \exp(-1/x^2)$ .

29.  $f(x) = e^x / (16 - x^2)$ .

30.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$ .

31.  $y = x^2 - x^4$ .

32.  $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$ .

33.  $f(x) = \frac{1}{x(x-1)}$ .

34.  $y = x + \frac{1}{x+1}$ .

35.  $f(x) = x \sqrt{\frac{x}{4-x}}$ .

36.  $y = \ln \frac{x+6}{x} - 1$ .

37.  $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$ .

38.  $\begin{cases} x = 4 \cos^2 t, \\ y = 9 \sin^2 t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2]$ .

39.  $y = \sec x$ .

40.  $y = \operatorname{cosec} x$ .

**54.** Проведіть повне дослідження функції і зобразіть її графік

1.  $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ .

2.  $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ .

3.  $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ .

4.  $f(x) = xe^{-x}$ .

5.  $f(x) = x \sin x$ .

6.  $f(x) = xe^{-1/x}$ .

7.  $f(x) = \sin x + \cos^2 x$ .

8.  $f(x) = \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x$ .

9.  $f(x) = x + \sin x$ .

10.  $y = x \ln x$ .

11.  $f(x) = \ln \frac{x+1}{x-1}$ .

12.  $f(x) = e^{2x-x^2}$ .

13.  $f(x) = 36x(x-1)^3$ .

14.  $f(x) = x + \frac{x}{3x-1}$ .

15.  $f(x) = x/2 - \operatorname{arctg} x$ .

16.  $f(x) = \sin x + \sin 2x$ .

17.  $f(x) = \cos x - \cos^2 x$ .

18.  $f(x) = (x-3)\sqrt{x}$ .

19.  $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ .

20.  $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{x}}$ .

21.  $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{x}$ .

22.  $f(x) = (x^2-1)/(x^2+4)$ .

23.  $f(x) = \exp(8x - x^4 - 14)$ .

24.  $f(x) = xe^{-4x}$ .

25.  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ .

26.  $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$ .

27.  $f(x) = \frac{x^2-2x+2}{x-1}$ .

28.  $f(x) = \cos x \cdot \cos 2x$ .

29.  $f(x) = \arcsin \frac{x}{x^2-1}$ .

30.  $f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x-3}{x^2+4}$ .

31.  $y = \frac{x}{1+x^2}$ .

32.  $y = x^3 - 3x$ .

33.  $y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$ .

34.  $y = \sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}$ .

35.  $y = \operatorname{th} x$ .

36.  $y = \operatorname{cth} x$ .

**55. Розв'яжіть задачі**

1. Полотняне шатро з об'ємом  $V$  має форму прямого кругового конуса. Яким повинно бути відношення висоти конуса до радіуса його основи, щоб на шатро пішло найменше тканини? [ $\sqrt{2}$ ]

2. В рівнобедрений трикутник з основою  $a$  і кутом  $\alpha$  при основі вписати паралелограм найбільшої площі так, щоб одна із його сторін лежала на основі, а друга на бічній стороні трикутника. Знайти сторони паралелограма. [ $a/2, a/4\cos\alpha$ ]

3. Знайти співвідношення між радіусом  $R$  і висотою  $H$  циліндра, який при заданому об'ємі  $V$  має найбільшу повну поверхню. [ $H = 2R$ ]

4. Покажіть, що серед усіх рівнобедрених трикутників, вписаних в дане коло, найбільший периметр має рівносторонній трикутник.

5. Переріз тунеля має форму прямокутника завершеного півкругом. Периметр перерізу 18м. При якому радіусі півкруга площа перерізу буде найбільшою? [ $R = 18 / (\pi + 4)$ ]

6. Знайти висоту конуса найбільшого об'єму, який можна вписати в кулю радіуса  $R$ . [ $4R/3$ ]

7. Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в півкруг радіуса  $a$ . [ $a^2$ ]

8. Знайти сторони прямокутника найбільшої площі, який можна вписати в еліпс  $x^2/25 + y^2/9 = 1$ . [ $5\sqrt{2}, 3\sqrt{2}$ ]

9. Знайти найбільший об'єм конуса, який має дану твірну  $l$ . [ $2\pi l^3 \sqrt{3} / 27$ ]

10. Знайти найбільший об'єм циліндра, в якого повна поверхня рівна  $S$ . [ $\frac{S}{3} \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$ ]

11. Знайдіть відношення висоти конуса до діаметра основи конуса, який при заданому об'ємі  $V$  має найменшу бічну поверхню. [ $1/\sqrt{2}$ ]

12. Яким повинен бути косинус кута при більшій основі рівнобедреної трапеції, щоб її площа була найбільшою, якщо бічні сторони рівні  $b$ , а менша основа –  $a$ . [ $\cos \varphi = (\sqrt{a^2 + 8b^2} - a) / 4b$ ]

13. Знайти найбільшу площу трапеції, вписаної в півкруг радіуса  $R$ . так, що нижньою основою трапеції є діаметр півкруга. [ $R^2 \sqrt{27} / 4$ ]

14. Знайти висоту правильної трикутної призми найбільшого об'єму, вписаної в кулю радіуса  $R$ . [ $2R / \sqrt{3}$ ]

15. Знайти найбільший об'єм циліндра, периметр осевого перерізу якого рівний  $p$ . [ $\pi p^3 / 216$ ]

16. Знайти найбільший об'єм циліндра, повна поверхня якого дорівнює  $S$ . [ $\sqrt[3]{S^2} / 3\sqrt{6\pi}$ ]

17. На гіперболі  $x^2 / 2 - y^2 = 1$  знайти точку, яка є найближчою до точки  $(3;0)$ . [(2;1), (2;-1)]

18. На параболі  $y = x^2$  знайти точку, розміщену на найменшій відстані від точки  $(2;1/2)$ . [(1;1)]

19. Знайти найбільшу площу прямокутника, дві вершини якого лежать на осях  $OX$  і  $OY$ , третя – в точці  $(0;0)$ , а четверта на параболі  $y = 3 - x^2$ . [2]

20. Знайти кутовий коефіцієнт прямої, яка проходить через точку  $(1;2)$  і яка відтинає від першого координатного кута трикутник найменшої площі. [-2]

21. Знайти найбільшу повну поверхню циліндра, вписаного в кулю радіуса  $R$ . [ $\pi(\sqrt{5} + 1)R^2$ ]

22. Знайти висоту конуса найменшого об'єму, описаного навколо кулі радіуса  $R$ . [ $4R$ ]

23. Яким повинен бути кут при вершині рівнобедреного трикутника заданої площі  $S$ , щоб радіус вписаного в цей трикутник круга був найбільшим. [ $\pi / 3$ ]

24. Знайти найменшу бічну поверхню конуса, який має даний об'єм  $V$ . [ $3^{7/6}(\pi V^2 / 2)^{1/3}$ ]

25. Циліндр завершений зверху півкулею. Об'єм тіла  $V$ . При якому радіусі півкулі повна поверхня буде найменшою?  $[\sqrt[3]{3V/5\pi}]$

56. Знайти число, для якого сума його і його квадрата є найменшою.

57. Знайти число, при якому його сума з оберненим числом є найменшою.

58. Знайти найбільшу площу прямокутника, вписаного в коло радіуса  $R = 2\text{см}$ .

59. Знайти найбільшу площу циліндра, вписаного в кулю радіуса  $R = 20\text{см}$ .

60. Подайте функцію  $f$  у вигляді

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + r_2(x)$$

1.  $f(x) = e^x$ .

2.  $f(x) = \sin x$ .

3.  $f(x) = \cos x$ .

4.  $f(x) = (1+x)^m$ .

5.  $f(x) = \ln(1+x)$ .

6.  $f(x) = \operatorname{arctg} x$ .

7.  $f(x) = \arcsin x$ .

8.  $f(x) = \operatorname{tg} x$ .

9.  $f(x) = \operatorname{ch} x$ .

10.  $f(x) = \operatorname{sh} x$ .

11.  $f(x) = (1-x)^{-1}$ .

12.  $f(x) = \frac{1}{1+x}$ .

61. Подайте функцію  $f$  у вигляді

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(m)}(a)}{m!}(x-a)^m + r_m(x)$$

1.  $f(x) = \frac{1}{2+x}$ ,  $a = 2$ ,  $m = 3$ .

2.  $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ,  $a = -2$ ,  $m = 4$ .

3.  $f(x) = 1 + x^2 + x^5$ ,  $a = 1$ ,  $m = 5$ .

4.  $f(x) = 2 + x + x^4$ ,  $a = -1$ ,  $m = 5$ .

5.  $f(x) = e^{x \sin x}$ ,  $a = 1$ ,  $m = 2$ .

6.  $f(x) = \sin(x^2 - 2x + 3)$ ,  $a = 1$ ,  $m = 2$ .

62. Покажіть, що

1.  $e^x \sim 1+x$ ,  $x \rightarrow 0$ .

2.  $e^x + x^3 = O(e^x)$ ,  $x \in [0; +\infty)$ .

$$3. x^2 = o(e^x), \quad x \rightarrow +\infty. \quad 4. \frac{1}{1+x} = O(1), \quad x \in [0; +\infty).$$

$$5. x^2 = o(x^3), \quad x \rightarrow +\infty. \quad 6. x^3 = o(x^2), \quad x \rightarrow 0.$$

$$7. x^2 + \operatorname{arctg}(x^7 + 1) = x^2 + O(1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$8. \ln\left(1 + \sin\left(\frac{2x}{e^x}\right)\right) \asymp x, \quad x \rightarrow 0.$$

$$9. \ln(1 + 2x) \asymp x, \quad x \rightarrow 0. \quad 10. \sqrt{1+x^2} - x = O(1/x), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$11. \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = O(1), \quad x \rightarrow 0. \quad 12. x^2 + \sin x = O(x^2), \quad x \in [1; +\infty).$$

$$13. o(1) + o(1) = o(1), \quad x \rightarrow a. \quad 14. O(1) \cdot o(1) = o(1), \quad x \rightarrow a.$$

$$15. o(x) + o(x^3) = o(x^4), \quad x \rightarrow 0.$$

**63.** Знайдіть такі числа  $c_0, c_1, c_2, \dots$ , що

$$1. \frac{1}{2+x} = c_0 + c_1(1+x) + c_2(1+x)^2 + o((1+x)^2), \quad x \rightarrow -1.$$

$$2. 1 + x^2 + x^5 = c_0 + c_1(x-2) + c_2(x-2)^2 + c_3(x-2)^3 + c_4(x-2)^4 + c_5(x-2)^5, \quad x \rightarrow 2.$$

$$3. 2 + x + x^4 = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + c_3(x-1)^3 + c_4(x-1)^4.$$

$$4. e^{x \sin x} = c_0 + c_1 x + o(x), \quad x \rightarrow 0.$$

$$5. \sin(x^2 - 2x + 3) = c_0 + c_1(x-1) + o(x-1), \quad x \rightarrow 1.$$

$$6. \frac{x}{1+x} = c_0 + c_1(x-1) + c_2(x-1)^2 + o((x-1)^2), \quad x \rightarrow 1.$$

**64.** Знайдіть такі числа  $n_0$  і  $c_0$ , що  $f(x) = c_0(x-a)^{n_0} + o((x-a)^{n_0})$ ,  $x \rightarrow a$

$$1. f(x) = \sin(\cos x), \quad a = 0. \quad 2. f(x) = \cos(\sin x), \quad a = 0.$$

$$3. f(x) = \sin(\operatorname{tg}^2 x), \quad a = 0. \quad 4. f(x) = \operatorname{tg}^2(\sin x), \quad a = 0.$$

$$5. f(x) = \sin(\ln \cos x), \quad a = 0. \quad 6. f(x) = \cos(\arcsin^2 x), \quad a = 0.$$

$$7. f(x) = \arcsin^2(\operatorname{tg} x), \quad a = 0. \quad 8. f(x) = \operatorname{tg}^2(\arccos x), \quad a = 0.$$

9.  $f(x) = \arcsin^2(x + x^2 + o(x^2))$ ,  $a = 0$ . 10.  $f(x) = \operatorname{tg}^2(x + O(x^3))$ ,  $a = 0$ .

65. З'ясуйте, чи  $f(2x) \sim f(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$

1.  $f(x) = \sqrt{x}$ .

2.  $f(x) = x^2$ .

3.  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ .

4.  $f(x) = e^{2x}$ .

5.  $f(x) = \ln x$ .

6.  $f(x) = \ln \ln x$ .

7.  $f(x) = \ln^2 x$ .

8.  $f(x) = \ln^3 x$ .

9.  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

10.  $f(x) = e^{\ln^p \ln x}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

11.  $f(x) = \ln^p x$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

12.  $f(x) = \ln^p \ln^q x$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ .

13.  $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ .

14.  $f(x) = e^{\ln^p x}$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

66. З'ясуйте, чи  $f(2x) = O(f(x))$ ,  $x \rightarrow +\infty$

1.  $f(x) = x^2$ .

2.  $f(x) = \sqrt{x}$ .

3.  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ .

4.  $f(x) = e^x$ .

5.  $f(x) = e^{e^x}$ .

6.  $f(x) = e^{x^2}$ .

67. З'ясуйте, чи  $f(x) = o(f(2x))$ ,  $x \rightarrow +\infty$

1.  $f(x) = x^2$ .

2.  $f(x) = \sqrt{x}$ .

3.  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ .

4.  $f(x) = e^x$ .

5.  $f(x) = e^{e^x}$ .

6.  $f(x) = e^{x^2}$ .

68. З'ясуйте, чи  $f(x+1) \sim f(x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$

1.  $f(x) = \sqrt{x}$ .

2.  $f(x) = x^2$ .

3.  $f(x) = e^{\sqrt{x}}$ .

4.  $f(x) = e^{2x}$ .

5.  $f(x) = \ln x$ .

6.  $f(x) = \ln \ln x$ .

7.  $f(x) = \ln^2 x$ .

8.  $f(x) = \ln^3 x$ .

9.  $f(x) = \sqrt{\ln x}$ .

10.  $f(x) = e^{\sqrt{\ln x}}$ .

11.  $f(x) = \ln^p x$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

12.  $f(x) = \ln^p \ln^q x$ ,  $p, q \in \mathbb{R}$ .

$$13. f(x) = e^{\ln^p \ln x}, p \in \mathbb{R}. \quad 14. f(x) = e^{\ln^p x}, p \in \mathbb{R}.$$

69. З'ясуйте, чи  $f(x+1) = O(f(x))$ ,  $x \rightarrow +\infty$

$$1. f(x) = x^2. \quad 2. f(x) = \sqrt{x}.$$

$$3. f(x) = e^{\sqrt{x}}. \quad 4. f(x) = e^x.$$

$$5. f(x) = e^{e^x}. \quad 6. f(x) = e^{x^2}.$$

70. З'ясуйте, чи  $f(x) = o(f(x+1))$ ,  $x \rightarrow +\infty$

$$1. f(x) = x^2. \quad 2. f(x) = \sqrt{x}.$$

$$3. f(x) = e^{\sqrt{x}}. \quad 4. f(x) = e^x.$$

$$5. f(x) = e^{e^x}. \quad 6. f(x) = e^{x^2}.$$

71. Порівняйте нескінченно малі в точці  $a$  функції  $f$  і  $\varphi$  та з'ясуйте, чи вони є еквівалентними, чи вони мають однаковий порядок, чи одна з них має вищий порядок, чи вони є не порівняльними

$$1. f(x) = e^{\sin x} - e^x, \varphi(x) = x^3, a = 0.$$

$$2. f(x) = \sin x - x, \varphi(x) = x^4, a = 0.$$

$$3. f(x) = 1 - \cos x, \varphi(x) = x^2, a = 0.$$

$$4. f(x) = \operatorname{tg} x, \varphi(x) = x^2, a = 0.$$

$$5. f(x) = e^{\operatorname{tg} x} - 1, \varphi(x) = x, a = 0.$$

$$6. f(x) = \operatorname{tg} x - x, \varphi(x) = x^2, a = 0.$$

$$7. f(x) = \arcsin 2x, \varphi(x) = x, a = 0.$$

$$8. f(x) = 4(1 - x^4) - 5(1 - x^5), \varphi(x) = (1 - x)^2, a = 1.$$

$$9. f(x) = (1 - x^4)(1 - x^5), \varphi(x) = (1 - x)^3, a = 1.$$

$$10. f(x) = 2^x - x^2, \varphi(x) = x - 2, a = 2.$$

$$11. f(x) = x^3 - 3^x, \varphi(x) = x - 3, a = 3.$$

$$12. f(x) = x^3 - 3^x, \varphi(x) = (x - 3)^2, a = 3.$$

13.  $f(x) = \operatorname{tg} \frac{\pi x}{x^2 + 1}$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{x}$ ,  $a = +\infty$ .
14.  $f(x) = e^x - \sum_{k=0}^7 \frac{x^k}{k!}$ ,  $\varphi(x) = x^8$ ,  $a = 0$ .
15.  $f(x) = \arcsin 2x - 2 \arcsin x$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $a = 0$ .
16.  $f(x) = x^4 - 4^x$ ,  $\varphi(x) = x - 4$ ,  $a = 4$ .
17.  $f(x) = 4^x - 16$ ,  $\varphi(x) = (x - 4)^2$ ,  $a = 4$ .
18.  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x}$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{x^4}$ ,  $a = +\infty$ .
19.  $f(x) = \ln^2(1 + x)$ ,  $\varphi(x) = x$ ,  $a = 0$ .
20.  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{x}$ ,  $\varphi(x) = 1 / \sqrt{x}$ ,  $a = +\infty$ .
21.  $f(x) = \ln(1 + x) - x + \frac{x^2}{2}$ ,  $\varphi(x) = x^3$ ,  $a = 0$ .
22.  $f(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$ ,  $\varphi(x) = 1 / \sqrt{x}$ ,  $a = +\infty$ .
23.  $f(x) = \cos x - \cos^3 x$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $a = 0$ .
24.  $f(x) = \cos 3x - \cos 3x$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $a = 0$ .
25.  $f(x) = \sqrt{9 - x} - 3$ ,  $\varphi(x) = x$ ,  $a = 0$ .
26.  $f(x) = \sqrt{4 + x} + 2$ ,  $\varphi(x) = x$ ,  $a = 0$ .
27.  $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ ,  $\varphi(x) = x^4$ ,  $a = 0$ .
28.  $f(x) = e^x - 1$ ,  $\varphi(x) = x$ ,  $a = 0$ .
29.  $f(x) = \sin 2x^2$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $a = 0$ .
30.  $f(x) = x - \operatorname{arctg} x$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $a = 0$ .
31.  $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ ,  $\varphi(x) = x^3$ ,  $a = 0$ .

$$32. f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathcal{Q}, \\ x^3, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{Q}, \end{cases} \quad \varphi(x) = x^2, \quad a = 0.$$

$$33. f(x) = \begin{cases} \sin^3 x, & x < 0, \\ 1 - \cos \sqrt{x}, & x > 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = x^2, \quad a = 0.$$

72. Вкажіть  $x$ , для якого абсолютна похибка  $\Delta$  наближеної формули не перевищує вказаного числа

$$1. e^x \approx 1 + x, \quad \Delta \leq 0,1. \quad 2. e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad \Delta \leq 0,1.$$

$$3. e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad \Delta \leq 0,01. \quad 4. \sin x \approx x - \frac{x^3}{3}, \quad \Delta < 0,1.$$

73. Знайдіть таке  $n \in \mathbb{N}$ , за якого абсолютна похибка  $\Delta$  написаної наближеної формули не перевищує вказаного числа

$$1. e \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}, \quad \Delta < 0,1. \quad 2. e \approx \sum_{k=0}^n \frac{1}{k}, \quad \Delta < 0,01.$$

$$3. \ln 2 \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad \Delta \leq 0,1. \quad 4. \ln \frac{3}{2} \approx \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \quad \Delta \leq 0,1.$$

$$5. \sin \frac{1}{2} \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(1/2)^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \Delta \leq 0,1.$$

$$6. \cos \frac{1}{4} \approx \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{(1/4)^{2k}}{(2k)!}, \quad \Delta \leq 0,1.$$

74. Покажіть, що для всіх  $x$  із вказаного проміжку абсолютна похибка  $\Delta$  наближеної формули не перевищує вказаного числа

$$1. e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad x \in [-1; 1], \quad \Delta \leq 0,1.$$

$$2. \sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}, \quad x \in [-1; 1], \quad \Delta \leq 0,1.$$

$$3. \cos x \approx x - \frac{x^2}{2!}, \quad x \in [-1; 1], \quad \Delta \leq 0,1.$$

75. Використовуючи формулу Тейлора знайдіть з вказаною точністю

$$1. e, \quad \Delta \leq 0,1. \quad 2. \sin 1^\circ, \quad \Delta \leq 10^{-2}.$$

$$3. \cos 5^\circ, \quad \Delta \leq 0,01. \quad 4. \sqrt[3]{127}, \quad \Delta \leq 0,01.$$

$$5. \ln 1,3, \quad \Delta \leq 0,01.$$

76. Використовуючи формулу Тейлора знайдіть границі

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2}}{x^3}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sum_{k=0}^4 \frac{x^k}{k!}}{x^5}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sum_{k=0}^8 (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}}{x^{18}}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sum_{k=0}^4 (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}}{x^{11}}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - \ln(1+x+x^2) - \arcsin 3x}{\sin x + x^4}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x - (e^x - 1)^4}{\ln^2(1+x)}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x - 4x}{\sin x - x}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin^2 x}{x^2}}{x}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(\sin x) - \cos x}{x^4}.$$

$$11. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}.$$

77. Доведіть, що рівняння мають єдиний дійсний корінь

$$1. x3^x = 1.$$

$$2. x - \frac{1}{2} \sin x = \pi.$$

$$3. x^{13} + 7x^3 - 5 = 0.$$

$$4. 3^x + 4^x = 5^x.$$

$$5. 2e^x + x^3 + 18x - 6 = 0.$$

78. Знайдіть кількість дійсних коренів рівняння

$$1. x \ln x = 1.$$

$$2. \ln x = x.$$

$$3. x \ln x = a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$4. \ln x = ax, \quad a \in \mathbb{R}.$$

$$5. 12x^4 - 14x^3 - 3x^2 - 5 = 0.$$

$$6. 2x^3 - 3x^2 + 1 = 0.$$

$$7. x^4 - 4ax^2 - 2 = 0, \quad a \in \mathbb{R}.$$

79. За якого  $a \in \mathbb{R}$  рівняння має  $n$  різних дійсних коренів, порядку  $m = 1$

$$1. 3x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 12x + a = 0, \quad n = 2.$$

$$2. 2x^3 - 13x^2 - 20x + a = 0, \quad n = 1.$$

$$3. 3x^4 - 14x^3 - 45x^2 + a = 0, \quad n = 4.$$

$$4. x^2 - x - \ln x + a = 0, \quad n = 0.$$

80. За якого  $a \in \mathbb{R}$  рівняння  $2x^3 - 4x^2 - 30x + a = 0$  має рівно два різні дійсні корені  $x_1$  і  $x_2$ , порядку  $m_1 = 1$  і  $m_2 = 2$ , відповідно?

81. За якого  $a \in \mathbb{R}$  рівняння  $\operatorname{arctg} x - x^3 + a = 0$  має рівно два різні дійсні корені  $x_1$  і  $x_2$ , порядку  $m_1 = 1$  і  $m_2 = 2$ , відповідно?

82. За якого  $a \in \mathbb{R}$  рівняння  $2x^3 - 4x^2 - 30x + a = 0$  має єдиний дійсний корінь, порядку  $m = 2$ ?

83. Вкажіть проміжки  $[a_k; b_k]$ ,  $b_k - a_k \leq 1$ , кожний з яких містить рівно один корінь рівняння

$$1. x^2 + 3x - 4 = 0.$$

$$2. x^3 + 2x^2 + x = 0.$$

$$3. x^3 - 27x - 17 = 0.$$

$$4. x^3 - 6x^2 + 9x - 10 = 0.$$

$$5. x^4 - 4x^3 - 6x + 23 = 0.$$

$$6. x^4 + 6x^3 - 2x^2 + 1 = 0.$$

84. Знайдіть таку функцію  $\varphi$ , що для кореня  $x = x(y)$  рівняння  $x + e^x = y$  виконується  $x = \varphi(y) + o(1)$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .

85. Знайдіть таку функцію  $\varphi$ , що для кореня  $x = x(y)$  рівняння  $x + e^x = y$  виконується  $x = \varphi(y) + o(1)$ ,  $y \rightarrow -\infty$ .

86. Знайдіть таку функцію  $\varphi$ , що для кореня  $x = x(y)$  рівняння  $xe^x = y$  виконується  $x = \varphi(y) + o(1)$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .

87. Знайдіть таку функцію  $\varphi$ , що для кореня  $x = x(y)$  рівняння  $xe^x = y$  виконується  $x = \varphi(y) + o(1)$ ,  $y \rightarrow -\infty$ .

88. Нехай  $x_{2k}$  – корінь рівняння  $\sin \pi x = 1/x$ , який належить проміжкам  $(2k; 1/2 + 2k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Доведіть, що

$$x_{2k} = 2k + \frac{1}{2\pi k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

89. Нехай  $x_{2k+1}$  – корінь рівняння  $\sin \pi x = 1/x$ , який належить проміжкам  $(1/2 + 2k; 2(k+1))$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Доведіть, що

$$x_{2k+1} = 2k + 1 - \frac{1}{(2k+1)\pi} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

### 35. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.

$$6.31. e^x + xe^x. \quad 6.32. \ln x + 1. \quad 6.33. 2x \cos x - x^2 \sin x. \quad 6.34. \sin x + x \cos x. \quad 6.35.$$

$$\frac{\arccos x - \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 6.36. \frac{\operatorname{arctg} x - \arctg x}{1+x^2}. \quad 6.37. \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad 6.38.$$

$$\begin{aligned}
& 2x \arccos x - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \mathbf{6.39.} e^x \operatorname{sh} x + e^x \operatorname{ch} x. \quad \mathbf{6.40.} 2x \operatorname{ch} x + x^2 \operatorname{sh} x. \quad \mathbf{6.41.} \sin x (2 + \operatorname{tg}^2 x). \\
& \mathbf{6.42.} \frac{\cos x (\cos^2 x - 2)}{\sin^2 x}. \quad \mathbf{6.43.} \frac{2}{(x+1)^2}. \quad \mathbf{6.44.} -\frac{2(x^2+1)}{(x^2-1)^2}. \quad \mathbf{6.45.} -\frac{4x+2}{(1+x+x^2)^2}. \quad \mathbf{6.46.} \\
& -\frac{4(x-1)}{(x+1)^3}. \quad \mathbf{6.47.} -\frac{1}{2x \ln^2 x}. \quad \mathbf{6.48.} -\frac{e^x}{(e^x+1)^2}. \quad \mathbf{6.49.} -\frac{\cos x}{(\sin x-1)^2}. \quad \mathbf{6.50.} \frac{\sin x}{2 \cos^2 x}. \quad \mathbf{6.51.} \\
& -\frac{1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}. \quad \mathbf{6.52.} -\frac{3x^2}{(x^3-1)^2}. \quad \mathbf{6.53.} -\frac{1}{3 \arcsin^2 x \sqrt{1-x^2}}. \quad \mathbf{6.54.} -\frac{\operatorname{arctg} x + \frac{x}{1+x^2}}{(x \operatorname{arctg} x + 1)^2}. \\
& \mathbf{6.55.} -\frac{\operatorname{sh} x + x \operatorname{ch} x 2(x^2+1)}{x^2 \operatorname{sh}^2 x}. \quad \mathbf{6.56.} -\frac{1 + \operatorname{sh} x}{(x + \operatorname{ch} x)^2}. \quad \mathbf{6.57.} -\frac{x + \operatorname{tg} x + x \operatorname{tg}^2 x}{x^2 \operatorname{tg}^2 x}. \quad \mathbf{6.58.} -\frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{4} \\
& \cdot \quad \mathbf{6.59.} -\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \quad \mathbf{6.60.} \frac{2x}{(1-x^2)^2}. \quad \mathbf{6.61.} \frac{\sin x}{\operatorname{tg} x + 1} + \frac{x \cos x}{\operatorname{tg} x + 1} - \frac{x \sin x (1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(\operatorname{tg} x + 1)^2}. \quad \mathbf{6.62.} \\
& \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x}. \quad \mathbf{6.63.} \sec x \operatorname{tg} x. \quad \mathbf{6.64.} -\operatorname{cosec} x \operatorname{ctg} x. \quad \mathbf{6.65.} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}. \quad \mathbf{6.66.} -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}. \quad \mathbf{7.31.} -2 \sin 2x. \\
& \mathbf{7.32.} -2 \sin(2x+1). \quad \mathbf{7.33.} -1 - \operatorname{tg}^2(x-1). \quad \mathbf{7.34.} -\cos(x-1). \quad \mathbf{7.35.} \frac{2}{2x-1}. \quad \mathbf{7.36.} -3e^{2-3x}. \\
& \mathbf{7.37.} -\frac{3(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg}^4 x}. \quad \mathbf{7.38.} \sin 2x. \quad \mathbf{7.39.} -4x^3 \sin x^4. \quad \mathbf{7.40.} 2x(1 + \operatorname{tg}^2 x^2). \quad \mathbf{7.41.} 2xe^{x^2}. \\
& \mathbf{7.42.} (1-2x) \sin(x^2-x). \quad \mathbf{7.43.} \frac{1}{1+(1-x)^2}. \quad \mathbf{7.44.} -\frac{2 \arccos x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \mathbf{7.45.} \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}. \quad \mathbf{7.46.} \\
& \frac{1}{2\sqrt{x}(x+1)}. \quad \mathbf{7.47.} 6x \sin^2 x^2 \cos x^2. \quad \mathbf{7.48.} -3x^2 \sin 2(x^3-1). \quad \mathbf{7.49.} \frac{\operatorname{sh} 2(2\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}. \quad \mathbf{7.50.} \\
& 6x \operatorname{ch}^2(x^2-1) \operatorname{sh}(x^2-1). \quad \mathbf{7.51.} e^{\sin^2 x} \sin 2x. \quad \mathbf{7.52.} -\frac{2 \ln x}{x(1 + \ln^4 x)}. \quad \mathbf{7.53.} \frac{2 \operatorname{arctg}(\ln x)}{x(1 + \ln^2 x)}. \\
& \mathbf{7.54.} -\frac{3x(1 + \operatorname{tg}^2(1-3x^2))}{\sqrt{\operatorname{tg}(1-3x^2)}}. \quad \mathbf{7.55.} -\frac{2 \cos(\ln x) e^{-\sin^2 \ln x}}{x}. \quad \mathbf{7.56.} \frac{2 \ln(\ln x)}{x \ln x}. \quad \mathbf{7.57.} \\
& \frac{2 \ln \ln \ln x}{x \ln x \cdot \ln \ln x}. \quad \mathbf{7.58.} \frac{2}{\arcsin x \sqrt{1-x^2}}. \\
& \mathbf{7.59.} \frac{3 \sin(2 \operatorname{ctg}^3 \sqrt{-x})(1 + \operatorname{tg}^2 \sqrt{-x}) e^{\sin^2 \operatorname{ctg}^3 \sqrt{-x}}}{2\sqrt{-x} \operatorname{tg}^4 \sqrt{-x}}. \\
& \mathbf{7.60.} 6 \sin 2e^{-\cos(2x-1)^3} \cos^2(2x-1) \sin(2x-1) e^{-\cos^3(2x-1)}. \\
& \mathbf{7.61.} \frac{6 \operatorname{sh}^2 \sqrt{\arcsin(-2 \ln^2(1-x))} \operatorname{ch} \sqrt{\arcsin(-2 \ln^2(1-x))} \ln(1-x)}{\sqrt{\arcsin(-2 \ln^2(1-x))(1-x)} \sqrt{1-4 \ln^4(1-x)}}.
\end{aligned}$$

$$7.62. \frac{sh2\sqrt{1-x}}{4\sqrt{1-x}\sqrt{1-ch^4\sqrt{1-x}}\sqrt{\arccos(ch^2\sqrt{1-x})-1}}.$$

$$7.63. sh\left(-e^{-arctg^2x^3} + \sqrt[3]{1-2x}\right)\left(\frac{6x^2e^{-arctg^2x^3}arctgx^3}{1+x^6} - \frac{2}{3\sqrt[3]{(1-2x)^2}}\right).$$

$$7.64. \frac{2\ln(ch^3\sqrt[4]{4x+1} + \sin x)\left(\frac{3ch^2\sqrt[4]{4x+1}sh\sqrt[4]{4x+1}}{\sqrt[4]{(4x+1)^3}} + \cos x\right)}{ch^3\sqrt[4]{4x+1} + \sin x}.$$

$$7.65. -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}(1+\sqrt{1+x^2})^2}. \quad 7.66. -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}(-1+\sqrt{1-x^2})^2}. \quad 8.31. -\frac{\cos\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sin^2\sqrt{x}}.$$

$$8.32. \frac{\sin x}{2\sqrt{\cos^3(x)}}. \quad 8.33. \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{arctg^3\frac{1}{x}}}. \quad 8.34. -\frac{1}{2x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}\sqrt{\arcsin\frac{1}{x}}}. \quad 8.35.$$

$$\frac{3(x+2)}{4\sqrt{x+3}\sqrt{1+x}\sqrt{x+3}}. \quad 8.36. \frac{x(9\sqrt{x}+8)}{4\sqrt{1+\sqrt{x}}}. \quad 8.37. \frac{1}{x^2+x+1}. \quad 8.38. -\frac{1}{x^2+1}. \quad 8.39.$$

$$2^{xtgx}(tgx+x+xtg^2x)\ln 2. \quad 8.40. -\frac{e^{1/\ln x}}{x\ln^2 x}. \quad 8.41. \frac{\ln 3}{2x^2} \cdot \frac{3^{\frac{1}{2xshx}}(shx+xchx)}{ch^2x-1}. \quad 8.42.$$

$$\frac{sh\sqrt{x}e^{\frac{2}{ch\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}ch^2\sqrt{x}}. \quad 8.43. -\frac{1}{\cos x}. \quad 8.44. -\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}. \quad 8.45.$$

$$\frac{\cos\left(\sin\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)\right)\cos\left(\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)}{x\sqrt{1-x^2}}. \quad 8.46. -\frac{\sin\frac{1}{2x}\sin(\cos\frac{1}{2x})}{2x^2}. \quad 8.47.$$

$$-\frac{11ch\sqrt{x}(sh\sqrt{x}-1)^{10}}{2\sqrt{x}}. \quad 8.48. \frac{10sh\frac{2}{\sqrt{x}}\left(2-ch\frac{2}{\sqrt{x}}\right)^9}{\sqrt{x^3}}. \quad 8.49.$$

$$10^{-x\arcsin x}\left(-\arcsin x - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)\ln 10. \quad 8.50. -\frac{\left(2xarcctgx - \frac{x^2}{x^2+1}\right)\ln 2}{2^{x^2arcctgx}}. \quad 8.51.$$

$$-\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}. \quad 8.52. -\frac{x}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{(1+\sqrt{1+x^2})^3}}. \quad 8.53. -\ln x(\ln x+2)e^{-x\ln^2 x}. \quad 8.54.$$

$$-\frac{5\left(1+\ln\frac{1}{x}\right)^4}{x}. \quad \mathbf{8.55.} -\frac{1+tg^2x}{(1+tgx)^2}. \quad \mathbf{8.56.} \frac{\sin 2x \cos x^2 + 4x \sin x^2 - x \sin 2x^2}{\cos^2 x^2}. \quad \mathbf{8.57.}$$

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}. \quad \mathbf{8.58.} \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}. \quad \mathbf{8.59.} \sqrt{a^2-x^2}. \quad \mathbf{8.60.} \sqrt{a^2+x^2}. \quad \mathbf{8.61.} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}. \quad \mathbf{8.62.}$$

$$\frac{2-2a^2-a-x}{2(x-a)(a^2+x-1)} + \frac{6}{3+(2x-1)^2}. \quad \mathbf{8.63.} \frac{2x^2 \ln x - \ln(x^2+4)(x^2+4)}{x(x^2+4)\ln^2 x}. \quad \mathbf{9.31.}$$

$$-x^{-x}(\ln x+1). \quad \mathbf{9.32.} \quad x^{2\sqrt{x}-0.5}(\ln x+2). \quad \mathbf{9.33.} \quad tgx^{tgx}(1+tg^2x)(\ln tgx+1). \quad \mathbf{9.34.}$$

$$\ln x^{tgx} \left( (1+tg^2x)\ln \ln x + \frac{tgx}{x \ln x} \right). \quad \mathbf{9.35.} \quad \frac{1}{2}(\ln x+2)\cos x^{\sqrt{x}} x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}. \quad \mathbf{9.36.} \quad x^{x^3+2}(3\ln x+1).$$

$$\mathbf{9.37.} \quad x^{x^x} \left( x^x(\ln x+1)\ln x + x^{x-1} \right). \quad \mathbf{9.38.} \quad -x^{x^{\cos x} + \cos x - 1} \left( x \ln^2 x \sin x - \ln x \cos x - 1 \right). \quad \mathbf{9.39.}$$

$$e^x x^2 tg^x x \arcsin x + 2x e^x tg^x x \arcsin x + e^x x^2 tg^x \left( \ln tgx + \frac{x(1+tg^2x)}{tgx} \right).$$

$$\cdot \arcsin x + \frac{e^x x^2 tg^x x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\mathbf{9.40.} \quad 2^x \ln 2 \sqrt{1-x} \arccos^x x shx - \frac{2^{x-1} \arccos^x x shx}{\sqrt{1-x}} +$$

$$2^x \sqrt{1-x} \arccos^x x \left( \ln(\arccos x) - \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} \right) shx + 2^x \sqrt{1-x} \arccos^x x chx. \quad \mathbf{9.41.}$$

$$x^{\sin(x^{\cos x})} \left( \cos(x^{\cos x}) x^{\cos x} \left( -\sin x \ln x + \frac{\cos x}{x} \right) \ln x + \frac{\sin(x^{\cos x})}{x} \right).$$

$$\mathbf{9.42.} \quad x^{\sin x^{\cos x}} \left( \sin x^{\cos x} \left( -\sin x \ln \sin x + \frac{\cos^2 x}{\sin x} \right) \ln x + \frac{\sin x^{\cos x}}{x} \right).$$

$$\mathbf{9.43.} \quad \frac{x^{\arccos x} \left( \frac{\arccos x}{x} - \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} \right)}{\sqrt{1-x^{2\arccos x}}}. \quad \mathbf{9.44.} \quad \arccos^{\arcsin x} x \left( \frac{\ln \arccos x}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{\arccos x \sqrt{1-x^2}} \right).$$

$$\mathbf{9.45.} \quad \frac{(x+1)^2(31x^2-256x+361)}{12\sqrt[3]{(x-5)^5}\sqrt[4]{(x-2)^3}}. \quad \mathbf{9.46.} \quad \frac{1}{2} \frac{\sin x \sqrt{1-e^x} + x \cos x \sqrt{1-e^x} - \frac{1}{2} \frac{x \sin x e^x}{\sqrt{1-e^x}}}{\sqrt{x \sin x \sqrt{1-e^x}}}.$$

$$9.47. x^{x^e} \frac{x^e e^{\ln x} + x^e}{x} + x^x (\ln x + 1) e^{x^x} + x^{e^x} \left( e^x \ln x + \frac{e^x}{x} \right).$$

$$10.31. \frac{4x^3 - 3}{5\sqrt[5]{(-x^4 + 3x + 4)^4}} - \frac{6}{(x+4)^3}. \quad 10.32. \frac{7(x-3)^6}{2\sqrt{(x-3)^7}} + \frac{9(14x-5)}{(7x^2 - 5x - 8)^2}. \quad 10.33.$$

$$12sh^2 4x \cdot \arccos \sqrt{x} \cdot ch 4x - \frac{1}{2} \frac{sh^3 4x}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}}. \quad 10.34. 10ch 5x \cdot \operatorname{arctg} x^4 \cdot sh 5x + \frac{4ch^2 5x \cdot x^3}{1+x^8}.$$

$$10.35. -\frac{1}{2} \frac{e^{\arccos^3 x} \left( 6x \arccos^2 x + 30 \arccos^2 x + \sqrt{1-x^2} \right)}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{(x+5)^3}}.$$

$$10.36. \frac{2(x-4)}{e^{\operatorname{arctg} x}} + \frac{(x-4)^2}{e^{\operatorname{arctg} x} (1+x^2)}. \quad 10.37. \frac{1}{4} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x} \sqrt{(1+e^{-\sqrt{x}})^3}}. \quad 10.38. \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}. \quad 10.39.$$

$$\frac{-2x}{1+x^2}. \quad 10.40. \frac{1}{2x\sqrt{x-1} \arccos \frac{1}{\sqrt{x}}}. \quad 10.41. -\frac{2 \ln 10 \cdot 10^x}{(1+10^x)^2}. \quad 10.42. \frac{1-\ln 2}{2^{\ln x}}. \quad 10.43.$$

$$\frac{1-x \ln 4}{4^x}. \quad 10.44. \frac{2x+e^x - (x^2+e^x) \ln 2}{2^x}. \quad 15.31. 2. \quad 15.32. 6. \quad 15.33. 8. \quad 15.34. -2. \quad 15.35.$$

$$0. \quad 15.36. 0. \quad 15.37. \frac{16}{3}. \quad 15.38. -12. \quad 15.39. 2. \quad 15.40. -12.$$

$$16.31. y^{(n)} = 2^n \cos \left( 2x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right). \quad 16.32. y^{(n)} = 2^n \sin \left( 2x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right).$$

$$16.33. y^{(n)} = -n!(2x+1)^{-(n+1)} \cdot 2^n. \quad 16.34. y^{(n)} = -n!(3x-1)^{-(n+1)} \cdot 3^n.$$

$$16.35. y^{(n)} = n!(-1)^{-n-1} + n!(-1)^{n+1} x^{-n-1}.$$

$$16.36. y^{(n)} = \frac{1}{2} \left( n!(-1)^n (x-1)^{-n-1} + n!(-1)^{n+1} (x+1)^{-n-1} \right)$$

$$16.37. y^{(n)} = -2^{n-1} \cdot \cos \left( 2x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right). \quad 16.38. y^{(n)} = -2^{n-1} \sin \left( 2x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right). \quad 16.39.$$

$$y^{(n)} = (-1)^n e^{-x} \quad 16.40. y^{(n)} = 2^n e^{2x}. \quad 16.41. y^{(n)} = \frac{n!(2x-4)^n}{(x^2-4x+5)^{n+1}} + (-1)^n.$$

$$16.42. y^{(n)} = \frac{1}{3} \left( n!(-1)^2 (x-1)^{-n-1} + n!(-1)^{n+1} (x+4)^{-n-1} \right).$$

$$16.43. y^{(8)} = e^x(16x + x^2 + 56).$$

$$16.44. y^{(10)} = -720 \cos x + 270x \sin x + 30x^2 \cos x - x^3 \sin x.$$

$$16.45. y^{(8)} = shx. \quad 16.46. y^{(7)} = shx. \quad 39.31. 1. \quad 39.32. 0. \quad 39.33. 0. \quad 39.34. 0. \quad 39.35. 0.$$

$$39.36. -0.5. \quad 39.37. -2. \quad 39.38. 0.5. \quad 39.39. \frac{1}{6}. \quad 39.40. \infty. \quad 39.41. \frac{1}{2}. \quad 39.42. -1. \quad 39.43. -0.5.$$

$$39.44. 0. \quad 39.45. \frac{-e}{2}. \quad 39.46. +\infty. \quad 39.47. 1. \quad 39.48. 1. \quad 39.49. e^2. \quad 39.50. 1. \quad 39.51. e^2.$$

$$39.52. 1. \quad 39.53. 1. \quad 39.54. \frac{1}{e}. \quad 39.55. -0.5. \quad 39.56. 0.5. \quad 39.57. 0. \quad 39.58. 1. \quad 39.59. e^{\frac{1}{3}}.$$

$$39.60. 0. \quad 39.61. \frac{1}{3}. \quad 39.62. 1. \quad 39.63. 2. \quad 43.31. \epsilon \text{ зростаючою на } \mathbb{R}. \quad 43.32. \epsilon$$

зростаючою на  $(-\infty; -3)$  і  $(1; +\infty)$ , є спадною на  $(-3; 1)$ . **43.33.**  $\epsilon$  зростаючою на  $\mathbb{R}$

. **43.34.**  $\epsilon$  зростаючою на  $\mathbb{R}$ . **43.35.**  $\epsilon$  спадною на  $\mathbb{R}$ . **43.36.**  $\epsilon$  спадною на  $\mathbb{R}$ .

**43.37.**  $\epsilon$  зростаючою на  $(e; +\infty)$ , є спадною на  $(0; e)$ . **43.38.**  $\epsilon$  зростаючою на

$(0, 5; +\infty)$ , є спадною на  $(0; 0, 5)$ . **43.39.**  $\epsilon$  зростаючою на кожному з проміжків

$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k\right)$  і  $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є спадною на кожному з

проміжків  $\left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$  і  $\left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **43.40.**  $\epsilon$

зростаючою на  $\mathbb{R}$ . **43.41.**  $\epsilon$  зростаючою на  $(-\infty; -2)$  і  $(0; +\infty)$ , є спадною на

$(-2; 0)$ . **43.42.**  $\epsilon$  спадною на  $\mathbb{R}$ . **43.43.**  $\epsilon$  зростаючою на  $(-1; 9)$ , є спадною на

$(-\infty; -1)$  і  $(9; +\infty)$ . **43.44.**  $\epsilon$  зростаючою на  $(-1; 0)$  і  $(1; +\infty)$ , є спадною на

$(-\infty; -1)$  і  $(0; 1)$ . **43.45.**  $\epsilon$  зростаючою на  $(1; 3)$ , є спадною на  $(-\infty; 1)$  і  $(3; +\infty)$ . **43.46.**  $\epsilon$

зростаючою на  $(-1; +\infty)$ . **43.47.**  $\epsilon$  зростаючою на кожному з проміжків

$\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є спадною на кожному з проміжків

$\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **43.48.**  $\epsilon$  зростаючою на кожному з проміжків

$(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є спадною на кожному з проміжків

$(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **43.49.**  $\epsilon$  зростаючою на кожному з проміжків

$(-\pi + 2\pi k; 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_-$  та на  $(-\pi; +\infty)$ , є спадною на кожному з проміжків

$(-2\pi + 2\pi k; -\pi + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}_- \cup \{0\}$ . **43.50.** функція є незростаючою (сталю) на

кожному з проміжків  $(-\infty; -2)$ ,  $(-2; 2)$ ,  $(2; +\infty)$ . **43.51.**  $\epsilon$  зростаючою на

$(-\infty; -1)$  і  $(-1; 2)$ , є спадною на  $(2; +\infty)$ . **43.52.**  $\epsilon$  зростаючою на кожному з

проміжків  $(2\pi k; \pi + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є спадною на кожному з проміжків

$(\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . **43.45.**  $\epsilon$  зростаючою на  $(-1; 0)$ , є спадною на  $(0; 1)$ .

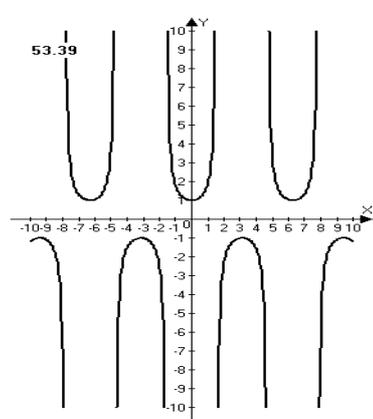
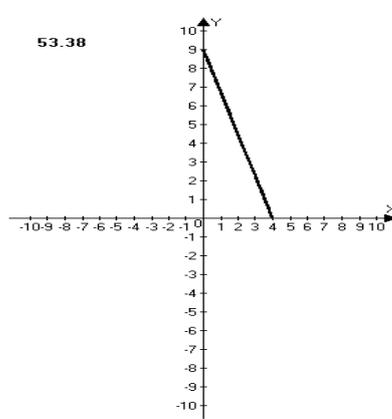
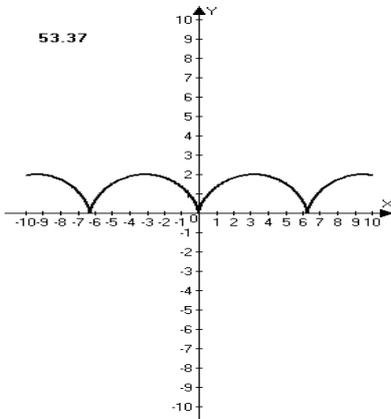
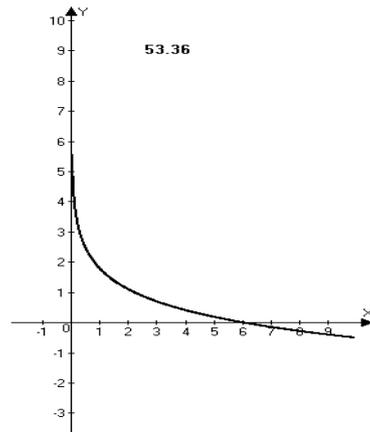
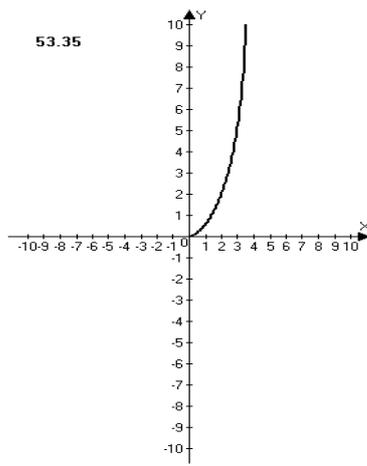
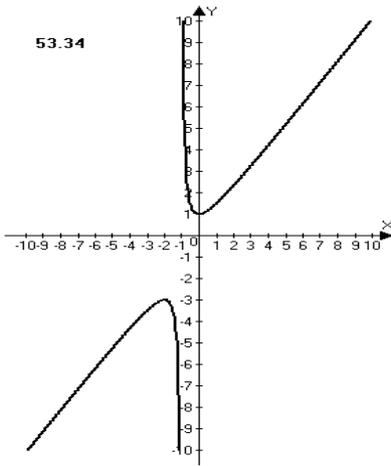
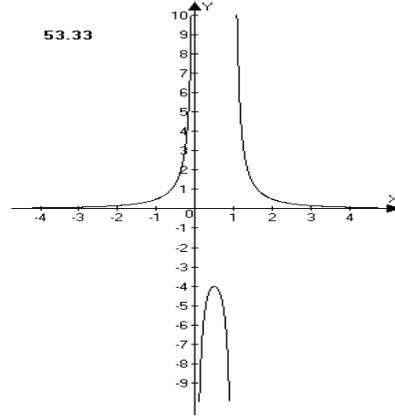
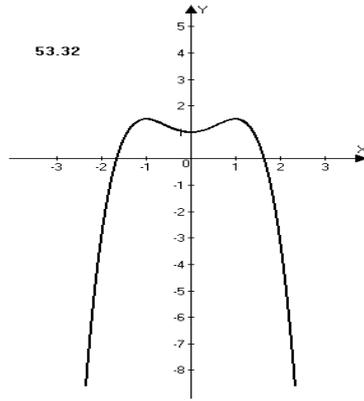
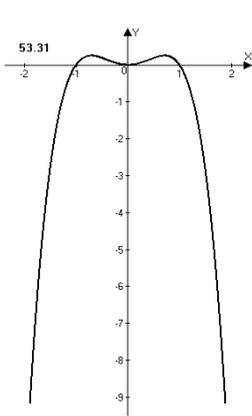
- 46.31.**  $f_{\min} = f(-1,5) = -\frac{1}{2e^3}$ .    **46.32.**  $f_{\min} = f(0) = 6,75$ .    **46.33.**  $f_{\min} = f(3) = 13$ ,  
 $f_{\max} = f(2) = 14$ .    **46.34.**  $f_{\min} = f(\sqrt{6}/3) = -4\sqrt{6}/3$ ,     $f_{\max} = f(-\sqrt{6}/3) = 4\sqrt{6}/3$ .  
**46.35.** екстремумів немає. **46.36.**  $f_{\min} = f(0) = 0$ . **46.37.** екстремумів немає. **46.38.**  
екстремумів немає. **46.39.**  $f_{\max} = f(0) = 2$ . **46.40.**  $f_{\max} = f(0,5) = -4$ . **46.41.**  
 $f_{\min} = f(-\sqrt[4]{4/3}) = -\frac{\sqrt{23^{\frac{3}{4}}}}{16}$ ,     $f_{\max} = f(\sqrt[4]{4/3}) = \frac{\sqrt{23^{\frac{3}{4}}}}{16}$ . **46.42.**  $f_{\max} = f(0) = 0$ . **46.43.**  
 $f_{\min} = f(0) = 0$ .    **46.44.**  $f_{\min} = f(1) = 2$ ,     $f_{\max} = f(-1) = -2$ .    **46.45.**  
 $f_{\min} = f(1) = \ln 2 - \pi/2$ . **46.46.** Кожна точка  $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  є точкою максимуму і  
 $f_{\max} = 1,5$ , кожна точка  $x = \pm 2\pi/3 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  є точкою мінімуму і  $f_{\min} = -0,75$ .  
**46.47.** екстремумів немає. **46.48.**  $f_{\min} = f(0) = 0$ . **46.49.**  $f_{\min} = f(0) = 0$ , кожна  
точка  $x = -\sqrt[3]{4}/2$  і  $x = \sqrt[3]{4}/2$  є точкою максимуму і  $f_{\max} = \sqrt[3]{32}/8$ . **46.50.**  
екстремумів немає. **46.51.**  $f_{\min} = f(-1) = -1/e$ . **46.52.**  $f_{\min} = f(0) = 0$ . **46.53.**  
 $f_{\min} = f(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2}-1$ ,     $f_{\max} = f(-\sqrt{2}-1) = -2\sqrt{2}-1$ . **46.54.**  $f_{\min} = f(0) = 18$ .  
**46.55.**  $f_{\min} = f(0) = 0$ . **46.56.** Кожна точка  $x = 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  є точкою максимуму і  
 $f_{\max} = e$ , кожна точка  $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  є точкою мінімуму і  $f_{\min} = 1/e$ .  
**46.57.** Кожна точка  $x = \pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  є точкою максимуму і  $f_{\max} = e$ , кожна  
точка  $x = -\pi/2 + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  є точкою мінімуму і  $f_{\min} = 1/e$ . **46.58.** екстремумів  
немає.    **46.59.**  $f_{\min} = f(\sqrt[3]{e}) = -3e^{4/3}$ .    **46.60.**  $f_{\min} = f(-1) = 0$ ,  
 $f_{\max} = f(-(4 + \ln 2)/\ln 2) = 128/(e \ln 2)^4$ . **46.61.**  $f_{\min} = f(0) = 0$ . **46.62.** екстремумів  
немає.    **46.63.**  $f_{\max} = f(0) = 0$ .    **46.64.**  $f_{\min} = f(-1) = 0$ ,  
 $f_{\max} = f(-(2 + \ln 3)/\ln 3) = 4/(3e^2 \ln^2 3)$ . **46.65.**  $f_{\min} = f(-2) = 8/3$ ,  $f_{\max} = f(0) = 4$ .  
**46.66.**  $f_{\max} = f(0) = 0$ . **46.67.**  $y_{\min} = y(1) = 0$ . **46.68.**  $\min f(x) = 0$ . **49.31.**  $x = 0$ .  
**49.32.**  $x = 0$ . **49.33.**  $x = \frac{(2k-1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ . **49.34.**  $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$ . **49.35.**  $x = 0$ . **49.36.**  
 $x = 1$ . **49.37.**  $x = 1, x = -1$ . **49.38.**  $y = 2x - \frac{\pi}{2}, x \rightarrow \infty$ . **49.39.**  $y = x, x \rightarrow +\infty, y = -x,$   
 $x \rightarrow -\infty$ . **49.40.**  $x = 0, y = x - 1, x \rightarrow \infty$ . **49.41.**  $x = 0, y = 0, x \rightarrow +\infty$ . **49.42.**  
асимптот немає. **49.43.**  $x = 0, x = 1, y = -1, x \rightarrow \infty$ . **49.44.**  $x = 0, y = x + 1, x \rightarrow \infty$ .  
**51.31.**  $\min f = \inf f = -13, \max f = \sup f = 3$ . **51.32.**  $\min f = \inf f = -\frac{10}{3}$ ,  
 $\max f = \sup f = 2$ .    **51.33.**  $\min f = \inf f = 1, \max f = \sup f = 5$ .    **51.34.**  
 $\min f = \inf f = 0, \max f = \sup f = e^2 - e$ .    **51.35.**  $\min f = \inf f = 0$ ,  
 $\max f = \sup f = \frac{1}{e}$ .    **51.36.**  $\min f = \inf f = \frac{4}{e^4}, \max f = \sup f = \frac{2}{e^2}$ .    **51.37.**  
 $\min f = \inf f = -1, \max f$  – не існує,  $\sup f$  – не існує. **51.38.**  $\min f$  – не існує,

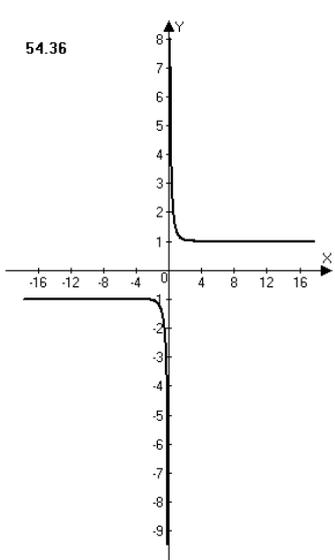
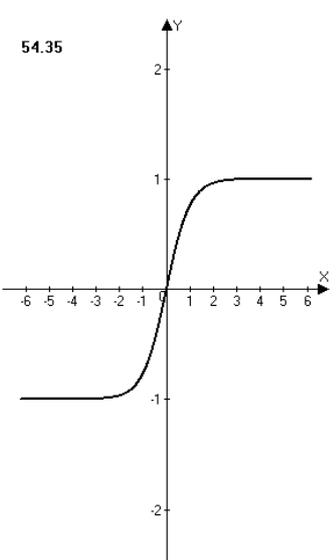
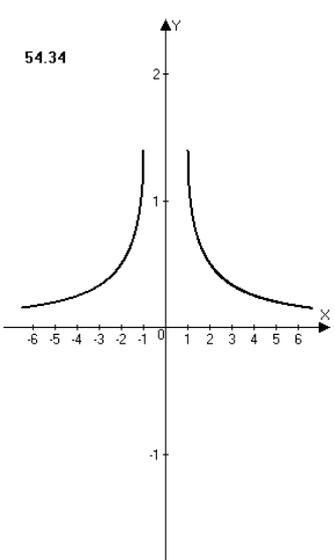
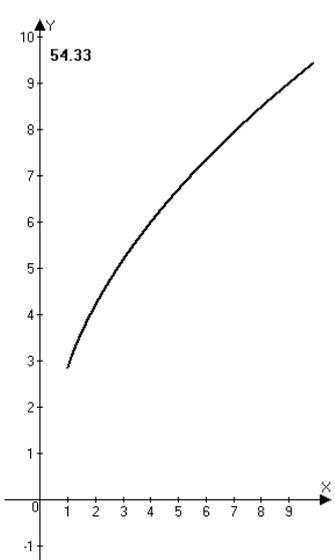
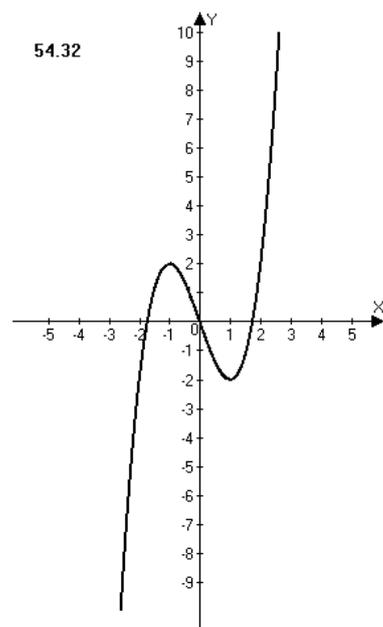
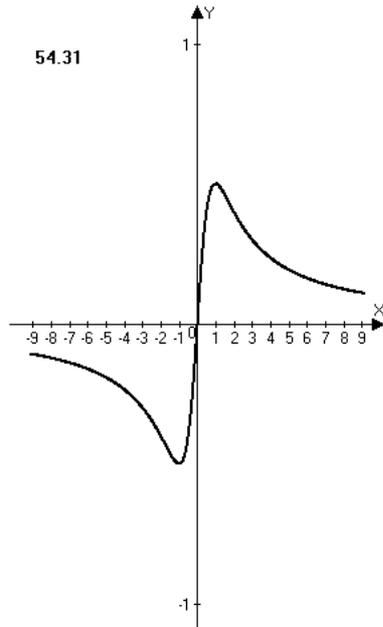
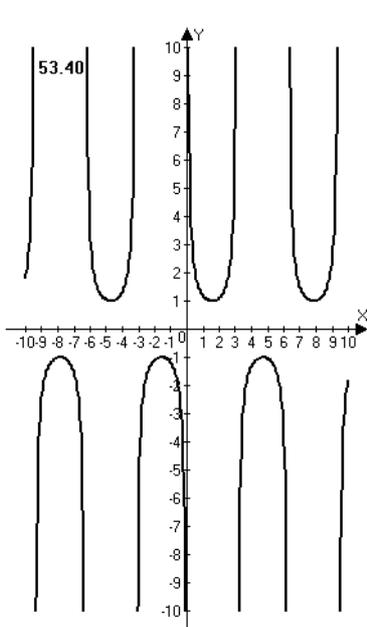
$\inf f = 0, \quad \max f = \sup f = \frac{\sqrt{2}}{1 + (\sqrt{2} - 1)^2}.$       **51.39.**  $\min f = \inf f = -\frac{1}{2}e^{-\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2},$

$\max f = \sup f = 1.$       **51.40.**  $\min f = \inf f = 0, \quad \max f = \sup f = 132.$       **51.41.**

$\min f = \inf f = -20, \quad \max f = \sup f = 1.$       **51.42.**  $\min f$  – не існує,  $\inf f$  – не існує,

$\max f = \sup f = \frac{56}{3}.$





71.31.  $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow 0$ . 71.32.  $f(x)\varphi(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ .  
 71.33. Функції непорівняльні. 71.34.  $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  
 $x \rightarrow 0$ .

## Додатки. Основні формули

### 1. Тригонометричні функції

#### 1. Основні тригонометричні тотожності

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

#### 2. Формули додавання і віднімання тригонометричних функцій

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \alpha + \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}, \alpha - \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

#### 3. Формули подвійних і потрійних аргументів

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha.$$

$$6. \cos 3\alpha = 4 \cos^3 \alpha - 3 \cos \alpha.$$

$$7. \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3 \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3 \operatorname{ctg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

#### 4. Формули половинного аргументу

$$1. \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$2. \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \alpha \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

#### 5. Формули перетворення суми або різниці тригонометричних функцій у добуток

1.  $\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ .
2.  $\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$ .
3.  $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ .
4.  $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ .
5.  $\cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ .
6.  $\cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left( \frac{\pi}{4} - \alpha \right)$ .
7.  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$ ,  $\beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
8.  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$ ,  $\beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
9.  $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ ,  $\alpha \neq \pi n$ ,  $\beta \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
10.  $\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}$ ,  $\alpha \neq \pi n$ ,  $\beta \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
11.  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
12.  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $\beta \neq \pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
13.  $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
14.  $\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha$ ,  $\alpha \neq \frac{\pi n}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .
15.  $1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ .
16.  $1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$ .
17.  $1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$ .
18.  $1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)$ .

$$19. 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$20. 1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$21. 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$22. 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$23. 1 + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$24. 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$25. 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$26. \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$27. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$28. \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$29. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

**6. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму**

$$1. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$2. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

$$3. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

$$4. \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) \\ + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$5. \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) \\ + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$6. \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) \\ + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$7. \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)).$$

7. Формули зниження степеня тригонометричних функцій

$$1. \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad 2. \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

$$3. \sin^3 \alpha = \frac{3\sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}. \quad 4. \cos^3 \alpha = \frac{3\cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

8. Формули зведення

$$1. \sin(-\alpha) = -\sin \alpha. \quad 2. \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$3. \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha. \quad 4. \sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha.$$

$$5. \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha. \quad 6. \sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha.$$

$$7. \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha. \quad 8. \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$9. \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha. \quad 10. \cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha.$$

$$11. \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha. \quad 12. \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$13. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha. \quad 14. \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha.$$

$$15. \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha. \quad 16. \operatorname{tg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha.$$

$$17. \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha. \quad 18. \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$19. \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha. \quad 20. \operatorname{ctg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha.$$

9. Значення тригонометричних функцій деяких основних кутів

$f(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

**10.Обернені тригонометричні функції**

1.  $\sin(\arcsin x) = x, -1 \leq x \leq 1.$

2.  $\arcsin(-x) = -\arcsin x.$

3.  $\arcsin(\sin x) = x, -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$

4.  $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1.$

5.  $\sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

6.  $\sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

7.  $\cos(\arccos x) = x, -1 \leq x \leq 1.$

8.  $\arccos(-x) = \pi - \arccos x.$

9.  $\arccos(\cos x) = x, 0 \leq x \leq \pi.$

10.  $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, -1 \leq x \leq 1.$

11.  $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

12.  $\cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$

13.  $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, -\infty < x < +\infty.$

14.  $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$

15.  $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$

16.  $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0.$

17.  $\operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$

18.  $\operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1.$

19.  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, -\infty < x < +\infty.$

20.  $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$

21.  $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, 0 < x < \pi.$

22.  $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, x \neq 0.$

23.  $\operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, -1 \leq x < 0, 0 < x \leq 1.$

24.  $\operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, -1 < x < 1.$

$$25. \arcsin x = \begin{cases} -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$26. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$27. \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$28. \arccos x = \begin{cases} \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \arcsin \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$29. \arccos x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$30. \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$31. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$32. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$33. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \pi, & x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$34. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

$$35. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$36. \operatorname{arcctg} x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$37. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$38. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$39. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

$$40. \arcsin x + \arcsin y =$$

$$\begin{cases} \arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & xy < 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \\ -\arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) - \pi, & x^2 + y^2 > 1, \quad x < 0, \quad y < 0, \\ -\arcsin \left( x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) + \pi, & x^2 + y^2 > 1, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

$$41. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} - \pi, & xy > 1, \quad x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \pi, & xy > 1, \quad x > 0. \end{cases}$$

$$42. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{1-xy}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$43. \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$44. \operatorname{arcctg} x + \operatorname{arcctg} y = \operatorname{arcctg} \frac{xy-1}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

## 2. Гіперболічні функції

$$1. \operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

$$2. \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}).$$

$$3. \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

$$4. \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

$$5. e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x.$$

$$6. e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x.$$

7.  $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$ .

8.  $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$ .

9.  $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$ .

10.  $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$ .

11.  $\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$ .

12.  $\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}$ .

13.  $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$ .

14.  $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$ .

15.  $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$ .

16.  $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$ .

17.  $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}$ .

18.  $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$ .

19.  $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$ .

20.  $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$ .

21.  $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$ .

22.  $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ .

23.  $\operatorname{arch}_+ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ .

24.  $\operatorname{arch}_- x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$ .

25.  $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ ,  $x \in (-1; 1)$ .

26.  $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ ,  $x \in (1; +\infty)$ .

**3. Основні границі**

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$ .

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ .

3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ,  $a \in (0; +\infty)$ .

4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$ .

5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ,  $|q| < 1$ .

6.  $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$ ,  $|q| > 1$ .

7.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n!} = 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$ .

8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ,  $a \in (1; +\infty)$ .

9.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$ ,  $p \in \mathbb{R}$ ,  $a \in (1; +\infty)$ .

10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$ ,  $a \in (1; +\infty)$ .

11.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$ ,  $a \in (0; +\infty)$ .

12.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ .

13.  $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ .

14.  $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x = e$ .

15.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$ .

16.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\ln a}$ .

17.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

18.  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1$ .

19.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

20.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x-1} = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

21.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a \in (0; +\infty).$

22.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

23.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\varepsilon} = 0, \beta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0; +\infty).$

24.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$

25.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0, \beta \in \mathbb{R}, a \in (1; +\infty).$

26.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1.$

**4. Таблиця основних похідних**

1.  $(c)' = 0.$

2.  $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \mu \in \mathbb{R}.$

3.  $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

4.  $(e^x)' = e^x.$

5.  $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0.$

6.  $(\ln x)' = 1/x.$

7.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1.$

8.  $(\sin x)' = \cos x.$

9.  $(\cos x)' = -\sin x.$

10.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

11.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

12.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

13.  $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

14.  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

15.  $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

16.  $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

17.  $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

18.  $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

19.  $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

20.  $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

21.  $(\operatorname{arch}_+ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

22.  $(\operatorname{arch}_- x)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

23.  $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}.$

24.  $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0.$

25.  $([x])' = 0, x \neq k \in \mathbb{Z}.$

26.  $(|x|)' = \operatorname{sgn} x, x \neq 0.$

**5. Таблиця основних інтегралів**

1.  $\int 0 dx = C.$

2.  $\int dx = x + C.$

3.  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

4.  $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1.$

5.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1.$

6.  $\int e^x dx = e^x + C.$

7.  $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

8.  $\int \cos x dx = \sin x + C.$

9.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$

10.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$

11.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

12.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$

13.  $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C.$

14.  $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x| + C.$

15.  $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C.$

16.  $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$

17.  $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C.$

18.  $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C.$

19.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$

20.  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$

21.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

22.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$

23.  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, a > 0.$

24.  $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a \neq 0.$

25.  $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0.$

26.  $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0.$

27.  $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0.$

28.  $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a > 0.$

## Література

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу/ Под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир., 1965. – 83 с.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 352 с.
4. Глушков П.М., Шунда Н.М. Диференціальне числення функції однієї змінної. – К.: Вища шк., 1991. – 270 с.
5. Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Мир, 1971. – 680 с.
6. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 234 с.
7. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч. – К.: Вища шк., 1990. – Ч. 1. – 380 с.; Ч. 2. – 1991. – 365 с.; Ч. 3. – 1992. – 360 с.
8. Дьедонне Ж. Основы современного анализа.–М.: Мир, 1964.–430 с.
9. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Либідь, 1993. – Ч. 1. – 320 с.; Ч. 2. – 299 с.
10. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2002. – Ч. 1. – 463 с; Ч. 2. – 2003. – 470 с.
11. Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ.– М.: Наука, 1974. – 487 с.
12. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Фазис, 1997. – Ч. 1. – 554 с.
13. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Наука, 1981. – Ч. 1. – 543 с.; Ч. 2. – 1984. – 640 с.

14. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: МЦНМО, 2001. – Ч. 1. – 664 с.; Ч. 2. – 2002. – 794 с.
15. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1985. – Ч. 1. – 662 с.; Ч. 2. – 1987. – 358 с.
16. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 616 с.
17. Коровкин П.П. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Просвещение, 1972. – Ч. 1. – 447 с.
18. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3-х т. – М.: Высш. шк., 1988. – Т. 1. – 712 с.; Т. 2. – 576 с.; Т. 3. – 1989. – 352 с.
19. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 704 с.; Т. 2. – 671 с.
20. Ландау Э. Основы анализа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 182 с.
21. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1992. – Ч. 1 – 495 с.; Ч. 2. – 1993. – 375 с.
22. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ: В 3-х ч. – К.: Вища шк., 1983. – Ч. 1. – 495 с.
23. Майков Е.В. Математический анализ. Введение. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 48 с.
24. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 484 с.; Т. 2. – 448 с.
25. Поля Г., Сега Г. Задачи и теоремы из анализа: В 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с; Ч. 2. – 431 с.
26. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.
27. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Просвещение, 1976. – Т. 2. – 479 с.
28. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа: В 2-х ч. – М.: Физматгиз, 1962. – Ч. 1. – 343 с.; 1963. – Ч. 2. – 500 с.
29. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 616 с; Т. 2. – 800 с; Т. 3. – 656 с.
30. Шварц Л. Анализ: В 2-х т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 824 с.; Т. 2. – 528 с.
31. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1-2. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
32. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990. – 479 с.
33. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1994. – Ч. 1. – 423 с.
34. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2005. – Ч. 1. – 447 с.; Ч. 2. – 510 с.

35. Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полия Г. Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
36. Чернишов С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
37. Tom M. Apostol. Calculus. – 1961.–Vol. 1. – 666 p; Vol. 2. – 1967.–667 p.
38. Robert G. Bartle. The elements of real analysis. – New York, 1967.– 447 p.
39. Mauch S. Introduction to methods of applied mathematics or advanced methods for scientists and engineers. – 2002. – 1441 p.
40. Stroyan K.D. Mathematical background: foundations of infinitesimal calculus. – Academic Press, Inc., 1997. – 182 p.
41. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446 с.
42. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А., Матвеев И.В., Смолянский М.Л., Цветков А.Т. Задачник по курсу математического анализа: В 2-х ч./ Под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971. – Ч. 1. – 343 с; Ч. 2. – 336 с.
43. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2-х ч./ Под общ. ред. В.А. Садовниченко. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – Ч. 1. – 416 с; Ч. 2. – 1991. – 352 с.
44. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике: В 2-х т. – М.: Высш. шк., 1957. – Т. 1. – 224 с.; Т. 2. – 223 с.
45. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 255 с.
46. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
47. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. – К.: Высш. шк., 1987. – 408 с.
48. Задачи и упражнения по математическому анализу/ Для втузов. Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
49. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 464 с.
50. Егорова И.А. Задачник-практикум по математическому анализу: В 3-х ч. – М.: Учпедгиз, 1962. – Ч. 3. – 105 с.
51. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1984. – 592 с.
52. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике: Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.
53. Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи. – М.: Наука, 1973. – 461 с.

- 
54. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: В 3-х т. – М.: Едиториал, 2001. – Т. 1. – 360 с; Т. 2. – 2003. – 224 с.; Т. 3. – 2001. – 224 с.
55. Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. – М.: Наука, 1992. – 432 с.
56. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высш. шк., 1964. – 336 с.
57. Погорелов А.И. Контрольные работы по математическому анализу. – М.: Учпедгиз, 1951. – 50 с.
58. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3-х ч./ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державець, И.Е. Юреть. Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высш. шк., 1990. – Ч. 1. – 271 с.; Ч. 2. – 1991. – 352 с.

## Іменний показчик

1. Архімед 44
2. Бернуллі Я. (Bernulli Ja.) 32
3. Больцано Б. (Bolzano B.) 121
4. Вандермонд А. (Vandermonde A.) 409
5. Вейерштрасс К. (Weierstrass K.) 116, 121
6. Гейне Г.Е. (Heine H.E.) 181
7. Гільберт Д. (Hilbert D.) 49
8. Дедекінд Р. (Dedekind R.) 38
9. Діріхле Л. (Dirichlet L.) 166
10. Ерміт (Hermite C.) 425
11. Кантор Г. (Cantor G.) 53, 135, 286
12. Картан А. (Cartan A.) 135, 286
13. Коші О.Л. (Cauchy A.L.) 130, 362, 371
14. Лагер (Laguerre E. N.) 425
15. Лагранж Ж. (Lagrange J. L.) 361, 370, 409
16. Ландау Е. (Landau E.) 395
17. Лежандр А. М. (Legendre A.) 425
18. Лейбніц (Leibniz v. G.W.) 353
19. Лопіталь Г. (de L'Hospital G.) 363
20. Маклорен К. (Maclaurin C.) 370
21. Ньютон І. (Newton I.) 32
22. Пеано Дж. (Peano G.) 372, 398
23. Ріман Б. (Riemann B.) 312
24. Ролль М. (Rolle M.) 361
25. Тейлор Б. (Taylor B.) 367, 369, 398
26. Ферма П. (Fermat P.) 360
27. Чебишов П.Л. (Chebyshev P.L.) 425
28. Штольц О. (Stolz O.) 127

## Предметний показчик

- Абсолютна похибка 373
- Аксиома 47
- неперервності Кантора 53
- Аксиоматичне означення множини натуральних чисел 49
- дійсних чисел 52
- Аксиоматичний метод побудови математичної теорії 47
- Арифметичне значення кореня  $n$ -го степеня 290
- Асимптота 392
- вертикальна 393
  - похила 392
- Асимптотика коренів рівнянь 404
- обернених функцій 404
- Асимптотична формула (рівність) 396
- Архімеда принцип 44
- Багаточлен (многочлен, поліном) 170
- Ерміта 425
  - Лагера 425
  - Лежандра 425
  - Тейлора 369
  - Чебишова 425
- Бернуллі нерівність 32
- Біном Ньютона 32
- Вгнутість 387
- Верхня межа числової множини 41
- Висловлення 23
- Висота дробу 46
- Відповідність 18
- взаємно однозначна (бієкція) 19
- Геометрична прогресія 133

- Геометричний зміст диференціала 350
- похідної 336
- Глобальний максимум 385
- мінімум 386
- Границя 93, 164
- в  $\infty$  191
  - композиції функцій 194
  - послідовності 97, 98, 109
  - – верхня 122
  - – нижня 124
  - – часткова 122
  - функції 176, 177, 181
  - – верхня 203
  - – за Гейне 181
  - – за Коші 177
  - – за множиною 207, 208
  - – ліва 190
  - – на мові околів 177
  - – нескінченна 187
  - – нижня 203
  - – по базі 211
  - – права 189
  - – скінченна 176
  - – часткова 202
- Гранична точка множини 207
- Граничне положення січної 337
- Граничний перехід в нерівностях 104
- під знаком неперервної функції 268
- Графік функції 19, 165
- 
- Декартовий (прямий) добуток множин 16
- Диференціал функції 348
- вищого порядку 356
- Добуток функцій 165
- числових множин 16
- Достатні умови екстремуму 381
- Достатня умова опуклості 387
- вгнутості 388

- 
- Дотична до графіка функції 335
- Дріб 34
- десятковий 34
  - – неперіодичний 35
  - – нескінченний 35, 36
  - – періодичний 34
  - звичайний 34
- Еквівалентні (рівнопотужні) множини 45
- Екстремум функції 379
- $\varepsilon$ -окіл точки 93
  - проколений 93
- Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків 393
- Звуження функції 168
- Інваріантність форми першого диференціала 351
- Інтерполяція 409
- Інфімум числової множини 43
- Існування кореня  $n$ -го степеня 290
- Квантор загальності 24
- існування 24
- Композиція функцій 169, 268
- Критерій Коші збіжності послідовності 130
- існування границі функції 205, 211
- Кутовий коефіцієнт дотичної 336
- Логічна символіка 23
- Локальний екстремум 380
- Максимум функції 379
- мінімум функції 379
- Метод вилки 402
- дотичних (Ньютона) 403
  - послідовних наближень 403
  - проміжків розв'язування нерівностей 281
  - хорд 403
- Механічний зміст похідної 338
- Множина 15
- визначення функції 18

- десяткових дробів 35, 133
- дійсних чисел 36
- зліченна 45
- значень функції 19
- ірраціональних чисел 36
- натуральних чисел 30
- порожня 16
- потужності континууму 46
- раціональних чисел 34
- цілих чисел 33
- числова 41
- – незліченна 46
- – необмежена 40
- – нескінченна 40
- – обмежена 40
- – – зверху 41
- – – знизу 44
- – скінченна 40
- Модуль дійсного числа 39
- Наближені методи розв’язування рівнянь 402
- Найбільше значення функції на замкненому проміжку 385
  - множині 276
- Найбільший елемент множини 44
- Найменше значення функції на замкненому проміжку 385
- Найменший елемент множини 44
- Натуральний степінь дійсного числа 288
- Натуральний логарифм 295
- Невизначеності 94
  - типи невизначеностей 94
- Необхідна умова екстремуму 380
- Неперервність 265
  - композиції функцій 268
  - однобічна 269
  - одночленів, багаточленів і раціональних функцій 288
  - рівномірна 286
  - функції в точці 265, 266, 269
  - функції за множиною 272
  - функції на множині 275

- Нескінченність 93
- Нескінченна система замкнених вкладених проміжків 37
- Нескінченно віддалена точка 93
- Нижня межа числової множини 43
- Нормаль до графіка функції 337
- Нуль функції 165, 369
- Об'єднання множин 16
- Область визначення функції 18
- значень функції 19
- Образ елемента 19
- множини 19, 165
- Однозначна гілка багатозначної функції
- Одночлен 170
- Окіл точки 93
- проколений окіл точки
- Опуклість 386
- $O$ -символіка 396
- Пара 16
- упорядкована 17
- Перетин множин 16
- Період десяткового дробу 34
- функції 173
- Підмножина 16
- Підпоследовність 104
- Порівняння функцій 396
- Последовність 95
- збіжна 98, 108
  - зростаюча 117
  - монотонна 117
  - незростаюча 116
  - нескінченна 109
  - необмежена 103
  - нескінченно велика 108
  - – мала 106
  - неспадна 115
  - обмежена 103
  - – зверху 116
  - – знизу 116

- спадна 117
- стала 99
- розбіжна 98
- фундаментальна 131
- Похідна 331
  - вищого порядку 352
  - композиції 342
  - ліва 333
  - логарифмічна 346
  - нескінченна 332
  - оберненої функції 346
  - параметрично заданої функції 358
  - показниково-степеневі функції 345
  - права 333
  - сталої, суми, добутку і частки 339
- Правила Лопітала 363
- Предикат 24
- Принцип вкладених проміжків 37
  - математичної індукції 30
- Приріст аргументу 332
  - функції 332
- Продовження функції 169
- Проміжки зростання функції 376
  - спадання функції 376
- Проміжки опуклості функції 387
  - вгнутості функції 388
- Проміжок 37
  - відкритий 37
  - замкнений 37
  - напіввідкритий 37
- Прообраз елемента 18
  - множини 19
  
- Рівність множин 16
  - функцій 19, 165
- Різниця множин 16
  
- Символи Ландау 396
- Січна 335
- Степінь з довільним раціональним показником 291

- 
- з довільним дійсним показником 292
  - Стрибок функції 270
  - Сума функцій 165
    - числових множин 16
    - членів послідовності 133
  - Супремум числової множини 42
  
  - Таблиця похідних 342
  - Теорема 27, 47
    - Больцано-Вейерштрасса 121
    - Больцано-Коші 278, 280
    - Вейерштрасса 116, 276, 277
    - Кантора 135, 286
    - Коші 362
    - Лагранжа 361
    - Ролля 361
    - Ферма 360
    - Штольца 127
  - Точка критична 380
    - максимуму 379
    - мінімуму 379
    - перегину 388
    - розриву 269
      - – ізольована 269, 272
      - – другого роду 270
      - – першого роду 270
      - – усувна 270
    - стаціонарна 380
  - Точна верхня межа множини 42
    - функції 275, 276
  - Точна нижня межа множини 43
    - функції 276
  
  - Умови монотонності функцій 375
    - постійності функцій 375
  
  - Формула Лагранжа 409
    - Лейбніца 353
    - Маклорена 370
    - Тейлора для багаточлена 367

- довільної функції 369
- – – з додатковим членом у формі Лагранжа 370
- – – з додатковим членом у формі Коші 371
- – – з додатковим членом у формі Пеано 372
- Функціональне рівняння 303
- Функція 18, 165
  - багатозначна (многозначна) 301
  - бієкція 19
  - вгнута 388
  - диференційовна 348
  - Діріхле 166
  - елементарна 169
  - зростаюча 174
  - ін'єкція 19
  - ірраціональна 170
  - логарифмічна 294
  - монотонна 174
  - незростаюча 174
  - необмежена 176
  - непарна 171
  - неперервна 265, 266, 269
  - неперервно диференційовна 374
  - нескінченно велика 187
    - мала 185
  - нескінченно диференційовна 374
  - неспадна 174
  - неявно задана 167
  - обернена 282
  - обмежена 175, 184, 275
  - оборотна (однолиста, ін'єкція) 19, 282
  - однозначна 301
  - опукла 386
  - параметрично задана 358
  - парна 171
  - періодична 173
  - показникова 293
  - раціональна 170
    - дробово-раціональна 170
  - розривна 266

- 
- складена 169
  - спадна 174
  - стала 165, 177
  - степенева 295
  - сур'єкція 19
  - трансцендентна 171

Число дійсне 36

- ірраціональне 36
- натуральне 30
- раціональне 34
- ціле 33
- $e$  118

Числова пряма 36

- розширена 93