

**Дрогобицький державний педагогічний університет
імені Івана Франка**

**Б.В. Винницький, О.В. Шаповаловський,
В.Л. Шаран, Р.В. Хаць**

**МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ФУНКЦІЙ
ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ, Ч. 2**

Навчальний посібник
для студентів фізико-математичних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Дрогобич – 2013

УДК 517.5(075)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист №1/11-20787 від 31.12.13)

Рецензенти:

Каленюк П.І., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри вищої математики Національного університету «Львівська політехніка»;

Заболоцький М.В., доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка;

Лазурчак І.І., доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри інформатики та обчислювальної математики Дрогобицького педагогічного університету імені Івана Франка.

Винницький Б.В., Шаповаловський О.В., Шаран В.Л, Хаць Р.В.
Математичний аналіз функцій однієї змінної: У 2-х ч. Частина II. Навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів. Дрогобич: ДДПУ, 2013. 484 с.

Курс побудовано за модульним принципом, він є початковим курсом і розрахований для тих спеціальностей, навчальними планами яких передбачено вивчення математичного аналізу в об'ємі 600-800 годин (15-23 залікових кредитів). Він включає лекційний матеріал, завдання для самостійного вивчення, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи та модульного контролю.

*Відповідальний за випуск
Володимир Дільний*

© Редакційно-видавничий відділ
Дрогобицького державного педагогічного
університету імені Івана Франка, 2013

Зміст

Основні позначення	8
Вступ	9
Розділ 6. Первісна і невизначений інтеграл	15
1. Означення первісної і невизначеного інтегралу.....	15
2. Найпростіші властивості невизначеного інтегралу.....	17
3. Таблиця основних інтегралів.....	18
4. Інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів.....	20
5. Інтегрування частинами невизначених інтегралів.....	24
6. Інтегрування елементарних раціональних дробів.....	28
7. Багаточлени (многочлени, поліноми) і раціональні функції. Розклад на елементарні дроби.....	29
8. Інтегрування раціональних функцій.....	32
9. Інтегрування деяких ірраціональних функцій.....	33
10. Інтегрування тригонометричних та інших трансцендентних функцій.....	36
11. Запитання для самоконтролю.....	40
12. Вправи й задачі теоретичного характеру.....	40
13. Вправи й задачі розрахункового характеру.....	43
14. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру.....	70
Розділ 7. Інтеграл Рімана (визначений інтеграл)	78
1. Означення визначеного інтеграла.....	78
2. Границя по базі.....	80
3. Обмеженість інтегрованої функції.....	81
4. Властивості верхніх і нижніх інтегральних сум.....	82
5. Критерій інтегровності. Інтегровність неперервної функції.....	83
6. Інші критерії інтегрованості.....	86
7. Найпростіші властивості визначеного інтеграла.....	89

8. Властивості визначеного інтеграла як функції проміжку.....	93
9. Теорема про середнє для визначених інтегралів.....	95
10. Інтеграл зі змінною верхньою межею.....	98
11. Формула Лейбніца-Ньютона (основна теорема інтегрального числення)...	99
12. Інтегрування частинами визначених інтегралів.....	101
13. Інтегрування заміною змінних визначених інтегралів.....	101
14. Запитання для самоконтролю.....	106
15. Вправи й задачі теоретичного характеру.....	106
16. Вправи й задачі розрахункового характеру.....	116
17. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру.....	138
Розділ 8. Невласні (невластиві) інтеграли та інші узагальнення	
інтеграла Рімана.....	141
1. Означення невластивого інтеграла і його найпростіші властивості.....	141
2. Деякі властивості невластивих інтегралів.....	144
3. Критерій Коші збіжності невластивих інтегралів.....	145
4. Збіжність невластивих інтегралів невід'ємних функцій.....	146
5. Ознаки Абеля і Діріхле.....	150
6. Абсолютно та умовно збіжні інтеграли.....	151
7. Невласні інтеграли з кількома особливими точками.....	156
8. Невласні інтеграли в розумінні головного значення.....	158
9. Гамма-функція.....	158
10. Поняття про функції обмеженої варіації.....	159
11. Поняття про інтеграл Стільт'єса.....	160
12. Запитання для самоконтролю.....	162
13. Вправи й задачі теоретичного характеру.....	163
14. Вправи й задачі розрахункового характеру.....	172
15. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру.....	187
Розділ 9. Застосування визначеного інтеграла.....	188
1. Площа криволінійної трапеції.....	188
2. Полярні координати. Площа криволінійного сектора.....	192
3. Довжина кривої (шляху).....	194
4. Площа поверхні обертання.....	200
5. Об'єм тіла обертання.....	202
6. Знаходження об'єму за площею поперечного перерізу.....	205
7. Середнє значення функції на проміжку.....	207

8. Робота.....	209
9. Маса стержня.....	210
10. Статичні моменти і координати центра мас кривої. Перша теорема Гульдїна.....	210
11. Центр мас і статичні моменти пластинки. Друга теорема Гульдїна.....	212
12. Наближені методи знаходження визначених інтегралів.....	213
13. Запитання для самоконтролю.....	215
14. Вправи й задачі теоретичного характеру.....	215
15. Вправи й задачі розрахункового характеру.....	216
16. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру.....	238
Розділ 10. Числові ряди.....	239
1. Поняття числового ряду. Необхідна умова збіжності.....	239
2. Сума рядів. Добуток ряду на число. Сполучна властивість збіжних рядів.....	242
3. Критерій Коші збіжності ряду.....	243
4. Ознаки збіжності додатних рядів.....	244
5. Зауваження про ознаки збіжності додатних рядів.....	252
6. Ознаки збіжності знакопочередних рядів.....	253
7. Ознаки збіжності рядів з довільними членами.....	255
8. Абсолютно збіжні ряди.....	257
9. Переставна властивість абсолютно збіжних рядів.....	260
10. Добуток рядів.....	260
11. Умовно збіжні ряди.....	262
12. Застосування рядів до дослідження послідовностей.....	266
13. Числові нескінченні добутки.....	267
14. Запитання для самоконтролю.....	274
15. Вправи й задачі теоретичного характеру.....	274
16. Вправи й задачі розрахункового характеру.....	281
17. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру.....	298
Розділ 11. Функціональні ряди.....	300
1. Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей.....	300
2. Означення функціонального ряду, його збіжність і рівномірна збіжність.....	304
3. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.....	310
4. Степеневі ряди. Радіус і проміжок збіжності степеневого ряду.....	318
5. Властивості степеневих рядів.....	323

6. Ряд Тейлора.....	327
7. Означення синуса і косинуса.....	336
8. Функції Бесселя.....	340
9. Комплексні числа.....	341
10. Границя послідовності і ряди з комплексними членами.....	344
11. Зауваження про розбіжні ряди.....	348
12. Запитання для самоконтролю.....	349
13. Вправи й задачі теоретичного характеру.....	351
14. Вправи й задачі розрахункового характеру.....	356
15. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру.....	379
Розділ 12. Ряди Фур'є.....	383
1. Зауваження про періодичні функції.....	383
2. Тригонометрична система. Тригонометричний ряд.....	384
3. Тригонометричний ряд Фур'є на проміжку довжини 2π . Теорема Рімана-Лебега.....	388
4. Формула для n -ої частинної суми тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$	392
5. Формули для середніх арифметичних частинних сум тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$	394
6. Збіжність середніх арифметичних тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$	394
7. Наближення функцій поліномами.....	396
8. Поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$	399
9. Поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-l; l]$	405
10. Поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[\alpha; \beta]$	406
11. Ряд Фур'є по косинусах та синусах.....	408
12. Векторні простори.....	412
13. Евклідові та передевклідові простори.....	416
14. Збіжність ряду в передевклідовому просторі.....	423
15. Ортонормована система. Ряд Фур'є за ортонормованою системою.....	424
16. Рівномірна і абсолютна збіжність тригонометричного ряду Фур'є	

на проміжку $[-\pi; \pi]$	436
17. Критерій лінійної залежності.....	438
18. Процес ортогоналізації Шмідта.....	441
19. Інтегральна формула Фур'є. Поняття про перетворення Фур'є.....	442
20. Запитання для самоконтролю.....	447
21. Вправи й задачі теоретичного характеру.....	448
22. Вправи й задачі розрахункового характеру.....	451
Додатки. Основні формули.....	461
Література.....	472
Іменний покажчик.....	476
Предметний покажчик.....	478

Основні позначення

1. \mathbb{N} – множина всіх натуральних чисел.
2. \mathbb{Z} – множина всіх цілих чисел.
3. \mathbb{N}_0 або \mathbb{Z}_+ – множина всіх цілих невід’ємних чисел.
4. $\overline{n; m}$ – множина всіх цілих чисел x , які задовольняють нерівність $n \leq x \leq m$.
5. \mathbb{Q} – множина всіх раціональних чисел.
6. \mathbb{R} – множина всіх дійсних чисел.
7. $\overline{\mathbb{R}}$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символами “ $-\infty$ ” і “ $+\infty$ ”.
8. $\overline{\mathbb{R}}_0$ – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символом “ ∞ ”.
9. $(a; b)$ або $]a; b[$ – відритий проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a < x < b$.
10. $[a; b]$ – замкнений проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a \leq x \leq b$.
11. $(a; b]$ або $]a; b]$ – напіввідкритий проміжок з включеним правим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a < x \leq b$.
12. $[a; b)$ або $[a; b[$ – напіввідкритий проміжок з включеним лівим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел x , які задовольняють нерівність $a \leq x < b$.
13. $U(a; \varepsilon)$ – ε -окіл точки a , тобто $U(a; \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < \varepsilon\}$, якщо $a \in \mathbb{R}$,
 $U(a; \varepsilon) = \{x \in \overline{\mathbb{R}}_0 : |x| > \varepsilon\}$, якщо $a = \infty$, $U(a; \varepsilon) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x > \varepsilon\}$, якщо $a = +\infty$, і
 $U(a; \varepsilon) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : x < -\varepsilon\}$, якщо $a = -\infty$.
14. $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon)$ – проколений ε -окіл точки a , тобто $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon) = U(a; \varepsilon) \setminus \{a\}$.
15. $f : H_1 \rightarrow H_2$ – функція або відповідність, область визначення якої належить множині H_1 , а множина значень – множині H_2 .
16. $D(f)$ – область (множина) визначення функції $f : H_1 \rightarrow H_2$.
17. $E(f)$ – множина значень функції $f : H_1 \rightarrow H_2$.
18. $(H_1)^{(H_2)}$ – множина всіх функцій $f : H_1 \rightarrow H_2$.
19. \blacktriangleright – кінець доведення.
20. $:=$ – рівне за означенням.

Вступ

Математика розвивалась і розвивається разом з розвитком людського суспільства. Запити повсякденного життя ставили перед математиками нові проблеми, що сприяло розвиткові математики. З іншого боку, нові досягнення в математиці часто ставали поштовхом до технічного та суспільного прогресу. В розвитку математики можна виділити три періоди: 1) до XVI століття; 2) XVI століття-середина XX століття; 3) друга половина XX століття по даний час. Математику першого періоду можна охарактеризувати як математику сталих величин. Математику другого періоду можна назвати математикою змінних величин. Нарешті третій період характеризується розвитком обчислювальної техніки і проникненням математики майже в усі науки і сфери життя. Сучасна математика – це сукупність ряду математичних дисциплін: геометрії, алгебри, топології, математичної логіки, математичного аналізу та інших. В математиці дуже багато ще нерозв'язаних проблем: великих і малих. Чим ближче до основ математики, тим складніші проблеми. Складають проблему відповіді на такі фундаментальні запитання, як “що таке означення?”, “що таке доведення?”, “які основні принципи лежать в основі математики?”, “чи можна використовувати нескінченні множини?” та інші. Складність відповідей на подібні запитання дає підстави не абсолютизувати математичну строгість і розглядати цю строгість як історичну категорію. З деякими менш глобальними проблемами ми стикнемося в процесі вивчення математичного аналізу. Більше того, кожен день практика ставить перед математиками нові проблеми, які часто математики не вміють розв'язати. Тому математика бурхливо розвивається. Кожного року в світі друкується тисячі статей, в яких доводиться тисячі нових теорем і нових формул. Зрозуміло, що таку кількість теорем запам'ятати одна людина не може. В цьому зв'язку природним є питання: “що означає знати математику?”. Відповідь на це питання залежить від того, кому воно адресоване. Для студента вузу на це питання можна відповісти так. Знати математику – означає: 1) засвоїти матеріал в об'ємі, який передбачений програмою своєї спеціальності;

2) вміти самостійно вивчати нові розділи математики і застосовувати їх до розв'язування практичних задач; 3) вміти використовувати сучасні комп'ютерні технології до розв'язування математичних задач. Для студентів-математиків до цього можна додати ще й таке: 4) вміти сформулювати нову математичну проблему і знайти підходи до її розв'язання. Видається, що в наш час для математика важливо також навчитися вловлювати та використовувати цілі математичні теорії, не знаючи часто їхніх деталей, тобто мислити цілими математичними теоріями як аксіомами. Взагалі, якщо в процесі вивчення математики студент дійшов до такого стану, що Сократове “я знаю, що я нічого не знаю” йому не чуже, то рівень підготовки такого студента є належним.

Характерною особливістю математики є її абстрактний характер. Завдяки цьому одні і ті ж математичні методи можна використовувати в різних науках.

Опишемо схематично взаємодію математики і інших наук. Нехай, наприклад, фізик вивчає певний фізичний процес, який характеризується величиною x . Застосувати математику до вивчення цього фізичного процесу часто означає на основі спостережень і аналізу фізичних законів прийти до висновку, що ця фізична величина x повинна задовольняти рівняння

$$f(x) = 0. \quad (1)$$

Якщо таке рівняння написано, то кажуть, що побудовано математичну модель розглядуваного фізичного процесу. Далі потрібно це рівняння проаналізувати, дослідити його розв'язки. Розв'язки можуть підказати нові відкриття (згадаємо про відкриття планети Нептун і позитрона). Рівняння (1) може виявитись таким, що на даний час математики не вміють його розв'язувати. В результаті виникає нова математична проблема. Може статися, що розв'язки рівняння (1) не узгоджуються з експериментами. Тоді або рівняння (1) слід замінити іншим, або піддати критичному аналізу ті фізичні принципи, які лежать в основі написання рівняння (1), або вдосконалити експерименти.

Математичний аналіз – це розділ математики, який вивчає властивості функцій за допомогою границь. Він зародився в XVII столітті в роботах Ньютона і Лейбніца під впливом фізичних та інших задач. Розглянемо деякі ідеї, які лежать в основі математичного аналізу. Якщо матеріальна точка, рухаючись рівномірно і прямолінійно, за час t пройшла шлях S , то її швидкість в будь-який момент часу є сталою і $v = S/t$. Якщо ж матеріальна точка, рухаючись прямолінійно і нерівномірно, тобто з прискоренням, за час t пройшла шлях $S(t)$, то її швидкість не буде сталою і для знаходження швидкості в якийсь момент часу t_0 природно поступити так. Візьмемо малий проміжок часу Δt . За проміжок часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ матеріальна точка пройде шлях $\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)$. Якщо Δt є малим, то приблизно можна вважати,

що на проміжку часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ точка рухалась прямолінійно і рівномірно і її швидкість приблизно рівна $\frac{\Delta S}{\Delta t}$. Ми знайдемо швидкість в момент часу t_0 тим точніше, чим меншим є Δt . Тому за швидкість матеріальної точки в момент часу t_0 приймають величину, до якої наближається частка $\frac{\Delta S}{\Delta t}$, коли Δt наближається до нуля. Так ми приходимо до поняття границі і похідної – основних понять математичного аналізу. Якщо ми б захотіли знайти пройдений матеріальною точкою шлях за її швидкістю, то ми б прийшли до поняття інтеграла. Це ще одне поняття, яке вивчається в математичному аналізі.

Математичний аналіз є досить складним розділом математики. Його складність пов'язана в значній мірі з тим, що він має справу з нескінченними процесами, для освоєння яких потрібні певні навички. Часто математичний аналіз називають численням нескінченно малих. Ця назва віддзеркалює основний метод математичного аналізу, суть якого можна описати так. Для вивчення складного процесу його розбивають на "дуже" малі частинки (явища, об'єкти), після вивчення яких висновок про властивості вихідного об'єкту отримують, використовуючи властивості границь та сум.

Можна також сказати, що математичний аналіз – це наука про дійсні числа. Проте починати вивчення математичного аналізу з побудови завершеної теорії дійсних чисел нам видається недоцільним. Разом з цим, в ході вивчення математичного аналізу, студент повинен отримати досить повну уяву про можливі підходи до побудови теорії дійсних чисел.

Цей курс побудовано за модульним принципом, він є початковим курсом і розрахований для тих спеціальностей, навчальними планами яких передбачено вивчення математичного аналізу в об'ємі 600-800 годин (15-23 залікових кредитів). Він включає лекційний матеріал, завдання для самостійного вивчення, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи та модульного контролю і є результатом досвіду роботи за кредитно-модульною системою. Ми вважаємо, що можливими є декілька підходів до контролю знань. Один з них передбачає, що з кожного модуля студент здає і захищає індивідуальні завдання, які містять як задачі теоретичного характеру, так і задачі розрахункового характеру, пише математичний диктант, в результаті якого перевіряється володіння основними поняттями і фактами розділу, пише модульну контрольну роботу. Другий з них передбачає, що протягом семестру студент пише лише три-чотири модульні контрольні роботи і при цьому не може користуватись даним підручником. За третього підходу протягом семестру студент пише лише три-чотири модульні

контрольні роботи і при цьому може користуватись даним підручником. Можливими є різні поєднання цих підходів. Перший підхід передбачає, що студент повинен відносно мало пам'ятати, проте повинен бути знайомий з багатьма курсами і вміти самостійно розбиратись в них. Другий підхід є традиційним в нас і орієнтований на відтворення прослуханого. Третій підхід не передбачає, що студент повинен щось завчати на пам'ять. Він орієнтований на вміння використовувати відомий метод до розв'язування модифікованої проблеми. Найкращим на наш погляд є перший підхід, проте в наших умовах із-за великого навчального навантаження викладачів його здійснити важко. Ми, однак, зорієнтовані більше на нього. Проте, курс написано так, що в рамках нього можна здійснити кожен з цих підходів. При цьому на початку кожного семестру студент повинен бути ознайомлений з правилами гри та з переліком тих задач і теорем, які він повинен знати. В курсі досить багато задач. Задачі теоретичного характеру можна використати як індивідуальні завдання або як завдання для модульної контрольної роботи за третього підходу до контролю. Вправи і задачі розрахункового характеру розбиті на групи. Якщо у відповідній групі є більше тридцяти задач, то на перші тридцять ми дивимось як на індивідуальні завдання або як на завдання для модульної контрольної роботи (**в аудиторії потрібно починати розв'язувати з № 31**). За допомогою сучасних комп'ютерних математичних пакетів можна розв'язувати різноманітні рівняння, знаходити границі, інтеграли, суми рядів, будувати графіки функцій та багато іншого. Без володіння такими технологіями не можливе нове математичне творення сучасного рівня. Тому вміння користуватись ними повинно включатись в оцінку знань студентів. Це можна робити, наприклад, вимагаючи, щоб разом з індивідуальними завданнями студент подав комп'ютерну версію розв'язання задачі.

Термін “математичний аналіз” вживається в широкому розумінні та в вузькому розумінні. В широкому розумінні він включає і такі математичні дисципліни як теорія множин, функціональний аналіз, диференціальні та інтегральні рівняння, варіаційне числення, топологія, диференціальна геометрія, комплексний аналіз та інші. У вузькому розумінні – це диференціальне та інтегральне числення функцій однієї і багатьох дійсних змінних. Даний курс стосується математичного аналізу у вузькому розумінні. Проте вивчення математичного аналізу в вузькому розумінні не можливе без наведення мостів до згаданих вище розділів математики та врахування їхніх інтересів.

При побудові курсу математичного аналізу хочеться почати з основ математики, теорії множин, математичної логіки і, особливо, ґрунтовно викласти теорію дійсних чисел. Але дійшовши до теорем Геделя починаєш

розуміти, що математику не можна побудувати на основі скінченної кількості аксіом та правил виводу, а викласти на початку курсу достатньо повну теорію дійсних чисел не можливо, оскільки математичний аналіз в значній мірі і є теорією дійсних чисел, а для викладу теорії дійсних чисел потрібно добре володіти методами математичного аналізу. Тому на початковому етапі вивчення предмету доцільніше, на наш погляд, вважати, що студент вчився в школі і щось про дійсні числа знає, доповнити його знання принципом вкладених проміжків і на основі цього освоювати основні методи математичного аналізу, в процесі чого вказувати на можливі підходи до принципів, які лежать в основі предмету, надіючись, що в кінці курсу студент зрозуміє якою насправді повинна бути правильна послідовність, якщо така існує, вивчення понять предмету.

Часто можна почути думку проте, що в підручнику повинно бути тільки те, що студент повинен здавати. З такою думкою важко погодитись повністю. Справді, студент повинен чітко знати, що йому потрібно здавати (перелік теорем, типів прикладів, пунктів, розділів і т.д.). Але при вивченні будь-якого предмету слід дбати про формулювання фактів в найзагальнішому вигляді, широкий світогляд, взаємозв'язки з іншими розділами математики та її застосуваннями. Подібні речі важко викладати і важко здавати, але можна засвоїти їх на рівні: чув, десь бачив, зумів використати до розв'язування задачі користуючись книжкою тощо. Взагалі, те що повинен засвоїти студент на такому рівні повинно значно переважати те, що він повинен засвоїти на рівні пам'ятати, а при викладі будь-якого предмету не варто забувати Ньютонове висловлення про те, що при вивченні наук приклади корисніші правил.

Декілька зауважень стосовно позначень та термінології. Ми надаємо перевагу зручності перед правильністю при використанні позначень, особливо це стосується позначень для функцій. Ми використовуємо крапку з комою замість коми, як це в основному прийнято, для запису множин та проміжків (один зі співавторів у свій час мав серйозні проблеми записавши множину розв'язків рівняння правильно у вигляді $\{3,5,5\}$, тобто $\{3,5;5\}$, а потім прочитавши неправильно $\{3;5,5\}$). Через $\overline{n;m}$ позначаємо множину всіх цілих чисел x , які задовольняють нерівність $n \leq x \leq m$, і пишемо у відповідних місцях $i \in \overline{n;m}$, а не $i = \overline{n;m}$, як це часто буває. Якщо $f: H_1 \rightarrow H_2$ – функція, то ми не вважаємо, що її область визначення $D(f)$ необов'язково співпадає з H_1 , тобто включення $D(f) \subset H_1$ може бути строгим. Функцію $y = ax + b$ ми називаємо, як це прийнято в геометрії, афінною, а не лінійною, як це часто буває (вона ж не володіє властивостями лінійного відображення), а функцію $y = ax$ називаємо

лінійною. Ми старались розділити поняття границі і неперервності функції (границі і неперервності по множині \mathbb{R}) і границі та неперервності по деякій множині H (інколи відсутність вказівок про множину H веде до непорозумінь). Ми розрізняємо, проте не дуже афішуємо, поняття границі і числа, яке є границею (без такого розділення можна зауважити деяку незручність в означенні похідної, інтеграла та й при розгляді самих границь). При виборі означень, ми надаємо часто перевагу доступності перед правильністю і свідомі того, що всі потрібні означення сформулювати неможливо, як і неможливо довести всі потрібні теореми.

Курс поділено на розділи, а розділи на пункти. Ті пункти, назви яких набрано похилим шрифтом, доцільно, на наш погляд, вивчати на оглядовому рівні, якщо мова йде про початковий курс.

Ми передбачили можливу критику за спосіб використання логічних символів. Ця критика пом'якшується зручністю і відповідними домовленостями. Підставою для критики може бути спосіб уведення точок розриву, використання означення границі за множиною \mathbb{R} як основного, ряд моментів, пов'язаних з введенням дійсних чисел, хаотичність вправ теоретичного характеру тощо. Проте поле для критики не обмежується цим і є дуже багатим. Ми б були дуже вдячні за відповідні критичні думки.

Адреса для зв'язку: 82100, Львівська обл., м. Дрогобич, вул. Стрийська 3, Інститут фізики, математики та інформатики, кафедра математичного аналізу.
E-mail: math_analysis@ukr.net

Розділ 6. Первісна і невизначений інтеграл

У попередньому розділі були розглянуті методи знаходження похідної функції та методи використання похідної до їхнього дослідження. У цьому розділі розглядається проблема знаходження функції за її похідною. Така задача виникає у зв'язку з дослідженням як теоретичних задач (наприклад, при дослідженні диференціальних рівнянь), так і задач прикладного характеру (наприклад, при знаходженні швидкості матеріальної точки за її прискоренням, площі криволінійної трапеції та інших).

1. Означення первісної і невизначеного інтегралу. Первісною функції $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку Δ називається така функція $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$, що

$$(\forall x \in \Delta) : F'(x) = f(x). \quad (1)$$

Сукупність, тобто множина всіх первісних функції f на проміжку Δ називається невизначеним інтегралом функції f на Δ і позначається

$$\int f(x) dx. \quad (2)$$

Теорема 1. Якщо функція f має первісну F на проміжку Δ , то

$$\int f(x) dx = F(x) + C,$$

де C – довільна стала.

Доведення. Потрібно показати, що сукупність всіх первісних Φ функції f задається рівністю $\Phi = F + C$, де F одна з первісних. Це так, бо якщо F є первісною f , то $\Phi'(x) = F'(x) + C' = f(x)$, тобто і Φ є первісною f . Навпаки, якщо Φ – довільна первісна f , то функція $\Phi - F$ є сталою, бо $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Отже, $(\exists C)(\forall x \in \Delta) : \Phi(x) - F(x) = C$. ►

Наслідок 1. Дві первісні однієї функції відрізняються на сталий доданок.

Приклад 1. Первісною функції x^2 є функція $x^3 / 3$ і тому

$$\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C.$$

Приклад 2. Первісною функції $f(x) = |x|$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ є функція

$$F(x) = \begin{cases} x^2 / 2, & x \geq 0, \\ -x^2 / 2, & x < 0. \end{cases}$$

Зауваження 1. Задача про знаходження первісної – це задача про знаходження розв'язків рівняння $F' = f$. Задачу про знаходження первісної можна розглядати як операцію, обернену до знаходження похідної, тобто як задачу про знаходження прообразів оператора диференціювання. Пізніше покажемо, що кожна неперервна на проміжку Δ функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ має на Δ первісну, яка, як і кожна диференційовна функція, є неперервною функцією на проміжку Δ .

Зауваження 2. $\int f(x)dx$ – це символ для позначення невизначеного інтеграла і в ньому $f(x)dx$ – це також тільки символ. Невизначений інтеграл можна було б позначити й іншими символами (\mathcal{A}_f , \mathcal{N}^f , ...). Проте прийняте позначення виявилось доцільним, оскільки з подальшого буде випливати, що з формальним символом $f(x)dx$ можна при знаходженні інтегралів поводитись як з диференціалом.

Приклад 3. Якщо функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну на проміжку Δ , то вона не може мати розривів першого роду. Справді, нехай F – первісна функції f . Припустимо, що в деякій точці $x_0 \in \Delta$ функція f має розрив першого роду. Тоді за теоремою Лагранжа

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0 + \theta(x - x_0)), \quad \theta \in (0; 1).$$

Але $\lim_{\Delta \ni x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$ і існують границі

$$\lim_{\Delta \ni x \rightarrow x_0^+} f(x_0 + \theta(x - x_0)) = f(x_0^+), \quad \lim_{\Delta \ni x \rightarrow x_0^-} f(x_0 + \theta(x - x_0)) = f(x_0^-).$$

Тому $f(x_0^+) = f(x_0^-) = f(x_0)$. Суперечність. ►

Приклад 4. Функція $f(x) = [x]$ не має первісної на жодному проміжку Δ , довжина якого є більшою за 1.

Приклад 5. Функція $f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0, \end{cases}$ не має первісної на жодному

проміжку Δ , який містить точку 0.

Зауваження 3. Бачимо, що досить прості функції не мають первісної. У

цьому зв'язку можна розглядати різні узагальнення поняття первісної. Ці узагальнення навіяні можливістю застосування формули Лейбніца-Ньютона, про яку йтиметься далі. Це питання пов'язане з поняттям абсолютно неперервної функції й повністю розв'язується у рамках теорії інтеграла Лебега, з яким читач ознайомиться згодом при подальшому вивченні математики.

Приклад 6. Якщо $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція, неперервна в усіх точках проміжку Δ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, а $F: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ і $\Phi: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, неперервні на проміжку Δ , для яких рівності $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$ виконуються всюди на Δ , за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то знайдеться така стала c , що $\Phi(x) = F(x) + c$ для всіх $x \in \Delta$. Справді, якщо візьмемо довільний замкнений проміжок $[a; b] \subset \Delta$, то знайдуться такі $n \in \mathbb{N}$ і точки $x_j \in \Delta$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, що функція $\Psi = \Phi - F$ має нульову похідну на $(x_j; x_{j+1})$ і є неперервною на $[x_j; x_{j+1}]$. За теоремою Лагранжа $\Psi(x) = c_j$ для всіх $x \in [x_j; x_{j+1}]$, де $c_j = \text{const}$. Але в точках x_j функція Ψ є неперервною. Тому c_j від j не залежить, тобто функція Ψ є сталою на кожному проміжку $[a; b] \subset \Delta$. Тому є сталою на Δ .

2. Найпростіші властивості невизначеного інтегралу. Виділимо наступні найпростіші властивості невизначеного інтегралу.

Теорема 1. 1°. Якщо f має похідну на Δ , то

$$\int f'(x)dx = f(x) + C, \quad \int df(x) = f(x) + C.$$

2°. Якщо f має первісну на Δ , то $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.

3°. (Адитивність). $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$, якщо останні інтеграли існують.

4°. (Однорідність). $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ для будь-якої сталої $k \neq 0$, якщо останній інтеграл існує.

5°. (Лінійність). $\int (k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x))dx = k_1 \int f_1(x)dx + k_2 \int f_2(x)dx$ для будь-яких сталих k_1 і k_2 таких, що $|k_1| + |k_2| \neq 0$, якщо останні інтеграли існують.

Доведення. Властивості 1° і 2° випливають безпосередньо з означення. Доведемо властивість 3°. Нехай F_1 і F_2 первісні функцій f_1 і f_2 відповідно. Тоді функція $F_1 + F_2$ є первісною функції $f_1 + f_2$. Тому ліва частина розглядуваної рівності рівна $F_1(x) + F_2(x) + C$, а права – $F_1(x) + C_1 + F_2(x) + C_2$. Оскільки C , C_1 і C_2 – довільні сталі, то властивість 3° доведена, а властивості

4° і 5° доводяться подібно. ►

Зауваження 1. Рівності між невизначеними інтегралами слід розуміти як рівності між множинами, а дві множини називаються рівними, якщо вони складаються з однакових елементів. Це слід мати на увазі при доведенні властивостей 1° – 5°.

3. Таблиця основних інтегралів.

$$1. \int dx = x + C.$$

$$2. \int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \quad m \neq -1, \quad m \in \mathbb{R}.$$

$$3. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$6. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$7. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$8. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

$$10. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C.$$

$$11. \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C.$$

$$12. \int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C.$$

$$13. \int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C.$$

$$15. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a \neq 1.$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$17. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C.$$

$$18. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$19. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

$$20. \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

$$21. \int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Формули 1 – 21 справедливі на кожному проміжку, який належить області визначення підінтегральної функції. У цих формулах $C \in \mathbb{R}$ і $a \in (0; +\infty)$ – довільні сталі. Ці формули впливають безпосередньо з означення первісної і невизначеного інтеграла. Доведемо, наприклад, формулу 2. За правилами знаходження похідної

$$\left(\frac{x^{m+1}}{m+1} \right)' = \frac{1}{m+1} (x^{m+1})' = x^m.$$

Тому формула 2 доведена. Формула 3 є справедливою на кожному з проміжків $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. На другому з них

$$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

а на першому з них

$$(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}.$$

Тому формула 3 доведена, а інші доводяться аналогічно.

Використовуючи таблицю основних інтегралів, багато невизначених інтегралів можна виразити через основні елементарні функції. Для знаходження невизначених інтегралів достатньо пам'ятати перші десять табличних інтегралів, оскільки інші можна отримати на їхній основі методами інтегрування, що ми і зробимо далі.

Зауваження 1. При знаходженні невизначених інтегралів різними способами можна отримати різні правильні відповіді (насправді, відповіді однакові, але не завжди легко показати, що одна з первісних відрізняється від іншої на сталий доданок). Правильність знайденої відповіді можна перевірити шляхом знаходження похідної первісної.

Зауваження 2. При знаходженні невизначених інтегралів у відповідь входить довільна стала C , яка може бути будь-яким дійсним числом і можна записати $C = 2 + C_1$, $C = 74 - C_2$, ..., де C_1 , C_2 , ... – довільні сталі. При цьому,

якщо, наприклад, C_2 пробігає множину всіх дійсних чисел, то і C пробігає множину всіх дійсних чисел і навпаки.

Приклад 1.

$$\int (e^x + 1 + 2x) dx = \int e^x dx + \int 1 dx + 2 \int x dx = e^x + x + x^2 + C.$$

Ця відповідь є правильною, оскільки $(e^x + x + x^2)' = e^x + 1 + 2x$.

Приклад 2.

$$\int 2 \sin x dx = 2 \int \sin x dx = -2 \cos x + C.$$

Приклад 3.

$$\int \frac{x+1}{2\sqrt{x}} dx = \frac{1}{2} \left(\int x^{1/2} dx + \int x^{-1/2} dx \right) = \frac{1}{3} x^{3/2} + \sqrt{x} + C.$$

Зауваження 3. Є такі інтеграли, які існують, але їхні первісні не є елементарними функціями, і тому ці інтеграли не можна виразити через елементарні функції. До таких інтегралів належать, наприклад,

$$\int \frac{e^x}{x} dx, \int \frac{dx}{\ln x}, \int e^{-x^2} dx, \int \frac{\sin x}{x} dx, \int \frac{\cos x}{x} dx, \\ \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2 \sin \varphi}}, \int \sqrt{1-k^2 \sin \varphi} d\varphi, \\ \int \frac{e^x}{x^n} dx, \int \frac{\sin x}{x^n} dx, \int \frac{\cos x}{x^n} dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ці інтеграли відіграють важливу роль у математичному аналізі та його застосуваннях. Їхні первісні виражаються через так звані спеціальні функції. Тому відповідь, наприклад, до завдання „знайти інтеграл $\int e^{-x^2} dx$ ” є такою: первісна підінтегральної функції не є елементарною функцією. Ця відповідь є правильною, якщо передбачається, що відповідач не зобов'язаний бути ознайомленим зі спеціальною функцією Erf. У протилежному випадку $\int e^{-x^2} dx = \text{erf}(x) + C$ – правильна відповідь.

4. Інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів.

Теорема 1. Нехай функція $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну F на проміжку Δ , а функція $\varphi: \Delta_1 \rightarrow \mathbb{R}$ має похідну на проміжку Δ_1 і $\varphi(\Delta_1) \subset \Delta$. Тоді функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на проміжку Δ_1 і

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C. \quad (1)$$

Доведення. За теоремою про похідну складеної функції $(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$ і (1) доведено. ►

Зауваження 1. Формулу (1) записують у вигляді

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)},$$

або у вигляді

$$\int f(\varphi(t))d\varphi(t) = \int f(x)dx \Big|_{x=\varphi(t)}.$$

Якщо функція φ має обернену функцію φ^{-1} , то її можна записати і так

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))d\varphi(t) \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}.$$

Наслідок 1 (інтегрування методом внесення під диференціал). Якщо функція $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ є диференційовною на проміжку Δ , то

$$\int f^m(x)f'(x)dx = \int f^m(x)df(x) = \frac{f^{m+1}(x)}{m+1} + C,$$

$$\int e^{f(x)}f'(x)dx = \int e^{f(x)}df(x) = e^{f(x)} + C,$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int d \ln f(x) = \ln|f(x)| + C, \quad f(x) \neq 0,$$

$$\int f'(x)\sin f(x)dx = \int \sin f(x)df(x) = -\cos f(x) + C$$

і т.д.

Приклад 1. Відповідно до написаних формул інтеграл $\int \sin(2x+1)dx$ можна знаходити наступними способами.

$$1. \int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int \sin(2x+1)2dx = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

$$2. \text{ Нехай } 2x+1=t. \text{ Тоді } x = \frac{1}{2}t - \frac{1}{2}, \quad dx = \frac{1}{2}dt \text{ і}$$

$$\int \sin(2x+1)dx = \frac{1}{2} \int \sin t dt = -\frac{1}{2} \cos t + C = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

$$3 \text{ (метод внесення під диференціал). } \int \sin(2x+1)dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \sin(2x+1)d(2x+1) = -\frac{1}{2} \cos(2x+1) + C.$$

Приклад 2.

$$\int e^{-x}dx = -\int e^{-x}d(-x) = -e^{-x} + C.$$

Приклад 3.

$$\int (1+4x)^{19}dx = \frac{1}{4} \int (1+4x)^{19}d(1+4x) = \frac{(1+4x)^{20}}{80} + C.$$

Приклад 4.

$$\int \sin^3 x dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x dx$$

$$= \int \sin x dx + \int \cos^2 x d \cos x = -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + C.$$

Приклад 5.

$$\int x\sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{1/2} d(1-x^2) = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{3/2} + C.$$

Приклад 6. Для знаходження інтегралу

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx$$

зробимо заміну $\sqrt{x} = t$. Тоді $x = t^2$ і $dx = 2tdt$. Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt{x}}{x+1} dx &= \int \frac{2t^2}{t^2+1} dt = \int \frac{2t^2+2-2}{t^2+1} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{t^2+1} dt \\ &= 2t - 2 \operatorname{arctg} t + C = 2\sqrt{x} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{x} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7.

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x dx}{\cos x} \\ &= -\int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln |\cos x| + C, \quad x \in (-\pi/2 + \pi k; \pi/2 + \pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Приклад 8.

$$\int a^x dx = \int e^{x \ln a} dx = \frac{1}{\ln a} \int e^{x \ln a} d(x \ln a) = \frac{e^{x \ln a}}{\ln a} + C = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, \quad a \neq 1.$$

Приклад 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{d(x/a)}{\sqrt{1 - (x/a)^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$

Приклад 10. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(x/a)}{1 + (x/a)^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a > 0.$

Приклад 11.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2 - a^2} &= \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{d(x-a)}{x-a} - \int \frac{d(x+a)}{x+a} \right) \\ &= \frac{1}{2a} (\ln |x-a| - \ln |x+a|) + C = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, \quad a > 0. \end{aligned}$$

Приклад 12.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin x} &= \int \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{d \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C, \quad x \in (\pi k; \pi(k+1)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Приклад 13.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 3} &= \int \frac{dx}{x^2 + 3x + (3/2)^2 - (3/2)^2 + 3} = \int \frac{dx}{(x + 3/2)^2 + 3/4} \\ &= \int \frac{d(x + 3/2)}{(x + 3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x + 3}{\sqrt{3}} + C.\end{aligned}$$

Приклад 14.

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 1} = \int \frac{dx}{(x + 1)^2} = \int (x + 1)^{-2} d(x + 1) = -\frac{1}{x + 1} + C.$$

Приклад 15.

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} &= \int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)} = \int \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{1}{x + 2} \right) dx \\ &= \int \frac{1}{x + 1} d(x + 1) - \int \frac{1}{x + 2} d(x + 2) = \ln|x + 1| - \ln|x + 2| + C.\end{aligned}$$

Приклад 16. Для знаходження інтеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ зробимо заміну

$x = a \operatorname{sh} t$. Тоді $dx = a \operatorname{ch} t dt$, $t = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \ln a$. Тому

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{ch} t dt}{\sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2}} = \int \frac{\operatorname{ch} t dt}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1}} = \int dt = t + C = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C_1, \\ &a > 0, x \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Приклад 17. Для знаходження інтеграла $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$ зробимо заміну

$x = a \operatorname{ch} t$. Тоді $dx = a \operatorname{sh} t dt$ і $t = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln a$,

якщо $x > a$. Тому

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{a \operatorname{sh} t dt}{\sqrt{a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2}} = \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{\sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1}} \\ &= \int \frac{\operatorname{sh} t dt}{|\operatorname{sh} t|} = t + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln a + C, x > a.\end{aligned}$$

Крім цього,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} &= -\int \frac{d(-x)}{\sqrt{(-x)^2 - a^2}} = -\ln\left|-x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + \ln a + C \\ &= -\ln\left|\frac{a^2}{-x - \sqrt{x^2 - a^2}}\right| + \ln a + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| - \ln a + C, x < -a.\end{aligned}$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C_1, \quad |x| > a, \quad a > 0.$$

Приклад 18. Для знаходження інтеграла $\int \frac{e^{x^2} dx}{x^3}$ зробимо заміну $x^2 = t$.

Тоді $x = \sqrt{t}$ і $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$. Тому $\int \frac{e^{x^2} dx}{x^3} = \frac{1}{2} \int \frac{e^t dt}{t^2}$. Первісна функції $f(t) = e^t / t^2$ не є елементарною функцією. Тому розглянутий інтеграл не виражається через елементарні функції.

Зауваження 2. При обчисленні конкретних інтегралів методом заміни змінних доцільно слідкувати за проміжками, на яких цим методом його знайдено. Правда, здебільшого підінтегральна функція та її первісна є аналітичними функціями (з теорією таких функцій читач познайомиться при подальшому вивченні математики) і з властивостей таких функцій випливає, що знайдена первісна на деякому проміжку Δ є первісною і на кожному проміжку Δ_1 , який містить Δ , якщо первісна є диференційовною на Δ_1 .

5. Інтегрування частинами невизначених інтегралів.

Теорема 1. Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні на проміжку Δ , то

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1)$$

Доведення. За правилом знаходження похідної добутку $(uv)' = uv' + u'v$.

Тому $\int u dv = \int uv' dx = \int (uv)' dx - \int vu' dx = uv - \int v du$. ►

Формула (1) називається формулою інтегрування частинами.

Зауваження 1. Інтегруванням частинами знаходяться інтеграли (тут $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$)

$$\int x^n e^{\alpha x} dx, \int x^n \sin \alpha x dx, \int x^n \arcsin x dx, \\ \int x^n \ln x dx, \int e^{\alpha x} \cos \beta x dx, \int e^{\alpha x} \sin \beta x dx$$

та інші. При використанні методу інтегрування частинами важливим є вдалий вибір u та dv .

Приклад 1. Для знаходження інтеграла $\int x \sin x dx$ позначимо $u = x$ і $dv = \sin x dx$. Тоді $du = dx$ і $v = -\cos x$. Тому

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Для знаходження інтеграла $\int \ln x dx$ позначимо $u = \ln x$ і $dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{x} dx$ і $v = x$. Тому

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x(\ln x - 1) + C, \quad x > 0.$$

Приклад 3. Для знаходження інтеграла $\int \operatorname{arctg} x dx$ позначимо $u = \operatorname{arctg} x$ і

$dv = dx$. Тоді $du = \frac{1}{1+x^2} dx$ і $v = x$. Тому

$$\begin{aligned} \int \operatorname{arctg} x dx &= x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} d(1+x^2) \\ &= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 4. Двічі використовуючи формулу інтегрування частинами, знаходимо

$$\begin{aligned} \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - 2 \int x e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 \int e^x dx \\ &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 5. Використовуючи формулу інтегрування частинами n разів знаходимо

$$\begin{aligned} \int x^n e^x dx &= x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + n(n-1) \int x^{n-2} e^x dx \\ &= \dots = x^n e^x - n x^{n-1} e^x + \dots + (-1)^n n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \int e^x dx \\ &= \dots = e^x \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{k!} x^k + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 6.

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} dx = \int x d \operatorname{tg} x = x \operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x dx = x \operatorname{tg} x + \int \frac{d \cos x}{\cos x} = x \operatorname{tg} x + \ln |\cos x| + C$$

на кожному проміжку Δ , який не містить точок $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 7. Для знаходження інтеграла $\int e^{\sqrt{x}} dx$ спочатку зробимо заміну $t = \sqrt{x}$, а потім проінтегруємо частинами. Тоді $x = t^2$, $dx = 2t dt$ і

$$\begin{aligned} \int e^{\sqrt{x}} dx &= 2 \int t e^t dt = 2t e^t - 2 \int e^t dt \\ &= 2t e^t - 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x} - 1) + C, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Приклад 8. Для знаходження інтеграла $I = \int \sqrt{a^2 - x^2} dx$, $a > 0$, позначимо

$u = \sqrt{a^2 - x^2}$ і $dv = dx$. Тоді $du = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ і $v = x$. Тому

$$I = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{a^2 - (a^2 - x^2)}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$$

$$= x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - I,$$

звідки

$$2I = x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$I = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad |x| < a.$$

Приклад 9.

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx.$$

Тому

$$2 \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx$$

i

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a > 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 10.

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 - a^2 + a^2}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \int \sqrt{x^2 - a^2} dx + a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx.$$

Тому

$$2 \int \sqrt{x^2 - a^2} dx = x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx$$

i

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a > 0, \quad |x| > a.$$

Приклад 11. Нехай

$$I = \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Інтегруючи двічі частинами отримуємо

$$I = \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \frac{b}{a} \left(\frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx \right) = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2} - \frac{b^2}{a^2} I,$$

звідки

$$I \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2} = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2}.$$

Таким чином,

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{ae^{ax} \sin bx - be^{ax} \cos bx}{a^2 + b^2} + C, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 12. Розглянемо інтеграл

$$I_m = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}, \quad a > 0.$$

Якщо $m=1$, то цей інтеграл є табличним і $I_1 = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a}$. Нехай $u = \frac{1}{(t^2 + a^2)^m}$ і

$dv = dt$. Тоді

$$du = -\frac{2mt dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}}, \quad v = t.$$

Тому, інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} I_m &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{t^2 dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}} = \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{(t^2 + a^2) - a^2}{(t^2 + a^2)^{m+1}} dt \\ &= \frac{t}{(t^2 + a^2)^m} + 2m \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^m} - 2ma^2 \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{m+1}}, \end{aligned}$$

тобто

$$I_m = 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1} + \frac{t}{(t^2 + a^2)^m},$$

звідки

$$I_{m+1} = \frac{2m-1}{2ma^2} I_m + \frac{t}{2ma^2(t^2 + a^2)^m}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким чином, послідовно знаходимо

$$I_2 = \frac{1}{2a^2} I_1 + \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} = \frac{1}{2a^3} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{t}{2a^2(t^2 + a^2)} + C,$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{3}{4a^2} I_2 + \frac{t}{4a^2(t^2 + a^2)^2} \\ &= \frac{3}{8a^5} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + \frac{3t}{8a^4(t^2 + a^2)} + \frac{t}{4a^2(t^2 + a^2)^2} + C \end{aligned}$$

і т.д. Приходимо до висновку, що для кожного $m \in \mathbb{N}$ інтеграл I_m можна виразити через основні елементарні функції.

6. Інтегрування елементарних раціональних дробів. Елементарні раціональні дроби над множиною дійсних чисел – це функції, визначені формулами

$$f(x) = \frac{A}{x-b}, \quad f(x) = \frac{A}{(x-b)^n},$$

$$f(x) = \frac{Ax+B}{x^2+px+q}, \quad f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m},$$

де $A \in \mathbb{R}$, $B \in \mathbb{R}$, $p \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ і $b \in \mathbb{R}$ – числові сталі, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів, тобто $p^2 - 4q < 0$.

Теорема 1. *Первісні елементарних раціональних дробів є елементарними функціями.*

Доведення. Справді,

$$\int \frac{1}{x-b} dx = \int \frac{d(x-b)}{x-b} = \ln|x-b| + C.$$

$$\int \frac{1}{(x-b)^n} dx = \int \frac{d(x-b)}{(x-b)^n}$$

$$= \int (x-b)^{-n} d(x-b) = -\frac{1}{(n-1)(x-b)^{n-1}} + C, \quad n > 1.$$

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx = \int \frac{Ax+B}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}} dx = \int \frac{At dt}{t^2+a^2} + \int \frac{\left(B - \frac{Ap}{2}\right) dt}{t^2+a^2}$$

$$= \frac{A}{2} \ln(t^2+a^2) + \frac{1}{a} \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

$$= \frac{A}{2} \ln(x^2+px+q) + \frac{1}{2a} (2B - Ap) \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{2a} + C,$$

де $a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}$ і $t = x + \frac{p}{2}$. Крім цього,

$$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} = \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}\right)^m}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^m} dx &= \int \frac{A\left(x+\frac{p}{2}\right) + \left(B-A\frac{p}{2}\right)}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right)^m} dx = \int \frac{At+D}{(t^2+a^2)^m} dt \\ &= A \int \frac{t}{(t^2+a^2)^m} dt + D \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} = \frac{A}{2} \int (t^2+a^2)^{-m} d(t^2+a^2) + D \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m} \\ &= -\frac{A}{2} \frac{1}{(m-1)(t^2+a^2)^{m-1}} + D \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}, \end{aligned}$$

де $m > 1$, $t = x + \frac{p}{2}$, $D = B - A\frac{p}{2}$ і $a = \sqrt{q - p^2/4}$. Але первісна функції

$\frac{1}{(t^2+a^2)^m}$ є елементарною функцією і тому ми приходимо до твердження

теореми. ►

Приклад 1.

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+x+1} dx &= \int \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{(x+1/2)^2 + 3/4} dx \\ &= \int \frac{(x+1/2)dx}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{(x+1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2+x+1)}{x^2+x+1} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln(x^2+x+1) + C. \end{aligned}$$

7. Багаточлени (многочлени, поліноми) і раціональні функції.

Розклад на елементарні дроби. Багаточлен степеня $n \in \mathbb{N}_0$ над полем дійсних чисел – це функція P , визначена формулою $P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n$, де $d_i \in \mathbb{R}$ і $d_n \neq 0$. Числа d_i називаються коефіцієнтами багаточлена. Якщо число x_0 є нулем багаточлена P , то $P(x) = (x - x_0)\tilde{P}(x)$, де \tilde{P} – багаточлен степеня $n-1$. Якщо $P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_{n-1}x^{n-1} + x^n$ і всі коефіцієнти d_i є цілими числами, то кожне ціле число x_0 , яке є нулем багаточлена P , є дільником вільного члена d_0 . Два багаточлени $P(x) = d_0 + d_1x + \dots + d_nx^n$ і $Q = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$ називаються рівними, якщо $(\forall x \in \mathbb{R}): P(x) = Q(x)$. Два багаточлени P і Q є рівними тоді і тільки тоді, коли рівними є їхні степені і рівними є їхні коефіцієнти при однакових степенях x , тобто коли $m = n$ і $d_i = b_i$ для всіх $i \in \overline{1; n}$. Кожний багаточлен Q можна подати у вигляді

$$Q(x) = b_m (x - x_1)^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + p_1 x + q_1)^{\beta_1} \cdot \dots \cdot (x^2 + p_v x + q_v)^{\beta_v}, \quad (1)$$

де x_1, \dots, x_k – різні дійсні нулі багаточлена Q , $\alpha_1 \in \mathbb{N}_0, \dots, \alpha_k \in \mathbb{N}_0, \beta_1 \in \mathbb{N}_0, \dots, \beta_v \in \mathbb{N}_0, q_1 \in \mathbb{R}, \dots, q_v \in \mathbb{R}, p_1 \in \mathbb{R}, \dots, p_v \in \mathbb{R}$ – деякі числа і при цьому всі квадратні тричлени $x^2 + p_i x + q_i$ не мають дійсних нулів, тобто $p_i^2 - 4q_i < 0$.

Раціональна функція – це функція, визначена формулою $R = P/Q$, де P і Q – багаточлени степеня n та m відповідно. Якщо $n < m$, тобто якщо степінь чисельника є меншим за степінь знаменника, то раціональна функція R називається правильною раціональною функцією або правильним раціональним дробом. Якщо ж $n \geq m$, то раціональна функція називається неправильним раціональним дробом. Кожний неправильний раціональний дріб P/Q можна подати у вигляді

$$\frac{P}{Q} = T + \frac{P_1}{Q}, \quad (2)$$

де P_1/Q – правильний раціональний дріб, а T – багаточлен. Для того, щоб отримати (2) потрібно багаточлен P поділити на Q .

Кожний правильний раціональний дріб P_1/Q можна подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів. Для цього Q слід подати у вигляді (1). Тоді

$$\begin{aligned} \frac{P_1(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x - x_1} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x - x_1)^{\alpha_1}} + \dots + \frac{A_{k\alpha_k}}{(x - x_k)^{\alpha_k}} + \dots + \frac{A_{k1}}{x - x_k} \\ &+ \frac{M_{11}x + N_{11}}{x^2 + p_1x + q_1} + \dots + \frac{M_{1\beta_1}x + N_{1\beta_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{\beta_1}} \\ &+ \dots + \frac{M_{v1}x + N_{v1}}{x^2 + p_vx + q_v} + \dots + \frac{M_{v\beta_v}x + N_{v\beta_v}}{(x^2 + p_vx + q_v)^{\beta_v}}. \end{aligned} \quad (3)$$

Для знаходження чисел A_{ij} , M_{sk} і N_{sk} потрібно праву частину рівності (3) звести до спільного знаменника. Тоді отримаємо рівність $P_1/Q = P_2/Q$, де P_2 – багаточлен. Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x багаточленів P_1 і P_2 отримаємо систему, яка містить стільки рівнянь, скільки є невідомих, і завжди має розв'язок. Розв'язавши цю систему, знаходимо потрібні числа. Таким чином, кожний правильний раціональний дріб можна подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів.

Зауваження 1. Усе сказане можна обґрунтувати як засобами алгебри, так і засобами аналізу. Найпростіше це зробити методами теорії функцій комплексної змінної, з якою читач ознайомиться згодом. Відповідні факти цієї теорії можна було б викласти тут, але це б на досить довгий час відволікло

нас від основної теми розділу. Тому читачеві пропонуємо зрозуміти сам викладений метод, а до його обґрунтування повернутися пізніше.

Приклад 1. Багаточлен $Q(x) = (x^5 + x)^6$ подається у вигляді (1) так

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^6(x^4 + 1)^6 = x^6((x^2)^2 + 2x^2 + 1 - 2x^2)^6 \\ &= x^6(x^2 + 1 - \sqrt{2}x)^6 \cdot (x^2 + 1 + \sqrt{2}x)^6. \end{aligned}$$

Приклад 2. Раціональний дріб $R(x) = \frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}$ подається у вигляді (2) так

$$\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1} = x^2 - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}.$$

Це випливає з наступних записів

$$\begin{array}{r|l} x^4 + 1 & x^2 + 1 \\ -x^4 + x^2 & \hline \hline -x^2 + 1 & \\ -x^2 - 1 & \\ \hline & 2 \end{array}$$

Приклад 3. Розкладемо дріб $\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)}$ на елементарні дроби. Маємо

$$\begin{aligned} \frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} &= \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1} + \frac{Mx+N}{x^2+2}, \\ \frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} &= \frac{A(x^2+2) + B(x^3+x^2+2x+2) + (Mx+N)(x^2+2x+1)}{(x+1)^2(x^2+2)}, \end{aligned}$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x багаточленів, які стоять в чисельнику останньої рівності, отримуємо систему

$$\begin{cases} x^0 & \left\{ \begin{array}{l} 2A + 2B + N = 0, \\ 2B + M + 2N = 2, \\ A + B + 2M + N = 0, \\ B + M = 0, \end{array} \right. \\ x^1 & \\ x^2 & \\ x^3 & \end{cases}$$

з якої знаходимо $A = -\frac{6}{9}$, $B = \frac{2}{9}$, $M = -\frac{2}{9}$, $N = \frac{8}{9}$ і тому

$$\frac{2x}{(x+1)^2(x^2+2)} = -\frac{6}{9(x+1)^2} + \frac{2}{9(x+1)} + \frac{-2x+8}{9(x^2+2)}.$$

Приклад 4. Для розкладу раціональної функції

$R(x) = \frac{2x}{(x-1)^3(x+5)(x^2+2x+3)^2}$ на елементарні дроби слід записати

$$\begin{aligned} & \frac{2x}{(x-1)^3(x+5)(x^2+2x+3)^2} \\ &= \frac{A_1}{(x-1)^3} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{x-1} + \frac{B_1}{x+5} + \frac{M_1x+N_1}{(x^2+2x+3)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+2x+3}. \end{aligned}$$

8. Інтегрування раціональних функцій. Для знаходження інтеграла

$$\int R(x)dx, \quad (1)$$

де $R = P/Q$ – раціональна функція, слід подати R у вигляді $R = T + P_1/Q$, де T – багаточлен, а P_1/Q – правильний раціональний дріб. Тоді

$$\int R(x)dx = \int T(x)dx + \int \frac{P_1(x)}{Q(x)}dx. \quad (2)$$

Для знаходження останнього інтеграла слід P_1/Q подати у вигляді суми елементарних раціональних дробів, а їхні інтеграли, як і інтеграл багаточлена, виражається через елементарні функції. Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема 1. Кожна раціональна функція має первісну на кожному проміжку, який належить області її визначення, і ця первісна є елементарною функцією.

Таким чином, невизначений інтеграл раціональної функції виражається через елементарні функції на кожному проміжку, який належить області визначення підінтегральної функції.

Приклад 1.

$$\int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| + C.$$

Приклад 2.

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx = \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C.$$

Інколи інтеграл правильного раціонального дроби P_1/Q простіше знайти методом Остроградського. Суть цього методу така. Нехай $Q(x) = Q_2(x) \cdot Q_3(x)$, де

$$Q_2(x) = (x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_k) \cdot (x^2+p_1x+q_1) \cdot \dots \cdot (x^2+p_vx+q_v).$$

Тоді

$$\int \frac{P_1(x)}{Q(x)} dx = \frac{P_3(x)}{Q_3(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} dx, \quad (3)$$

де P_2 і P_3 – багаточлени з невідомими коефіцієнтами, степені яких на одиницю менші за степені багаточленів Q_2 і Q_3 відповідно. Для знаходження цих коефіцієнтів багаточленів P_2 і P_3 продиференціюємо рівність (3). Тоді

$$\frac{P_1}{Q} = \left(\frac{P_3}{Q_3} \right)' + \frac{P_2}{Q_2}.$$

Після перетворень отримаємо рівність $\frac{P_1}{Q} = \frac{P_4}{Q}$, де P_4 – багаточлен.

Прирівнявши відповідні коефіцієнти багаточленів P_1 і P_4 знайдемо коефіцієнти багаточленів P_2 і P_3 .

Приклад 3. Для знаходження інтегралу $\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3(x+1)} dx$ методом

Остроградського слід записати

$$\int \frac{x^3}{(x^2+1)^3(x+1)} dx = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3}{(x^2+1)^2} + \int \frac{B_0 + B_1x + B_2x^2}{(x^2+1)(x+1)} dx.$$

9. Інтегрування деяких ірраціональних функцій. Якщо функція f – раціональна, то інтеграл її виражається через елементарні функції. Якщо ж f – ірраціональна функція, то її інтеграл виражається через елементарні функції тільки в окремих випадках, хоч сам інтеграл може й існувати.

1°. Інтеграли

$$\int R \left(x; \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} \right) dx, \quad (1)$$

де $R(u;v)$ – раціональна функція двох змінних знаходяться заміною $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Інтеграли

$$\int R \left(x; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_1}; \dots; \left(\frac{ax+b}{cx+d} \right)^{r_s} \right) dx,$$

де R – раціональна функція $s+1$ змінних, $r_i = m_i/n_i$ – раціональні числа, $m_i \in \mathbb{Z}$, $n_i \in \mathbb{N}$, $i \in \overline{1;s}$, знаходяться заміною $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, де n – спільний знаменник дробів $r_i = m_i/n_i$.

Раціональна функція s змінних – це функція, яка подається у вигляді частки двох багаточленів s змінних, а багаточлен s змінних – це функція

$$P(x_1, x_2, \dots, x_s) = \sum_{\substack{k_1+k_2+\dots+k_s \leq k, \\ k_i \in \mathbb{N}_0}} a_{k_1, \dots, k_s} x_1^{k_1} \dots x_s^{k_s},$$

де $a_{k_1, \dots, k_s} \in \mathbb{R}$, k_1, \dots, k_s – цілі невід’ємні числа.

Приклад 1. Функції $P(x; y) = 4x + 7y + 6$ і $Q(x; y) = 9x^2 + 8y^2 + 3xy + 4x + 7y + 6$ є багаточленами двох змінних.

Приклад 2. Інтеграл

$$\int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}$$

знаходиться заміною $t = \sqrt{x}$. Тоді $x = t^2$, $dx = 2tdt$ і

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{1 + \sqrt{x}} &= \int \frac{2tdt}{1 + t} \\ &= 2 \int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln|1+t|) + C = 2(\sqrt{x} - \ln(1 + \sqrt{x})) + C. \end{aligned}$$

Приклад 3. Для знаходження інтегралу

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1 + \sqrt{x}}$$

слід зробити заміну $t = \sqrt[6]{x}$. Тоді $x = t^6$, $dx = 6t^5 dt$ і

$$\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1 + \sqrt{x}} = \int \frac{6t^7 dt}{1 + t^3}.$$

Отже, ми звели розглядуваний інтеграл до інтегралу раціональної функції, який можна знайти методами, описаними в попередніх пунктах.

2°. Інтеграл

$$\int R\left(x; \sqrt{ax^2 + bx + c}\right) dx, \quad (2)$$

де R – раціональна функція двох змінних, знаходяться за допомогою

підстановок Ейлера: а) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} \pm t$, якщо $a > 0$;

б) $\pm \sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - x_1)t$, якщо корені x_1 і x_2 підкореневого квадратного тричлена є дійсними різними (в цьому випадку $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, що слід використати при практичному здійсненні заміни); в)

$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm \sqrt{c} \pm xt$, якщо $c > 0$. У цих замінах комбінація знаків $+$ і $-$ є довільною, хоч і потрібно враховувати проміжок, на якому знаходимо первісну.

Вказані підстановки Ейлера часто приводять до громіздких перетворень. У багатьох випадках ці інтеграли можна знайти простіше різними штучними прийомами. Інтеграл

$$\int \frac{Mx + N}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

можна знаходити подібно до інтегралів

$$\int \frac{Mx + N}{ax^2 + bx + c} dx.$$

Інтеграл

$$\int R(x) \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx,$$

у якому R – раціональна функція можна знайти, подавши R у вигляді $R = T + R_1$, де T – поліном і R_1 – сума елементарних раціональних дробів.

Приклад 4. Для знаходження інтегралу

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$$

зробимо заміну $\sqrt{x^2 + x + 1} = x + t$. Тоді

$$x + 1 = 2xt + t^2, \quad x = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t}, \quad \sqrt{x^2 + x + 1} = x + t = \frac{t^2 - 1}{1 - 2t} + t = \frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t},$$

$$dx = \frac{2t(1 - 2t) + 2(t^2 - 1)}{(1 - 2t)^2} dt = -\frac{2(t^2 - t + 1)}{(1 - 2t)^2} dt$$

і тому

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = -2 \int \frac{\frac{t^2 - 1}{1 - 2t}}{\frac{-t^2 + t - 1}{1 - 2t}} \frac{t^2 - t + 1}{(1 - 2t)^2} dt = 2 \int \frac{t^2 - 1}{(1 - 2t)^2} dt.$$

Отже, ми звели розглянутий інтеграл до інтегралу раціональної функції, який можна знайти методами, описаними в попередніх пунктах. Водночас, розглянутий інтеграл можна знайти простіше:

$$\begin{aligned} \int \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} &= \int \frac{x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx = \int \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}} d(x^2 + x + 1) - \frac{1}{2} \int \frac{d(x + 1/2)}{\sqrt{(x + 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2}} \\ &= \sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \ln \left| x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2 + x + 1} \right| + C. \end{aligned}$$

3°. Інтеграл

$$\int x^m (a + bx^n)^p dx, \quad (3)$$

де a і b – дійсні числа, а p , m та n – раціональні числа, називається інтегралом диференціального бінома. Він виражається через елементарні функції тільки в окремих випадках і в цих випадках їх можна знайти за допомогою наступних підстановок Чебишова: а) $x = t^\lambda$, якщо p – ціле число, де

λ – спільний знаменник дробів m та n ; б) $a + bx^n = t^\mu$, якщо $(m+1)/n$ – ціле число, де μ – знаменник дробу p ; в) $ax^{-n} + b = t^\mu$, якщо $p + (m+1)/n$ – ціле число, де μ – знаменник дробу p .

Якщо $|a| + |b| \neq 0$ і жодне з чисел p , $(m+1)/n$ і $p + (m+1)/n$ не є цілим числом, то можна переконатися, що інтеграл (3) існує, але через елементарні функції не виражається.

Вказані підстановки Чебишова часто призводять до громіздких перетворень. У багатьох випадках ці інтеграли можна знайти простіше різними штучними прийомами.

Приклад 5. Для знаходження інтегралу

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

зробимо заміну (в даному випадку $m=2$, $p=-1/2$, $n=2$, $p+(m+1)/n=1$)

$x^2 - 1 = t^2$. Тоді $x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $dx = -\frac{t}{(1+t^2)^{3/2}} dt$. Тому

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\int \frac{1}{(1+t^2)^2} dt = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)} + C \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C, \quad x \in (0;1). \end{aligned}$$

10. Інтегрування тригонометричних та інших трансцендентних функцій. Інтеграл тригонометричних функцій часто зводяться до табличних за допомогою тригонометричних формул. В складніших випадках доцільніше скористатися відповідними підстановками.

1°. Інтеграл

$$\int R(\sin x; \cos x) dx, \quad (1)$$

де R – раціональна функція двох змінних, знаходяться за допомогою підстановки $t = \operatorname{tg}(x/2)$. Тоді

$$dt = \left(\frac{1}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} \right) dx = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \right) dx = \frac{1}{2} (1+t^2) dx, \quad dx = 2(1+t^2)^{-1} dt,$$

$$\sin x = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

і тому інтеграл (1) можна виразити через елементарні функції. Якщо $R(-\sin x; \cos x) = -R(\sin x; \cos x)$, $R(\sin x; -\cos x) = -R(\sin x; \cos x)$ або $R(-\sin x; -\cos x) = R(\sin x; \cos x)$, то замість заміни $t = \operatorname{tg}(x/2)$ доцільніше використовувати відповідно підстановки $\cos x = t$, $\sin x = t$ і $\operatorname{tg} x = t$.

Приклад 1.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\cos^2 x} = \int \frac{dx}{(\operatorname{tg}^2 x - 4)\cos^2 x} = \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x - 4} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x - 2}{\operatorname{tg} x + 2} \right| + C$$

(заміна $\operatorname{tg} x = t$) на кожному проміжку $\Delta \subset \mathbb{R}$, який не містить коренів рівняння $\operatorname{tg}^2 x - 4 = 0$.

Приклад 2.

$$\begin{aligned} \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x} &= \int \frac{\cos^2 x d \sin x}{\sin^2 x} = \int \frac{(1 - \sin^2 x) d \sin x}{\sin^2 x} \\ &= \int \frac{d \sin x}{\sin^2 x} - \int d \sin x = \frac{-1}{\sin x} - \sin x + C \end{aligned}$$

(заміна $\sin x = t$) на кожному проміжку $\Delta \subset \mathbb{R}$, який не містить коренів рівняння $\sin x = 0$.

Приклад 3.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^4 x} &= \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x) d \operatorname{tg} x}{\sin^2 x \cos^2 x} \\ &= \int \left((1 + \operatorname{tg}^2 x) + (1 + \operatorname{ctg}^2 x) \right) d \operatorname{tg} x = \int \frac{1 + 2 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x \\ &= \int \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} d \operatorname{tg} x + 2 \int d \operatorname{tg} x + \int \operatorname{tg}^2 x d \operatorname{tg} x = \frac{-1}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x + \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} + C \end{aligned}$$

(заміна $\operatorname{tg} x = t$) на кожному проміжку $\Delta \subset \mathbb{R}$, який не містить точок $\pi k / 2$, $k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 4. Для знаходження інтегралу

$$I(x) = \int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5}$$

зробимо заміну $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$. Тоді, якщо $(2n-1)\pi < x < (2n+1)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, то

$$I(x) = \int \frac{dt}{3t^2 + 2t + 2} = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3t+1}{\sqrt{5}} + c_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg}(x/2) + 1}{\sqrt{5}} + c_n.$$

Оскільки підінтегральна функція є неперервною на \mathbb{R} , то первісна повинна бути неперервною на \mathbb{R} . Тому для кожного $n \in \mathbb{Z}$ повинно виконуватись

$$I(2\pi n + \pi+) = I(2\pi n + \pi-), \text{ тобто } c_n + \frac{\pi}{2\sqrt{5}} = c_{n+1} - \frac{\pi}{2\sqrt{5}}. \text{ Отже, } c_n = C + \frac{\pi n}{\sqrt{5}}, \text{ де}$$

$$C - \text{ довільна стала. Але } n < \frac{x + \pi}{2\pi} < n + 1. \text{ Тому } n = \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right] i$$

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \frac{3 \operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + \left[\frac{x + \pi}{2\pi} \right] \frac{\pi}{\sqrt{5}} + C, \quad x \neq (2n + 1)\pi.$$

Крім цього,

$$\lim_{x \rightarrow (2n+1)\pi} I(x) = \frac{2n+1}{2\sqrt{5}} \pi, \quad x = (2n+1)\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 5.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{d \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg}^2 x + (b/a)^2} \\ &= \frac{1}{ab} \operatorname{arctg} \frac{a \operatorname{tg} x}{b} + C, \quad a > 0, \quad b > 0. \end{aligned}$$

2°. Інтеграл

$$I_{\mu, \nu} = \int \sin^\mu x \cos^\nu x dx$$

зводяться до інтеграла диференціального бінома замінами $\cos x = t$ та $\sin x = t$. У багатьох випадках їх можна знайти різними іншими прийомами з використанням тригонометричних формул, виведенням рекурентних формул і т.д.

Приклад 6.

$$\begin{aligned} \int \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1 + \cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{4} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x dx \\ &= \frac{x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + \int \frac{1 + \cos 4x}{8} dx = \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C. \end{aligned}$$

Приклад 7.

$$\begin{aligned} I_n(x) &:= \int \cos^n x dx = \int \cos^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= \int \cos^{n-2} x dx - \int \cos^{n-2} x \sin^2 x dx = I_{n-2}(x) + \int \cos^{n-2} x \sin x d \cos x \\ &= I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} \int \cos^{n-1} x \cos x dx \\ &= I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n-1} - \frac{1}{n-1} I_n(x). \end{aligned}$$

Отже,

$$I_n(x) = \frac{n-1}{n} I_{n-2}(x) + \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2.$$

Приклад 8.

$$\tilde{I}_n(x) := \int \sin^n x dx = -\int \cos^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) d \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = -I_n \left(\frac{\pi}{2} - x \right).$$

Тому

$$\begin{aligned} \tilde{I}_n(x) &= -I_n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ &= \frac{n-1}{n} \tilde{I}_{n-2}(x) - \frac{\cos x \sin^{n-1} x}{n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad n > 2. \end{aligned}$$

3°. Інтегралі

$$\int \sin(ax+b) \cos(cx+d) dx, \quad \int \cos(ax+b) \cos(cx+d) dx, \quad \int \sin(ax+b) \sin(cx+d) dx$$

зводяться до табличних за допомогою формул

$$\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2}, \quad \cos x \cos y = \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}, \\ \sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}. \end{aligned}$$

Приклад 9.

$$\int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int \sin 6x dx - \frac{1}{2} \int \sin 2x dx = -\frac{\cos 6x}{12} + \frac{\cos 2x}{4} + C.$$

4°. Інтегралі гіперболічних функцій знаходяться подібно до інтегралів тригонометричних функцій. Водночас краще скористатися формулами $\operatorname{sh} x = (e^x - e^{-x})/2$ та $\operatorname{ch} x = (e^x + e^{-x})/2$.

Приклад 10.

$$\int \frac{1}{\operatorname{sh} x} dx = \int \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{x}{2} \operatorname{ch} \frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\operatorname{th} \frac{x}{2} \operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} dx = \int \frac{1}{\operatorname{th} \frac{x}{2}} d \operatorname{th} \frac{x}{2} = \ln \left| \operatorname{th} \frac{x}{2} \right| + C.$$

5°. Інтегралі

$$\int (a^2 - x^2)^\beta dx, \quad \int (a^2 + x^2)^\beta dx, \quad \int (x^2 - a^2)^\beta dx$$

та подібні до них, часто доцільно знаходити підстановками $x = a \cos t$, $x = a \sin t$, $x = a \operatorname{sh} t$, $x = a \operatorname{ch} t$, $x = a / \sin t$, $x = a \operatorname{tg} t$ і т.д.

Приклад 11. Для знаходження інтегралу $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}$ зробимо заміну

$x = \sin t$. Тоді

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\sin^2 t \cos t dt}{\cos t} = \int \sin^2 t dt = \frac{t}{2} - \frac{\sin 2t}{4} + C$$

$$= \frac{\arcsin x}{2} - \frac{\sin(2 \arcsin x)}{4} + C = \frac{\arcsin x}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C, |x| < 1.$$

11. Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення первісної.
2. Сформулюйте означення невизначеного інтеграла.
3. Сформулюйте та обґрунтуйте найпростіші властивості невизначеного інтеграла.
4. Запишіть таблицю основних інтегралів.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів.
6. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування частинами невизначених інтегралів.
7. Які функції називають елементарними раціональними дробами?
8. Покажіть, що первісні елементарних раціональних дробів є елементарними функціями.
9. Опишіть метод подання правильного раціонального дробу у вигляді суми елементарних раціональних дробів.
10. Опишіть метод знаходження невизначених інтегралів раціональних функцій.

12. Вправи й задачі теоретичного характеру

1. Доведіть твердження.

1. Для кожного полінома P_n , степеня n , і чисел a , b та c , $|a| + |b| + |c| \neq 0$, знайдуться поліном Q_{n-1} , степеня $n-1$, і число q такі, що

$$\int \frac{P_n(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = Q_{n-1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \int \frac{q}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

2. Для кожного полінома P_n , степеня n , і чисел a , b та c , $|a| + |b| + |c| \neq 0$, знайдуться поліном Q_{n+1} , степеня $n+1$, і число q такі, що

$$\int P_n(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} dx = Q_{n+1}(x)\sqrt{ax^2 + bx + c} + \int \frac{q}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx.$$

3. $\int \frac{P_n(x)}{(x-a)^{n+1}} dx = \frac{P_n^{(n)}(a)}{n!} \ln|x-a| + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{P_n^{(k)}(a)}{k!(n-k)(x-a)^{n-k}}$ для кожного полінома P_n , степеня n , і кожного $a \in \mathbb{R}$.

4. $I_n = \frac{2ax + b}{\Delta(n-1)(ax^2 + bx + c)^{n-1}} + \frac{2a(2n-3)}{\Delta(n-1)} I_{n-1}$, якщо $a \neq 0$, $\mathbb{N} \ni n > 1$,

$$\Delta = 4ac - b^2, I_n = \int \frac{dx}{(ax^2 + bx + c)^n}.$$

$$(\text{указівка: } 4a(ax^2 + bx + c) = (2ax + b)^2 + (4ac - b^2))$$

5. $\int \frac{dx}{(x+\alpha)^n(x+\beta)^m} = \frac{1}{(\beta-\alpha)^{n+m-1}} \int \frac{(1-t)^{m-n-2} dt}{t^m}$, якщо $\beta \neq \alpha$ і $t = \frac{x+\alpha}{x+\beta}$.
6. $I_n = \frac{\sin x}{(n-1)\cos^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$, якщо $\mathbb{N} \ni n > 1$, $I_n = \int \frac{dx}{\cos^n x}$.
7. $I_n = -\frac{\cos x}{(n-1)\sin^{n-1}x} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}$, якщо $\mathbb{N} \ni n > 1$, $I_n = \int \frac{dx}{\sin^n x}$.
8. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx = ax + b \ln |a_2 \sin x + b_2 \cos x| + C$ для будь-яких $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $|a_2| + |b_2| \neq 0$, і деяких $a \in \mathbb{R}$ і $b \in \mathbb{R}$ (указівка: $a_1 \sin x + b_1 \cos x = a(a_1 \sin x + b_1 \cos x) + b(a_1 \sin x - b_1 \cos x)$).
9. $\int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx = ax + b \ln |a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2|$
 $+ d_0 \int \frac{1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2} dx$ для будь-яких $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $|a_2| + |b_2| + |c_2| \neq 0$, і деяких $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ і $d_0 \in \mathbb{R}$.
10. $\int \frac{a_1 \sin^2 x + 2b_1 \sin x \cos x + c_1 \cos^2 x}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx = a \sin x + b \cos x + d_0 \int \frac{1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x} dx$
 для будь-яких $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $|a_2| + |b_2| \neq 0$, і деяких $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ і $d_0 \in \mathbb{R}$.
11. $\int \frac{1}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)^n} dx = \frac{a \sin x + b \cos x}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)^{n-1}} + d_0 \int \frac{1}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)^{n-2}} dx$ для
 будь-яких $\mathbb{N} \ni n > 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $|a_1| + |b_1| \neq 0$, і деяких $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ і $d_0 \in \mathbb{R}$.
12. $\int \frac{1}{(a_1 + b_1 \cos x)^n} dx = \frac{a \sin x}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)^{n-1}}$
 $+ b \int \frac{1}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)^{n-1}} dx + d_0 \int \frac{1}{(a_1 \sin x + b_1 \cos x)^{n-2}} dx$ для будь-яких
 $\mathbb{N} \ni n > 1$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, $|a_1| \neq |b_1|$, і деяких $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ і $d_0 \in \mathbb{R}$.
13. $\int P_n(x) e^{ax} dx = e^{ax} \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{P_n^{(k+1)}(x)}{a^{k+1}} + C$ для кожного полінома P_n , степеня n , і
 кожного $\mathbb{R} \ni a \neq 0$.
14. $\int P_n(x) \cos ax dx = \cos ax \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{P_n^{(2k+1)}(x)}{a^{2k+1}} + \sin ax \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (-1)^k \frac{P_n^{(2k)}(x)}{a^{2k}} + C$ для
 кожного полінома P_n , степеня n , і кожного $\mathbb{R} \ni a \neq 0$.

$$15. \int P_n(x) \sin ax dx = \sin ax \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{P_n^{(2k+1)}(x)}{a^{2k+1}} - \cos ax \sum_{k=0}^{[n/2]} (-1)^k \frac{P_n^{(2k)}(x)}{a^{2k}} + C \text{ для}$$

кожного полінома P_n , степеня n , і кожного $\mathbb{R} \ni a \neq 0$.

$$16. \int \cos^\mu x \sin^\nu x dx = \frac{\cos^{\mu+1} x \sin^{\nu+1} x}{\nu+1} + \frac{\nu+\mu+1}{\nu+1} \int \cos^\mu x \sin^{\nu+2} x dx, \nu \neq -1.$$

$$17. \int \cos^\mu x \sin^\nu x dx = \frac{\cos^{\mu-1} x \sin^{\nu+1} x}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu} \int \cos^{\mu-2} x \sin^\nu x dx, \mu \neq -\nu.$$

$$18. \int \cos^\mu x \sin^\nu x dx = -\frac{\cos^{\mu+1} x \sin^{\nu-1} x}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu} \int \cos^\mu x \sin^{\nu-2} x dx, \mu \neq -\nu.$$

$$19. \int x^n e^{ax} \cos bxdx = x^n e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} - \frac{an}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bxdx + \frac{bn}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bxdx, a^2 + b^2 \neq 0.$$

$$20. \int x^n e^{ax} \sin bxdx = x^n e^{ax} \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} - \frac{an}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \cos bxdx - \frac{bn}{a^2 + b^2} \int x^{n-1} e^{ax} \sin bxdx, a^2 + b^2 \neq 0.$$

$$21. \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \ln \left| \frac{2ax + b}{2} + \sqrt{a(ax^2 + bx + c)} \right| + C, a > 0.$$

$$22. \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} + C, a < 0.$$

$$23. \int f'(2x) dx = f(2x) + C, \text{ якщо функція } f \text{ має похідну на проміжку } \Delta, \text{ що розглядається.}$$

$$24. \int xf'(x) dx = xf(x) - F(x) + C, \text{ якщо функція } f \text{ має похідну і первісну } F \text{ на проміжку } \Delta, \text{ що розглядається.}$$

$$25. \int xf''(x) dx = xf'(x) - f(x) + C, \text{ якщо функція } f \text{ має другу похідну на проміжку } \Delta, \text{ що розглядається.}$$

$$26. \int f^{-1}(x) dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C, \text{ якщо функція } f \text{ має первісну } F \text{ на проміжку } \Delta, \text{ що розглядається, є оборотною і функція } f^{-1} \text{ є диференційовною на } \Delta.$$

$$27. \int uv^{(n+1)} dx = \sum_{k=0}^n (-1)^k u^{(k)} v^{(n-k)} + (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx, \text{ якщо } n \in \mathbb{N}_0 \text{ і функції } v^{(n+1)} \text{ та } u^{(n+1)} \text{ є неперервними на проміжку } \Delta.$$

$$28. J_{p,q} = \frac{(a+bx)^{p+1} x^{q+1}}{a(p+1)} + \frac{p+q+2}{a(p+1)} J_{p+1,q}, \text{ якщо } p \neq -1 \text{ і}$$

$$J_{p,q} := \int (a+bx)^p x^q dx.$$

$$29. J_{p,q} = \frac{(a+bx)^{p+1} x^{q+1}}{a(q+1)} + \frac{p+q+2}{a(q+1)} J_{p,q+1}, \text{ якщо } q \neq -1 \text{ і}$$

$$J_{p,q} := \int (a+bx)^p x^q dx.$$

$$30. J_{p,q} = \frac{(a+bx)^p x^{q+1}}{p+q+1} + \frac{ap}{p+q+1} J_{p-1,q}, \text{ якщо } p+q \neq -1 \text{ і}$$

$$J_{p,q} := \int (a+bx)^p x^q dx.$$

$$31. J_{p,q} = \frac{(a+bx)^{p+1} x^q}{p+q+1} + \frac{ap}{p+q+1} J_{p,q-1}, \text{ якщо } p+q \neq -1 \text{ і}$$

$$J_{p,q} := \int (a+bx)^p x^q dx.$$

13. Вправи й задачі розрахункового характеру

1. З'ясуйте, чи функція F є первісною функції f на проміжку Δ

$$1. f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} x^2/2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$2. f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} x^2/2, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x^3, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} -1 + x^4/4, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -1, & x \leq 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} x^2/2, & x > 0, \\ -x+1, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$5. f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 1 + x^2/2, & x > 0, \\ 1, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$6. f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}/x^2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$7. f(x) = \begin{cases} -e^{1/x}/x^2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} e^{1/x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$8. f(x) = (x+|x|)^2, \quad F(x) = 2x^2(x+|x|)/3, \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$9. f(x) = |1+x| - |1-x|, \quad F(x) = ((1+x)|1+x| + (1-x)|1-x|)/2, \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

10. $f(x) = e^{-|x|}$, $F(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x > 0, \\ 1 - e^{-x}, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$
11. $f(x) = \max\{1; x^2\}$, $F(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ \frac{x^3}{3} + \frac{2 \operatorname{sgn} x}{3} e^{-x}, & |x| > 1, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$
12. $f(x) = e^{-|x|}$, $F(x) = \begin{cases} e^x, & x > 0, \\ 2 - e^{-x}, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$
13. $f(x) = \begin{cases} 1 + \cos^{-2} x, & x \in [0; \pi / 2), \\ 1 - \cos^{-2} x, & x \in (-\pi / 2; 0], \end{cases} \quad F(x) = |\operatorname{tg} x|, \quad \Delta =]-\pi / 2; \pi / 2[.$
14. $f(x) = \begin{cases} 1 - \sin^{-2} x, & x \in [0; \pi / 2), \\ 1 + \sin^{-2} x, & x \in [\pi / 2; \pi), \end{cases} \quad F(x) = |\operatorname{ctg} x|, \quad \Delta =]0; \pi[.$
15. $f(x) = 2 \ln x + 2$, $F(x) = x \ln x^2, \quad \Delta = \mathbb{R}.$
16. $f(x) = \begin{cases} -1 / (1 + x^2), & x \in (-\infty; 0], \\ 1 / (1 + x^2), & x \in (0; +\infty), \end{cases} \quad F(x) = |\operatorname{arctg} x|, \quad \Delta = \mathbb{R}.$
17. $f(x) = \begin{cases} 1 / (1 + x^2), & x \in (-\infty; 0], \\ -1 / (1 + x^2), & x \in (0; +\infty), \end{cases} \quad F(x) = |\operatorname{arcctg} x|, \quad \Delta = \mathbb{R}.$
18. $f(x) = \begin{cases} -2e^{1/x^2} / x^3, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} e^{1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$
19. $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} / x^3, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$
20. $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$
21. $f(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} \cos \sqrt{1-x^2}$, $F(x) = \sin \sqrt{1-x^2}$, $\Delta = \mathbb{R}.$
22. $f(x) = \frac{-1}{x^2 + 1}$, $F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, $\Delta = \mathbb{R}.$
23. $f(x) = 1$, $F(x) = \sin \operatorname{arcsin} x$, $\Delta = \mathbb{R}.$
24. $f(x) = |x|$, $F(x) = x|x| / 2$, $\Delta = \mathbb{R}.$
25. $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-x}$, $F(x) = \ln(x^2-x)$, $\Delta = (-\infty; -1/2).$
26. $f(x) = \sin 2x e^{\sin^2 x}$, $F(x) = e^{\sin^2 x}$, $\Delta = \mathbb{R}.$

$$27. f(x) = 2x \cos x^2 e^{\sin x^2}, \quad F(x) = e^{\sin x^2}, \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$28. f(x) = x|x|, \quad F(x) = x^2|x|/3, \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$29. f(x) = e^{-|x|}, \quad F(x) = \begin{cases} e^x - 1, & x > 0, \\ 2 - e^{-x}, & x \leq 0, \end{cases} \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$30. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad F(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$31. f(x) = 2x, \quad F(x) = \arcsin \sin x^2, \quad \Delta = \mathbb{R}.$$

$$32. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F(x) = \arcsin x, \quad \Delta = [-1; 1].$$

$$33. f(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad F(x) = \arccos x, \quad \Delta = (-1; 1).$$

2. Виходячи з означення первісної і невизначеного інтегралу, покажіть, що

$$1. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad x \in (-a; a), \quad a > 0.$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad x \in (-a; a), \quad a > 0.$$

$$3. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C, \quad x \in (-a; a), \quad a > 0.$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C, \quad x \in (-a; 0), \quad a > 0.$$

$$5. \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -2 \operatorname{arctg} \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} + C, \quad x \in (0; a), \quad a > 0.$$

$$6. \int \frac{1}{(a^2 + x^2)\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \frac{1}{a^2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{a^2 - x^2}} + C, \quad x \in (-a; a), \quad a > 0.$$

$$7. \int \frac{1}{a + b \operatorname{tg} x} dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|) + C, \quad x \in (-\pi/2; \pi/2), \quad a > 0, \\ b > 0.$$

$$8. \int \frac{\sin x}{a \cos x + b \sin x} dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (bx - a \ln |a \cos x + b \sin x|) + C, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$9. \int \frac{\cos x}{a \cos x + b \sin x} dx = \frac{1}{a^2 + b^2} (ax + b \ln |a \cos x + b \sin x|) + C, \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$10. \int \frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos x + a^2} dx = \operatorname{arctg} \left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C, \quad |a| < 1, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

$$11. \int \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2} dx = \frac{1}{2}x + \operatorname{arctg} \left(\frac{1+a}{1-a} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C, \quad |a| < 1, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

$$12. \int \frac{1}{a + b \cos x} dx = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) + C,$$

$$0 < |b| < |a|, \quad x \in (-\pi; \pi).$$

$$13. \int \frac{1}{a + b \cos x} dx = \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}} \ln \left| \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \sin x}{a + b \cos x} \right| + C, \quad 0 < |a| < |b|,$$

$$x \in (-\pi; \pi).$$

3. Знайдіть

$$1. \int \frac{(1+x)^2}{2x+2x^3} dx.$$

$$2. \int \frac{1+x^2}{2\sqrt{x}} dx.$$

$$3. \int \sqrt{x^3} dx.$$

$$4. \int \frac{2}{\sqrt{x}} dx.$$

$$5. \int (2x+1) dx.$$

$$6. \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$$

$$7. \int (\sqrt{x}+1)(\sqrt[3]{x}+1) dx.$$

$$8. \int (\sqrt{2}-2u) du.$$

$$9. \int (a-x^2) da.$$

$$10. \int (x_2^2 - x_1) dx_1.$$

$$11. \int \left(\frac{1-u}{u} \right)^2 du.$$

$$12. \int \frac{dx}{2+2x^2}.$$

$$13. \int \left(2x^4 + \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{x} + 1 \right) dx.$$

$$14. \int \frac{(1+y)^3}{\sqrt{y}} dy.$$

$$15. \int \frac{dy}{\sqrt{9-9y^2}}.$$

$$16. \int \frac{2^x + 3^x}{6^x} dx.$$

$$17. \int \operatorname{tg}^2 x dx.$$

$$18. \int \operatorname{ctg}^2 x dx.$$

$$19. \int |\sin x| dx.$$

$$20. \int |x| dx.$$

21. $\int \frac{1+2x^2}{x^2+x^4} dx.$

22. $\int \frac{1+x^2}{2+\sqrt{a}} dx, a > 0.$

23. $\int \frac{3}{2\sin^2 x} dx.$

24. $\int \frac{\sqrt{3}}{4\cos^2 x} dx.$

25. $\int \sin|x| dx.$

26. $\int \frac{3dx}{\sqrt{2}}.$

27. $\int \frac{(1+2x)^2}{\sqrt{2x}} dx.$

28. $\int \frac{(3+2x)^3}{\sqrt[3]{x}} dx.$

29. $\int \sqrt{2}(x^3 + \sqrt[3]{x}) dx.$

30. $\int \frac{2}{4+x^2} dx.$

31. $\int \frac{x+1}{4} dx.$

32. $\int \frac{2\sqrt{x} + \sqrt{2}}{\sqrt{2}} dx.$

33. $\int \frac{x^3 + 2x + 1}{4x} dx.$

34. $\int \frac{2x^5 + \sqrt{2}x^4 + x + 1}{\sqrt{2}x^2} dx.$

35. $\int \frac{3}{4\sqrt{3-x^2}} dx.$

36. $\int \frac{2}{2+x^2} dx.$

37. $\int \sqrt{2x} dx.$

38. $\int \left(\frac{1}{3x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) dx.$

39. $\int (4x^3 - 2\sin x + 4\cos x + 1) dx.$

40. $\int (x - \sin x - \cos x) dx.$

41. $\int (4 - 2\sin^{-2} x + 4\cos x + 1) dx.$

42. $\int (\cos^{-2} x + 4\sin x) dx.$

43. $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx.$

44. $\int 2\cos^2 \frac{x}{2} dx.$

45. $\int \frac{2}{4+2v^2} dv.$

46. $\int \frac{3}{\sqrt{9-a^2}} da.$

47. $\int \frac{6^x(2^x + 3^x)}{3 \cdot 2^x} dx.$

48. $\int \frac{(e^x + 6^x + 1)}{2 \cdot 3^x} dx.$

49. $\int \frac{|x|^3}{2} dx.$

50. $\int \frac{|\cos x|}{\sqrt{2}} dx.$

51. $\int \cos|y| dy.$

52. $\int \frac{3}{9+|x|^2} dx.$

53. $\int (\sqrt[4]{\sqrt{x}} + 1) dx.$

4. Методом внесення під диференціал знайдіть

1. $\int \frac{dx}{(x+1)\ln^5(x+1)}.$

2. $\int \frac{dx}{(x+2)^3}.$

3. $\int 3x^2 \cos x^3 dx.$

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$

5. $\int \left((-x+3)^{10} + \frac{1}{\sqrt{-2x+1}} \right) dx.$

6. $\int \frac{dx}{3-4x}.$

7. $\int \left(\frac{1}{(x+2)^4} + \sqrt[4]{3x-1} \right) dx.$

8. $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}.$

9. $\int \frac{dx}{1-3x}.$

10. $\int (1-x)^{20} dx.$

11. $\int (-2x+1)^7 dx.$

12. $\int \sqrt{1-2x} dx.$

13. $\int e^{-2x} dx.$

14. $\int 3x^2 \sin x^3 dx.$

15. $\int \sin(-x+1) dx.$

16. $\int e^{-\sin x} \cos x dx.$

17. $\int \cos(2-x) dx.$

18. $\int \cos(1-3x) dx.$

19. $\int \frac{e^x dx}{e^x+1}.$

20. $\int e^{2-4x} dx.$

21. $\int e^{x^2} x dx.$

22. $\int x \sin x^2 dx.$

23. $\int \frac{2x}{1+x^2} dx.$

24. $\int \frac{\sin \ln x dx}{x}.$

25. $\int \frac{\sqrt{2}}{1+2x^2} dx.$

26. $\int \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1-2x^2}} dx.$

27. $\int (x+3)^{10} dx.$

28. $\int 2\sqrt[3]{1+x/3} dx.$

29. $\int 2\sqrt{1+2x} dx.$

30. $\int \frac{dx}{1-x/2}.$

31. $\int 2x \cos x^2 dx.$

32. $\int e^x \cos e^x dx.$

33. $\int \cos x \sin^3 x dx.$

34. $\int \frac{-\sin x}{\cos^3 x} dx.$

35. $\int (-x+3)^{10} dx.$

36. $\int \frac{dx}{(1-4x)^5}.$

37. $\int \sqrt{-2x+5} dx.$

38. $\int \frac{1}{2\sqrt[5]{1-x/5}} dx.$

39. $\int \frac{dx}{3-x}.$

40. $\int \cos^2 x \sin x dx.$

41. $\int \frac{dx}{3-5x}.$

42. $\int \operatorname{sh} 2x dx.$

43. $\int \sin(1-3x) dx.$

44. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg} x}.$

45. $\int e^{2-x} dx.$

46. $\int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^2 x}.$

47. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}.$

48. $\int e^{-\cos 2x} \sin 2x dx.$

49. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{\arccos x}}.$

5. Методом внесення під диференціал знайдіть

1. $\int e^{x^2-1} x dx.$

2. $\int e^{-x^4} x^3 dx.$

3. $\int e^{(x-1)^2} (x-1) dx.$

4. $\int x \sqrt{1+x^2} dx.$

5. $\int x\sqrt{1-2x^2} dx.$

6. $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+3x^2}}.$

7. $\int x^2\sqrt{2+x^3} dx.$

8. $\int \frac{x^2 dx}{1-x^3}.$

9. $\int \frac{\ln x dx}{x}.$

10. $\int \frac{dx}{x \ln x}.$

11. $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}.$

12. $\int \frac{dx}{x \ln x \ln \ln x}.$

13. $\int \frac{\ln^2 \ln x}{x \ln x} dx.$

14. $\int \frac{\ln \ln x}{x \ln x} dx.$

15. $\int \operatorname{tg} x dx.$

16. $\int \operatorname{ctg} x dx.$

17. $\int x \sin(-x^2) dx.$

18. $\int x^2 \cos(-3x^2) dx.$

19. $\int \sin^3 x dx.$

20. $\int \cos^3 x dx.$

21. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 2x}{\cos^2 2x} dx.$

22. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^4 x} dx.$

23. $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$

24. $\int \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx.$

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2} \arcsin 2x}.$

26. $\int \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{x^3} dx.$

27. $\int x\sqrt{1-x^2} dx.$

28. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

29. $\int x \cos x^2 dx.$

30. $\int x^2 \sin x^3 dx.$

31. $\int \frac{x}{1+x^2} dx.$

32. $\int \frac{x}{1-x^2} dx.$

33. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(-x-2)^2}}.$

34. $\int \frac{dx}{1+(-x+3)^2}.$

35. $\int \frac{e^{\operatorname{ctg} 2x}}{\sin^2 2x} dx.$

36. $\int \frac{x}{\cos^2(3x^2 + 1)} dx.$

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt{x-1}}.$

38. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}.$

39. $\int \frac{3-4x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

40. $\int \frac{3+4x}{1+x^2} dx.$

41. $\int \frac{2^x}{\sqrt{1-4^x}} dx.$

42. $\int \frac{3^x}{1+9^x} dx.$

43. $\int \frac{\arcsin 2x}{\sqrt{1-4x^2}} dx.$

44. $\int \frac{dx}{(1+9x^2) \operatorname{arctg} 3x}.$

45. $\int \frac{dx}{1+(x+3)^2}.$

46. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}}.$

47. $\int x \sin(1-x^2) dx.$

48. $\int \frac{dx}{(1+x^2)^3 \sqrt{\operatorname{arctg} x}}.$

6. Зробивши вказану заміну, знайдіть

1. $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}, \quad t = 4 + \sin^2 x.$

2. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}, \quad t = 1 + \sqrt{x}.$

3. $\int \sqrt[3]{1+\sin x} \cos x dx, \quad t = 1 + \sin x.$

4. $\int e^{2\arcsin x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad t = \arcsin x.$

5. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}, \quad t = \sqrt[3]{x}.$

6. $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}, \quad t = 1 + e^x.$

7. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx, \quad t = \operatorname{ctg} x.$

8. $\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx, \quad t = \sqrt{4-x^2}.$

9. $\int \frac{x dx}{1+\sqrt[5]{x}}, \quad t = 1 + \sqrt[5]{x}.$

10. $\int \sqrt{4-x^2} dx$, $x = 2 \cos t$.
11. $\int (9-x^2)^{3/2} dx$, $x = 2 \sin t$.
12. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1-x^2}}$, $t = 1/x$.
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$, $t = \sqrt{1+e^x}$.
14. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x} dx}{x}$, $t = 1 + \ln x$.
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$, $x = \sin t$.
16. $\int \frac{x^3 dx}{2+x^8}$, $t = x^4$.
17. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{2+x}}$, $t = \sqrt[3]{2+x}$.
18. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, $t = x^2 + 1$.
19. $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+2\sin x}}$, $t = 1 + 2\sin x$.
20. $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$, $t = \operatorname{tg} x$.
21. $\int \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^2}$, $t = \operatorname{sh} x$.
22. $\int \frac{xdx}{1+x^4}$, $t = x^2$.
23. $\int \frac{(x^2-x)dx}{(x-2)^3}$, $t = x-2$.
24. $\int x\sqrt{1-x} dx$, $t = \sqrt{1-x}$.
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$, $t = \sqrt{1+x}$.
26. $\int \sqrt{9-x^2} dx$, $x = 3 \sin t$.
27. $\int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^2} dx$, $x = 3 \operatorname{tg} t$.

$$28. \int \frac{\sqrt{9+x^2}}{x^2} dx, \quad x = 3 \operatorname{sh} t.$$

$$29. \int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx, \quad t = 1 + \sqrt{x}.$$

$$30. \int \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx, \quad t = \operatorname{arctg} 3x.$$

$$31. \int (1+x) \ln x dx, \quad t = \operatorname{tg} 2x.$$

$$32. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} \arcsin x}, \quad t = \arcsin x.$$

$$33. \int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx, \quad t = 1 + \sqrt{x}.$$

$$34. \int e^{2x^2+x+2} (4x+1) dx, \quad t = 2x^2 + x + 2.$$

$$35. \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx, \quad \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$36. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx, \quad t = e^x.$$

$$37. \int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}, \quad x-a = (b-a) \sin^2 t.$$

$$38. \int \sqrt{(x-a)(b-x)} dx, \quad x-a = (b-a) \sin^2 t.$$

7. Інтегруючи частинами, знайдіть

$$1. \int (1+x) \ln x dx$$

$$2. \int x^{10} \ln x dx.$$

$$3. \int (x^2 + x) \sin x dx.$$

$$4. \int (x+1) \arcsin x dx.$$

$$5. \int (x^2 - x) e^x dx.$$

$$6. \int (x^2 + x) e^{-2x} dx.$$

$$7. \int (x^3 + x) \sin x dx.$$

$$8. \int (x^3 - x) \cos 2x dx.$$

$$9. \int \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx.$$

$$10. \int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$$

$$11. \int x e^{-2x} dx.$$

$$12. \int (x^2 + 1) e^{-3x} dx.$$

$$13. \int (x^3 + 5) e^{-2x} dx.$$

$$14. \int \ln^2 x dx.$$

15. $\int (x+1)^2 \ln x dx$.

16. $\int x^2 \cos x dx$.

17. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

18. $\int \frac{x \cos x dx}{\sin^3 x}$.

19. $\int x^3 \cos x dx$.

20. $\int x \ln(x-1) dx$.

21. $\int \ln(x^2+1) dx$.

22. $\int x \sin^2 x dx$.

23. $\int x \cos^2 x dx$.

24. $\int \sin \ln x dx$.

25. $\int x \sin^2 x dx$.

26. $\int \ln x dx$.

27. $\int x \ln x dx$.

28. $\int x^2 \ln x dx$.

29. $\int x \cos 2x dx$.

30. $\int x \sin 2x dx$.

31. $\int x^5 \cos x dx$.

32. $\int x^4 \sin x dx$.

33. $\int \arcsin x dx$.

34. $\int x \arcsin x dx$.

35. $\int x e^{-x} dx$.

36. $\int x^4 e^{-x} dx$.

37. $\int x^2 \arcsin x dx$.

38. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

39. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

40. $\int x^2 \operatorname{arctg} x dx$.

8. Знайдіть

1. $\int \frac{1-x}{1+2x^2} dx$.

2. $\int \frac{1+2x}{x^2+1} dx$.

3. $\int \frac{2+2x}{1+x^2} dx$.

4. $\int \frac{2+2x}{1-x^2} dx$.

5. $\int \frac{2+3x}{(x+1)^3} dx$.

6. $\int \frac{x}{(x-1)^2} dx$.

7. $\int \frac{x dx}{x+2}$.

8. $\int \frac{x-1}{x-2} dx$.

9. $\int \frac{x+1}{2x+1} dx.$

10. $\int \frac{x+2}{1-2x} dx.$

11. $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx.$

12. $\int \frac{x^2}{1+2x^2} dx.$

13. $\int \frac{x^2}{x+1} dx.$

14. $\int \frac{x^2}{x-1} dx.$

15. $\int \frac{x^3}{x+1} dx.$

16. $\int \frac{x^3}{x-1} dx.$

17. $\int \frac{x^4 dx}{x^2-1}.$

18. $\int \frac{x^4 dx}{x^2+1}.$

19. $\int \frac{x^2+2}{x+2} dx.$

20. $\int \frac{x^2-2}{x-2} dx.$

21. $\int \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

22. $\int \frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$

23. $\int \frac{dx}{(4x+1)(4x+2)}.$

24. $\int \frac{dx}{(2x+1)(2x+7)}.$

25. $\int \frac{dx}{(-x-1)(x+3)}.$

26. $\int \frac{dx}{(x+1)(-x-2)}.$

27. $\int \frac{dx}{(-3x+1)(4x+2)}.$

28. $\int \frac{x dx}{x+1}.$

29. $\int \frac{x dx}{1-x}.$

30. $\int \frac{x+1}{x-1} dx.$

31. $\int \frac{x-1}{x+1} dx.$

32. $\int \frac{1}{x^2-1} dx.$

33. $\int \frac{x}{(x-1)^2} dx.$

34. $\int \frac{2+3x}{(x+1)^3} dx.$

35. $\int \frac{dx}{(-2x+1)(-2x+5)}.$

36. $\int \frac{1}{x^2-2} dx.$

37. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x + 2}$.

38. $\int \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}$.

39. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 3}$.

40. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 3}$.

41. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 2}$.

42. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 2}$.

43. $\int \frac{dx}{x^2 - x + 5}$.

44. $\int \frac{dx}{x^2 + x + 5}$.

45. $\int \frac{xdx}{x^2 + x + 1}$.

46. $\int \frac{xdx}{x^2 - x + 1}$.

47. $\int \frac{xdx}{x^2 - 4x + 3}$.

48. $\int \frac{xdx}{x^2 + 4x + 3}$.

49. $\int \frac{(2x + 3)dx}{x^2 + x + 2}$.

50. $\int \frac{(1 - 2x)dx}{x^2 - x + 2}$.

51. $\int \frac{(2x - 1)dx}{x^2 - x + 5}$.

52. $\int \frac{(2x + 3)dx}{x^2 + x + 5}$.

9. Знайдіть

1. $\int \frac{dx}{(x + 1)(x + 2)^2}$.

2. $\int \frac{dx}{(x - 2)(x - 1)^2}$.

3. $\int \frac{x + 1}{(x - 1)^2} dx$.

4. $\int \frac{dx}{(x - 1)^2(x + 1)}$.

5. $\int \frac{dx}{(x + 1)^2(x - 1)}$.

6. $\int \frac{x - 1}{(x + 1)^3} dx$.

7. $\int \frac{xdx}{(x^2 + x + 1)^2}$.

8. $\int \frac{x + 1}{(x^2 + 2x + 9)^2} dx$.

9. $\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 3x + 4)}$.

10. $\int \frac{dx}{x^2(x^2 - 5x + 6)}$.

11. $\int \frac{dx}{x^2 + x^4}$.

12. $\int \frac{x^2 dx}{(1 + x)^3}$.

13. $\int \frac{x^3 + 2x}{(1 + x^2)^3} dx.$

14. $\int \frac{x^3 + 1}{(x^2 - 4)^2} dx.$

15. $\int \frac{x^2 + 2x}{(2x^2 + 1)^2} dx.$

16. $\int \frac{xdx}{(2x^2 + x + 1)^2}.$

17. $\int \frac{xdx}{8 + x^3}.$

18. $\int \frac{xdx}{1 + 8x^3}.$

19. $\int \frac{xdx}{(2x^2 - x - 1)^2}.$

20. $\int \frac{xdx}{(x^2 - x + 1)^2}.$

21. $\int \frac{x^2 dx}{8 + x^3}.$

22. $\int \frac{x^2 dx}{8 - x^3}.$

23. $\int \frac{xdx}{(x^2 + 4)^3}.$

24. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^4}.$

25. $\int \frac{dx}{(1 + 4x^2)^6}.$

26. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^3}.$

27. $\int \frac{dx}{(4 + x^2)^3}.$

28. $\int \frac{xdx}{(x^2 + 9)^3}.$

29. $\int \frac{xdx}{(1 + x^2)^3}.$

30. $\int \frac{(2x + 1)dx}{(x^2 + 4)^3}.$

31. $\int \frac{(1 - 4x)dx}{(1 + x^2)^3}.$

32. $\int \frac{dx}{x(x + 1)^3}.$

33. $\int \frac{(1 - 4x)dx}{(1 + x)x^3}.$

34. $\int \frac{dx}{x^3(x + 1)}.$

35. $\int \frac{dx}{x^2(x^2 + 1)}.$

36. $\int \frac{(1 - 2x)dx}{(1 + x^2)x}.$

37. $\int \frac{dx}{x(x^2 + 1)^2}.$

38. $\int \frac{(1 - x)dx}{(1 + x^2)^2 x^2}.$

39. $\int \frac{x^2 dx}{(1 - x^2)^3}.$

40. $\int \frac{(3x^2 + 1)dx}{(x^2 - 1)^2}.$

41. $\int \frac{x dx}{x^3 + 1}.$

42. $\int \frac{(1-x) dx}{x^3 - 1}.$

10. Знайдіть

1. $\int \frac{2x^5 + 1}{x^2 + x^4} dx.$

2. $\int \frac{4x^7 - 5x}{(1+x)^3} dx.$

3. $\int \frac{x^4 + 2x}{(1+x^2)^2} dx.$

4. $\int \frac{x^5 + 1}{(x^2 - 4)^2} dx.$

5. $\int \frac{x^4 + 2x}{(2x^2 + 1)^2} dx.$

6. $\int \frac{x^7 dx}{2x^2 + x + 1}.$

7. $\int \frac{x^8 dx}{8 + x^3} dx.$

8. $\int \frac{x^9 dx}{1 + 8x^3}.$

9. $\int \frac{x^6 dx}{(x+1)(x+2)^2}.$

10. $\int \frac{x^5 dx}{(x-2)(x-1)^2}.$

11. $\int \frac{x^9 + 1}{(x-1)^2} dx.$

12. $\int \frac{2x^5 dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

13. $\int \frac{x^4 dx}{(x+1)^2(x-1)}.$

14. $\int \frac{(x-1)^4}{(x+1)^3} dx.$

15. $\int \frac{x^5 dx}{x^2 + x + 1}.$

16. $\int \frac{(x+1)^4}{x^2 + 2x + 9} dx.$

17. $\int \frac{2x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 3x + 4} dx.$

18. $\int \frac{5x^4 - 2x^2 + 1}{x^2 - 5x + 6} dx.$

19. $\int \frac{4x^5 + x^2}{2x^2 - x - 1} dx.$

20. $\int \frac{2x^5 + x^2}{x^2 - x + 1} dx.$

21. $\int \frac{3x^5 + x}{8 + x^3} dx.$

22. $\int \frac{4x^4 + x^2}{8 - x^3} dx.$

23. $\int \frac{x^6}{(x^2 + 4)^3} dx.$

24. $\int \frac{x^7 + x^2}{(4 + x^2)^3} dx.$

25. $\int \frac{2x^5 + 4x^2}{(1 + 4x^2)^2} dx.$

26. $\int \frac{x^8 + x^2}{(x^2 + 1)^3} dx.$

27. $\int \frac{4x^5 + x^2}{(4 + x^2)^2} dx.$

28. $\int \frac{4x^5}{(x^2 + 9)^2} dx.$

29. $\int \frac{4x^5 + x^3}{(1 + x^2)^3} dx.$

30. $\int \frac{4x^5 + 1}{(x^2 + 4)^2} dx.$

31. $\int \frac{4x^5 + x^2 + x}{(1 + x^2)^3} dx.$

32. $\int \frac{x^5 + 2x^2 + 1}{x(x+1)^2} dx.$

33. $\int \frac{8x^5 + x^2 + 1}{(1 + x)x^2} dx.$

34. $\int \frac{4x^5 + x - 1}{x(x+1)^3} dx.$

35. $\int \frac{2x^5 - x - 1}{x^2(x^2 + 1)} dx.$

36. $\int \frac{2x^5 - x - 2}{(1 + x^2)x} dx.$

37. $\int \frac{-2x^5 + x - 2}{x(x^2 + 1)^2} dx.$

38. $\int \frac{-2x^5 + 2}{(1 + x^2)^2 x} dx.$

39. $\int \frac{-2x^6 - 1}{x(x^2 + 1)^2} dx.$

40. $\int \frac{1 - x^5}{(1 + x^2)x^2} dx.$

41. $\int \frac{1 - 2x^6}{x^3 + 1} dx.$

42. $\int \frac{1 - 4x^7}{x^3 - 1} dx.$

11. Знайдіть

1. $\int \frac{x^5 + 2x}{(x+1)^2(x+2)} dx.$

2. $\int \frac{-x^3 - 3x + 1}{x^3(x+1)} dx.$

2. $\int \frac{-2x^5 + 3}{x^3 + 1} dx.$

4. $\int \frac{3x^3 + 2x^2 - 1}{x(x+2)(x+1)} dx.$

4. $\int \frac{-x^7 + 2x}{x^3 - 1} dx.$

6. $\int \frac{-2x^5 + x + 2}{x^3 + x} dx.$

7. $\int \frac{2x^4 - 5x^2 + 5x + 23}{(x-1)(x+1)(x-5)} dx.$

8. $\int \frac{-3x^4 + 3x^3 - 1}{(x+2)^2(x+1)} dx.$

9. $\int \frac{x^4 - 3x}{(x-1)^2(x+1)^2} dx.$

10. $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x + 1}.$

11. $\int \frac{9x^2 + 1}{x^4 + 1} dx.$

12. $\int \frac{x^2 + 2x - 1}{(x+1)^2(x^2 + 1)} dx.$

13. $\int \frac{x^2 + 3x}{(x^2 + 1)^2} dx.$

14. $\int \frac{dx}{(x^2 - 2x + 1)x}.$

15. $\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 1)}.$

16. $\int \frac{2x^2 - x - 3}{(x+1)^4} dx.$

17. $\int \frac{dx}{(x^2 + x + 1)^2}.$

18. $\int \frac{2x^3 + 4x^2 + 2x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2)} dx.$

19. $\int \frac{x^3 + 2x^2 + 10x}{(x+1)^2(x^2 - x + 1)} dx.$

20. $\int \frac{3x^3 + x + 46}{(x-1)^2(x^2 + 9)} dx.$

21. $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)} dx.$

22. $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2 + 1)}.$

23. $\int \frac{x^5 dx}{x^4 - 1}.$

24. $\int \frac{x^7 dx}{(x-1)^4}.$

25. $\int \frac{x^8 dx}{(x+1)^4}.$

26. $\int \frac{x^6 dx}{(x^2 + x)^2}.$

27. $\int \frac{dx}{x^4 + 3x^3 + x^2 - 3x - 2}.$

28. $\int \frac{dx}{x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2}.$

29. $\int \frac{x^7 dx}{x^4 + 1}.$

30. $\int \frac{x^6 dx}{x^4 + 16}.$

31. $\int \frac{dx}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}.$

32. $\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + 2x - 1}.$

33. $\int \frac{(x^6 + 2)dx}{x^4 - 1}.$

34. $\int \frac{(-2x^6 + 3)dx}{x^4 - x^2 - 2}.$

12. Знайдіть

1. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt{x}}.$

2. $\int \frac{\sqrt{1+x^2} dx}{x^2}.$

3. $\int \frac{\sqrt{1-\sqrt[3]{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

4. $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}.$

5. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$

6. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}.$

7. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$

8. $\int \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx.$

9. $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}.$

10. $\int \frac{x dx}{1+\sqrt[5]{x}}.$

11. $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}} dx.$

12. $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} dx.$

13. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+4}} dx.$

14. $\int \frac{x^2+2x}{\sqrt{x^2+2x+2}} dx.$

15. $\int \frac{dx_2}{(x_2-2)\sqrt{-3+4x_2-x_2^2}}.$

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x-1}}.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}.$

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}.$

19. $\int \frac{dx_1}{\sqrt{4x_1^2+4x_1-3}}.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-4x^2}}.$

21. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x^2+x-1}}.$

22. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3\sqrt{x^2}} dx.$

23. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}}$

24. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}.$

25. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x}}.$

26. $\int \frac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} dx.$

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+x)}.$

28. $\int \frac{\sqrt[3]{x} dx}{\sqrt{x+1}}.$

29. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{x+1}}.$

30. $\int \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} dx.$

31. $\int \frac{1 - \sqrt{x+1}}{1 + \sqrt[3]{x+1}} dx.$

32. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 2x}} dx.$

33. $\int \sqrt{x^2 + x + 1} dx.$

34. $\int \sqrt{-9x^2 - 6x + 2} dx.$

35. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx.$

36. $\int \frac{1}{\sqrt{-x^2 - 4x + 1}} dx.$

37. $\int \sqrt{-9x^2 + 6x + 8} dx.$

38. $\int \sqrt{(2-x)(3+x)} dx.$

39. $\int \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} dx.$

40. $\int \frac{1}{1 + \sqrt{-x^2 - 2x + 1}} dx.$

41. $\int \frac{\sqrt{x}}{(1 + \sqrt[3]{x})^2} dx.$

42. $\int x^{-2} \sqrt{1 + x^{-1}} dx.$

43. $\int \frac{1}{x^2 \sqrt[3]{(1+x^3)^5}} dx.$

44. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{x^3}} dx.$

45. $\int \frac{1}{x^4 \sqrt{x^2 - 3}} dx.$

46. $\int \frac{1}{x \sqrt{x^2 - 9}} dx.$

13. Знайдіть

1. $\int (x - \cos x)^3 dx.$

2. $\int \cos^2 x \sin^4 x dx.$

3. $\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^4 x}.$

4. $\int \sin^6 x dx.$

5. $\int \frac{du}{2 \cos^2 u + 3 \sin^2 u}.$

6. $\int \frac{dx}{\sin 2x}.$

7. $\int \frac{dx}{\cos 2x}.$

8. $\int \sin^5 x dx.$

9. $\int \operatorname{ctg}^2 2x dx.$

10. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x}.$

11. $\int \cos x \cos 3x dx.$

12. $\int \sin x \sin 3x dx.$

13. $\int \cos^4 x dx.$

14. $\int \frac{dx}{5 - 3 \sin x}.$

15. $\int \frac{dx}{5 + 4 \cos x}.$

16. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}.$

17. $\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x}.$

18. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}.$

19. $\int \frac{dx}{5 - 4 \sin x - \cos x}.$

20. $\int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x - \cos^3 x}.$

21. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$

22. $\int \frac{\sin^2 x \cos^2 x}{\sin^8 x + \cos^8 x} dx.$

23. $\int \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^4 x} dx.$

24. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{2} + \sin x + \cos x}.$

25. $\int \frac{dx}{\cos^6 x} dx.$

26. $\int \sin^2 2x dx.$

27. $\int \cos^2 3x dx.$

28. $\int \cos^3 2x dx.$

29. $\int \sin^3 3x dx.$

30. $\int \cos^3 2x \sin 2x dx.$

31. $\int \sin^5 3x \cos 3x dx.$

32. $\int \sin x \sin 9x dx.$

33. $\int \cos x \sin 5x dx.$

34. $\int \sin x \cos 2x \sin 3x dx.$

35. $\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx.$

36. $\int \frac{dx}{2 + \sin x}.$

37. $\int \frac{dx}{2 + \cos x}.$

38. $\int \frac{dx}{1 - 2 \sin x}.$

39. $\int \frac{dx}{1 - 2 \cos x}.$

40. $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx.$

41. $\int \frac{\operatorname{ctg}^6 x}{\sin^2 x} dx.$

42. $\int \frac{\sin 2x dx}{4 + \sin^2 x}.$

43. $\int \operatorname{ctg}^3 x dx.$

44. $\int \frac{\sin 2x}{\cos^3 x} dx.$

45. $\int \operatorname{ctg}^5 x dx.$

46. $\int \frac{1}{a \cos x + b \sin x} dx.$

47. $\int \frac{1}{\cos(x+1)\sin(x-1)} dx.$

48. $\int \frac{1}{\sin(2x+2)\sin(2x+1)} dx.$

14. Знайдіть

1. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^2 x dx.$

2. $\int \operatorname{ch}^4 x dx.$

3. $\int \operatorname{ch}^3 x dx.$

4. $\int \operatorname{sh}^3 x dx.$

5. $\int \operatorname{th} x dx.$

6. $\int \operatorname{cth} x dx.$

7. $\int \frac{1}{2 \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} dx.$

8. $\int (\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x) dx.$

9. $\int \frac{\operatorname{sh}^3 x}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$

10. $\int \frac{1}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch}^4 x} dx.$

11. $\int \operatorname{th}^3 x dx.$

12. $\int \operatorname{cth}^3 x dx.$

13. $\int \operatorname{th}^4 x dx.$

14. $\int \operatorname{cth}^4 x dx.$

15. $\int \operatorname{th}^5 x dx.$

16. $\int \operatorname{cth}^5 x dx.$

17. $\int \operatorname{ch}^3 x \operatorname{sh}^2 x dx.$

18. $\int \sqrt{\operatorname{th} x} dx.$

19. $\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{ch} x)^2}.$

20. $\int \frac{e^x}{\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x} dx.$

21. $\int \frac{x}{\operatorname{ch}^2 x} dx.$

22. $\int \frac{x}{\operatorname{sh}^2 x} dx.$

23. $\int \operatorname{ch} x \cos x dx.$

24. $\int \operatorname{sh} x \sin x dx.$

25. $\int \operatorname{ch} x \sin x dx.$

26. $\int \operatorname{sh} x \cos x dx.$

27. $\int x \operatorname{ch} x dx.$

28. $\int x \operatorname{sh} x dx.$

29. $\int \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh}^3 x dx.$

30. $\int \operatorname{sh}^2 x dx.$

31. $\int \operatorname{ch} 2x dx.$

32. $\int \operatorname{sh} 2x dx.$

33. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 2x}.$

34. $\int \sqrt{\operatorname{cth} x} dx.$

35. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}.$

36. $\int \frac{dx}{1 + \operatorname{ch} x}.$

37. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh} x}.$

38. $\int \frac{dx}{\operatorname{th} x - 1}.$

15. Знайдіть

1. $\int \frac{x dx}{x^2 + x^4 + 1}.$

2. $\int \frac{\ln x}{\sqrt{1-x}} dx.$

3. $\int \frac{\ln(x+2)}{\sqrt{1+x}} dx.$

4. $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} dx.$

5. $\int \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$

6. $\int e^{\sqrt{x}} \sqrt{x} dx.$

7. $\int \ln(1+x^2) dx.$

8. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+2x^2}}.$

9. $\int x^3 \ln^2 x^2 dx.$

10. $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{1+e^x}}.$

11. $\int \sqrt{1+\ln x} \frac{dx}{x \ln x}.$

12. $\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{1+x^2}}.$

13. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$

14. $\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2-9}}.$

15. $\int \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2}.$

16. $\int \frac{1}{e^x(e^x-1)} dx.$

17. $\int \cos \sqrt[3]{x} dx.$

18. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2(1+x^2)} dx.$

19. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx.$

20. $\int x \cos^2 x dx.$

21. $\int \ln^2 2x dx.$

22. $\int x^2 \sin^2 x dx.$

23. $\int \frac{x \sin x dx}{\cos^3 x}.$

24. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} dx.$

25. $\int x \arcsin(1-x) dx.$

26. $\int x e^x \sin x dx.$

27. $\int x e^{-x} \cos x dx.$

28. $\int \cos^2 \sqrt{x} dx.$

29. $\int \frac{\sin x dx}{\cos x \sqrt{1+\sin^2 x}}.$

30. $\int x e^{|x|} dx.$

31. $\int x \operatorname{arctg} x \ln(1+x^2) dx.$

32. $\int x^2 e^{-x} \cos x dx.$

33. $\int \sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}} dx.$

34. $\int \frac{1}{\sqrt{e^x+1} + \sqrt{e^x-1}} dx.$

35. $\int \frac{e^{3x} + e^x}{e^{4x} - e^{2x} + 1} dx.$

36. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx.$

37. $\int \frac{1}{e^x - e^{-x}} dx.$

38. $\int \frac{1}{e^x + e^{-x}} dx.$

39. $\int \frac{e^{2x}}{e^x - 1} dx.$

40. $\int \frac{e^{3x}}{e^{2x} - 1} dx.$

16. Знайдіть

1. $\int e^{\sin^2 x} \sin 2x dx.$

2. $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}.$

3. $\int \frac{x + \operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx.$

4. $\int x e^{-x^2} dx.$

5. $\int \frac{xdx}{\sqrt{9-x^2}}.$

6. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-3)^2}}.$

-
7. $\int \frac{x dx}{(7-x^2)^7}$.
8. $\int \frac{dx}{\ln(1-2x)}$.
9. $\int \sin^2(1-x) dx$.
10. $\int \sin^3(1-2x) dx$.
11. $\int \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} dx$.
12. $\int \frac{\cos(2-x) dx}{\sqrt[5]{\sin(2-x)}}$.
13. $\int e^{-2x} \cos e^{-2x} dx$.
14. $\int \frac{dx}{x \cos^2(1-\ln x)}$.
15. $\int \frac{x + \arccos^2 3x}{\sqrt{1-9x^2}} dx$.
16. $\int \frac{3^{-x} dx}{\sqrt{1-9^{-x}}}$.
17. $\int \frac{e^{-2x}}{4+e^{-4x}} dx$.
18. $\int x(1-x)^{99} dx$.
19. $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.
20. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$.
21. $\int \frac{x^2 dx}{(27-x^3)^{3/2}}$.
22. $\int \frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x} dx$.
23. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x-8)^8} dx$.
24. $\int \frac{\cos x dx}{\cos 3x}$.
25. $\int \frac{6^x}{9^x-4^x} dx$.
26. $\int \sin(1-x)\sin(1+x) dx$.
27. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x^3 \sqrt{x^2}} dx$.
28. $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$.
29. $\int \frac{\ln x}{(x-1)^2} dx$.
30. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{2x-1} dx$.
31. $\int x^2 e^{\sqrt[3]{x}} dx$.
32. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$.
33. $\int |x^2-1| dx$.
34. $\int (|x-1|+|x+1|) dx$.
35. $\int x \operatorname{tg}^2 x dx$.
36. $\int \frac{\cos^2 x}{\sin x} dx$.

37. $\int \frac{\sqrt{\operatorname{tg} x}}{\sin 2x} dx.$

38. $\int \frac{\sin x}{\sin 3x} dx.$

39. $\int \sqrt{1 - \sin x} dx.$

40. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} dx.$

41. $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt{\cos x}} dx.$

42. $\int \sin^3 x \sqrt{\cos^5 x} dx.$

43. $\int \frac{1}{\sin^5 x \cos^3 x} dx.$

44. $\int \frac{\cos^4 x}{\sin x} dx.$

45. $\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

46. $\int \frac{1}{\cos^3 x \sin^5 x} dx.$

17. Знайдіть

1. $\int x e^{\sqrt{x}} dx.$

2. $\int x \sqrt{9 - x^2} dx.$

3. $\int \sqrt{4 + x^2} dx.$

4. $\int \ln(4 + x^2) dx.$

5. $\int x^2 \ln(2 + x) dx.$

6. $\int \ln^2 x dx.$

7. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx.$

8. $\int \frac{x^2 dx}{1 + \sqrt{x}}.$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{3x}} dx.$

10. $\int \frac{dx}{1 + \sqrt{1 - x}}.$

11. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2x + 3}} dx.$

12. $\int \frac{dx}{(2 + x)\sqrt{1 + x}}.$

13. $\int \frac{x dx}{x^2 + x + 9}.$

14. $\int \frac{x^5 dx}{x^2 - 4x + 3}.$

15. $\int (2x + 1) \sin(2x + 1) dx.$

16. $\int (x^2 - 3x + 1) e^x dx.$

17. $\int \operatorname{arctg} \sqrt{4x - 1} dx.$

18. $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^4 - x^2 - 1}}.$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{2 - x - x^2}}.$

21. $\int \frac{x^7 dx}{x^2 + 4}.$

22. $\int \frac{x^6}{x^2 - 9} dx.$

23. $\int \frac{x^4}{x^2 + x + 3} dx.$

24. $\int \sin^4 x \cos^2 x dx.$

25. $\int \sin^2 x \cos^6 x dx.$

26. $\int x^2 \sin \sqrt{x} dx.$

27. $\int x^2 \cos \sqrt{x} dx.$

28. $\int x \cos \sqrt{x} dx.$

29. $\int x^3 e^{-\sqrt{x}} dx.$

30. $\int (4 - 16x^2) \sin 4x dx.$

31. $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2 + x + 1}}.$

32. $\int \frac{\sqrt{x} dx}{(1 + \sqrt[3]{x})^2}.$

33. $\int \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$

34. $\int \ln(\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}) dx.$

35. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{(1+x^2)^2} dx.$

36. $\int \operatorname{arctg}(1 + \sqrt{x}) dx.$

37. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{(1+x)^2} dx.$

38. $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

39. $\int \frac{x \ln x}{\sqrt{(x^2-1)^3}} dx.$

40. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{x^4} dx.$

41. $\int \arcsin \frac{2\sqrt{x}}{1+x} dx.$

42. $\int \arcsin \sqrt{x} dx.$

43. $\int x^{-2} \arccos x dx.$

44. $\int e^{-x} \arcsin e^{-x} dx.$

14. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру

- 1.31. так 1.32. ні 1.33. так 3.31. $\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x + C$ 3.32. $\frac{\sqrt{2}x(4\sqrt{x} + 3\sqrt{2})}{6} + C$.
- 3.33. $\frac{x^3}{12} + \frac{x}{2} + \frac{\ln|x|}{4} + C$ 3.34. $\frac{x^3}{3} + \frac{\sqrt{2}x^4}{4} + \frac{\ln|x|}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}x} + C$ 3.35. $\frac{3}{4}\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}} + C$.
- 3.36. $\sqrt{2}\arctg\frac{x}{\sqrt{2}} + C$ 3.37. $\frac{2\sqrt{2} \cdot x^{3/2}}{3} + C$ 3.38. $-\frac{1}{3x} + \sqrt{x} + C$.
- 3.39. $x^4 + 2\cos x + 4\sin x + x + C$ 3.40. $\frac{x^2}{2} + \cos x - \sin x + C$.
- 3.41. $4x + 2\operatorname{ctg}x + 4\sin x + x + C$ 3.42. $\operatorname{tg}x - 4\cos x + C$ 3.43. $x - 2\sin x + C$ 3.44. $x + 2\sin x + C$ 3.45. $\frac{1}{\sqrt{2}}\arctg\frac{v}{\sqrt{2}} + C$ 3.46. $3\arcsin\frac{a}{3} + C$.
- 3.47. $\frac{1}{3}\left(\frac{6^x}{\ln x} + \frac{1}{2}\frac{3^{2x}}{\ln 3}\right) + C$ 3.48. $\frac{1}{2}\left(\frac{e^x}{3^x(1-\ln 3)} + \frac{2^x}{\ln 2} - \frac{1}{3^x \ln 3}\right) + C$ 3.49. $\frac{x^4}{8} + C$,
якщо $x \geq 0$; $-\frac{x^4}{8} + C$, якщо $x < 0$. 3.50. $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x \cdot \operatorname{sgn}(\cos x) + C$ 3.51. $\sin y + C$.
- 3.52. $\arctg\frac{x}{3} + C$ 3.53. $\frac{8x^{9/8}}{9} + x + C$ 4.31. $\sin x^2 + C$ 4.32. $\sin e^x + C$ 4.33. $\frac{\sin^4 x}{4} + C$ 4.34. $-\frac{1}{2\cos^2 x} + C$ 4.35. $-\frac{(3-x)^{11}}{11} + C$ 4.36. $\frac{1}{16(1-4x)^4} + C$.
- 4.37. $-\frac{(5-2x)^{3/2}}{2} + C$ 4.38. $-\frac{25\left(1-\frac{x}{2}\right)^{4/5}}{8} + C$ 4.39. $-\ln|3-x| + C$.
- 4.40. $-\frac{\cos^3 x}{3} + C$ 4.41. $-\frac{1}{5}\ln|3-5x| + C$ 4.42. $\frac{1}{2}\operatorname{ch}2x + C$ 4.43. $\frac{1}{3}\cos(1-3x) + C$.
- 4.44. $-\ln|\operatorname{arctg}x| + C$ 4.45. $-e^{2-x} + C$ 4.46. $-\frac{1}{\operatorname{arctg}x} + C$ 4.47. $\ln|\arcsin x| + C$.
- 4.48. $\frac{1}{2}e^{-\cos 2x} + C$ 4.49. $-2\sqrt{\arccos x} + C$ 5.31. $\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C$ 5.32. $-\frac{1}{2}\ln|1-x^2| + C$ 5.33. $\arcsin(x+2) + C$ 5.34. $\arctg(x-3) + C$ 5.35. $-\frac{1}{2}e^{\operatorname{ctg}2x} + C$.

$$5.36. \frac{1}{6} \operatorname{tg}(3x^2 + 1) + C. \quad 5.37. \frac{2}{3} x^{3/2} + \frac{2}{3} (x-1)^{3/2} + C. \quad 5.38. -\sqrt{1-e^{2x}} + C. \quad 5.39.$$

$$3 \arcsin x + 4\sqrt{1-x^2} + C. \quad 5.40. 2 \ln|1+x^2| + 3 \operatorname{arctg} x + C. \quad 5.41. \frac{1}{\ln 2} \arcsin 4^x + C. \quad 5.42.$$

$$\frac{1}{\ln 3} \operatorname{arctg} 3^x + C. \quad 5.43. \frac{1}{2} \arcsin^2 2x + C. \quad 5.44. \frac{1}{3} \ln|\operatorname{arctg} 3x| + C. \quad 5.45.$$

$$\operatorname{arctg}(x+3) + C. \quad 5.46. \arcsin(x-2) + C. \quad 5.47. \frac{1}{2} \cos(1-x^2) + C. \quad 5.48.$$

$$\frac{3}{2} \operatorname{arctg}^2 x + C. \quad 6.31. \frac{1}{2} \operatorname{tg}^4 2x + C. \quad 6.32. \ln|\arcsin x| + C. \quad 6.33.$$

$$-x + 4\sqrt{x} - 4 \ln|1+\sqrt{x}| + C. \quad 6.34. e^{2x^2+x+2} + C. \quad 6.35. \operatorname{arctg} e^x + C. \quad 6.36. \arcsin e^x + C.$$

$$6.37. 2 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} + C. \quad 6.38. \frac{1}{4} (b-a)^2 - \frac{(b-a)^2}{16} \sin \left(4 \arcsin \sqrt{\frac{x-a}{b-a}} \right) + C.$$

$$7.31. x^5 \sin x + 5x^4 \cos x - 20x^3 \sin x - 60x^2 \cos x + 120 \cos x + 120x \sin x + C.$$

$$7.32. -x^4 \cos x + 4x^3 \sin x + 12x^2 \cos x - 24 \cos x - 24x \sin x + C.$$

$$7.33. x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C. \quad 7.34. \frac{1}{2} x^2 \arcsin x - \frac{1}{4} \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{4} + C.$$

$$7.35. -xe^{-x} - e^{-x} + C. \quad 7.36. -x^4 e^{-x} - 4x^3 e^{-x} - 12x^2 e^{-x} - 24x e^{-x} - 24e^{-x} + C.$$

$$7.37. \frac{1}{3} x^3 \arcsin x + \frac{x^2 \sqrt{1-x^2}}{9} + \frac{2\sqrt{1-x^2}}{9} + C. \quad 7.38. x - \sqrt{1-x^2} \arcsin x + C. \quad 7.39.$$

$$\frac{1}{2} x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} + C. \quad 7.40. \frac{1}{3} x^3 \operatorname{arctg} x + \frac{1}{6} \ln|1+x^2| - \frac{x^2}{6} + C. \quad 8.31.$$

$$x - 2 \ln|x+1| + C. \quad 8.32. -\operatorname{arth} x + C. \quad 8.33. \frac{1}{1-x} + \ln|x-1| + C.$$

$$8.34. -\frac{3}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C. \quad 8.35. \frac{1}{8} \ln|2x-5| - \frac{1}{8} \ln|2x-1| + C.$$

$$8.36. -\frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arth} \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad 8.37. \ln \left| \frac{x+1}{x+2} \right| + C. \quad 8.38. \ln \left| \frac{x-2}{x-1} \right| + C.$$

$$8.39. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + C. \quad 8.40. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x+1}{x+3} \right| + C. \quad 8.41. \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C.$$

$$8.42. \frac{2}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{7}} + C. \quad 8.43. \frac{2}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{19}} + C.$$

$$8.44. \frac{2}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C. \quad 8.45. \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$8.46. \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad 8.47. \frac{3}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x-1| + C.$$

$$8.48. \frac{3}{2} \ln|x+3| - \frac{1}{2} \ln|x+1| + C. \quad 8.49. \ln|x^2+x+2| + \frac{4}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{7}} + C. \quad 8.50. \\ -\ln|x^2-x+2| + C. \quad 8.51. \ln|x^2-x+5| + C.$$

$$8.52. \ln|x^2+x+5| + \frac{4}{\sqrt{19}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{19}} + C. \quad 9.31. \frac{x+4}{4(1+x^2)^2} + \frac{3x}{8(1+x^2)} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$9.32. \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C. \quad 9.33. 5 \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{5}{x} - \frac{1}{2x^2} + C.$$

$$9.34. \ln \left| \frac{x}{x+1} \right| + \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C. \quad 9.35. -\operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} + C.$$

$$9.36. \ln \left| \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right| - 2 \operatorname{arctg} x + C. \quad 9.37. \ln \left| \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right| - \frac{3}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{1}{x} - \frac{x+1}{2(1+x^2)} + C.$$

$$9.38. \frac{x}{8(x^2-1)} + \frac{x}{4(x-1)^2(x+1)^2} + \frac{1}{16} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C. \quad 9.40. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{2x}{x^2-1} + C.$$

$$9.41. \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C. \quad 9.42. -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$10.31. 2 \ln|1+x^2| + \frac{1}{8} \operatorname{arctg} x + \frac{x+32}{8(1+x^2)} - \frac{x+5}{4(1+x^2)^2} + C.$$

$$10.32. \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + \frac{2}{x+1} + \ln \left| \frac{x}{(x+1)^3} \right| + C.$$

$$10.33. \frac{8x^3}{3} - 4x^2 + 8x - \frac{1}{x} - \ln|x(x+1)^6| + C.$$

$$10.34. 2x^2 - 12x - \frac{2}{(x+1)^2} + \frac{17}{x+1} + \ln|x(x+1)^{23}| + C.$$

$$10.35. x^2 + \frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x - \ln|x\sqrt{1+x^2}| + C. \quad 10.36. \frac{2x^3}{3} - 2x + \operatorname{arctg} x + \ln \left| \frac{1+x^2}{x^2} \right| + C.$$

$$10.37. -2x + \frac{x+2}{2(1+x^2)} + \frac{7}{2} \operatorname{arctg} x + \ln \left| \frac{1+x^2}{x^2} \right| + C.$$

$$10.38. -x - \frac{x-1}{1+x^2} + 3 \operatorname{arctg} x + \ln \left| \frac{x^2}{1+x^2} \right| + C.$$

$$10.39. \frac{1}{2(1+x^2)} - x^2 - \ln|x| + \frac{5}{2} \ln|1+x^2| + C. \quad 10.40. -\frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + \ln \sqrt{1+x^2} + C.$$

$$10.41. -\frac{x^4}{2} + 2x - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{6} \ln|x^2-x+1| - \frac{1}{3} \ln|x+1| + C.$$

$$10.42. -\frac{4x^5}{5} - 2x^2 - \frac{5}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \ln|x^2+x+1| - \ln|x-1| + C.$$

$$11.31. \ln \left| \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}} \right| + \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$11.32. \ln \left| \frac{x-1}{\sqrt{x^2-x+1}} \right| - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x-1}{\sqrt{3}} + C. \quad 11.33. \frac{x^3}{3} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x + \frac{3}{4} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.$$

$$11.34. -\frac{2x^3}{3} - 2x - \frac{4}{3} \operatorname{arctg} x + \frac{7\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$12.31. -\frac{6}{7}(x+1)^{\frac{7}{6}} + \frac{6}{5}(x+1)^{\frac{5}{6}} + 6(x+1)^{\frac{1}{6}} - 3(x+1)^{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{x+1} - 6 \operatorname{arctg}(x+1)^{\frac{1}{6}} + \\ + \ln(x+2) + 2 \ln(1+(x+1)^{\frac{1}{3}}) - \ln(1-(x+1)^{\frac{1}{3}} + (x+1)^{\frac{2}{3}}) + C$$

$$12.32. \ln|x-1+\sqrt{x^2-2x}| + C. \quad 12.33. \frac{(2x+1)\sqrt{x^2+x+1}}{4} + \frac{3}{8} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

$$12.34. \frac{(3x+1)\sqrt{-9x^2-6x+2}}{6} + \frac{1}{2} \arcsin \sqrt{3} \left(x + \frac{1}{3} \right) + C. \quad 12.35. \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$$

$$12.36. \arcsin \frac{x+2}{\sqrt{5}} + C. \quad 12.37. \frac{(3x-1)\sqrt{-9x^2+6x+8}}{6} + \frac{3}{2} \arcsin \left(x - \frac{1}{3} \right) + C.$$

$$12.38. \frac{(2x+1)\sqrt{-x^2-x+6}}{4} + \frac{25}{8} \arcsin \frac{2x+1}{5} + C.$$

$$12.39. \sqrt{x^2+x+1} - x + \ln|x+1| - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arctg} \frac{1-x}{2\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

$$12.40. \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x}{x+2} \right| + \arcsin \frac{x+1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{\sqrt{-x^2-2x+1}} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{\sqrt{-x^2-2x+1}} + C.$$

$$12.41. \frac{6x^{5/6}}{5} - 4\sqrt{x} + 18x^{1/6} + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} - 21\operatorname{arctg}x^{1/6} + C. \quad 12.42. -\frac{2}{3}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{3/2} + C.$$

$$12.43. -\frac{2+3x^3}{2x^3\sqrt{(1+x^3)^2}} + C. \quad 12.44. -2\sqrt{\frac{x+1}{x}} + \ln\left|x + \frac{1}{2} + \sqrt{x^2+x}\right| + C.$$

$$12.45. \sqrt{x^2-3}\left(\frac{1}{9x^3} + \frac{2}{27x}\right) + C. \quad 12.46. -\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{3}{\sqrt{x^2-9}} + C. \quad 13.31. \frac{1}{18}\sin^6 3x + C.$$

$$13.32. \frac{1}{16}\sin 8x - \frac{1}{20}\sin 10x + C. \quad 13.33. -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$$

$$13.34. \frac{x}{4} - \frac{1}{24}\sin 6x - \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + C.$$

$$13.35. \frac{x}{4} + \frac{1}{8}\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 4x + \frac{1}{24}\sin 6x + C. \quad 13.36. \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(2\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right)\right) + C.$$

$$13.37. \frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C. \quad 13.38. -\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arcth}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2\right)\right) + C. \quad 13.39.$$

$$-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arcth}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) + C. \quad 13.40. \frac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x + C. \quad 13.41. -\frac{1}{7}\operatorname{ctg}^7 x + C. \quad 13.42.$$

$$\ln|\cos^2 x - 5| + C. \quad 13.43. -\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x + \ln\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x} + C. \quad 13.44. \frac{2}{\cos x} + C.$$

$$13.45. \frac{1}{2\operatorname{tg}^2 x} - \frac{1}{4\operatorname{tg}^4 x} + \ln\frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}} + C. \quad 13.46. \frac{2}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{arcth}\left(\frac{a\operatorname{tg}\frac{x}{2}-b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right) + C.$$

$$13.47. \frac{1}{\cos 2} \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x-1}{2}\right| - \ln\left|\frac{\cos 2 - 2\cos 2\cos^2\frac{x-1}{2} + \sin 2\sin(x-1)}{\cos^2\frac{x-1}{2}}\right| \right) + C. \quad 13.48.$$

$$\frac{1}{2\sin 1} \left(\ln\left|\operatorname{tg}\frac{2x+1}{2}\right| - \ln\left|\frac{\cos 1\sin(2x+1) - \sin 1 + 2\sin 1\cos^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\cos^2\left(x+\frac{1}{2}\right)}\right| \right) + C. \quad 14.31.$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{sh}2x + C. \quad 14.32. \quad \frac{1}{2}\operatorname{ch}2x + C. \quad 14.33. \quad \frac{1}{2}\operatorname{th}2x + C.$$

$$14.34. \operatorname{arctg} \sqrt{cthx} - \operatorname{arctg} \sqrt{cthx} + C. \quad 14.35. \ln(thx) + C. \quad 14.36. th \frac{x}{2} + C. \quad 14.37.$$

$$-2 \operatorname{arctg} e^x + C.$$

14.38.

$$\frac{1}{4} \ln \frac{thx-1}{thx+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{thx-1} + C.$$

$$15.31. \frac{1}{2}(1+x^2) \operatorname{arctg} x (\ln(1+x^2)-1) - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x \ln(1+x^2) + \operatorname{arctg} x + C.$$

$$15.32. \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) e^{-x} \cos x + \left(\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{2}\right) e^{-x} \sin x + C.$$

$$15.33. \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{e^{2x}-1}} + \ln(e^x + \sqrt{e^{2x}-1}) + C.$$

$$15.34. \sqrt{e^x+1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1} - \sqrt{e^x-1} + \operatorname{arctg} \sqrt{e^x-1} + C.$$

$$15.35. \operatorname{arctg}(2e^x - \sqrt{3}) + \operatorname{arctg}(2e^x + \sqrt{3}) + C.$$

$$15.36. -\operatorname{arth} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2+e^x}{\sqrt{e^{2x}+e^x+1}} \right) + C. \quad 5.37. -\operatorname{arth} e^x + C. \quad 15.38. \operatorname{arth} e^x + C.$$

$$15.39. e^x + \ln(e^x - 1) + C. \quad 15.40. e^x + \frac{1}{2} \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1} + C.$$

$$16.31. e^{\sqrt[3]{x}} \left(3x^{\frac{8}{3}} - 24x^{\frac{7}{3}} + 168x^2 - 1008x^{\frac{5}{3}} + 5040x^{\frac{4}{3}} - 20160x + \right. \\ \left. + 60480x^{\frac{2}{3}} - 120960x^{\frac{1}{3}} + 120960 \right) + C.$$

$$16.32. \frac{2}{11} \sin^{5.5} x - \frac{4}{7} \sin^{3.5} x + \frac{2}{3} \sin^{1.5} x + C.$$

$$16.33. \begin{cases} \frac{1}{3}x^3 - x + C, & x < -1, x > 1, \\ x - \frac{1}{3}x^3 + C, & -1 < x < 1. \end{cases} \quad 6.34. \begin{cases} -x^2 + C, & x < -1, \\ 2x + C, & -1 < x < 1, \\ x^2 + C, & x > 1. \end{cases}$$

$$16.35. x \operatorname{tg} x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2} \ln |1 + \operatorname{tg}^2 x| + C. \quad 16.36. \cos x + \ln(\operatorname{cosec} x - \operatorname{ctg} x) + C.$$

$$16.37. \sqrt{tgx} + C. \quad 16.38. \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{arth} \left(\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) - \operatorname{arth} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right) \right) + C.$$

$$16.39. \frac{2 \cos x}{\sqrt{1 - \sin x}} + C. \quad 16.40. \frac{1}{4} \operatorname{tg}^4 x + C.$$

$$16.41. \frac{8}{5} \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1} \left(\cos^4 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} - 1 \right) + C.$$

$$16.42. \frac{8}{77} \sqrt{2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1} \left(56 \cos^{10} \frac{x}{2} - 140 \cos^8 \frac{x}{2} + 118 \cos^6 \frac{x}{2} - \right. \\ \left. - 37 \cos^4 \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} + 1 \right) + C.$$

$$16.43. -\frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x \cos^2 x} + \frac{3}{4} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sin^2 x} + 3 \ln \operatorname{tg} x + C.$$

$$16.44. \frac{1}{3} \cos^3 x + \cos x + \ln(\operatorname{cosec}(x) - \operatorname{ctg} x) + C.$$

$$16.45. -\operatorname{arctg}(2 \cos^2 x - 1) + C.$$

$$16.46. \frac{1}{4} \frac{1}{\sin^4 x \cos^4 x} + \frac{3}{4} \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} - \frac{3}{2} \frac{1}{\sin^2 x} + 3 \ln \operatorname{tg} x + C.$$

$$17.31. -\operatorname{arth} \frac{1-x}{2\sqrt{x^2+x+1}} + C.$$

$$17.32. \frac{6}{5} x^{5/6} - 4\sqrt{x} + 18x^{1/6} - 21 \operatorname{arctg} x^{1/6} + \frac{3x^{1/6}}{1+x^{1/3}} + C.$$

$$17.33. -\frac{1}{2} \ln \cos^2 x + C. \quad 17.34. x \ln(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) - \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x}{2} + C.$$

$$17.35. -\frac{1}{2} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} + \frac{x}{4(1+x^2)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} x + C.$$

$$17.36. x \operatorname{arctg} x (1 + \sqrt{x}) - \sqrt{x} - 1 + \ln(2 + 2\sqrt{x} + x) + C.$$

$$17.37. -\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x} + \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{4}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + C.$$

$$17.40. -\frac{1}{3}\frac{\operatorname{arctg}x}{x^3} - \frac{\ln x}{3} - \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{6}\ln(1+x^2) + C.$$

$$17.41. x \arcsin x \frac{2\sqrt{x}}{x+1} + 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) + C.$$

$$17.42. \left(x - \frac{1}{2}\right) \arcsin \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x} \cdot \sqrt{1-x}}{2} + C.$$

$$17.43. -\frac{\arccos x}{x} + \operatorname{arth} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + C. \quad 17.44. -e^{-x} \arcsin e^{-x} - \sqrt{1-e^{-2x}} + C.$$

Розділ 7. Інтеграл Рімана (визначений інтеграл)

Ряд задач з різних розділів науки, які розглянемо пізніше, приводять до знаходження границь певних сум. Ці границі дістали спеціальну назву – інтегралів Рімана або визначених інтегралів, які і розглядаються в цьому розділі. Про інші підходи до цього поняття та найпростіші його узагальнення йтиметься в наступному розділі.

1. Означення визначеного інтеграла. Нехай $[a;b] \subset \mathbb{R}$ – деякий проміжок (скінченний) і $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція. Множину $\tau = \{x_k : k \in \overline{0;n}\}$ точок таких, що $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, будемо називати розбиттям проміжку $[a;b]$ або τ -розбиттям, а число $\lambda = \lambda_\tau = \max\{\Delta x_k : k \in \overline{0;n-1}\}$, де $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$, – діаметром розбиття. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$ візьмемо довільну точку ξ_k і побудуємо суму $\sigma = \sigma_f(\tau) = \sigma_f(\tau; \xi)$:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_0) \Delta x_0 + \dots + f(\xi_{n-1}) \Delta x_{n-1}. \quad (1)$$

Сума σ називається інтегральною сумою функції $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a;b]$. Інтегральна сума σ залежить від функції f , розбиття τ і способу вибору точок $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$, тобто від множини $\xi = \{\xi_k\}$. Таким чином, для кожного проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$ інтегральна сума σ є функцією трьох змінних: $\sigma = \sigma_f(\tau) = \sigma_f(\tau; \xi)$. Визначеним інтегралом або інтегралом Рімана функції $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a;b]$ називається границя

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma. \quad (2)$$

Якщо границя (2) існує і є скінченною, то функція f називається інтегрованою за Ріманом на $[a;b]$. Крім цього, за означенням

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

для кожного $a \in \mathbb{R}$ і

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

якщо $b < a$.

Визначений інтеграл – це число і для його позначення можна було б використати будь-який символ (наприклад, $\mathfrak{H}(f)$), але потім ми побачимо, що вибране позначення є зручним, оскільки з формальним підінтегральним символом $f(x)dx$ можна буде поводитися як із диференціалом деякої функції.

У цьому зв'язку зазначимо також, що

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(u)du = \int_a^b f(y)dy = \dots$$

Границя інтегральних сум – це нове поняття, яке не збігається ні з поняттям границі послідовності, ні з поняттям границі функції. Власне, число $A \in \mathbb{R}$ називається границею інтегральних сум σ , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для кожного розбиття τ , для якого $\lambda_\tau < \delta$, за будь-якого вибору точок $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$ виконується $|\sigma - A| < \varepsilon$. Образно можна сказати, що границя інтегральних сум не залежить ні від способу розбиття проміжку $[a;b]$, ні від способу вибору точок ξ_k . Границі інтегральних сум мають такі ж властивості, як і інші границі. Зокрема, для них справедливі теореми про границю суми, добутку і т.д. Означення границі інтегральних сум можна дати і на мові послідовностей: число A називається границею інтегральних сум σ , якщо для кожної послідовності розбиттів $\tau_\nu = \{x_{k,\nu} : k \in \overline{0; n_\nu}\}$ такої, що $a = x_{0,\nu} < \dots < x_{n_\nu,\nu} = b$ і $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \lambda_{\tau_\nu} = 0$, за будь-якого

вибору точок $\xi_{k,\nu} \in [x_{k,\nu}; x_{k+1,\nu}]$ виконується $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n_\nu-1} f(\xi_{k,\nu}) \Delta x_{k,\nu} = A$, де

$$\Delta x_{k,\nu} = x_{k+1,\nu} - x_{k,\nu}.$$

Приклад 1. Функція $f(x)=1$ є інтегрованою за Ріманом на кожному

проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$ і $\int_a^b 1 dx = b - a$, бо

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \Delta x_0 + \Delta x_1 + \dots + \Delta x_{n-1} = b - a.$$

Приклад 2. Якщо $f(x) = e^x$, $[a; b] = [0; 10]$, $x_k = k$, то $\lambda = \Delta x_k = 1$, $\sigma = \sum_{k=0}^9 e^{\xi_k}$, де ξ_k – довільна точка проміжку $[k; k+1]$.

2. Границя по базі. Можна ввести поняття границі так, що воно буде узагальненням границі функції, послідовності та границі інтегральних сум. Таке узагальнення запропонував у ХХ столітті французький математик А. Картан, який увів поняття границі функції по фільтру та по базі фільтра. Розглянемо коротко суть цього узагальнення (детальніше з ним можна ознайомитися з літературі з топології).

Сукупність B підмножин непорожньої множини H називається базою в H , якщо: 1) $\emptyset \notin B$; 2) для будь-яких двох множин $B_1 \subset B$ і $B_2 \subset B$ перетин $B_1 \cap B_2$ є непорожньою множиною і знайдеться така множина $B_3 \subset B$, що $B_3 \subset B_1 \cap B_2$. Число A ($A \in \mathbb{R}$, $A = -\infty$, $A = +\infty$, $A = \infty$) називається границею функції $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ по базі B , якщо для кожного ε -околу $U(A; \varepsilon)$ точки A знайдеться такий елемент $b_\varepsilon \in B$ бази B , що $F(b_\varepsilon) \subset U(A; \varepsilon)$. Границя по базі B позначається символом

$$A = \lim_B F(x).$$

Приклад 1. Нехай $H = \mathbb{R}$, база $B = (\mathbb{N} \ni n \rightarrow \infty)$ складається з множин $B_n = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n'\}$. У цьому випадку поняття границі функції $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ по базі B збігається з поняттям границі послідовності в \mathbb{R} .

Приклад 2. Нехай $H = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ і $B = (\mathbb{R} \ni x \rightarrow a)$ – база в H , яка складається з проколених околів $\mathring{U}(a; \delta) = (a - \delta; a + \delta) \setminus \{a\}$ точки $a \in \mathbb{R}$. Поняття границі функції $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ по такій базі B збігається з поняттям границі функції $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Приклад 3. Нехай $H = \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ і $B = (\mathbb{R} \ni x \rightarrow a+)$ – база в H , яка складається з правих проколених δ -околів $U^+(a; \delta) = (a; a + \delta)$ точки a . Поняття границі функції $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ по такій базі B збігається з поняттям правої границі функції $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Приклад 4. Нехай $H = \mathbb{R}$ і $B = (\mathbb{R} \ni x \rightarrow \infty)$ – база в H , яка складається з проколених околів $\mathring{U}(\infty; \delta) = \{x \in \mathbb{R} : |x| > \delta\}$ в $\bar{\mathbb{R}}_0$ нескінченності. Поняття

границі функції $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ по такій базі збігається з границею $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$.

Приклад 5. Нехай $H = \mathbb{R}$, $\emptyset \neq E \subset H$ і B – база в H , яка складається з усіх множин $\overset{\circ}{U}(a; \delta) \cap E$. Поняття границі функції $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ по такій базі B збігається з поняттям границі функції $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ за множиною E .

Приклад 6. Нехай H – множина всіх упорядкованих наборів $(\tau; \xi)$, де $\tau = \{x_k : k \in \overline{1; n}\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, $\xi = (\xi_0; \dots; \xi_{n-1})$, $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Нехай, далі, $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ – функція, яка для заданої функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ точки $(\tau; \xi)$ ставить у відповідність число

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k,$$

а $B = (\lambda_\tau \rightarrow 0)$ – база в H , яка складається з тих множин $b \subset H$, елементами яких є ті упорядковані набори $(\tau; \xi)$, для яких $\lambda_\tau < \delta$. Поняття границі функції $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ по цій базі збігається з поняттям границі інтегральних сум σ : $A = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma$.

На границі по базі можна перенести основні теореми про границі. Обмежимося формулюванням однієї, яка вже була доведена у прикладах 1 і 3.

Теорема 1 (критерій Коші існування границі). Для того щоб функція $F : H \rightarrow \mathbb{R}$ мала скінченну границю по базі B , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists b_\varepsilon \subset B) : \sup \{ |f(x'') - f(x')| : x' \in b_\varepsilon, x'' \in b_\varepsilon \} < \varepsilon.$$

3. Обмеженість інтегрованої функції.

Теорема 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то вона є обмеженою на $[a; b]$.

Доведення. Потрібно показати, що $(\exists c_1)(\forall x \in [a; b]) : |f(x)| \leq c_1$.

Припустимо протилежне. Тоді для кожного розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{1; n}\}$ функція f є необмеженою на деякому проміжку $[x_i; x_{i+1}]$. Маємо

$$\sigma = \sum_{k=0}^{i-1} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k + f(\xi_i) \Delta x_i. \quad \text{Тому} \quad |\sigma| \geq |f(\xi_i)| \Delta x_i - |A|, \quad \text{де}$$

$$A = \sum_{k=0}^{i-1} f(\xi_k) \Delta x_k + \sum_{k=i+1}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k. \quad \text{Функція } f \text{ є необмеженою на } [x_i; x_{i+1}]. \quad \text{Отже,}$$

$\xi_i \in [x_i; x_{i+1}]$ можна вибрати так, щоб $|f(\xi_i)| \Delta x_i > |A| + 1/\lambda_\tau$. Тоді $|\sigma| \geq (|A| + 1/\lambda_\tau) - |A| = 1/\lambda_\tau \rightarrow +\infty$, якщо $\lambda_\tau \rightarrow 0$. Суперечність. ►

Приклад 1. Функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

є обмеженою на проміжку $[0;1]$, але не є інтегрованою на $[0;1]$, бо для цієї функції при побудові інтегральних сум $\sigma_f(\tau; \xi)$ можна взяти $\xi_k \in \mathbb{Q}$ (тоді $\sigma_f(\tau; \xi) = b - a$), але можна взяти $\xi_k \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (тоді $\sigma_f(\tau; \xi) = -(b - a)$) і тому $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_f(\tau; \xi)$ не існує. Тому твердження, обернене до теореми 1, не є справедливим.

Приклад 2. Функція $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ не є інтегрованою за

Ріманом на проміжку $[-1;1]$, бо є необмеженою на $[-1;1]$.

4. Властивості верхніх і нижніх інтегральних сум. Для кожного розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$ проміжку $[a; b]$ і кожної функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, нехай

$$M_k = M_k(\tau; f) = \sup \{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}, \quad m_k = m_k(\tau; f) = \inf \{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}.$$

Суми $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_f(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$ та $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_f(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k$ називаються відповідно верхньою і нижньою сумами Дарбу функції f на проміжку $[a; b]$.

Теорема 1. $\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}$ для кожного розбиття τ .

Доведення. Оскільки $m_k \leq f(\xi_k) \leq M_k$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k. \blacktriangleright$$

Теорема 2. Якщо $\tau' = \{x'_k : k \in \overline{0; j}\}$ є таким розбиттям, що $\tau \subset \tau'$, то $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{\sigma}_f(\tau') \leq \bar{\sigma}_f(\tau') \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$.

Доведення. Теорему досить довести для випадку коли τ' містить тільки одну точку $c \neq x_k$, $k \in \overline{0; n}$. Нехай $x_v < c < x_{v+1}$, $\Delta x'_k = x'_{k+1} - x'_k$, $M'_k = \sup \{f(x) : x \in [x'_k; x'_{k+1}]\}$, $m'_k = \inf \{f(x) : x \in [x'_k; x'_{k+1}]\}$. Оскільки

$$\begin{aligned} & \sup \{f(x) : x \in [x_v; c]\} (c - x_v) + \sup \{f(x) : x \in [c; x_{v+1}]\} (x_{v+1} - c) \\ & \leq M_v ((c - x_v) + (x_{v+1} - c)) = M_v \Delta x_v, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_f(\tau') &= \sum_{k=0}^{v-1} M'_k \Delta x'_k + \sum_{k=v+2}^n M'_k \Delta x'_k + \\ &+ \sup \{f(x) : x \in [x_v; c]\} (c - x_v) + \sup \{f(x) : x \in [c; x_{v+1}]\} (x_{v+1} - c) \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{k=0}^{v-1} M_k \Delta x_k + M_v \Delta x_v + \sum_{k=v+1}^{n-1} M_k \Delta x_k = \bar{\sigma}_f(\tau)$$

і, отже, остання з нерівностей теореми доведена, а інші – отримуються подібно. ►

Теорема 3. $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \bar{\sigma}_f(\tau_1)$ для будь-яких розбиттів τ і τ_1 проміжку $[a; b]$.

Доведення. Справді, нехай τ' – таке розбиття, що $\tau \subset \tau'$ і $\tau_1 \subset \tau'$. Тоді за теоремою 2 $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{\sigma}_f(\tau') \leq \bar{\sigma}_f(\tau_1)$, тобто $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \bar{\sigma}_f(\tau_1)$. ►

Теорема 4. $\underline{\sigma}_f(\tau) = \inf_{\xi} \sigma_f(\tau; \xi)$ і $\bar{\sigma}_f(\tau) = \sup_{\xi} \sigma_f(\tau; \xi)$ для будь-якого розбиття τ , де \inf і \sup беруться за всіма можливими множинами $\xi = \{\xi_k : k \in \overline{1; n-1}\}$, які входять в означення інтегральної суми.

Доведення. Справді,

$$\inf_{\xi} \sigma_f(\tau; \xi) = \inf_{\xi} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta x_k \right\} = \sum_{k=0}^{n-1} \inf_{x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}} \{f(\xi_k)\} \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \underline{\sigma}_f(\tau)$$

і перша з рівностей теореми доведена, а друга доводиться аналогічно. ►

Приклад 1. Якщо $f(x) = e^x$, $[a; b] = [0; 10]$, $x_k = k$, то $\Delta x_k = 1$, $m_k = e^k$, $M_k = e^{k+1}$, $\underline{\sigma} = \underline{\sigma}_f(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} e^k$ і $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}_f(\tau) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{k+1}$.

5. Критерій інтегровності. Інтегровність неперервної функції.

Числа $\underline{I} = \sup_{\tau} \underline{\sigma}_f(\tau)$ та $\bar{I} = \inf_{\tau} \bar{\sigma}_f(\tau)$ називаються відповідно нижнім і верхнім інтегралами Дарбу функції f на проміжку $[a; b]$. З означення випливає, що $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$ для кожного розбиття τ .

Теорема 1 (критерій інтегровності). Для того щоб функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою на $[a; b]$ і

$$\lim_{\lambda_{\tau} \rightarrow 0} (\bar{\sigma} - \underline{\sigma}) = 0. \quad (1)$$

Доведення. Необхідність обмеженості вже доведено. Доведемо необхідність умови (1). Нехай f є інтегрованою і

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $I - \varepsilon < \sigma_f(\tau; \xi) < I + \varepsilon$ для будь-якого розбиття τ , для якого $\lambda_{\tau} < \delta$, і будь-якого вибору $\xi = \{\xi_i : i \in \overline{1; n-1}\}$. Звідси та з теореми 4 попереднього пункту отримуємо, що

$I - \varepsilon < \underline{\sigma}_f(\tau) \leq \bar{\sigma}_f(\tau) \leq I + \varepsilon$, тобто (1) виконується. Доведемо достатність. З означення інтегралів Дарбу маємо $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$, звідки $0 \leq \bar{I} - \underline{I} \leq \bar{\sigma}_f(\tau) - \underline{\sigma}_f(\tau)$. Оскільки \bar{I} і \underline{I} не залежать від τ , то отримуємо $\bar{I} = \underline{I}$. Але $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq I \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$, $I := \bar{I} = \underline{I}$. Тому $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \underline{\sigma}_f(\tau) = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \bar{\sigma}_f(\tau) = I$. Крім цього, $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \sigma_f(\tau; \xi) \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$ для кожного розбиття τ і кожного вибору точок $\xi_k \in [x_k; x_{k+1}]$. Тому

$$\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sigma_f(\tau; \xi) = I, \quad (2)$$

і теорема доведена. ►

Зауваження 1. Рівність (1) слід розуміти так. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що для кожного розбиття τ , для якого $\lambda_\tau < \delta$, виконується $|\bar{\sigma} - \underline{\sigma}| < \varepsilon$.

Наслідок 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \bar{\sigma}_f = \lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \underline{\sigma}_f = \bar{I} = \underline{I}.$$

Наслідок 2. Для того щоб функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою на $[a; b]$ і $\lim_{\lambda_\tau \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k = 0$, де $\omega_k = \sup \{ |f(x'') - f(x')| : x' \in [x_k; x_{k+1}], x'' \in [x_k; x_{k+1}] \}$.

Доведення. Справді, $\omega_k = M_k - m_k$. ►

Теорема 2. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, то вона є інтегрованою на $[a; b]$.

Доведення. За теоремою Вейерштрасса існують точки $\xi'_k \in [x_k; x_{k+1}]$ і $\xi''_k \in [x_k; x_{k+1}]$, для яких $f(\xi''_k) = M_k$, $f(\xi'_k) = m_k$. За теоремою Кантора функція f є рівномірно неперервною на $[a; b]$. Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \tau, \lambda_\tau < \delta) : |f(\xi''_k) - f(\xi'_k)| < \varepsilon.$$

Тому

$$0 \leq \bar{\sigma} - \underline{\sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} (f(\xi''_k) - f(\xi'_k)) \Delta x_k < \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = (b - a) \varepsilon,$$

якщо $\lambda_\tau < \delta$. Звідси та з попередньої теореми випливає потрібний висновок. ►

Теорема 3. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[a; b]$, то вона є інтегрованою на $[a; b]$.

Доведення. Справді, якщо, наприклад, функція f є неспадною, то $M_k - m_k = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ і, отже,

$$0 \leq |\bar{\sigma} - \underline{\sigma}| \leq \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leq \lambda_\tau \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \quad \blacktriangleright$$

$$= \lambda_\tau (f(b) - f(a)) \rightarrow 0, \quad \lambda_\tau \rightarrow 0. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 4. Добуток двох інтегровних на $[a; b]$ функцій $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $g: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є функція інтегровна на $[a; b]$.

Доведення. Оскільки інтегровна функція є обмеженою і

$$\omega_k(\tau; fg) \leq \sup \{ |f(x'') - f(x')| |g(x'')| : x' \in [x_k; x_{k+1}], x'' \in [x_k; x_{k+1}] \} \\ + \sup \{ |g(x'') - g(x')| |f(x')| : x' \in [x_k; x_{k+1}], x'' \in [x_k; x_{k+1}] \},$$

то твердження теореми 4 випливає з наслідку 2. \blacktriangleright

Приклад 1. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою на проміжку $[a; b]$,

$c \in [a; b]$, $A \in \mathbb{R}$ і $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq c, \\ A, & x = c, \end{cases}$ то функція \tilde{f} також є інтегрованою на

$[a; b]$ і $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \tilde{f}(x) dx$, бо для кожного розбиття $\tilde{\tau}$ або $\sigma_{\tilde{f}}(\tilde{\tau}; \tilde{\xi}) = \sigma_f(\tilde{\tau}; \tilde{\xi})$,

або знайдеться таке розбиття τ , що $\sigma_{\tilde{f}}(\tilde{\tau}; \tilde{\xi}) = \sigma_f(\tau; \xi) + A \Delta x_v$. Таким чином, зміна значень функції в скінченній кількості точок не впливає на її інтегровність і значення інтеграла.

Приклад 2. Функція $f(x) = x^2$ є неперервною і, отже, інтегровою на проміжку $[0; 1]$. Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_f(\tau_n; \xi(n)) = \int_0^1 x^2 dx$$

для кожної послідовності розбиттів (τ_n) проміжку $[0; 1]$ при довільному виборі

точок $\xi_k = \xi_{k,n} \in [x_k; x_{k+1}]$. Візьмемо $x_k = \xi_k = \frac{k}{n}$. Тоді $\Delta x_k = \frac{1}{n}$ і

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n} \right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \sum_{k=0}^{n-1} k^2 \rightarrow \frac{1}{3}, \quad \text{якщо } n \rightarrow \infty.$$

Приклад 3. Нехай $f(x) = x$ і $\varepsilon = 0,1$. Тоді $\left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sigma_f(\tau; \xi) \right| < \varepsilon$, якщо

$\lambda < \delta = 0,05$, бо

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \sigma_f(\tau; \xi) \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \leq \int_{-1}^1 f(x) dx \leq \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 f(x) dx - \sigma_f(\tau; \xi) \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k \Delta x_k < \delta \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = 2\delta = \varepsilon. \end{aligned}$$

Приклад 4. Функція $f(x) = [x]$ є інтегрованою на проміжку $[-4; 5]$, бо є неспадною на ньому.

6. Інші критерії інтегрованості.

Теорема 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою на проміжку $[a; b]$ і неперервною на проміжку $[a; b]$ всюди, за винятком, хіба-що скінченної кількості точок, то вона є інтегрованою за Ріманом на $[a; b]$.

Доведення. Припустимо (для простоти), що f має лишень одну точку $c = b$ розриву на $[a; b]$. Знайдемо таке $c_1 > 0$, що $|f(x)| \leq c_1$ і для вибраного $\varepsilon > 0$ знайдемо таке $\delta > 0$, що $\sum_{x_k > b - \varepsilon} \Delta x_k \leq \varepsilon / 4c_1$ і $\sum_{a \leq x_k \leq b - \varepsilon} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon / 2$ для кожного розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{1; n}\}$ проміжку $[a; b]$, для якого $\lambda_\tau < \delta$. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} \omega_k \Delta x_k &= \sum_{a \leq x_k \leq b - \varepsilon} \omega_k \Delta x_k + \sum_{x_k > b - \varepsilon} \omega_k \Delta x_k \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + 2c_1 \sum_{x_k > b - \varepsilon} \Delta x_k \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2c_1 \frac{\varepsilon}{4c_1} = \varepsilon. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Теорема 2 (Дарбу). Для того щоб функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою на ньому і $\bar{I} = \underline{I}$.

Доведення. Потрібно довести достатність. Спочатку зауважимо, що $\underline{I} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{\sigma}_f(\tau)$. Справді, згідно з означеннями, для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке розбиття $\tau_0 = \{x_{k,0} : k \in \overline{1; n_0}\}$, що $\underline{\sigma}_f(\tau_0) > \underline{I} - \varepsilon / 2$ і знайдеться таке $c_1 > 0$, що $|f(x)| \leq c_1$. Нехай $\delta = \varepsilon / 4n_0c_1$, $\tau = \{x_k : k \in \overline{1; n}\}$ – таке розбиття $[a; b]$, що $\lambda_\tau < \delta$ і $\tilde{\tau} = \tau \cup \tau_0$. Тоді $\underline{\sigma}_f(\tau_0) \leq \underline{\sigma}_f(\tilde{\tau})$ і, отже, $\underline{I} - \underline{\sigma}_f(\tilde{\tau}) < \varepsilon / 2$. З іншого боку, $\underline{\sigma}_f(\tilde{\tau}) - \underline{\sigma}_f(\tau) < \varepsilon / 2$, бо розбиття $\tilde{\tau} = \{\tilde{x}_k : k \in \overline{1; \tilde{n}}\}$, отримане з розбиття τ шляхом додання не більше n_0 нових точок. Ці точки попали не більше, ніж в n_0 проміжків $[x_k; x_{k+1}]$ і сума їхніх довжин не перевищує $n_0\delta = \varepsilon / 4c_1$. Отже, $\underline{\sigma}_f(\tilde{\tau}) - \underline{\sigma}_f(\tau) < \varepsilon / 2$ і $\underline{I} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{\sigma}_f(\tau)$. Аналогічно, $\bar{I} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{\sigma}_f(\tau)$. Тому

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\bar{\sigma}_f(\tau) - \underline{\sigma}_f(\tau)) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{\sigma}_f(\tau) - \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{\sigma}_f(\tau) = \bar{I} - \underline{I} = 0.$$

Отже, функція f є інтегрованою. ►

Теорема 3 (Рімана). Для того щоб функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою на ньому і для кожного $\varepsilon > 0$ знайшлося таке розбиття τ проміжку $[a; b]$, що

$$\bar{\sigma}_f(\tau) - \underline{\sigma}_f(\tau) < \varepsilon. \quad (1)$$

Доведення. Необхідність випливає з критерію інтегровності. З іншого боку, якщо (1) виконується, то з нерівності $\underline{\sigma}_f(\tau) \leq \underline{I} \leq \bar{I} \leq \bar{\sigma}_f(\tau)$ випливає, що $\bar{I} - \underline{I} < \varepsilon$. ►

Наслідок 1. Для того щоб функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою на ньому і для кожного $\varepsilon > 0$ знайшлося таке розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{1; n}\}$

проміжку $[a; b]$, що
$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k \Delta x_k < \varepsilon,$$

$$\omega_k := \sup \{ |f(x'') - f(x')| : x' \in [x_k; x_{k+1}], x'' \in [x_k; x_{k+1}] \}.$$

Множина точок $E \in \mathbb{R}$ називається множиною лебегової міри нуль, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує скінченна або зліченна кількість таких проміжків $(a_k; b_k)$, що $E \subset \cup (a_k; b_k)$ і $\sum_k (b_k - a_k) < \varepsilon$. Наприклад, множина, яка складається зі скінченної кількості точок, має лебегову міру нуль.

Справедлива і наступна теорема Лебега, яку ми тут доводити не будемо.

Теорема 4. Для того щоб функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ була інтегрованою на проміжку $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою на $[a; b]$ і множина тих точок $x \in [a; b]$, у яких f не є неперервною, мала Лебегову міру, рівну нулеві.

Приклад 1. Характеристична функція будь-якого проміжку

$[\alpha; \beta] \subset [a; b]$, тобто функція $\chi_{[\alpha; \beta]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [\alpha; \beta], \\ 0, & x \notin [\alpha; \beta], \end{cases}$ є інтегрованою на

проміжку $[a; b]$ і
$$\int_a^b \chi_{[\alpha; \beta]}(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} 1 dx = \beta - \alpha.$$

Приклад 2. Якщо $\tau = \{x_k : k \in \overline{1; n}\}$ – деяке розбиття проміжку $[a; b]$ і c_k –

довільні числа, то функція $\chi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \chi_{[x_k; x_{k+1}]}(x)$ є інтегрованою на $[a; b]$,

$$|\chi(x)| \leq \max\{|c_k| : k \in \overline{0; n-1}\} \text{ і } \int_a^b \chi(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \int_a^b \chi_{[x_k; x_{k+1}]}(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Delta x_k.$$

Приклад 3. Для кожної функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегрованої за Ріманом на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, знайдеться така послідовність (\tilde{f}_n) скінченних лінійних комбінацій характеристичних функцій проміжків, для якої $\int_a^b |f(t) - \tilde{f}_n(t)| dt \rightarrow 0$,

якщо $n \rightarrow \infty$. Справді, нехай $\varepsilon = 1/n$ і $\tau = \{t_k : k \in \overline{0; v_n}\}$,

$a = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_{v_n} = b$, — таке розбиття проміжку $[a; b]$, що

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt - \underline{\sigma} < \varepsilon, \quad \tilde{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{v_n-1} m_k \chi_{[t_k; t_{k+1}]}(x) \text{ і } \tilde{f}_n(b) = 0, \quad \text{де } \underline{\sigma} := \sum_{k=0}^{m_n-1} m_k \Delta t_k,$$

$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$, $m_k = \inf\{f(t) : t \in [t_k; t_{k+1}]\}$. Тоді

$$\int_a^b |f(t) - \tilde{f}_n(t)| dt = \int_a^b (f(t) - \tilde{f}_n(t)) dt = \int_a^b f(t) dt - \underline{\sigma} < \varepsilon = 1/n \rightarrow 0.$$

Крім цього, $(\exists c_1)(\forall x \in [a; b]) : |f(x)| \leq c_1$. Тоді $(\forall x \in [a; b])(\forall n \in \mathbb{N}) : |\tilde{f}_n(x)| \leq c_1$ і

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(t) - \tilde{f}_n(t)|^2 dt &= \int_a^b |f(t) - \tilde{f}_n(t)| |f(t) - \tilde{f}_n(t)| dt \\ &\leq 2c_1 \int_a^b f(t) dt - \underline{\sigma} < \varepsilon = 1/n \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Приклад 4. Для кожного $\varepsilon > 0$, кожного скінченного проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$,

кожного проміжку $[a_1; b_1] \subset [a; b]$ і функції $\chi_{[a_1; b_1]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a_1; b_1], \\ 0, & x \notin [a_1; b_1], \end{cases}$ існує така

неперервна на \mathbb{R} функція $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, рівна нулеві поза $(a_1; b_1)$, що

$$\left(\int_a^b |\chi_{[a_1; b_1]} - \varphi(x)|^2 dx \right)^{1/2} < \varepsilon \text{ і } \int_a^b |\chi_{[a_1; b_1]} - \varphi(x)| dx < \varepsilon. \text{ Справді, підберемо } \eta > 0 \text{ так,}$$

щоб $\eta < \varepsilon/2$ і $\eta < (b_1 - a_1)/2$. Тоді функція

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin (a_1; b_1), \\ (x - a_1) / \eta, & x \in (a_1; a_1 + \eta], \\ 1, & x \in (a_1 + \eta; b_1 - \eta], \\ (b_1 - x) / \eta, & x \in [b_1 - \eta; b_1), \end{cases} \text{ є шуканою, що встановлюється}$$

безпосередньою перевіркою.

Приклад 5. Для кожної функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегрованої за Ріманом на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$ і кожного $\varepsilon > 0$, знайдеться така неперервна на $[a; b]$

функція $q : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, що $q(a) = q(b) = 0$, $\int_a^b |f(t) - q(t)| dt < \varepsilon$. Справді, оскільки

зміна значень функції у скінченній кількості точок не впливає на інтеграл, то згідно з прикладом 3 знайдуться розбиття $\tau = \{t_k : k \in \overline{0; v_n}\}$ проміжку $[a; b]$ і

функція $\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{v_n-1} m_k \chi_{[t_k; t_{k+1}]}(x)$ такі, що $\int_a^b |f(t) - \tilde{f}(t)| dt < \varepsilon / 2$. Згідно з

прикладом 4 знайдеться така неперервна на $[a; b]$ функція $q : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, що

$q(a) = q(b) = 0$ і $\int_a^b |\tilde{f}(t) - q(t)| dt < \varepsilon / 2$. Але

$$\int_a^b |f(t) - q(t)| dt \leq \int_a^b |f(t) - \tilde{f}(t)| dt + \int_a^b |\tilde{f}(t) - q(t)| dt.$$

Приклад 6. Для кожної функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегрованої за Ріманом на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$ і кожного $\varepsilon > 0$, знайдеться така неперервна на $[a; b]$

функція $q : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, що $q(a) = q(b) = 0$, $\int_a^b |f(t) - q(t)|^2 dt < \varepsilon^2$. Справді, оскільки

зміна значень функції у скінченній кількості точок не впливає на інтеграл, то згідно з прикладом 3 знайдуться розбиття $\tau = \{t_k : k \in \overline{0; v_n}\}$ проміжку $[a; b]$ і

функція $\tilde{f}(x) = \sum_{k=0}^{v_n-1} m_k \chi_{[t_k; t_{k+1}]}(x)$ такі, що $\int_a^b |f(t) - \tilde{f}(t)|^2 dt < \varepsilon^2 / 4$. Згідно з

прикладом 4 знайдеться така неперервна на $[a; b]$ функція $q : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, що

$q(a) = q(b) = 0$ і $\int_a^b |\tilde{f}(t) - q(t)| dt < \varepsilon^2 / 4$. Але

$$\left(\int_a^b |f(t) - q(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f(t) - \tilde{f}(t)| dt \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |\tilde{f}(t) - q(t)| dt \right)^{1/2}.$$

7. Найпростіші властивості визначеного інтеграла.

Теорема 1 (однорідність інтеграла). $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ для будь-якої

сталой c , якщо останній інтеграл існує.

Доведення. Справді,

$$\int_a^b cf(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} cf(\xi_k)\Delta x_k = c \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k = c \int_a^b f(x)dx. \blacktriangleright$$

Теорема 2 (адитивність інтеграла).

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx, \text{ якщо останні інтеграли існують.}$$

Доведення. Справді,

$$\begin{aligned} \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (f_1(\xi_k) + f_2(\xi_k))\Delta x_k \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_1(\xi_k)\Delta x_k + \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f_2(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Теорема 3 (лінійність інтеграла).

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))dx = c_1 \int_a^b f_1(x)dx + c_2 \int_a^b f_2(x)dx \text{ для будь-яких чисел } c_1 \text{ і } c_2,$$

якщо останні інтеграли існують.

Доведення. Ця теорема випливає з двох попередніх. \blacktriangleright

Теорема 4. Якщо $a \leq b$, функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$ і $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Доведення. Справді, $\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k \geq 0$. \blacktriangleright

Теорема 5. Якщо $a \leq b$, функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\varphi: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровними на проміжку $[a; b]$ і $(\forall x \in [a; b]): f(x) \leq \varphi(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx.$$

Доведення. Ця теорема випливає з попередньої. \blacktriangleright

Теорема 6. Якщо $a \leq b$, функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$ і $m \leq f(x) \leq M$ для всіх $x \in [a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Доведення. Ця теорема випливає з попередньої, бо $\int_a^b 1dx = b-a$. \blacktriangleright

Теорема 7. Якщо $a \leq b$, функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то інтегрованою на $[a; b]$ є також функція $|f|$ і

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Доведення. Оскільки

$$\begin{aligned} M_k(\tau; f) - m_k(\tau; f) &= \sup \{ f(x'') - f(x') : x' \in [x_k; x_{k+1}], x'' \in [x_k; x_{k+1}] \} \\ &= \sup \{ |f(x'') - f(x')| : x' \in [x_k; x_{k+1}], x'' \in [x_k; x_{k+1}] \} \end{aligned}$$

і

$$\left| |f(x'')| - |f(x')| \right| \leq |f(x'') - f(x')|,$$

то $M_k(\tau; |f|) - m_k(\tau; |f|) \leq M_k(\tau; f) - m_k(\tau; f)$ і $\bar{\sigma}_{|f|} - \underline{\sigma}_{|f|} = \bar{\sigma}_f - \underline{\sigma}_f$. Звідси та з критерію інтегровності випливає інтегровність $|f|$. Крім цього,

$$\left| \sigma_f(\tau; \xi) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(\xi_k)| \Delta x_k = \sigma_{|f|}(\tau; \xi) \text{ і ми приходимо до потрібної нерівності. } \blacktriangleright$$

Наслідок 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Приклад 1. Функція Діріхле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

не є інтегрованою на проміжку $[0; 1]$, але $|f|(x) \equiv 1$ і тому функція $|f|$ є інтегрованою на $[0; 1]$. Отже, твердження, обернене до теореми 7, не є справедливим.

Приклад 2. Для будь-яких двох функцій $f_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегровних за Ріманом на проміжку $[a; b]$, справедлива нерівність Шварца (Коші-Буняковського)

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |f_1(x)|^2 dx \int_a^b |f_2(x)|^2 dx.$$

Справді,

$$0 \leq \int_a^b (\lambda f_1(x) + f_2(x)) (\lambda f_1(x) + f_2(x)) dx$$

$$= \lambda^2 \int_a^b |f_1(x)|^2 dx + \lambda \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx + \int_a^b |f_2(x)|^2 dx \quad (3)$$

для довільних $\lambda \in \mathbb{R}$ та, $x \in [a; b]$. Якщо $\int_a^b |f_1(x)|^2 dx = 0$ і $\int_a^b |f_2(x)|^2 dx = 0$, то

$\lambda \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \geq 0$. Взявши в цій нерівності $\lambda = 1$ і $\lambda = -1$, послідовно

отримуємо $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \geq 0$ і $\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \leq 0$. Таким чином,

$\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx = 0$, якщо $\int_a^b |f_1(x)|^2 dx = 0$ і $\int_a^b |f_2(x)|^2 dx = 0$, тобто нерівність

Шварца в цьому випадку доведена. Якщо ж, наприклад, $\int_a^b |f_1(x)|^2 dx \neq 0$, то,

взявши в (3) $\lambda = -\frac{\int_a^b f_1(x)f_2(x)dx}{\int_a^b |f_1(x)|^2 dx}$, одержуємо

$$0 \geq \left| \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx \right|^2 / \int_a^b |f_1(x)|^2 dx - \int_a^b |f_2(x)|^2 dx,$$

звідки знову отримуємо нерівність Шварца. Оскільки в нерівності Шварца функції можна замінити їхніми модулями, то справедливою є також

нерівність $\left(\int_a^b |f_1(x)f_2(x)| dx \right)^2 \leq \int_a^b |f_1(x)|^2 dx \int_a^b |f_2(x)|^2 dx$.

Приклад 3. Для будь-яких двох функцій $f_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегровних за Ріманом на проміжку $[a; b]$, справедлива нерівність Мінковського

$$\left(\int_a^b |f_1(x) + f_2(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |f_2(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Справді, скориставшись нерівністю Шварца, отримуємо

$$\int_a^b |f_1(x) + f_2(x)|^2 dx = \int_a^b |f_1(x)|^2 dx + 2 \int_a^b f_1(x)f_2(x)dx + \int_a^b |f_2(x)|^2 dx$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_a^b |f_1(x)|^2 dx + 2\sqrt{\int_a^b |f_1(x)|^2 dx} \sqrt{\int_a^b |f_2(x)|^2 dx} + \int_a^b |f_2(x)|^2 dx \\ &\leq \left(\sqrt{\int_a^b |f_1(x)|^2 dx} + \sqrt{\int_a^b |f_2(x)|^2 dx} \right)^2. \end{aligned}$$

Приклад 4. Оскільки $\frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1} \int_k^{k+1} dt \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dt = \frac{1}{k}$ для кожного

$k \in \mathbb{N}$, то

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{t} dt = \int_1^n \frac{1}{t} dt,$$

$$\int_1^n \frac{1}{t} dt - \frac{1}{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{t} dt + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

8. Властивості визначеного інтеграла як функції проміжку.

Теорема 1. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a;b]$, то вона є інтегрованою на будь-якому проміжку $[a_1;b_1] \subset [a;b]$.

Доведення. Відповідні характеристики для проміжку $[a_1;b_1]$ будемо позначати через M_k^1 , σ^1 і т.д. Для кожного розбиття τ^1 проміжку $[a_1;b_1]$ знайдеться таке розбиття τ проміжку $[a;b]$, що $\tau^1 \subset \tau$ і

$$0 \leq \bar{\sigma}^1 - \underline{\sigma}^1 = \sum_{k=0}^{n^1-1} (M_k^1 - m_k^1) \Delta x_k^1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k.$$

Звідси та з критерію інтегровності випливає потрібне. ►

Теорема 2. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжках $[a;c]$ і $[c;b]$, $a < c < b$, то вона інтегровна за Ріманом на проміжку $[a;b]$ і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (1)$$

Доведення. Якщо τ – розбиття проміжку $[a;b]$, то точка c може належати τ , а може і не належати. У першому випадку $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ і $\tau = \tau_1 \cup \tau_2$,

де σ_1 та σ_2 – інтегральні суми f на $[a; c]$ і $[c; b]$, а τ_1 і τ_2 – деякі розбиття цих проміжків. У другому випадку, додавши до розбиття τ ще одну точку c будемо мати

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + f(\xi_{k_0})(x_{k_0+1} - x_{k_0}) - f(\xi'_{k_0})(c - x_{k_0}) - f(\xi''_{k_0})(x_{k_0+1} - c),$$

де x_{k_0} – така точка розбиття τ , що $x_{k_0} < c < x_{k_0+1}$, ξ_{k_0} , ξ'_{k_0} та ξ''_{k_0} – довільні точки з проміжків $[x_{k_0}; x_{k_0+1}]$, $[x_{k_0}; c]$ і $[c; x_{k_0+1}]$. З написаних рівностей легко отримуємо потрібне твердження. ►

Теорема 3. Якщо $a \leq b$, функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку

$[a; b]$, $f(x) \geq 0$ для всіх $x \in [a; b]$ і $\int_a^b f(x) dx = 0$, то $f(x) = 0$ для всіх $x \in [a; b]$.

Доведення. Справді, припустимо, що $(\exists x_0 \in [a; b]) : f(x_0) > 0$. Оскільки функція f є неперервною, то знайдуться такі проміжок $[a_1; b_1] \subset [a; b]$ і число $c_1 > 0$, що $f(x) \geq c_1$ для всіх $x \in [a_1; b_1]$. Тому

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_{a_1}^{b_1} f(x) dx \geq \int_{a_1}^{b_1} c_1 dx = c_1(b_1 - a_1) > 0,$$

тобто маємо суперечність. ►

Приклад 1. $\int_0^4 e^{x^2} dx = \int_0^2 e^{x^2} dx + \int_2^4 e^{x^2} dx.$

Приклад 2. $\pi / 2 < \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} dx < 3\pi / 2.$ Справді,

$$1 \leq \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} \leq \sqrt{9} = 3, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \text{Тому} \quad \pi / 2 \leq \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} dx \leq 3\pi / 2. \quad \text{Але}$$

$1 < \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} < \sqrt{9} = 3$, якщо $x \in (0; \pi / 2)$. Функція $f(x) = \sqrt{1 + 8 \cos^2 x}$ є неперервною. Отже, знайдуться $c_1 > 1$ і проміжок $[a; b] \subset (0; \pi / 2)$ такі, що

$\sqrt{1 + 8 \cos^2 x} \geq c_1$ для всіх $x \in [a; b]$. Якщо, наприклад, $\pi / 2 = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} dx$, то

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} dx &= \int_0^a \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} dx + \int_a^b \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} dx \\ &+ \int_b^{\pi/2} \sqrt{1 + 8 \cos^2 x} dx \geq \int_0^a dx + \int_a^b c_1 dx + \int_b^{\pi/2} dx = a + c_1(b - a) + \frac{\pi}{2} - b \\ &= (b - a)(c_1 - 1) + \pi / 2 > \pi / 2, \end{aligned}$$

і маємо суперечність.

9. Теорема про середнє для визначених інтегралів.

Теорема 1 (перша теорема про середнє). Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, то

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a). \quad (1)$$

Доведення. Нехай

$$m(f) = \inf \{ f(x) : x \in [a; b] \}, \quad M(f) = \sup \{ f(x) : x \in [a; b] \}.$$

Тоді $(\forall x \in [a; b]) : m(f) \leq f(x) \leq M(f)$. Тому

$$m(f) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M(f).$$

За другою теоремою Больцано-Коші $(\exists c \in [a; b]) : f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$. ►

Справедливі різні модифікації теореми 1.

Теорема 2. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, то існує таке $\mu \in [m(f); M(f)]$, що

$$\int_a^b f(x) dx = \mu(b - a).$$

Доведення. Це твердження доведено в ході доведення теореми 1.

Теорема 3. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і приймає значення одного знаку на $[a; b]$, то

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x)g(x) dx = f(c) \int_a^b g(x) dx. \quad (2)$$

Доведення. Нехай, наприклад, $g(x) \geq 0$, $x \in [a; b]$. Тоді $m(f)g(x) \leq f(x)g(x) \leq M(f)g(x)$ і

$$m(f) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M(f) \int_a^b g(x) dx.$$

Тому, якщо $\int_a^b g(x) dx = 0$, то $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$ і, отже, рівність (2) справедлива

для кожного $c \in [a; b]$. Якщо ж $\int_a^b g(x) dx \neq 0$, то

$$m(f) \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M(f).$$

Звідси, як і при виведенні теореми 1, отримуємо потрібне. ►

Теорема 4. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a;b]$, а функція $g:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і приймає значення одного знаку на $[a;b]$, то

$$(\exists \mu \in [m(f); M(f)]) : \int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx. \quad (3)$$

Доведення. Це твердження встановлено в ході доведення теореми 2. ►

Теорема 5 (друга теорема про середнє). Нехай функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на $[a;b]$, а функція $g:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неспадною і невід'ємною на $[a;b]$. Тоді

$$(\exists c \in [a;b]) : \int_a^b f(x)g(x)dx = g(b-) \int_a^c f(x)dx.$$

Доведення. Можемо вважати, що $g(b-) = g(b)$, бо зміна значень функції в скінченній кількості точок не впливає на її інтегровність і значення інтеграла. Маємо

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)g(x)dx = \sigma_1 + \sigma_2,$$

де

$$\sigma_1 = \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)dx, \quad \sigma_2 = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (g(x) - g(x_k))f(x)dx.$$

Але

$$|\sigma_2| \leq \sup_{x \in [a;b]} \{f(x)\} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(g) \Delta x_k \rightarrow 0, \quad \lambda \rightarrow 0.$$

Тому

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_1.$$

З іншого боку, якщо

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

то $\Phi(x) \geq 0$ і функція Φ є неспадною. Оскільки

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k)(\Phi(x_{k+1}) - \Phi(x_k)) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \Phi(x_k)(g(x_{k+1}) - g(x_k)) + \Phi(x_n)g(x_{n-1}),\end{aligned}$$

то

$$m(\Phi)g(b) = m(\Phi)g(x_n) \leq \sigma_1 \leq M(\Phi)g(x_n) = M(\Phi)g(b).$$

Отже, $m(\Phi) \leq \frac{\sigma_1}{g(b)} \leq M(\Phi)$. Тому існує таке $c \in [a; b]$, що $\frac{\sigma_1}{g(b)} = \Phi(c)$. Звідси

впливає твердження теореми 5. ►

Наведемо інші модифікації теореми 5.

Теорема 6. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на $[a; b]$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є незростаючою і невід'ємною на $[a; b]$. Тоді

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+) \int_c^b f(x)dx.$$

Доведення. Ця теорема доводиться так само як і попередня. ►

Теорема 7. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на $[a; b]$. Тоді

$$(\exists c \in [a; b]) : \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a+) \int_c^b f(x)dx + g(b-) \int_a^c f(x)dx.$$

Доведення. Нехай функція g є неспадною і $g_1 = g - g(a+)$. Тоді за попередньою теоремою знайдеться таке $c \in (a; b)$, що

$$\int_a^b f(x)g_1(x)dx = g_1(b-) \int_a^c f(x)dx,$$

тобто

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)(g(x) - g(a+))dx &= (g(b-) - g(a+)) \int_a^c f(x)dx, \\ \int_a^b f(x)g(x)dx &= g(a+) \int_a^b f(x)dx + (g(b-) - g(a+)) \int_a^c f(x)dx, \\ \int_a^b f(x)g(x)dx &= g(a+) \int_c^b f(x)dx + g(b-) \int_a^c f(x)dx. \quad \blacktriangleright\end{aligned}$$

Приклад 1.

$$\int_0^{3/2} e^{-x^2} \sin x dx = \int_0^c \sin x dx + e^{-9/4} \int_c^{3/2} \sin x dx,$$

де $0 \leq c \leq 3/2 < \pi/2$.

$$\text{Приклад 2. } \int_0^1 \ln(1+x^2) dx = \ln(1+c^2) \leq \ln 2.$$

10. Інтеграл зі змінною верхньою межею. Функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

називається інтегралом зі змінною верхньою межею.

Теорема 1. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[a;b]$, то $(\forall x \in [a;b]): \Phi'(x) = f(x)$, тобто

$$\left(\int_a^x f(t) dt \right)' = f(x).$$

Доведення. За теоремою про середнє

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = f(c)\Delta x, \quad (1)$$

де $c = c(\Delta x)$ належить проміжку $[x; x + \Delta x]$ і $c \rightarrow x$, якщо $\Delta x \rightarrow 0$. Тому завдяки неперервності функції f маємо

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = f(x). \blacktriangleright$$

Наслідок 1. Кожна неперервна на проміжку $[a;b]$ функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ має первісну на $[a;b]$. Однією з її первісних є функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Теорема 2. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a;b]$, то функція Φ є неперервною на $[a;b]$.

Доведення. Справді, за теоремами про середнє

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \mu \Delta x \rightarrow 0,$$

якщо $\Delta x \rightarrow 0$, де $\mu \in [\inf\{f(t): t \in \mathbb{R}\}; \sup\{f(t): t \in \mathbb{R}\}]$. \blacktriangleright

Наслідок 2. Якщо функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a;b]$, то

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

$$\text{Приклад 1. } \left(\int_0^x \sin \sqrt{t} dt \right)' = \sin \sqrt{x}.$$

$$\text{Приклад 2. } \left(\int_x^1 \cos^7 t dt \right)' = \left(- \int_1^x \cos^7 t dt \right)' = -\cos^7 x.$$

$$\text{Приклад 3. } \left(\int_0^{\sqrt{x}} \sin t dt \right)' = \sin \sqrt{x} (\sqrt{x})' = \frac{\sin \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}.$$

Приклад 4. Використовуючи правила Лопіталя, отримуємо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} 2x^2 + e^{x^2}} = \frac{1}{2}.$$

Таким чином, $\int_0^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

11. Формула Лейбніца-Ньютона (основна теорема інтегрального числення).

Теорема 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a), \quad (1)$$

де F – будь-яка первісна функції f .

Доведення. Функція

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

є первісною функції f . Якщо F – будь-яка первісна f , то існує така стала C , що $\Phi(x) = F(x) + C$, тобто

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C,$$

звідки

$$F(a) + C = \int_a^a f(t) dt = 0.$$

Тому $C = -F(a)$. Отже,

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Взявши тут $x = b$, отримуємо формулу (1). ►

Зауваження 1. Формулу (1), яку називають формулою Лейбніца-Ньютона, записують так

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Приклад 1. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}.$

Приклад 2.

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{1 - \cos 2x} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2 \sin^2 x} dx = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sqrt{2} |\sin x| dx \\ &= -\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^0 \sin x dx + \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \sin x dx = \sqrt{2} \cos x \Big|_{-\pi/2}^0 - \sqrt{2} \cos x \Big|_0^{\pi/2} = 2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Якщо $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ x, & x \leq 0, \end{cases}$ то

$$\int_{-1}^2 f(x)dx = \int_{-1}^0 x dx + \int_0^2 dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^0 + x\Big|_0^2 = -\frac{1}{2} + 2 = \frac{3}{2}.$$

Приклад 4. Функція $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$ є інтегрованою за Ріманом на

проміжку $[-2; 2]$ і не має первісної на цьому проміжку.

Приклад 5. Якщо $F(x) = x + [x]$, то $F'(x) = 1$, якщо $x \notin \mathbb{Z}$, і $2 = \int_0^2 1 dx < 4 = F(2) - F(0).$

Приклад 6. Функція $f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ має первісну

$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ на проміжку $[-1; 1]$, але не є інтегрованою за Ріманом

на $[-1; 1]$.

Зауваження 2. Питання про умови, за яких справедлива формула (1),

повністю розв'язується у рамках теорії інтеграла Лебега, який є узагальненням інтеграла Рімана.

12. Інтегрування частинами визначених інтегралів.

Теорема 1. Якщо функції $u:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $v:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[a;b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (1)$$

Доведення. Оскільки $(uv)' = u'v + uv'$, то

$$\int_a^b uv' dx = \int_a^b (uv)' dx - \int_a^b vu' dx = uv \Big|_a^b - \int_a^b vu' dx,$$

звідки випливає (1). ►

Приклад 1.

$$\int_0^1 x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx = -e^{-1} - e^{-x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{e}.$$

Тут $u = x$, $dv = e^{-x} dx$, $du = dx$ і $v = -e^{-x}$.

13. Інтегрування заміною змінних визначених інтегралів.

Теорема 1. Нехай функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a;b]$, а функція $\varphi:[\alpha;\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[\alpha;\beta]$, $\varphi([\alpha;\beta]) = [a;b]$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

Доведення. За формулою Лейбніца-Ньютона

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

де F – первісна функції f . Оскільки

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t),$$

то функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$. Тому

$$\int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(\alpha)) - F(\varphi(\beta)) = F(a) - F(b).$$

Звідси та з (2) випливає (1). ►

Наслідок 1. Нехай функція $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a;b]$, а функція $\varphi:[\alpha;\beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною і монотонною на проміжку $[\alpha;\beta]$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$. Тоді справедлива рівність

(1).

Приклад 1. Для знаходження інтегралу $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}}$ зробимо заміну $\sqrt{x} = t$.

Тоді $x = t^2$, $dx = 2t dt$. Якщо $x = 0$, то $t = 0$. Якщо $x = 4$, то $t = 2$. Крім цього, $([0; 2])^2 = [0; 4]$. Тому

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x+1}} &= \int_0^2 \frac{2t dt}{t+1} = 2 \int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1} dt = 2 \left(\int_0^2 dt - \int_0^2 \frac{dt}{t+1} \right) \\ &= 2 \left(t \Big|_0^2 - \ln(t+1) \Big|_0^2 \right) = 2(2 - \ln 3) = 4 - 2 \ln 3. \end{aligned}$$

Приклад 2. Для знаходження інтегралу $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$ зробимо заміну

$x = 2 \sin t$. Тоді $dx = 2 \cos t dt$. Якщо $x = 0$, то $t = 0$. Якщо $x = 2$, то $t = \pi/2$. Крім цього, $2 \sin([0; \pi/2]) = [0; 2]$. Тому

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \pi.$$

Приклад 3.

$$\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx = \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 x) \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x d \cos x + \int_0^{\pi/2} \sin x dx = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Приклад 4. Для знаходження інтегралу $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx$ зробимо заміну

$x = \pi - t$. Тоді $dx = -dt$. Якщо $x = 0$, то $t = \pi$. Якщо $x = \pi$, то $t = 0$. Тому

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \int_{\pi}^0 \frac{(\pi - t) \sin(\pi - t)}{1 + \cos^2(\pi - t)} d(\pi - t) = \int_0^{\pi} \frac{(\pi - t) \sin t}{1 + \cos^2 t} dt,$$

звідки

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{1 + \cos^2 x} dx = -\frac{\pi}{2} \operatorname{arctg} \cos x \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{4}.$$

Приклад 6. Якщо функція $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ є парною і неперервною на проміжку $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(-t) dt + \int_0^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$

Приклад 7. Якщо функція $f: [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ є непарною і неперервною на проміжку $[-a; a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(-t)dt + \int_0^a f(x)dx = 0.$$

Приклад 8. Заміною $t = \pi/2 - x$ переконуємося, що

$$I_n := \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt \text{ для кожного } n \in \mathbb{N}_0. \text{ Крім цього,}$$

$$\begin{aligned} I_n &= - \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} t d \cos t = - \sin^{n-1} t \cos t \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t \cos^2 t dt \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} t (1 - \sin^2 t) dt = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Отже, $I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Але $I_0 = \int_0^{\pi/2} dt = \frac{\pi}{2}$ і $I_1 = \int_0^{\pi/2} \sin t dt = 1$. Тому

$$\begin{aligned} I_{2k+1} &= \frac{2k}{2k+1} I_{2k-1} = \frac{2k(2k-2)}{(2k+1)(2k-1)} I_{2k-3} = \dots \\ &= \frac{2k(2k-2)\dots 2}{(2k+1)(2k-1)\dots 1} I_1 = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \end{aligned}$$

і

$$I_{2k} = \frac{2k-1}{2k} I_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2k(2k-2)} I_{2k-4} = \dots = \frac{(2k-1)(2k-3)\dots 1}{2k(2k-2)\dots 2} I_0 = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2}.$$

Далі, $I_{2k+1} \leq I_{2k} \leq I_{2k-1}$ і тому

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \leq \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \frac{\pi}{2} \leq \frac{(2k-2)!!}{(2k-1)!!},$$

тобто

$$\frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2,$$

$$\begin{aligned} 0 \leq x_k := \frac{1}{2k} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 - \frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 &= \frac{1}{2k(2k+1)} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 = \frac{1}{2k} \frac{\pi}{2} \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2k+1} \left(\frac{(2k)!!}{(2k-1)!!} \right)^2 &\rightarrow \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^n t dt = \begin{cases} \frac{(n-1)!!}{n!!} \frac{\pi}{2}, & n = 2k, \\ \frac{(n-1)!!}{n!!}, & n = 2m-1, \end{cases}$$

і справедлива формула Валліса

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2.$$

Зауваження 1. Функція $\omega: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається рімановою східчастою функцією на проміжку $[a; b]$, якщо знайдеться таке розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, проміжка $[a; b]$, що

$$\omega(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \chi_{(x_k; x_{k+1})}(x), \quad x \in \bigcup_{k=0}^{n-1} (x_k; x_{k+1}),$$

де $\chi_{(a; b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a; b), \\ 0, & x \notin (a; b), \end{cases}$ – характеристична функція проміжка $(a; b)$ і

$\omega(x_i) \in \mathbb{R}$ – довільні числа. Інакше кажучи, ріманова східчаста функція – це така функція $\omega: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, яка для деякого розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$ проміжка $[a; b]$ на кожному проміжку $(x_i; x_{i+1})$ приймає стале значення c_i , а в точках x_i приймає довільні значення з \mathbb{R} . Інтегралом ріманової східчастої функції на проміжку $[a; b]$ називається число

$$\int_a^b \omega(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Delta x_k.$$

Нехай

$$\underline{J} = \sup \left\{ \int_a^b \underline{\omega}(x) dx \right\}, \quad \bar{J} = \inf \left\{ \int_a^b \bar{\omega}(x) dx \right\},$$

супремум береться за всіма східчастими рімановими функціями $\underline{\omega}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, для яких $(\forall x \in [a; b]): \underline{\omega}(x) \leq f(x)$, а інфімум – за всіма рімановими східчастими функціями $\bar{\omega}: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, для яких $(\forall x \in [a; b]): f(x) \leq \bar{\omega}(x)$. Функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, якщо $\underline{J} = \bar{J}$. При цьому, число $J := \underline{J} = \bar{J}$ називається інтегралом Рімана функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a; b]$.

З властивостей інтегральних сум випливає, що це означення інтеграла Рімана є еквівалентне раніше введеному, тобто класи інтегровних функцій в обидвох випадках є однаковими і для кожної інтегрованої за Ріманом функції обидва інтеграла є рівними.

Зауваження 2. Водночас з інтегралом Рімана

$$\int_a^b f(x)dx \quad (3)$$

інколи трапляється інтеграл Рімана першого роду

$$\int_{[a;b]} f(x)|dx|, \quad (4)$$

який визначається так само, як і інтеграл (4), проте розглядається тільки випадок $a \leq b$. Тому цей інтеграл має такі ж властивості, як і інтеграл Рімана. Деяка специфіка є, правда, у формулюванні теореми про інтегрування заміною змінних. При цьому за тих же умов формула заміни змінних приймає

$$\text{вигляд } \int_{[a;b]} f(x)|dx| = \int_{[\alpha;\beta]} f(\varphi(t))|\varphi'(t)|dt. \text{ Інтеграл Рімана першого роду є}$$

частковим випадком криволінійного інтеграла першого роду і є частковим випадком інтеграла Рімана в \mathbb{R}^n , на який читач натрапить при подальшому вивченні математики.

Зауваження 3. Можна поширити поняття інтеграла Рімана і на деякі множини $E \subset \mathbb{R}$, які не є проміжками. Функція $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ називається інтегровною за Ріманом на множині E , якщо множина E є обмеженою і для деякого проміжка $[a;b] \supset E$ інтегровною на $[a;b]$ за Ріманом є функція $f\chi_E$.

При цьому, число

$$\int_E f(x)|dx| = \int_{[a;b]} f(x)\chi_E(x)|dx|$$

називається інтегралом Рімана функції f по множині E , де

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E, \\ 0, & x \notin E, \end{cases} \text{ – характеристична функція множини } E \subset \mathbb{R}. \text{ Множина}$$

$E \subset \mathbb{R}$ називається вимірною за Жорданом, якщо вона є обмеженою і функція χ_E є інтегровною за Ріманом на деякому проміжку $[a;b] \supset E$. При цьому число

$$m(E) = \int_{[a;b]} \chi_E(x)|dx| \text{ називається мірою Жордана множини } E. \text{ Можна}$$

переконалися, що на множинах, вимірних за Жорданом, інтеграл Рімана має властивості, аналогічні до властивостей інтеграла Рімана на проміжку. Можна було б поступити інакше. Власне, спочатку незалежно від поняття інтеграла ввести поняття множини, вимірної за Жорданом, а потім подібно

до введення поняття інтеграла Рімана на проміжку ввести поняття інтеграла Рімана по довільній множині $E \subset \mathbb{R}$, вимірній за Жорданом. Проте детальне обговорення цього виходить за межі даного курсу.

14. Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення визначеного інтеграла.
2. Сформулюйте і доведіть теорему про обмеженість інтегрованої функції.
3. Сформулюйте і доведіть критерій інтегровності.
4. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегровність неперервної функції.
5. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегровність монотонної функції.
6. Сформулюйте і доведіть теорему про однорідність інтеграла.
7. Сформулюйте і доведіть теорему про адитивність інтеграла.
8. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегровність модуля інтегрованої функції.
9. Чи існує функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегровна за Ріманом на проміжку $[a; b]$, для якої функція $|f|$ не є інтегровою за Ріманом на $[a; b]$?
10. Чи існує функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, неінтегровна за Ріманом на проміжку $[a; b]$, для якої функція $|f|$ є інтегровою за Ріманом на $[a; b]$?
11. Чи існують функції $f_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, неінтегровні за Ріманом на проміжку $[a; b]$, для яких функція $f_1 + f_2$ є інтегровою за Ріманом на $[a; b]$?
12. Сформулюйте і доведіть першу теорему про середнє для визначених інтегралів.
13. Сформулюйте і доведіть другу теорему про середнє для визначених інтегралів.
14. Сформулюйте і доведіть теорему про похідну інтеграла Рімана зі змінною верхньою межею.
15. Запишіть і обґрунтуйте формулу Лейбніца-Ньютона.
16. Сформулюйте і доведіть теорему про інтегрування частинами визначених інтегралів.
17. Сформулюйте і доведіть теорему про заміну змінних у визначеному інтегралі.
18. Наведіть приклад функції $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0; 1]$ і неінтегрованої за Ріманом на $[0; 1]$.
19. Наведіть приклад функції $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, диференційовної на проміжку $[0; 1]$, для якої функція f' є неінтегровою за Ріманом на $[0; 1]$.

15. Вправи й задачі теоретичного характеру

1. Доведіть твердження

$$1. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos(m+2)x dx = 0, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin(m+2)x dx = \frac{1}{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos(m+2)x dx = \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \sin^m x \sin(m+2)x dx = \frac{\cos \frac{m\pi}{2}}{m+1}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$5. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin mx dx = \frac{1}{2^m} \sum_{k=1}^m \frac{2^{k-1}}{k}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$6. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos mx dx = \frac{\pi}{2^{m+1}}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$7. \int_0^{\pi/2} \cos^m x \sin^m x dx = \frac{1}{2^m} \int_0^{\pi/2} \cos^m x dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

$$8. \int_0^1 (1-x)^p x^q dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}, \quad p \in \mathbb{N}, \quad q \in \mathbb{N}.$$

$$9. \int_0^{\pi/2} \sin^{\nu} x \cos^{\mu} x dx = \begin{cases} \frac{(\nu-1)!(\mu-1)!\pi}{(\nu+\mu)!!2}, & \text{якщо } \nu \text{ і } \mu - \text{ парні,} \\ \frac{(\nu-1)!(\mu-1)!!}{(\nu+\mu)!!}, & \text{в інших випадках,} \end{cases} \quad \nu \in \mathbb{N}, \quad \mu \in \mathbb{N}.$$

$$10. \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx = a^{2n+1} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1} x dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 0.$$

$$11. \int_0^{\pi} (a + b \cos x)^{-n} dx = (a^2 - b^2)^{-n-1/2} \int_0^{\pi} (a - b \cos x)^{n-1} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > |b| > 0$$

$$12. \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2} dx = \int_0^{\pi/4} \ln \cos x dx.$$

$$13. \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{x}{\sin x} dx.$$

$$14. \int_0^{\pi/2} (a + \sqrt{a^2 - 1} \cos x)^n dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(a + \sqrt{a^2 - 1} \cos x)^{n+1}} dx, \quad n \in \mathbb{N}, \quad a > 1.$$

$$15. \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{a_1^2 \cos^2 x + b_1^2 \sin^2 x}} dx, \quad a > b > 0, \quad a_1 = (a+b)/2,$$

$$b_1 = \sqrt{ab}.$$

$$16. L_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos t)^n dt \text{ є поліномом степеня } n.$$

$$17. \text{Функція } \text{Si } x = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt \text{ є непарною на проміжку } (-\infty; +\infty).$$

18. Якщо функція $\varphi: [a; b] \rightarrow [A; B]$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, а функція $f: [A; B] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[A; B]$, то функція $F(x) = f(\varphi(x))$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$.

19. Функція $f(x) = \text{sgn}\left(\sin \frac{\pi}{x}\right)$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[0; 1]$.

20. Функція $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/n, & x = m/n, \end{cases}$ (m/n – нескоротний дріб) є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

21. Функція $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right], & x \neq 0, \end{cases}$ є інтегрованою на проміжку $[0; 1]$.

22. Функція $F(x) = f(\varphi(x))$ не є інтегрованою на проміжку $[0; 1]$, якщо $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ 1, & x \neq 0, \end{cases}$ і $\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 1/n, & x = m/n, \end{cases}$ (m/n – нескоротний дріб).

23. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, а функція $\varphi: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[\alpha; \beta]$, $\varphi([\alpha; \beta]) = [a; b]$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$, то

$$\int_a^b f(x) dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

24. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і невід'ємною на проміжку $[a; b]$, то функція $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$ є неспадною на $[a; b]$.

25. Якщо $a < b$, функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, $(\forall x \in [a; b]): f(x) \leq 0$ і $(\exists x_0 \in [a; b]): f(x_0) < 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx < 0.$$

26. Якщо $\int_a^b f(x)dx = 0$ і функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a; b]$, то $f(x) \equiv 0$, $x \in [a; b]$.

27. Якщо $\int_a^b f(t)dt = 0$ і функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, то $\int_a^b f(t)dt = f(x)$ для деякого $x \in [a; b]$.

28. Якщо функція $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[0; 1]$, то $\int_0^1 f(t)dt = f(x) + \frac{f'(x)}{2}$ для деякого $x \in [0; 1]$.

29. Якщо $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, а функція $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$ і $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a; b]$, за винятком, можливо, скінченної кількості точок, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

30. Якщо $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, то

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \int_a^x f(x)dx = 0.$$

31. Якщо $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, то знайдеться таке

$$c \in (0; +\infty), \text{ що } \left| \int_x^y f(t)dt \right| \leq c|x - y| \text{ для всіх } (x; y) \in [a; b] \times [a; b].$$

32. Якщо $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$, а функція $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною і зростаючою на проміжку $[\alpha; \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\varphi(\beta) = b$, то функція $F(t) = f(\varphi(t))$ є інтегрованою на проміжку $[\alpha; \beta]$ і

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

33. $\int_a^b xf(x)dx = \frac{a+b}{2} \int_a^b f(x)dx$, якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$ і $f(a+t) = f(b-t)$ для всіх $t \in [a; b]$.

34. $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ для кожного $a > 0$ і кожної функції $f : [0; a] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0; a]$.

35. $\int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos x)dx$ для кожної функції $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0; 1]$.

36. $\int_0^a x^3 f(x^2)dx = \frac{1}{2} \int_0^{a^2} xf(x)dx$ для кожної функції $f : [0; a^2] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0; a^2]$.

37. $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ для кожного $a \in \mathbb{R}$ і кожної T -періодичної функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0; T]$.

38. $\int_0^{m\pi} f(\cos^2 x)dx = m \int_0^{\pi} f(\cos^2 x)dx$, $m \in \mathbb{N}$.

39. $\int_0^{\pi/2} \frac{x \sin x \cos x}{(a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x)^2} dx = \frac{\pi}{4ab^2(a+b)}$, $a > 0$, $b > 0$.

40. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\sin x)dx$ для кожної функції $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0; 1]$.

41. $\int_0^{\pi} xf(\sin x)dx = \pi \int_0^{\pi/2} f(\sin x)dx$ для кожної функції $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0; 1]$.

42. $\int_0^{\pi/2} f(\sin 2x) \cos x dx = \int_0^{\pi/2} f(\cos^2 x) \cos x dx$ для кожної функції $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на проміжку $[0; 1]$.

43. $\int_{-a}^a \frac{f(x)}{1+e^x} dx = \int_0^a f(x)dx$, якщо $f : [-a; a] \rightarrow \mathbb{R}$ є парною і неперервною на проміжку $[-a; a]$.

44. Якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на \mathbb{R} і T -періодичною, то

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx \text{ для кожного } a \in \mathbb{R}.$$

2. Доведіть твердження

1. Якщо функції $u : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $v : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними на проміжку $[a; b]$, функції u' та v' є кусково-неперервними на $[a; b]$ (тобто для кожної з функцій u' та v' знайдеться скінченна кількість точок $x_i \in [a; b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, що на кожному проміжку $(x_i; x_{i+1})$ вони є неперервними, і існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_i+} u'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_i-} u'(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_i+} v'(x)$ і

$$\lim_{x \rightarrow x_i-} v'(x)), \text{ то } \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

2. $\int_a^b x f'(x) dx = x f(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dx$, якщо функція f' є неперервною на проміжку $[a; b]$.

3. $\int_a^b x f''(x) dx = (x f'(x) - f(x)) \Big|_a^b$, якщо функція f'' є неперервною на проміжку $[a; b]$.

4. Якщо функція $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[0; 1]$, то

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n).$$

5. Якщо функція $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[0; 1]$, то

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) + O(1/n), \quad n \rightarrow \infty.$$

6. Якщо функція $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є неспадною на проміжку $[0; 1]$, то

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n) \leq \frac{f(1) - f(0)}{2}.$$

7. Якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною, неперервною і невід'ємною на проміжку $[0; +\infty)$, то

$$\int_0^n f(x) dx = \sum_{k=1}^n f(k) + O(f(n)) + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

8. Якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[0; +\infty)$, то

$$\left| \int_0^n f(x) dx - \sum_{k=0}^n f(k) \right| \leq |f(0)| + \int_0^1 |f'(x)| dx, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$9. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = 0.$$

$$10. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = 0.$$

$$11. \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1}{1+\varepsilon x^2} dx = 1.$$

$$12. \lim_{n \rightarrow \infty} \int_n^{n+1} \frac{\sin x}{x} dx = 0.$$

13. Якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; +\infty)$ і існує

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \text{ то } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(nx) dx = A.$$

14. Якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; +\infty)$ і існує

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A, \text{ то } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = A.$$

15. Існує функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, неперервна на проміжку $[0; +\infty)$, для якої

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 1, \text{ а } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ не існує.}$$

16. Якщо функція $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є неспадною на проміжку $[0; 1]$ і $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$, то

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \int_x^{x+1} f(t) dt = 0.$$

$$17. \int_a^b |f_1(x) + f_2(x)|^2 dx \leq 2 \left(\int_a^b |f_1(x)|^2 dx + \int_a^b |f_2(x)|^2 dx \right) \text{ для будь-яких функцій}$$

$f_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегровних на проміжку $[a; b]$.

18. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і неспадною на проміжку $[a; b]$,

$$\text{то } (b-a)f(a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(b).$$

19. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і незростаючою на проміжку

$$[a; b], \text{ то } (b-a)f(b) \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a)f(a).$$

20. Якщо функція $f : [p-a; p+a] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і неспадною на проміжку

$[p-a; p+a]$, то

$$2af(q - p^2) \leq \int_{p-a}^{p+a} f(x^2 - 2px + q)dx \leq 2af(a^2 + q - p^2).$$

21. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і неспадною на проміжку $[a; b]$, а функція $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і невід'ємною на проміжку $[a; b]$, то

$$(b-a)f(a) \int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq (b-a)f(b) \int_a^b \varphi(x)dx.$$

22. $\int_a^b f(x)\eta(x)dx \leq \int_a^b f(x)\varphi(x)dx \leq \int_a^b f(x)\psi(x)dx$, якщо функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\psi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $\eta : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними на проміжку $[a; b]$, функція f є невід'ємною на $[a; b]$ і $(\forall x \in [a; b]) : \eta(x) \leq \varphi(x) \leq \psi(x)$.

23. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq (b-a) \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

24. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на проміжку $[a; b]$, то

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a+t) + f(b-t)}{2}, \quad t \in [0; b-a],$$

$$\text{і } \int_a^b f(x)dx \geq (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

25. Якщо функція $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є неспадною на проміжку $[0; 1]$, то функція

$$\psi(x) = \frac{1}{1-x} \int_x^1 f(t)dt \text{ є неспадною на проміжку } [0; 1].$$

26. Якщо функція $f : [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[0; 1]$, то

$$\int_0^1 f(t)dt \leq \sqrt{\int_0^1 f^2(t)dt}.$$

27. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a; b]$,

а функція $1 - f$ також є невід'ємною на $[a; b]$, то $\int_a^x f(t)dt \leq x - a$ для кожного

$$x \in [a; b].$$

28. Якщо функції $v : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ і $u : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, є невід'ємними на проміжку

$[1; +\infty)$, функції v і vu є інтегровними на кожному проміжку $[1; t_0] \in [1; +\infty)$ і

$u(t) \leq c + \int_1^t u(s)v(s)ds$ для деякого $c > 0$ та всіх $t \in [1; +\infty)$, то

$$u(t) \leq c \exp\left(\int_1^t v(s)ds\right), t \in [1; +\infty).$$

29. Якщо функція $u: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ є неперервною на $[a; b]$ і

$$(\exists c_1 \geq 0)(\exists c_2 \geq 0)(\forall x \in [a; b])(\forall x_0 \in [a; b]): |u(x)| \leq c_1 + c_2 \left| \int_{x_0}^x |u(t)| dt \right|, \quad \text{то}$$

$$(\forall x \in [a; b])(\forall x_0 \in [a; b]): |u(x)| \leq c_1 e^{c_2 |x - x_0|}.$$

30. Якщо функція $u: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку

$$[a; b] \text{ і } u(a) = u(b) = 0, \text{ то } \int_a^b u'^2(t) dt \geq \left(\frac{\pi}{b-a}\right)^2 \int_a^b u^2(t) dt.$$

31. Якщо функція $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є опуклою на \mathbb{R} і функція $f: [0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є

$$\text{інтегрованою на проміжку } [0; 1], \text{ то } \eta\left(\int_{[0;1]} f(t) dt\right) \leq \int_{[0;1]} \eta(f(t)) dt.$$

32. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\int_a^b f^n(t) dt} = M$, якщо $M = \sup\{f(x) : x \in [a; b]\}$ і функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a; b]$.

33. Якщо функція $f: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$, функція $\varphi: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на $[a; b)$,

$$(\forall x \in [a; b)): \varphi'(x) \neq 0, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x) = \infty \quad \text{і існує } \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}, \quad \text{то}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}.$$

34. Якщо функція $f: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$, функція $\varphi: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на $[a; b)$,

$$(\forall x \in [a; b)): \varphi'(x) \neq 0 \text{ і } \lim_{x \rightarrow b^-} \varphi(x) = \infty, \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \leq \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\varphi(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow b^-} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\varphi(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}.$$

35. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$,

функція $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на $[a; b]$,

$(\forall x \in [a; b]) : \varphi'(x) \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = 0$ і існує $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}.$$

36. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, функція $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на $[a; b]$, $(\forall x \in [a; b]) : \varphi'(x) \neq 0$ і $\lim_{x \rightarrow a+} \varphi(x) = 0$, то

$$\underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{\varphi'(x)} \leq \underline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\varphi(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{\int_a^x f(t) dt}{\varphi(x)} \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{\varphi'(x)}.$$

$$37. \int_0^{\varepsilon} e^{-tx} dt = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \text{ для кожного } \varepsilon > 0 \text{ і кожного } \alpha > 0.$$

$$38. \int_0^x \frac{t^2 \ln t}{1+t} dt \sim \frac{x^3 \ln x}{3}, \quad x \rightarrow 0+.$$

$$39. \int_0^x \frac{e^t}{t} dt \sim \frac{e^x}{x}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$40. \int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt \sim \sqrt{x}, \quad x \rightarrow 0+.$$

$$41. \int_0^x \frac{\ln t}{t^3} dt = -(1 + o(1)) \frac{\ln x}{2x^2}, \quad x \rightarrow 0+.$$

$$42. \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$43. \int_0^x \sqrt[3]{1+t^3} dt = \frac{x^2}{2} + O(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$44. \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1 - \frac{1}{x\sqrt{\pi}} e^{-x^2} + o\left(\frac{1}{x} e^{-x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$45. \int_x^{x+1} \sin t^2 dt = \frac{\cos x^2}{2x} - \frac{\cos(x+1)^2}{2(x+1)} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

46. Якщо функція $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ є нескінченно диференційовною на проміжку $[0; 1]$

і $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)(\exists c_1)(\forall t \in [0;1]: |\eta^{(k)}(t)| \leq e^{c_1 t}$, то для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ виконується

$$\int_0^1 e^{-tx} \eta(t) dt = \sum_{k=0}^n \frac{\eta^{(k)}(0)}{x^{k+1}} + o\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

47. Якщо функція $\varphi: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[0; +\infty)$ і $x\varphi'(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow +\infty$, то

$$\int_0^x \varphi(t) t^{\alpha-1} dt \sim \frac{1}{\alpha} x^\alpha \varphi(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0.$$

48. Якщо функція $\varphi: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[0; +\infty)$ і $x\varphi'(x) = o(\varphi(x))$, $x \rightarrow +\infty$, то

$$\int_0^x \varphi(t) t^{\alpha-1} dt \sim \frac{1}{\alpha} x^\alpha \varphi(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < 0,$$

$$\int_x^{+\infty} \varphi(t) t^{\alpha-1} dt \sim -\frac{1}{\alpha} x^\alpha \varphi(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < 0.$$

49. Якщо функція $\varphi: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[0; +\infty)$ і $\varphi(x) \sim x^\alpha$, $x \rightarrow +\infty$,

$$\text{то } \int_0^x f(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > -1.$$

50. Якщо функція $\varphi: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[0; +\infty)$ і $\varphi(x) \sim x^\alpha$, $x \rightarrow +\infty$,

$$\text{то } \int_0^x f(t) dt = O(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < -1.$$

51. Якщо функція $\varphi: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[0; +\infty)$ і $\varphi(x) \sim x^\alpha$, $x \rightarrow +\infty$,

$$\text{то } \int_0^x f(t) dt \sim \ln x, \quad x \rightarrow +\infty.$$

16. Вправи й задачі розрахункового характеру.

1. Для функції $f: \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ і розбиття τ проміжку Δ побудуйте інтегральну суму та суми Дарбу, і знайдіть діаметр розбиття

1. $f(x) = x^2$, $\Delta = [0; 4]$, $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $n = 4$, $\xi_k = x_k = k$.

2. $f(x) = x^3$, $\Delta = [0; 5]$, $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $n = 5$, $x_k = k$, $\xi_k = k + 1$.

3. $f(x) = \sin x$, $\Delta = [1; 2]$, $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $n = 5$, $x_0 = \xi_0 = 1$, $x_1 = \xi_1 = 1,1$,
 $x_2 = \xi_2 = 1,12$, $x_3 = \xi_3 = 1,14$, $x_4 = \xi_4 = 1,6$, $x_5 = 2$.

4. $f(x) = e^x$, $\Delta = [0; 1]$, $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $n = 4$, $x_0 = \xi_0 = 0$, $x_1 = \xi_1 = 0, 2$,
 $x_2 = \xi_2 = 0, 4$, $x_3 = \xi_3 = 0, 5$, $x_4 = 1$.

2. Для вказаного ε знайдіть таке δ , що $\left| \int_a^b f(x) dx - \sigma_f(\tau; \xi) \right| < \varepsilon$, якщо $\lambda < \delta$

1. $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$, $b = 3$.

2. $f(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi / 2$.

3. Доведіть твердження

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{k/n}}{n + k/n} = \int_0^1 2^x dx$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{\pi}{n^4} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2 + \cos \frac{k\pi}{n}} = \int_0^\pi \frac{1}{2 + \cos x} dx$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{k^m}{n^{m+1}} = \int_0^1 x^m dx$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \ln 2$.

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp(k/n) = e - 1$.

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} \cos(k\pi / 2n) = 1 / \pi$.

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} a(q-1) \sum_{k=0}^{n-1} (aq^k)^m q^k = \frac{b^{m+1} - a^{m+1}}{m+1}$, $-\infty < a < b < +\infty$, $q = \sqrt{b/a}$.

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n}{n^2 + k^2} = \frac{\pi}{4}$.

4. Знайти границі

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{4n-1} k^2$.

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-1} k$.

3. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sum_{k=1}^n \frac{1}{n^2 + k^2}$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{(nx+k)(nx+k+1)}$.

5. Знайдіть інтеграл, виходячи з його означення

1. $\int_1^2 x^2 dx$.

2. $\int_0^1 e^x dx$.

6. З'ясуйте, чи функція $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку Δ

$$1. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^3}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$2. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$3. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{\sin \pi x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$4. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$5. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x - x}{x^4}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$6. \Delta = [-3; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x-2||x+4|}}, & x \notin \{2; -4\}, \\ 1, & x \in \{2; -4\}. \end{cases}$$

$$7. \Delta = [-1; 5], f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{|x-2||x+4|}}, & x \notin \{2; -4\}, \\ 1, & x \in \{2; -4\}. \end{cases}$$

$$8. \Delta = [-5; 5], f(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} [e^{-x^2}].$$

$$9. \Delta = [-5; 3], f(x) = \left[\frac{\sin x + 2}{x^2 + 1} \right] e^{-|x|}.$$

$$10. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

$$11. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$12. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

- $$13. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{e^{1/x} - 1 - 1/x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$
- $$14. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} x^3 \left(e^{1/x} - 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- $$15. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- $$16. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- $$17. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- $$18. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^4}, & x \neq 0, \\ 4, & x = 0. \end{cases}$$
- $$19. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- $$20. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} x^2 \left(\cos \frac{1}{x} - 1 \right), & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$
- $$21. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - 1 - \frac{x^2}{2}}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$
- $$22. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x + x^2/2}{x^3}, & x \neq 0, \\ 5, & x = 0. \end{cases}$$

$$23. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+x) - x}{x^3}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$24. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 4, & x = 0. \end{cases}$$

$$25. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x - x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

$$26. \Delta = [-1;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\arcsin x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0. \end{cases}$$

$$27. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0. \end{cases}$$

$$28. \Delta = [-1;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg} x - e^x - 1}{x^2}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

$$29. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - e^x}{x^2}, & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

$$30. \Delta = [-1;1], f(x) = \begin{cases} \frac{\cos x - e^x}{x^2}, & x \neq 0, \\ -2, & x = 0. \end{cases}$$

$$31. \Delta = [-1;1], f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 - 3x + 4}, & x \neq 0, \\ -2, & x = 0. \end{cases}$$

$$32. \Delta = [-1;1], f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 3x - 4}, & x \notin \{1; -4\}, \\ -2, & x \in \{1; -4\}. \end{cases}$$

$$33. \Delta = [-8;3], f(x) = x[x].$$

$$34. \Delta = [-8\pi;3\pi], f(x) = x[\sin x].$$

$$35. \Delta = [0;1], f(x) = \begin{cases} \frac{[\sin x]}{x^2}, & x \neq 0, \\ -2, & x = 0. \end{cases}$$

$$36. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\sin x}{x^2} \right], & x \neq 0, \\ -2, & x = 0. \end{cases}$$

$$37. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right], & x \neq 0, \\ -3, & x = 0. \end{cases}$$

$$38. \Delta = [0; 1], f(x) = \begin{cases} \left[\frac{\operatorname{tg} x}{x} \right], & x \neq 0, \\ -1, & x = 0. \end{cases}$$

$$39. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{arctg} x - x}{x}, & x \neq 0, \\ 4, & x = 0. \end{cases}$$

$$40. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

$$41. \Delta = [-1; 1], f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

7. Знайдіть

$$1. \int_1^2 \left(\frac{1}{3x} + \sqrt{2x} \right) dx.$$

$$2. \int_{-2}^1 (2\sqrt[3]{x} - \sqrt{3}) dx.$$

$$3. \int_{-4}^{-1} \left(\ln 2 - \frac{1}{2x^2} \right) dx.$$

$$4. \int_0^1 (e^{-2x+1} - \sqrt{2}) dx.$$

$$5. \int_0^1 (1 - 2x)^9 dx.$$

$$6. \int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x^3}{\sqrt{9 - x^4}} dx.$$

$$7. \int_0^1 \frac{x dx}{3 + 2x^2}.$$

$$8. \int_0^1 x^2 \sqrt[3]{1 - x^3} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx.$$

$$10. \int_0^{\sqrt[4]{3}} \frac{x}{\sqrt{9 - x^4}} dx.$$

$$11. \int_{-4}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{-x}}.$$

$$12. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x} dx.$$

$$13. \int_0^{1/2} \frac{\arcsin^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$14. \int_0^{1/2} \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$15. \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$16. \int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^2} \arccos x} dx.$$

$$17. \int_0^{1/\sqrt{2}} x \sin \pi x^2 dx.$$

$$18. \int_0^{\sqrt{\pi/2}} x \cos x^2 dx.$$

$$19. \int_e^{e^2} \frac{1}{x \ln x} dx.$$

$$20. \int_1^e \frac{\ln^2 x}{x} dx.$$

$$21. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sin^2 2x} dx.$$

$$22. \int_{-4}^{-1} \sqrt{-x} dx.$$

$$23. \int_{-8}^0 \sqrt[4]{-x} dx.$$

$$24. \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\cos^2 2x} dx.$$

$$25. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{\operatorname{ctg} x}{\sin^2 x} dx.$$

$$26. \int_0^{\pi/3} \frac{\operatorname{tg} x}{\cos^2 x} dx.$$

$$27. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{x} \operatorname{ctg} \sqrt{x} \sin^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$28. \int_{(\pi/6)^3}^{(\pi/3)^3} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2} \cos^2 \sqrt[3]{x}} dx.$$

$$29. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{x \sin^2 \ln x} dx.$$

$$30. \int_0^{\pi/3} \frac{1}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}} dx.$$

$$31. \int_1^2 (3x^4 + \sqrt{2x}) dx.$$

$$32. \int_0^1 (2\sqrt[4]{x} + \sqrt{3}) dx.$$

$$33. \int_{-4}^{-1} (\ln 2 - x^2) dx.$$

$$34. \int_0^1 (e^{-x} - 1) dx.$$

$$35. \int_0^1 (1+2x)^{11} dx.$$

$$36. \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} dx.$$

$$37. \int_0^1 \frac{dx}{1+2x^2}.$$

$$38. \int_0^1 \sqrt[3]{1-x} dx.$$

39. $\int_0^1 (2^{-x} - 1) dx.$

40. $\int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^{2x}} dx.$

41. $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}.$

42. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{tg}(-x) dx.$

43. $\int_0^1 \frac{dx}{2+x^2}.$

44. $\int_0^1 \frac{dx}{2+9x^2}.$

45. $\int_0^1 \sqrt{1+2x} dx.$

46. $\int_0^{1/4} \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

47. $\int_0^{1/4} \frac{x}{\sqrt{1-9x^2}} dx.$

48. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}} dx.$

49. $\int_{1/\pi}^{2/\pi} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx.$

50. $\int_0^3 x\sqrt{9-x^2} dx.$

51. $\int_0^{\pi/2} \sin 2x dx.$

52. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x dx.$

8. Знайдіть

1. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - x + 2}.$

2. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 + x + 2}.$

3. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(-2x+1)(-2x+5)}.$

4. $\int_2^3 \frac{2+2x}{1-x^2} dx.$

5. $\int_{-3}^{-2} \frac{2+3x}{(x+1)^3} dx.$

6. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 3x + 2}.$

7. $\int_{-1}^0 \frac{x dx}{x+2}.$

8. $\int_{-1}^1 \frac{x-1}{x-2} dx.$

9. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 3x + 2} dx.$

10. $\int_{-1}^0 \frac{x+2}{1-2x} dx.$

11. $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx.$

12. $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+2x^2} dx.$

13. $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1} dx.$

14. $\int_{-1}^0 \frac{x^2}{x-1} dx.$

15. $\int_0^1 \frac{x^3}{x+1} dx.$

16. $\int_{-2}^0 \frac{x^3}{x-1} dx.$

17. $\int_2^3 \frac{x^4 dx}{x^2-1}.$

18. $\int_{-1}^1 \frac{x^4 dx}{x^2+1}.$

19. $\int_{-1}^0 \frac{x^2+2}{x+2} dx.$

20. $\int_{-2}^0 \frac{x^2-2}{x-2} dx.$

21. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-1)(x+3)}.$

22. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$

23. $\int_0^1 \frac{2+2x}{1+x^2} dx.$

24. $\int_{-1}^0 \frac{1-2x}{x^2+1} dx.$

25. $\int_0^1 \frac{x+1}{2x+1} dx.$

26. $\int_2^3 \frac{x}{(x-1)^2} dx.$

27. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2-4x+3}.$

28. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+3}.$

29. $\int_0^1 \frac{1+2x}{x^2+1} dx.$

30. $\int_0^1 \frac{1-x}{1+2x^2} dx.$

31. $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{x-1} dx.$

32. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{x^2+1}.$

33. $\int_1^2 \frac{1}{x^2+1} dx.$

34. $\int_5^6 \frac{dx}{x^2-4}.$

35. $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{x^2-4x+3}.$

36. $\int_0^1 \frac{xdx}{x^2+4x+3}.$

37. $\int_{-1}^0 \frac{2x+3}{x^2+x+2} dx.$

38. $\int_0^1 \frac{(1-2x)dx}{x^2-x+2}.$

39. $\int_{-1/2}^1 \frac{xdx}{x^2+x+1}.$

40. $\int_{-1/2}^0 \frac{xdx}{x^2-x+1}.$

41. $\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2}.$

42. $\int_{-1}^0 \frac{dx}{(x-2)(x-1)^2}.$

43. $\int_{-2}^0 \frac{x+1}{(x-1)^2} dx.$

44. $\int_2^3 \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)}.$

45. $\int_{-3}^{-2} \frac{dx}{(x+1)^2(x-1)}.$

46. $\int_0^1 \frac{x-1}{(x+1)^3} dx.$

47. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-x+5}.$

48. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{x^2+x+5}.$

49. $\int_0^1 \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2+1} dx.$

50. $\int_{-1}^0 \frac{3x^5+x^2+1}{x^2+1} dx.$

51. $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{(x^2+x+1)^2}.$

52. $\int_{-1}^0 \frac{x+1}{(x^2+2x+9)^2} dx.$

53. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2(x^2-3x+4)}.$

54. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{x^2(x^2-5x+6)}.$

9. Знайдіть

1. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx.$

2. $\int_{-\pi/2}^0 \cos^2 x dx.$

3. $\int_{-\pi/2}^0 \cos^3 x dx.$

4. $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x dx.$

5. $\int_0^{\pi} \sin^4 x dx.$

6. $\int_{-\pi}^0 \cos^4 x dx.$

7. $\int_0^{\pi/2} \sin x \sin 3x dx .$

8. $\int_0^{\pi/2} \cos x \sin 3x dx .$

10. Знайдіть

1. $\int_0^{\pi/4} \ln(1 + \operatorname{tg} x) dx .$

2. $\int_1^e \ln^2 x dx .$

3. $\int_0^1 \arcsin^2 x dx .$

4. $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx .$

5. $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x}{\sin^2 x} dx .$

6. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx .$

7. $\int_1^e (1 - \ln x)^2 dx .$

8. $\int_{1/e}^1 x \ln^2 x dx .$

9. $\int_1^e (1+x) \ln x dx$

10. $\int_{1/e}^1 x^{10} \ln x dx .$

11. $\int_0^{\pi/2} (x^2 + x) \sin x dx .$

12. $\int_{-1}^0 (x+1) \arcsin x dx .$

13. $\int_0^1 (x^2 - x) e^x dx .$

14. $\int_0^1 (x^2 + x) e^{-2x} dx .$

15. $\int_{-\pi}^0 (x^3 + x) \sin x dx .$

16. $\int_{-\pi/2}^0 (x^3 - x) \cos 2x dx .$

17. $\int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx .$

18. $\int_{\sqrt{3}/3}^1 \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx .$

19. $\int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx .$

20. $\int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx .$

21. $\int_0^{\pi} x^5 \cos x dx .$

22. $\int_{-\pi/2}^0 x^4 \sin x dx .$

23. $\int_0^1 \arcsin x dx$.

24. $\int_0^1 x \arcsin x dx$.

25. $\int_0^1 x e^{-x} dx$.

26. $\int_0^1 x^4 e^{-x} dx$.

27. $\int_0^1 x^2 \arcsin x dx$.

28. $\int_0^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

29. $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

30. $\int_0^1 x^2 \operatorname{arctg} x dx$.

31. $\int_0^1 x^2 e^x dx$.

32. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$.

33. $\int_0^1 \arccos x dx$.

34. $\int_0^1 x \arccos x dx$.

35. $\int_1^e x^3 \ln x dx$.

36. $\int_1^2 x \lg x dx$.

37. $\int_{-2}^0 (x^2 + 2) e^{x/2} dx$.

38. $\int_1^8 \frac{\ln^2 x dx}{x^{3/2}}$.

11.3' ясуйте, чи правильні міркування

$$1. \int_{-1}^1 \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arctg} \frac{1}{x} \Big|_{-1}^1 = -\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

$$2. 2 = \int_{-1}^1 dx = \int_1^1 dt^{3/2} = 0 \text{ (заміна } x = t^{3/2}).$$

$$3. \int_0^{2\pi} \frac{1}{4-3\cos x} dx = \int_0^0 \frac{2dt}{1+7t^2} = 0 \text{ (заміна } \operatorname{tg} x / 2 = t).$$

$$4. \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{\cos^2 x} dx = \int_0^{\pi} \cos x dx = 0.$$

$$5. \int_0^2 \frac{1}{(x-1)^2} dx = -\frac{1}{x-1} \Big|_0^2 = -2.$$

$$6. \int_1^7 (x^2 - 5x + 13) dx = \frac{1}{2} \int_8^{20} \frac{t}{\sqrt{t-4}} dt = \frac{1}{3} (t-4)^{3/2} + 4(t-4)^{1/2} \Big|_8^{20} = \frac{28}{3} \quad (\text{заміна}$$

$$x = 3 + \sqrt{t-4}).$$

$$7. \int_1^7 (x^2 - 5x + 13) dx = -\frac{1}{2} \int_8^{20} \frac{t}{\sqrt{t-4}} dt = -\frac{1}{3} (t-4)^{3/2} - 4(t-4)^{1/2} \Big|_8^{20} = -\frac{28}{3} (\text{заміна}$$

$$x = 3 - \sqrt{t-4}).$$

$$8. \int_0^1 x dx = \int_0^{\pi/2} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \quad (\text{заміна } x = \sin t).$$

$$9. \int_0^1 x dx = \int_0^{5\pi/2} \sin t \cos t dt = \frac{1}{2} \quad (\text{заміна } x = \sin t).$$

12. Знайдіть

$$1. \int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2 - 1}}.$$

$$2. \int_0^2 \frac{1}{x + \sqrt{4 - x^2}} dx.$$

$$3. \int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}.$$

$$4. \int_0^3 \frac{1}{(3+x^2)^{5/2}} dx.$$

$$5. \int_{\sqrt{2}/2}^1 \frac{\sqrt{1-x^2} dx}{x^2}.$$

$$6. \int_{2,5}^5 \frac{\sqrt{25-x^2}}{x^4} dx.$$

$$7. \int_{2,5}^5 \frac{\sqrt{(25-x^2)^3}}{x^4} dx.$$

$$8. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$$

$$9. \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(1+x^2)^3}.$$

$$10. \int_0^2 \frac{\sqrt{e^x}}{\sqrt{e^x + e^{-x}}} dx.$$

$$11. \int_{-1}^1 \frac{x dx}{\sqrt{5-4x}}.$$

$$12. \int_0^2 (\sqrt{4-x^2})^3 dx.$$

$$13. \int_1^5 \frac{x dx}{\sqrt{4x+5}}.$$

$$14. \int_0^4 \frac{1}{1 + \sqrt{2x+1}} dx.$$

$$15. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} dx.$$

$$16. \int_0^1 \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+2}} dx.$$

17. $\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx.$

18. $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx.$

19. $\int_0^4 x^3 \sqrt{9+x^2} dx.$

20. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

21. $\int_0^1 \frac{x^4}{\sqrt{1+x}} dx.$

22. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}} dx.$

23. $\int_4^9 \frac{1}{\sqrt{x}-1} dx.$

24. $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx.$

25. $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx.$

26. $\int_0^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx.$

27. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx.$

28. $\int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx.$

29. $\int_9^{64} \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx.$

30. $\int_1^4 \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)^2}.$

31. $\int_0^4 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx.$

32. $\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}.$

33. $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx.$

34. $\int_0^3 (\sqrt{9-x^2})^3 dx.$

35. $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{(4+x^2)^2}.$

36. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2} dx}{1+x^2}.$

37. $\int_0^2 \sqrt{2x+x^2} dx.$

38. $\int_1^2 \frac{dx}{(\sqrt{1+x})^3 + \sqrt{1+x}}.$

39. $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{1+5x+x^2}}.$

40. $\int_{-1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$

41. $\int_1^3 \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$

42. $\int_{-3}^3 \frac{x^2}{\sqrt{9+x^2}} dx.$

13. Знайдіть

1. $\int_{-1}^2 \sqrt[3]{|x-1|} dx.$

2. $\int_{-3}^5 \sqrt[3]{|4-x|} dx.$

3. $\int_{-1}^{1/2} |\arcsin x| dx.$

4. $\int_{-1}^{1/2} |\arccos x| dx.$

5. $\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} |\arctg x| dx.$

6. $\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} |\operatorname{arcctg} x| dx.$

7. $\int_{1/e}^e |1 - \ln x| dx.$

8. $\int_{-1}^1 |e^x - 1| dx.$

9. $\int_{-2}^1 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; -1), \\ |x|, & x \in [-1; 1]. \end{cases}$

10. $\int_{-1}^1 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0), \\ |x|, & x \in [0; 1]. \end{cases}$

11. $\int_{-2}^1 \sqrt{|x-1|} dx.$

12. $\int_{-2}^6 \sqrt{|4-x|} dx.$

13. $\int_{-1}^{1/2} \arcsin |x| dx.$

14. $\int_{-1}^{1/2} \arccos |x| dx.$

15. $\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \arctg |x| dx.$

16. $\int_{-1}^{\sqrt{3}/3} \operatorname{arcctg} |x| dx.$

17. $\int_{1/e}^e |1 + \ln x| dx.$

18. $\int_{-\sqrt{3}/2}^1 |\arctg x| dx.$

19. $\int_{-2}^1 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-2; -1), \\ 1, & x \in [-1; 1]. \end{cases}$

20. $\int_{-1}^2 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x \in [0; 2]. \end{cases}$

$$21. \int_{-2}^1 |x^2 - 1| dx.$$

$$22. \int_{-2}^3 |4 - x^2| dx.$$

$$23. \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\operatorname{tg} x| dx.$$

$$24. \int_{-\pi/2}^{3\pi/4} |\cos |x|| dx.$$

$$25. \int_{-\pi/2}^{\pi/6} |\sin |x|| dx.$$

$$26. \int_{-\pi/2}^{3\pi/4} \cos |x| dx.$$

$$27. \int_{1/e}^e |\ln^2 x| dx.$$

$$28. \int_{-\sqrt{3}/2}^1 |x \operatorname{arctg} |x|| dx.$$

$$29. \int_{-2}^1 |x| dx.$$

$$30. \int_{-2}^3 |x - 1| dx.$$

$$31. \int_{\pi/2}^{3\pi/2} |\sin x| dx.$$

$$32. \int_{-\pi/2}^{3\pi/4} |\cos x| dx.$$

$$33. \int_{-\pi/2}^{\pi/6} \sin |x| dx.$$

$$34. \int_{-\pi/2}^{3\pi/4} \cos |x| dx.$$

$$35. \int_{1/e}^e |\ln x| dx.$$

$$36. \int_{-\sqrt{3}/2}^1 |x \operatorname{arctg} x| dx.$$

$$37. \int_{-2}^1 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-2; -1), \\ -2, & x \in [-1; 0), \\ x, & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$38. \int_1^4 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [1; 2), \\ x, & x \in [2; 3), \\ x^2, & x \in [3; 4]. \end{cases}$$

$$39. \int_{-2}^1 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} -x, & x \in [-2; -1), \\ 2, & x \in [-1; 0), \\ x^3, & x \in [0; 1]. \end{cases}$$

$$40. \int_1^4 f(x) dx, f(x) = \begin{cases} x, & x \in [1; 2), \\ x^2, & x \in [2; 3), \\ x, & x \in [3; 4]. \end{cases}$$

14. Знайдіть

$$1. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 - \cos x)}.$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{2 + \cos x}.$$

$$3. \int_{\pi/2}^{2 \operatorname{arctg} 2} \frac{dx}{\sin^2 x (1 + \cos x)}.$$

$$4. \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{5 + 3 \sin x}.$$

$$5. \int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos x (1 + \cos x)}.$$

$$6. \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2} dx.$$

$$7. \int_{\pi/2}^{\operatorname{arctg} 3} \frac{dx}{(3 \operatorname{tg} x + 5) \sin 2x}.$$

$$8. \int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x^4} dx.$$

$$9. \int_{\arccos(1/\sqrt{16})}^{\arccos(1/\sqrt{26})} \frac{12 dx}{(6 + 5 \operatorname{tg} x) \sin 2x}.$$

$$10. \int_0^{\pi/4} \frac{7 + 3 \operatorname{tg} x}{(\sin x + 2 \cos x)^2} dx.$$

$$11. \int_0^{16} (\sqrt{256 - x^2})^3 dx.$$

$$12. \int_{2 \operatorname{arctg}(1/2)}^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{(1 - \cos x)^2}.$$

$$13. \int_0^2 \frac{dx}{(4 + x^2)^{3/2}}.$$

$$14. \int_{\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^4} dx.$$

$$15. \int_0^1 \frac{x^4}{(2 - x^2)^{3/2}} dx.$$

$$16. \int_{\arccos(4/\sqrt{17})}^{\pi/4} \frac{2 \operatorname{ctg} x + 1}{(2 \sin x + \cos x)^2} dx.$$

$$17. \int_0^1 (\sqrt{9 - x^2})^3 dx.$$

$$18. \int_0^{\pi/4} \operatorname{tg} x \ln \cos x dx.$$

$$19. \int_1^3 \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}(x+1)} dx.$$

$$20. \int_0^e \sqrt{x} \ln^2 x dx.$$

21. $\int_2^3 (x-1) \ln^2(x-1) dx.$

22. $\int_0^{\pi/2} \frac{\operatorname{tg}^2 x}{4+3 \cos 2x} dx.$

23. $\int_0^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x dx.$

24. $\int_0^{\pi^2} \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx.$

25. $\int_0^4 x^3 \sqrt{x^2+9} dx.$

26. $\int_0^4 x \sqrt{x^2+9} dx.$

27. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x dx}{(1+\sin x)^2}.$

28. $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{4+x^2}.$

29. $\int_1^9 \sqrt{x} \ln x dx.$

30. $\int_0^1 \sqrt{x} e^{\sqrt{x}} dx.$

31. $\int_0^1 x e^{\sqrt{x}} dx.$

32. $\int_0^{\pi^2} \cos \sqrt{x} dx.$

33. $\int_0^1 \frac{\arcsin \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$

34. $\int_0^3 \operatorname{sgn}(x-x^3) dx.$

35. $\int_0^{\pi/2} \sin^4 x dx.$

36. $\int_0^{\pi/2} \cos^4 x dx.$

37. $\int_0^1 \frac{\arccos \sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}} dx.$

38. $\int_{1/2}^2 \frac{x^2-1}{\sqrt{x^2+1}} dx.$

39. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx.$

40. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sin^4 x + \cos^4 x}.$

41. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\sin^5 x} dx.$

42. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{4+\cos^2 x}.$

43. $\int_{0,5}^1 \cos^2(\ln x) dx.$

44. $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^2}.$

15. Доведіть нерівності

$$1. \frac{\pi}{4} \leq \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sqrt{1 + \cos^2 x} dx \leq \frac{\pi\sqrt{6}}{2}.$$

$$2. \frac{\pi + \sin 2}{8} \leq \int_0^1 \frac{\cos^2 x}{1 + x^2} dx \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$3. \frac{2}{3} \leq \int_0^1 \sqrt{1 - x^8} dx \leq 1.$$

$$4. \frac{1}{2(1+e)} \leq \int_0^1 \frac{x}{1+e^x} dx \leq \frac{1}{2}.$$

$$5. 0 < \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^2 \sqrt{x}}{1+x^2} dx \leq \frac{\pi^3}{8}.$$

$$6. \frac{\pi^2}{72} < \int_{1/2}^1 \frac{\arcsin^2 x}{x^2} dx \leq \frac{1}{2}.$$

$$7. 1 \leq \int_0^1 \sqrt{1+x^8} dx \leq \sqrt{2}.$$

$$8. \frac{1}{3} \leq \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^5} dx \leq \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

$$9. 2\sqrt[4]{3} \leq \int_1^3 \sqrt[4]{-x^2 + 4x} dx \leq 2\sqrt{2}.$$

$$10. \frac{8}{5\pi} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/4} \leq \int_0^{\pi/2} \sqrt[4]{\sin x} dx \leq \frac{4}{5} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{5/4}.$$

$$11. \frac{2}{\sqrt[4]{e}} \leq \int_0^2 e^{x^2-x} dx \leq 2e.$$

$$12. e^{-1/e} \leq \int_0^1 x^x dx \leq 1.$$

$$13. \frac{\pi}{2a} (1 - e^{-a}) \leq \int_0^{\pi/2} e^{-a \sin \varphi} d\varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad a > 0.$$

$$14. \frac{2}{3} \leq \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1+x} dx \leq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$15. \frac{2}{3} \leq \int_0^1 \sqrt{x} e^x dx \leq \frac{\sqrt{e^2-1}}{2}.$$

$$16. 1 < \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2}.$$

$$17. \frac{1}{2^n} < \int_0^1 \frac{1}{(x^m + 1)^n} dx < 1, \quad m \in \mathbb{N}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$18. 3/2 < \int_{-\pi/2}^0 \frac{(2x+1)\cos x}{x+2} dx \leq 2.$$

$$19. \int_0^{\pi/2} x \sin^3 x dx \leq \int_0^{\pi/2} e^x \sin^3 x dx \leq \int_0^{\pi/2} e^x dx.$$

$$20. 1 \leq \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \sqrt{x+1} dx \leq \int_0^1 \sqrt{x^2 + x} dx.$$

$$21. 0 \leq \int_0^1 \sqrt{x+1} \ln(1+x) dx \leq \int_0^1 \sqrt{x+1} x dx.$$

$$22. \sqrt[4]{2} \leq \int_2^3 \sqrt[4]{-x^2 + 5x - 4} dx \leq \sqrt{3/2}.$$

$$23. 0 \leq \int_3^4 \sqrt[4]{-x^2 + 5x - 4} dx \leq \sqrt[4]{2}.$$

$$24. 0 \leq \int_3^4 e^{-x^2} \sqrt[4]{-x^2 + 5x - 4} dx \leq \sqrt[4]{2} \int_3^4 e^{-x^2} dx.$$

$$25. 0 < \int_0^{\pi/2} \frac{(x+1)\sin x}{x+2} dx \leq 1.$$

$$26. \sqrt{3/2} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} dx \leq \sqrt{2} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$27. \sqrt{2} \int_0^1 \sin \sqrt{x} dx \leq \int_0^1 \sin \sqrt{x} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+1}} dx \leq \sqrt{3} \int_0^1 \sin \sqrt{x} dx.$$

$$28. \int_0^1 \arctg x dx \leq \int_0^1 \arctg x \frac{e^x - 1}{x} dx \leq \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x} dx.$$

$$29. \frac{3}{2} \int_0^1 \arctg x dx \leq \int_0^1 \arctg x \frac{2x+6}{x+4} dx \leq \frac{\pi}{4} \int_0^1 \frac{2x+6}{x+4} dx.$$

$$30. \sqrt{3/2} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx \leq \int_0^1 e^{\sqrt{x}} \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x+1}} dx \leq \sqrt{2} \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$31. \sqrt[4]{6/5} \leq \int_1^2 \sqrt[4]{\frac{x+4}{x+3}} dx \leq \sqrt[4]{4/3}.$$

$$32. \sqrt[4]{6/5} \int_1^2 e^{x^2} dx \leq \int_1^2 e^{x^2} \sqrt[4]{\frac{x+4}{x+3}} dx \leq \sqrt[4]{4/3} \int_1^2 e^{x^2} dx.$$

$$33. e \int_1^2 \sqrt[4]{\frac{x+4}{x+3}} dx \leq \int_1^2 e^{x^2} \sqrt[4]{\frac{x+4}{x+3}} dx \leq e^4 \int_1^2 \sqrt[4]{\frac{x+4}{x+3}} dx.$$

$$34. 0 \leq \int_0^\pi x \sqrt{\sin x} dx \leq 2\pi^3 / 3.$$

$$35. 0 \leq \int_0^1 \sqrt{x} \sqrt{1+4x^3} dx \leq \frac{5}{2}.$$

$$36. 0 \leq \int_1^2 \sqrt[4]{-x^2 + 5x - 4} dx \leq \sqrt[4]{2}.$$

$$37. -2 < \int_{-\pi/2}^0 \frac{(2x+1)\sin x}{x+2} dx \leq -3/2.$$

$$38. 0 < \int_0^{\pi/2} \frac{(x+1)\cos x}{x+2} dx \leq 1.$$

$$39. \frac{1}{2} < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-x^{2n}}} dx < \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{N}.$$

$$40. \frac{1}{2} < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2+x^3}} dx < \frac{\pi}{6}.$$

$$41. \frac{\pi}{6} < \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2-x^3}} dx < \frac{\pi}{4\sqrt{2}}.$$

$$42. \int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{x^2 - 2x \cos \varphi + 1} \leq \int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{(x^2 + 1) \min\{1; 1 - \cos \varphi\}}, \varphi \in [0; 2\pi].$$

$$43. \int_2^{+\infty} \frac{1 - x \cos \varphi}{x(x^2 - 2x \cos \varphi + 1)} dx \leq \ln 2, \varphi \in [0; 2\pi].$$

$$44. \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 0.$$

16. Знайдіть похідну функції F

$$1. F(x) = \int_1^{x^2} (1 - \ln t)^2 dt.$$

$$2. F(x) = \int_{2x}^1 t \ln^2 t dt.$$

$$3. F(t) = \int_t^e (1+x) \ln x dx$$

$$4. F(t) = \int_1^{2t} x^{10} \ln x dx.$$

$$5. F(x) = \int_0^{\pi x} (t^2 + t) \sin t dt.$$

$$6. F(y) = \int_{-y}^0 (x+1) \arcsin x dx.$$

$$7. F(y) = \int_{-2y}^1 (x^2 - x) e^x dx.$$

$$8. F(y) = \int_0^{y/2} (x^2 + x) e^{-2x} dx.$$

$$9. F(x) = \int_{-\pi x}^0 (t^3 + t) \sin t dt.$$

$$10. F(x) = \int_{-\pi/2}^{-x} (\tau^3 - \tau) \cos 2\tau d\tau.$$

$$11. F(x) = \int_0^{\cos x} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt.$$

$$12. F(x) = \int_{1/2}^{\sin x} \frac{\sqrt{1+\tau^2}}{\tau^2} d\tau.$$

$$13. F(x) = \int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx.$$

$$14. F(x) = \int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx.$$

$$15. F(x) = \int_0^{\sqrt{x}} y^5 \cos y dy.$$

$$16. F(x) = \int_{-x^2}^0 t^4 \sin t dt.$$

$$17. F(x) = \int_0^{-x} x \arcsin t dt.$$

$$18. F(x) = \int_x^1 x \arcsin t dx.$$

$$19. F(x) = \int_{-x}^1 x e^{-t} dt.$$

$$20. F(x) = \int_{\sqrt{x}}^1 t^4 e^{-t} dt.$$

$$21. F(t) = \int_{-t}^t x^2 \arcsin x dx.$$

$$22. F(y) = \int_{-y}^1 \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

$$23. F(y) = \int_{-2y}^{1/y} e^{\sqrt{x}} dx.$$

$$24. F(y) = \int_y^{-y/2} e^{-2 \sin x} dx.$$

$$25. F(x) = \int_{-\pi x}^{x^2} \sin \sqrt{t} dt.$$

$$26. F(x) = \int_{-\pi/2}^{-\frac{1}{2} \operatorname{arctg}^2 x} \cos \sqrt{2\tau} d\tau.$$

$$27. F(x) = \int_0^{\cos^2 x} \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt.$$

$$28. F(x) = \int_{1/2}^{\sin^2 x} \frac{\sqrt{1+\tau^2}}{\tau} d\tau.$$

$$29. F(x) = \int_{-x}^{\sqrt{\ln x}} e^{-t^2} dt.$$

$$30. F(x) = \int_{-\sin x}^{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \operatorname{arctg} t^2 dt.$$

$$31. F(x) = \int_0^{-x} y^5 \cos y dy.$$

$$32. F(x) = \int_0^{\arcsin x} t^4 \sin t dt.$$

$$33. F(x) = \int_{-x}^0 t^4 \sin t dt.$$

$$34. F(x) = \int_x^0 y^5 \cos y dy.$$

$$35. F(x) = \int_0^{\pi/2} x \cos 2x dx.$$

$$36. F(x) = \int_0^{\pi/4} x \sin 2x dx.$$

17. Знайдіть границі

$$1. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x \frac{t^2 \ln t}{1+t} dt}{x^3 \ln x}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} \sin \sqrt{t} dt}{x^3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt}{\sqrt{x}}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \int_0^x \frac{\ln t}{t^3} dt}{\ln x}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \int_1^x \frac{e^t}{t} dt - x e^x}{e^x}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \sqrt[3]{1+t^3} dt}{x^2}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \int_0^x e^{t^2} dt}{e^{x^2}}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_0^x e^{t^2} dt \right)^2}{\int_0^x e^{2t^2} dt}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2 t dt}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \int_0^x \frac{e^t}{t} dt}{e^x}.$$

17. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру.

$$7.31. \frac{319}{15} - \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad 7.32. \frac{8}{5} + \sqrt{3}. \quad 7.33. 3 \ln 2 - 21. \quad 7.34. -\frac{1}{e}. \quad 7.35. \frac{66430}{3}. \quad 7.36.$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{3}}{3}. \quad 7.37. \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \operatorname{arctg} \sqrt{2}. \quad 7.38. \quad 0,75. \quad 7.39. \quad \frac{1}{2} \frac{2 \ln 2 - 1}{\ln 2}. \quad 7.40. \operatorname{arctg} e - \frac{\pi}{4}. \quad 7.41.$$

$$\ln 2. \quad 7.42. \quad -\frac{1}{2} \ln 3. \quad 7.43. \quad \frac{\sqrt{2}}{4} \operatorname{arctg} 2\sqrt{2}. \quad 7.44. \quad \frac{\sqrt{2}}{6} \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{2}}{2}. \quad 7.45. \quad \sqrt{3} - \frac{1}{3}. \quad 7.46.$$

$$\frac{1}{3} \arcsin \frac{3}{4}. \quad 7.47. \quad \frac{1}{9} - \frac{\sqrt{7}}{36}. \quad 7.48. \quad 3 - \sqrt{6}. \quad 7.49. \quad 1. \quad 7.50. \quad 9. \quad 7.51. \quad 1. \quad 7.52. \quad 0. \quad 8.31.$$

$$1 - 2 \ln 2. \quad 8.32. \quad 1 - \frac{\pi}{4}. \quad 8.33. \quad \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4}. \quad 8.34. \quad \frac{1}{4} \ln \frac{7}{6}. \quad 8.35. \quad \frac{3}{2} \ln 3 - \frac{5}{2} \ln 2. \quad 8.36.$$

$$\frac{5}{2} \ln 2 - \frac{3}{2} \ln 3. \quad 8.37. \quad \frac{8\sqrt{7}}{7} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{7}. \quad 8.38. \quad 0. \quad 8.39. \quad \ln 2 - \frac{\pi\sqrt{3}}{9}.$$

$$8.40. \quad \ln 2 + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \ln 7 - \frac{\pi\sqrt{3}}{18}. \quad 8.41. \quad 2 \ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{6}.$$

$$8.42. \quad 2 \ln 2 - \ln 3 - 0,5. \quad 8.43. \quad \frac{4}{3} - \ln 3. \quad 8.44. \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{2}{3}. \quad 8.45. \quad -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2}. \quad 8.46. \quad -\frac{1}{4}.$$

$$8.47. \quad \frac{2}{\sqrt{19}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{19}}{19} + \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{19}}{19} \right). \quad 8.48. \quad \frac{2}{\sqrt{19}} \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{19}}{19} + \operatorname{arctg} \frac{3\sqrt{19}}{19} \right). \quad 8.49.$$

$$\frac{5\pi}{2} - \frac{19}{3}. \quad 8.50. \quad \frac{7}{4} - \frac{3}{2} \ln 2. \quad 8.51. \quad -\frac{2\pi\sqrt{3}}{27} - \frac{1}{3}. \quad 8.52. \quad \frac{1}{144}.$$

$$8.53. \quad \frac{\sqrt{7}}{112} \left(\operatorname{arctg} \sqrt{7} - \operatorname{arctg} \frac{5\sqrt{7}}{7} \right) + \frac{1}{8} + \frac{3}{32} \ln 7 - \frac{3}{8} \ln 2.$$

$$8.54. \quad \frac{1}{12} + \frac{7}{12} \ln 2 - \frac{1}{4} \ln 3 - \frac{1}{9} \ln 5. \quad 10.31. \quad e - 2. \quad 10.32. \quad \frac{\pi^2}{4} - 2. \quad 10.33. \quad 1. \quad 10.34. \quad \frac{\pi}{8}.$$

$$10.35. \quad \frac{3}{16} e^4 + \frac{1}{16}. \quad 10.36. \quad \frac{1}{4} \frac{8 \ln 2 - 3}{\ln 80}. \quad 10.37. \quad 20 - \frac{44}{e}.$$

$$10.38. \quad 16 - 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} \ln 2 - \frac{9\sqrt{2}}{2} \ln^2 2. \quad 12.31. \quad 2 \ln 3. \quad 12.32. \quad 6 - 4 \ln 2. \quad 12.33. \quad \pi.$$

$$12.34. \quad \frac{243\pi}{16}. \quad 12.35. \quad \frac{\pi}{16} - \frac{1}{8}. \quad 12.36. \quad -\ln(2 - \sqrt{3}) - \ln(1 + \sqrt{2}). \quad 12.37.$$

$$3\sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln(3 + 2\sqrt{2}). \quad 12.38. \quad \frac{2\pi}{3} - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{2}. \quad 12.39. \quad \ln \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{7} - 6}. \quad 12.40. \quad \frac{\pi}{6}. \quad 12.41.$$

$$\frac{\pi}{6} - \ln 2. \quad 12.42. \quad 9\sqrt{2} + 9 \ln(\sqrt{2} - 1). \quad 13.31. \quad 2. \quad 13.32. \quad 3 - \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 13.33. \quad 2 - \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 13.34.$$

$$1 + \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad 13.35. \quad 2 - \frac{2}{e}. \quad 13.36. \quad \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{7}{8} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad 13.37. \quad -3. \quad 13.38. \quad \frac{103}{6}. \quad 13.39.$$

$$\begin{aligned}
& 3,75 \quad \mathbf{13.40.} \quad \frac{34}{3} \quad \mathbf{14.31.} \quad 12 - 4e \quad \mathbf{14.32.} \quad -4 \quad \mathbf{14.33.} \quad \frac{\pi^2}{4} \quad \mathbf{14.34.} \quad \frac{65}{4} \quad \mathbf{14.35.} \quad \frac{3\pi}{16} \\
& \mathbf{14.36.} \quad \frac{3\pi}{16} \quad \mathbf{14.37.} \quad -\frac{65}{4} \quad \mathbf{14.38.} \quad \frac{7\sqrt{5}}{8} + \frac{3}{2} \ln \frac{(\sqrt{5}+1)(\sqrt{5}-2)}{2} \quad \mathbf{14.39.} \quad \sqrt{3} \quad \mathbf{14.40.} \\
& 2\sqrt{2}\pi \quad \mathbf{14.41.} \quad \frac{7\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{8} \ln(2-\sqrt{3}) \quad \mathbf{14.42.} \quad \frac{\sqrt{5}\pi}{5} \\
& \mathbf{14.43.} \quad \frac{2}{5} + \frac{1}{5} \sin(\ln 2) \cos(\ln 2) - \frac{1}{10} \cos^2 \ln 2 \quad \mathbf{14.44.} \quad \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2 \quad \mathbf{16.31.} \quad x^5 \cos x \quad \mathbf{16.32.} \\
& \frac{x \arcsin^4 x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \mathbf{16.33.} \quad -x^4 \sin x \quad \mathbf{16.34.} \quad -x^5 \cos x \quad \mathbf{16.35.} \quad 0 \quad \mathbf{16.36.} \quad 0.
\end{aligned}$$

Розділ 8. Невласні (невластиві) інтеграли та інші узагальнення інтеграла Рімана

В означенні інтеграла Рімана припускалось, що проміжок $[a;b]$ є обмеженим. Крім цього, інтегровними за Ріманом не можуть бути необмежені функції. Тепер ми розширимо поняття інтеграла так, що інтегровними стануть деякі необмежені функції і можна буде знаходити інтеграли по нескінченних проміжках.

1. Означення невластного інтеграла і його найпростіші властивості.

Нехай функція $f:[a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровою за Ріманом на будь-якому проміжку $[a;\eta]$, який належить обмеженому або необмеженому проміжку $[a;b)$, $a \in \mathbb{R}$. Невласним або невластивим інтегралом функції $f:[a;b) \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a;b)$ називається границя (якщо $b = +\infty$, то $b^- := +\infty$)

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\eta \rightarrow b^-} \int_a^{\eta} f(x)dx. \quad (1)$$

Якщо границя (1) існує і є скінченною, то функція f називається інтегровою у невластному розумінні на $[a;b)$ (інколи зручніше говорити на $[a;b]$ або невластному розумінні на $[a;b]$ з особливою точкою b). Якщо границя (1) не існує або рівна ∞ , то невластний інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx \quad (2)$$

називається розбіжним.

Теорема 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, то вона інтегровна на $[a; b]$ в невластному розумінні і її невластний інтеграл дорівнює інтегралу Рімана.

Доведення. Справді, згідно з властивостями інтегралів зі змінною верхньою межею (в обидвох частинах цієї рівності під інтегралом розуміється інтеграл Рімана)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b^-} \int_a^\eta f(x) dx. \blacktriangleright$$

Теорема 2 (однорідність інтеграла). $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ для будь-якої

сталой c , якщо останній інтеграл є збіжним.

Доведення. Справді,

$$\int_a^b cf(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b^-} \int_a^\eta cf(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b^-} c \int_a^\eta f(x) dx = c \lim_{\eta \rightarrow b^-} \int_a^\eta f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx. \blacktriangleright$$

Теорема 3 (адитивність інтеграла).

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx,$$

якщо останні інтеграли є збіжними.

Доведення. Ця теорема, як і попередня, випливає з відповідної теореми для інтеграла Рімана. \blacktriangleright

Теорема 4 (лінійність інтеграла). $\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)) dx =$

$c_1 \int_a^b f_1(x) dx + c_2 \int_a^b f_2(x) dx$ для будь-яких чисел c_1 і c_2 , якщо останні два інтеграли є збіжними.

Доведення. Ця теорема випливає з двох попередніх. \blacktriangleright

Аналогічно визначається невластний інтеграл на лівому кінці проміжку $(a; b]$, $b \in \mathbb{R}$. Нехай функція $f : (a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta; b] \subset (a; b]$. Невласним інтегралом функції f на $(a; b]$ (інколи зручніше говорити на $[a; b]$ або невластним інтегралом на $[a; b]$ з особливою точкою a) називається границя (якщо $a = -\infty$, то $a+ := -\infty$)

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow a^+} \int_\eta^b f(x) dx. \quad (3)$$

При дослідженні невластних інтегралів потрібно з'ясувати спочатку, в яких точках цей інтеграл є невластним.

$$\text{Приклад 1. } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} x^{-2} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{\eta} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\eta} + 1 \right) = 1$$

(на практиці часто границі знаходять усно і відповідні записи виглядають так:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^{+\infty} = 1).$$

$$\text{Приклад 2. } \int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = (\arctg x) \Big|_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Приклад 3. } \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_0^{\eta} x e^{-x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left((-x e^{-x}) \Big|_0^{\eta} + \int_0^{\eta} e^{-x} dx \right)$$

$= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} ((-\eta e^{-\eta} - e^{-\eta}) + 1) = 1$ (часто границі знаходять усно і записи виглядають

$$\text{так: } \int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = (-x e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = (-x e^{-x} - e^{-x}) \Big|_0^{+\infty} = 1).$$

Приклад 4.

$$\int_e^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_e^{\eta} \frac{1}{x \ln^2 x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(\left(-\frac{1}{\ln x} \right) \Big|_e^{\eta} \right) = 1.$$

Приклад 5. Інтеграл $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx$ є розбіжним, бо

$$\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln \ln x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{e^2}^{\eta} \frac{1}{\ln \ln x} d \ln \ln x = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left((\ln \ln \ln x) \Big|_{e^2}^{\eta} \right) = +\infty.$$

Приклад 6. Інтеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ є розбіжним, бо

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\eta}^1 = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\eta} - 1 \right) = +\infty.$$

Приклад 7. Інтеграл

$$\int_0^2 \frac{dx}{x-2}$$

є розбіжним, бо

$$\lim_{\eta \rightarrow 2^-} \int_0^{\eta} \frac{dx}{x-2} = \lim_{\eta \rightarrow 2^-} (\ln |x-2|) \Big|_0^{\eta} = -\infty.$$

Приклад 8. Інтеграл $\int_0^1 \ln x dx$ є розбіжним, бо

$$\int_0^1 \ln x dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^1 \ln x dx = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left(x \ln x \Big|_{\eta}^1 - \int_{\eta}^1 dx \right) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (-\eta \ln \eta - 1 + \eta) = -1.$$

Приклад 9.

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)} dx &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \frac{1}{x(x+1)} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx \\ &= \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left((\ln x - \ln(x+1)) \Big|_1^{\eta} \right) = \ln 2. \end{aligned}$$

2. Деякі властивості невластних інтегралів. На невластні інтеграли можна перенести ряд інших властивостей і теорем, які справедливі для інтегралів Рімана.

Теорема 1. Якщо функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b)$ і для деякої первісної F функції f на проміжку $[a; b)$ існує границя $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x) := F(b)$, то

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Доведення. Це твердження отримується з відповідної теореми для інтегралу Рімана та означення невластного інтеграла. ►

Теорема 2. Нехай функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b)$, а функція $\varphi : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[\alpha; \beta]$, $\varphi([\alpha; \beta]) = [a; b)$, $\varphi(\alpha) = a$ і $\lim_{t \rightarrow \beta^-} \varphi(t) = b$. Тоді

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt. \quad (2)$$

Доведення. Це твердження отримується з відповідної теореми для інтегралу Рімана та означення невластного інтеграла. ►

Теорема 3. Якщо функції $u : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ і $v : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[a; b)$ і існує границя $\lim_{x \rightarrow b^-} u(x)v(x) := u(b)v(b)$, то

$$\int_a^b u dv = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b v du.$$

Доведення. Це твердження отримується з відповідної теореми для інтегралу Рімана та означення невластного інтеграла. ►

Останню формулу записують часто у вигляді

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du. \quad (3)$$

Приклад 1. Для знаходження інтеграла $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ зробимо заміну $x = \sin t$. Тоді $dx = \cos t dt$, $x \in [0; 1)$ тоді і тільки тоді, коли $t \in [0; \pi/2)$ і $\lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \sin t = 1$. Тому $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos t}{\cos t} dt = \frac{\pi}{2}$. Бачимо, що після заміни та спрощень невластний інтеграл звівся до інтеграла Рімана. Так буває часто.

Приклад 2. Для знаходження інтеграла $I = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$ зробимо заміну $x = 2t$. Тоді

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt.$$

Але

$$\int_0^{\pi/4} \ln \cos t dt = - \int_0^{\pi/4} \ln \sin \left(\frac{\pi}{2} - t \right) d \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u du.$$

Тому

$$I = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t dt = \frac{\pi}{2} \ln 2 + 2I.$$

Отже, $I = -\frac{\pi}{2} \ln 2$.

Приклад 3.

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x} dx = \left(-x e^{-x} \right) \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \left(-x e^{-x} - e^{-x} \right) \Big|_0^{+\infty} = 1.$$

3. Критерій Коші збіжності невластних інтегралів.

Теорема 1. Нехай функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$. Тоді для того, щоб невластний інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

був збіжним, необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta \in (a; b))(\forall \eta' \in (\eta; b))(\forall \eta'' \in (\eta; b)) : \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Доведення. Збіжність інтеграла (1) рівносильна існуванню скінченної границі $\lim_{\eta \rightarrow b^-} \varphi(\eta)$, де

$$\varphi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x) dx.$$

Тому теорема випливає з критерію Коші існування границі функції, бо

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x) dx. \blacktriangleright$$

Наслідок 1. Якщо невластний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ є збіжним, то

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{\eta}^{+\infty} f(x) dx = 0.$$

4. Збіжність невластних інтегралів невід'ємних функцій.

Теорема 1. Нехай функція $f: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$. Тоді для того щоб невластний інтеграл

$$\int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

був збіжним, необхідно і достатньо, щоб

$$(\exists c_1)(\forall \eta \in (a; b)): \int_a^{\eta} f(x) dx \leq c_1. \tag{2}$$

Доведення. Якщо функція f є невід'ємною, то функція $\varphi(\eta) = \int_a^{\eta} f(x) dx$ є

неспадною, бо

$$\varphi(\eta'') - \varphi(\eta') = \int_{\eta'}^{\eta''} f(x) dx \geq 0.$$

якщо $a < \eta' < \eta'' < b$. Умова (2) означає, що функція φ є обмеженою зверху, а для того, щоб неспадна функція мала скінченну границю необхідно і достатньо, щоб вона була обмеженою зверху. Звідси випливає твердження теореми. \blacktriangleright

Теорема 2. Нехай функції $f: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ і $g: [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємними і обмеженими на проміжку $[a; b)$, інтегровними за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$ і

$$(\exists c_1)(\forall x \in [a; b)): f(x) \leq c_1 g(x). \tag{3}$$

Тоді: 1) якщо

$$\int_a^b g(x) dx \tag{4}$$

є збіжним, то збіжним є інтеграл (1); 2) якщо інтеграл (1) є розбіжним, то розбіжним є інтеграл (4).

Доведення. З (3) маємо

$$\int_a^{\eta} f(x) dx \leq c_1 \int_a^{\eta} g(x) dx.$$

Звідси і з попередньої теореми випливає перше твердження теореми, а друге є наслідком першого, бо якщо припустити, що інтеграл (4) збіжний, то за першим твердженням збіжним був би і інтеграл (1), що суперечить умові. ►

Теорема 3. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha > 1$ і є розбіжним, якщо $\alpha \leq 1$.

Доведення. Справді,

$$\int_1^{\eta} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \ln \eta, & \alpha = 1, \\ \frac{1}{-\alpha + 1} \left(\frac{1}{\eta^{\alpha-1}} - 1 \right), & \alpha \neq 1. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

Наслідок 1. Нехай функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$. Тоді: 1) якщо

$$(\exists \alpha > 1)(\exists c_1)(\forall x \in [1; +\infty)) : f(x) \leq \frac{c_1}{x^\alpha},$$

то інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \tag{5}$$

є збіжним; 2) якщо

$$(\exists \alpha \leq 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in [1; +\infty)) : f(x) \geq \frac{c_1}{x^\alpha},$$

то невластний інтеграл (5) є розбіжним.

Наслідок 2. Нехай функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$ і існує

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{-\alpha}} = \gamma.$$

Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то інтеграл (5) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma \leq +\infty$ і $\alpha \leq 1$, то інтеграл (5) є розбіжним.

Приклад 1. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^4+2}} dx$ є збіжним, бо збіжним є інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ і } \frac{1}{\sqrt{x^4+2}} \leq \frac{1}{x^2}, \text{ якщо } x \in [1; +\infty).$$

Приклад 2. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+2}} dx$ є розбіжним, бо розбіжним є інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ і } \frac{1}{\sqrt{x+2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2x}} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{x}}, \text{ якщо } x \in [1; +\infty).$$

Приклад 3. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^7+1}} dx$ є збіжним, бо $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{3/2} \frac{2x^2+1}{\sqrt{x^7+1}} = 2$.

Приклад 4. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/\sqrt{x}}-1}{3\sqrt{x}+1} dx$ є розбіжним, бо $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{e^{1/\sqrt{x}}-1}{3\sqrt{x}+1} = \frac{1}{3}$.

Приклад 5. Нехай функція $f: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$ і

$$f(x) = \frac{\gamma}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то інтеграл (5) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha \leq 1$, то інтеграл (5) є розбіжним.

Приклад 6. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{(1+1/\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}} dx$ є розбіжним, бо згідно з

формулою Тейлора

$$\frac{(1+1/\sqrt{x})^2-1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{x}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - 1 \right) = \frac{2}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Приклад 7. Нехай функція $f: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$ і

$$f(x) = O(1/x^\alpha), \quad x \rightarrow +\infty,$$

для деякого $\alpha > 1$. Тоді інтеграл (5) є збіжним.

Приклад 8. Інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{2x+1}{x^2 \ln^2 x} dx$ є збіжним, бо збіжним є інтеграл

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx \text{ і } \frac{2x+1}{x^2 \ln^2 x} = O\left(\frac{1}{x \ln^2 x}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Теорема 4. $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha < 1$ і є розбіжним, якщо $\alpha \geq 1$.

Доведення. Справді,

$$\int_{\eta}^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} -\ln \eta, & \alpha = 1, \\ \frac{1}{-\alpha + 1} \left(1 - \frac{1}{\eta^{\alpha-1}} \right), & \alpha \neq 1. \end{cases} \blacktriangleright$$

Наслідок 3. Нехай функція $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta;1] \subset (0;1]$. Тоді: 1) якщо

$$(\exists \alpha < 1)(\exists c_1)(\forall x \in (0;1]) : f(x) \leq \frac{c_1}{x^\alpha},$$

то інтеграл

$$\int_0^1 f(x) dx \tag{б}$$

є збіжним; 2) якщо

$$(\exists \alpha \geq 1)(\exists c_1 > 0)(\forall x \in (0;1]) : f(x) \geq \frac{c_1}{x^\alpha},$$

то інтеграл (б) є розбіжним.

Наслідок 4. Нехай функція $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta;1] \subset (0;1]$ і існує

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x^{-\alpha}} = \gamma.$$

Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $\alpha < 1$, то інтеграл (б) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma \leq +\infty$ і $\alpha \geq 1$, то інтеграл (б) є розбіжним.

Приклад 9. Інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^4} dx$ є розбіжним.

Приклад 10. Інтеграл $\int_0^1 \frac{x + 2x^2}{4x^2 + 3x^3} dx$ є розбіжним, бо $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \frac{x + 2x^2}{4x^2 + 3x^3} = \frac{1}{4}$.

Приклад 11. Інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx$ є збіжним, бо збіжним є інтеграл

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \text{ і } 0 \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}, \text{ якщо } x \in (0;1].$$

Приклад 12. Нехай функція $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta;1] \subset (0;1]$ і

$$f(x) = \frac{\gamma}{x^\alpha} + o\left(\frac{1}{x^\alpha}\right), \quad x \rightarrow 0+.$$

Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha < 1$, то інтеграл (б) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha \geq 1$, то інтеграл (б) є розбіжним.

Приклад 13. Інтеграл $\int_0^1 \frac{(1+x)^2 - 1}{x\sqrt{x}} dx$ є збіжним, бо згідно з формулою

Тейлора

$$\frac{(1+x)^2 - 1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x\sqrt{x}}(1 + 2x + o(x) - 1) = \frac{2}{x^{1/2}} + o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right), \quad x \rightarrow 0+.$$

Приклад 14. Нехай функція $f : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta; 1] \subset (0; 1]$ і $f(x) = O(1/x^\alpha)$, $x \rightarrow 0+$, для деякого $\alpha < 1$. Тоді інтеграл (б) є збіжним.

Приклад 15. Інтеграл $\int_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$, $-\infty < a < b < +\infty$, є збіжним, якщо $\alpha < 1$, і є розбіжним, якщо $\alpha \geq 1$, бо

$$\int_a^\eta \frac{dx}{(b-x)^\alpha} = \begin{cases} \ln(b-a) - \ln(b-\eta), & \alpha = 1, \\ \frac{1}{\alpha-1} \left(\frac{1}{(b-\eta)^{\alpha-1}} - \frac{1}{(b-a)^{\alpha-1}} \right), & \alpha \neq 1. \end{cases}$$

5. Ознаки Абеля і Діріхле.

Теорема 1 (Абеля). Нехай функція $\psi : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; +\infty)$, а функція $g : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною і обмеженою на проміжку $[a; +\infty)$. Тоді невластний інтеграл

$$\int_a^{+\infty} \psi(x)g(x)dx \tag{1}$$

є збіжним.

Доведення. Нехай функція g є неспадною. Тоді за другою теоремою про середнє для інтегралів Рімана

$$\int_{\eta'}^{\eta''} \psi(x)g(x)dx = g(\eta'') \int_{\eta'}^{\eta''} \psi(x)dx, \quad a \leq \eta' < c < \eta'' < +\infty.$$

Тому, скориставшись критерієм Коші збіжності невластних інтегралів, приходимо до твердження теореми. ►

Теорема 2 (Діріхле). Нехай функція $\psi : [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є такою, що

$$(\exists c_1)(\forall \eta \in [a; +\infty)) : \left| \int_a^\eta \psi(x)dx \right| \leq c_1,$$

а функція $g:[a;+\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[a;+\infty)$ і $g(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$. Тоді невластний інтеграл (1) є збіжним.

Доведення. Нехай функція g є неспадною. Тоді за другою теоремою про середнє для інтегралів Рімана

$$\int_{\eta'}^{\eta''} \psi(x)g(x)dx = g(\eta'') \int_{\eta'}^{\eta''} \psi(x)dx, \quad a \leq \eta' < \eta'' < +\infty.$$

Тому, скориставшись критерієм Коші збіжності невластних інтегралів, приходимо до твердження теореми. ►

Приклад 1. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ є збіжним, бо $\left| \int_1^{\eta} \sin x dx \right| = |-\cos \eta + \cos 1| \leq 2$,

якщо $\eta \in [1;+\infty)$, а функція $g(x) = 1/x$ є монотонною на $[1;+\infty)$ і $g(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Приклад 2. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ є збіжним, бо $\int_1^{\eta} \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\sin x}{x} + \int_1^{\eta} \frac{\sin x}{x^2} dx$,

якщо $\eta \in [1;+\infty)$, а функція $g(x) = 1/x$ є монотонною на $[1;+\infty)$ і $g(x) \rightarrow 0$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

6. Абсолютно та умовно збіжні інтеграли. Розглянемо функцію $f:[a;b) \rightarrow \mathbb{R}$. Невластний інтеграл

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

називається абсолютно збіжним, якщо збіжним є інтеграл

$$\int_a^b |f(x)|dx. \tag{2}$$

Теорема 1. Якщо невластний інтеграл (1) є абсолютно збіжним, то він є збіжним і $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Доведення. Якщо інтеграл (2) є збіжним, то за критерієм Коші

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta \in (a;b))(\forall \eta' \in (\eta;b))(\forall \eta'' \in (\eta;b)) : \left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|dx \right| < \varepsilon. \tag{3}$$

Але

$$\left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x)dx \right| \leq \left| \int_{\eta'}^{\eta''} |f(x)|dx \right|.$$

Тому з (3) маємо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \eta \in (a; b))(\forall \eta' \in (\eta; b))(\forall \eta'' \in (\eta; b)) : \left| \int_{\eta'}^{\eta''} f(x) dx \right| < \varepsilon,$$

і згідно з критерієм Коші інтеграл (1) є збіжним. Крім цього,

$$\left| \int_a^{\eta} f(x) dx \right| \leq \int_a^{\eta} |f(x)| dx$$

і

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \lim_{\eta \rightarrow b^-} \int_a^{\eta} f(x) dx \right| = \lim_{\eta \rightarrow b^-} \left| \int_a^{\eta} f(x) dx \right| \leq \lim_{\eta \rightarrow b^-} \int_a^{\eta} |f(x)| dx = \int_a^b |f(x)| dx. \blacktriangleright$$

Нижче побачимо, що існують збіжні невластні інтеграли, які не є збіжними абсолютно. Теорема 1 показує, що не всі властивості визначених інтегралів є справедливими і для невластних інтегралів. Нагадаємо: якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то на цьому ж проміжку інтегровна і функція $|f|$, але якщо функція $|f|$ є інтегрованою на $[a; b]$, то функція f не обов'язково є інтегрованою на $[a; b]$.

Наслідок 1. Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b]$,

$$(\exists c_1)(\forall x \in [a; b]) : |f(x)| \leq c_1 \varphi(x), \quad (4)$$

і $\varphi : [a; b] \rightarrow [0; +\infty)$ – така функція, що збіжним є інтеграл

$$\int_a^b \varphi(x) dx. \quad (5)$$

Тоді інтеграл (1) є абсолютно збіжним.

Наслідок 2. Нехай функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$ і

$$(\exists \alpha > 1)(\exists c_1)(\forall x \in [1; +\infty)) : |f(x)| \leq \frac{c_1}{x^\alpha}.$$

Тоді інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx \quad (6)$$

є абсолютно збіжним.

Наслідок 3. Нехай функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[1; \eta] \subset [1; +\infty)$ і

$$f(x) = O(1/x^\alpha), \quad x \rightarrow +\infty,$$

для деякого $\alpha > 1$. Тоді інтеграл (6) є абсолютно збіжним.

Наслідок 4. Нехай функція $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta;1] \subset (0;1]$ і

$$(\exists \alpha < 1)(\exists c_1)(\forall x \in (0;1]) : |f(x)| \leq \frac{c_1}{x^\alpha}.$$

Тоді інтеграл

$$\int_0^1 f(x) dx \quad (7)$$

є абсолютно збіжним.

Наслідок 5. Нехай функція $f : (0;1] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[\eta;1] \subset (0;1]$ і $f(x) = O(1/x^\alpha)$, $x \rightarrow 0+$, для деякого $\alpha < 1$. Тоді інтеграл (7) є абсолютно збіжним.

Якщо інтеграл (1) є збіжним, а інтеграл (2) є розбіжним, то інтеграл (1) називають умовно збіжним.

Приклад 1. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ є збіжним, абсолютно, бо збіжним є

інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ і $\left| \frac{\sin x}{x^2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$, якщо $x \in [1; +\infty)$.

Приклад 2. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{1 + 2 \ln x + \ln^2 x} dx$ є збіжним, абсолютно, бо

збіжним є інтеграл $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x \ln^2 x} dx$ і $\frac{\sin \frac{1}{x}}{1 + 2 \ln x + \ln^2 x} = O\left(\frac{1}{x \ln^2 x}\right)$, якщо $x \rightarrow +\infty$.

Приклад 3. Інтеграл $\int_0^1 \frac{\sin^3 x \cos 2x}{x^{7/2}} dx$ є збіжним, абсолютно, бо збіжним

є інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ і $\left| \frac{\sin^3 x \cos 2x}{x^{7/2}} \right| \leq \frac{1}{x^{1/2}}$, якщо $x \in (0;1]$.

Приклад 4. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ є умовно збіжним. Справді,

$\int_1^\eta \frac{\cos x}{x} dx = \frac{\sin \eta}{\eta} - \frac{\sin 1}{1} + \int_1^\eta \frac{\sin x}{x^2} dx$. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$ є збіжним. Тому існує

скінченна границя $\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^\eta \frac{\sin x}{x^2} dx = A$. Отже,

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \frac{\cos x}{x} dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \eta}{\eta} - \frac{\sin 1}{1} + \int_1^{\eta} \frac{\sin x}{x^2} dx \right) = A - \frac{\sin 1}{1}.$$

Таким чином, інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx$ є збіжним. Крім цього,

$$\begin{aligned} \int_{2\pi n}^{\frac{\pi}{3}+4\pi n} \frac{|\cos x|}{x} dx &\geq \sum_{k=n}^{2n} \int_{2\pi k}^{\frac{\pi}{3}+2\pi k} \frac{|\cos x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{2n} \int_{2\pi k}^{\frac{\pi}{3}+2\pi k} \frac{1}{x} dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{2n} \ln \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2\pi k} = \frac{1}{2} \sum_{k=n}^{2n} \ln \left(1 + \frac{1}{6k} \right) \geq \frac{n}{2} \ln \left(1 + \frac{1}{6n} \right) \rightarrow \frac{1}{12}, \end{aligned}$$

якщо $n \rightarrow \infty$. Тому, згідно з критерієм Коші інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x} dx$ є розбіжним.

Приклад 5. Інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ є умовно збіжним. Справді, цей інтеграл є

збіжним. Крім цього, $|\sin x| \geq \sin^2 x = (1 - \cos 2x) / 2$. Тому

$$\int_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{2} \ln \eta - \int_1^{\eta} \frac{\cos 2x}{2x} dx. \text{ Оскільки інтеграл } \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x} dx \text{ є збіжним, то}$$

$$\lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_1^{\eta} \frac{|\sin x|}{x} dx = +\infty, \text{ тобто інтеграл } \int_1^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx \text{ є розбіжним.}$$

Приклад 6. Для будь-яких двох функцій $f_1: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, для яких функції $|f_1|^2$ і $|f_2|^2$ є інтегровними на проміжку $[a; b]$, функція $|f_1 f_2|$ також є інтегровною на $[a; b]$ і справедлива нерівність Шварца (Коші-Буняковського)

$$\left| \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |f_1(x)|^2 dx \int_a^b |f_2(x)|^2 dx.$$

Справді, нехай, наприклад, інтеграли $\int_a^b |f_1(t)|^2 dt$ і $\int_a^b |f_2(t)|^2 dt$ є невластим у точці a . Тоді за нерівністю Шварца для інтеграла Рімана для кожного $\eta \in (a; b]$

$$\text{отримуємо } \left| \int_{\eta}^b f_1(x) f_2(x) dx \right|^2 \leq \int_{\eta}^b |f_1(x)|^2 dx \int_{\eta}^b |f_2(x)|^2 dx. \text{ Залишилось спрямувати } \eta$$

до a .

Приклад 7. Для будь-яких двох функцій $f_1:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, для яких функції $|f_1|^2$ і $|f_2|^2$ є інтегровними на проміжку $[a;b]$, функція $|f_1 + f_2|^2$ також є інтегровною на $[a;b]$ і справедлива нерівність Мінковського

$$\left(\int_a^b |f_1(x) + f_2(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b |f_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_a^b |f_2(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Справді, нехай, наприклад, інтеграли $\int_a^b |f_1(t)|^2 dt$ і $\int_a^b |f_2(t)|^2 dt$ є невласним у точці a . Тоді за нерівністю Мінковського для інтеграла Рімана для кожного

$$\eta \in (a;b] \text{ отримуємо } \left(\int_\eta^b |f_1(x) + f_2(x)|^2 dx \right)^{1/2} \leq \left(\int_\eta^b |f_1(x)|^2 dx \right)^{1/2} + \left(\int_\eta^b |f_2(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Залишилось спрямувати η до a .

Приклад 8. Нехай $R_2[a;b]$ множина всіх інтегровних за Ріманом на кожному проміжку $[a_1;b_1] \subset [a;b]$ функцій $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, таких що $|f|^2$ інтегровна у невласному розумінні на $[a;b]$. Тоді для кожної функції $f \in R_2[a;b]$ знайдеться така послідовність (q_ν) функцій $q_\nu:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, неперервних на проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$, що $q_\nu(a) = q_\nu(b) = 0$ і $\int_a^b |f(t) - q_\nu(t)|^2 dt \rightarrow 0$.

Справді, нехай, наприклад, інтеграл $\int_a^b |f(t)|^2 dt$ є невласним у точці b ,

$$a = a_0 < \dots < a_k < \dots < a_n = b \quad \text{і} \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [a; a_{n-1}], \\ 0, & x \notin [a; a_{n-1}]. \end{cases} \quad \text{Тоді функція } \tilde{f} \text{ є}$$

інтегровною за Ріманом на проміжку $[a;b]$ і $\int_a^{a_{n-1}} |f(t)|^2 dt \rightarrow 0$, якщо $n \rightarrow \infty$.

Крім цього, знайдеться така функція q_ν , неперервна на проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$,

що $q_\nu(a) = q_\nu(b) = 0$ і $\int_a^b |\tilde{f}(t) - q_\nu(t)|^2 dt \leq 1/\nu$. Тому за нерівністю Мінковського

$$\sqrt{\int_a^b |f(t) - q_\nu(t)|^2 dt} \leq \sqrt{\int_a^b |\tilde{f}(t) - f(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_a^b |\tilde{f}(t) - q_\nu(t)|^2 dt}$$

$$\leq \sqrt{\int_a^{a_{\nu-1}} |f(t)|^2 dt} + \sqrt{\int_a^b |\tilde{f}(t) - q_{\nu}(t)|^2 dt} \rightarrow 0, \quad \nu \rightarrow \infty.$$

7. Невласні інтеграли з кількома особливими точками. Вище ми розглядали випадок, коли інтегровність за Ріманом у функції f втрачається на кінцях проміжків. Але функція f може бути необмеженою і в деякому околі точки $x_0 \in (a; b)$. Якщо функція f є інтегровою хоч-би в невластному розумінні на проміжках $[a; x_0]$ і $[x_0; b]$, то за означенням

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^b f(x) dx. \quad (1)$$

При цьому, якщо обидва інтеграли з правої частини (1) є збіжними, то функція f називається інтегровою у невластному розумінні на $(a; b)$ (інколи кажуть на $[a; b]$). Крім цього, права частина (1), якщо написані в ній інтеграли існують, не залежить від x_0 . Це впливає з властивостей інтеграла Рімана. Аналогічно визначається невластний інтеграл на проміжку $(-\infty; +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{\eta_1 \rightarrow -\infty} \int_{\eta_1}^0 f(x) dx + \lim_{\eta_2 \rightarrow +\infty} \int_0^{\eta_2} f(x) dx. \quad (2)$$

Якщо обидва інтеграли з правої частини (2) є збіжними, то невластний інтеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \quad (3)$$

називається збіжним. Якщо принаймні один із інтегралів з правої частини (2) є розбіжним, то невластний інтеграл (3) називається розбіжним.

Подібно визначається невластний інтеграл у випадку, коли таких особливих точок x_0 на проміжку $[a; b]$ є декілька.

Приклад 1. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4}$ є розбіжним, бо за означенням

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^4} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x^4} + \int_0^1 \frac{dx}{x^4},$$

а останні два інтеграли є розбіжними.

Приклад 2. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 + 2x^4}{x^3 \sqrt{x + x^6}} dx$ є невластним в точках 0 і $+\infty$.

Оскільки

$$\frac{x^3 + 2x^4}{x^3 \sqrt{x + x^6}} = O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

i

$$\frac{x^3 + 2x^4}{x^3\sqrt{x} + x^6} = O\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right), \quad x \rightarrow 0+,$$

то інтеграли

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 2x^4}{x^3\sqrt{x} + x^6} dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{x^3 + 2x^4}{x^3\sqrt{x} + x^6} dx$$

є збіжними. Тому інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 + 2x^4}{x^3\sqrt{x} + x^6} dx$ також є збіжним.

Приклад 3. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ є невласним в точках 0 і $+\infty$. Оскільки

$$\frac{xe^{-x}}{x^2 + \sqrt{x}} = O(1/x^2), \quad x \rightarrow +\infty,$$

i

$$\frac{xe^{-x}}{x^2 + \sqrt{x}} = O(x^{1/2}), \quad x \rightarrow 0+,$$

то інтеграли $\int_0^1 \frac{xe^{-x}}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ і $\int_1^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{x^2 + \sqrt{x}} dx$ є збіжними. Тому інтеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{x^2 + \sqrt{x}} dx \text{ також є збіжним.}$$

Зауваження 1. При означенні невласного інтеграла $\int_a^b f(x) dx$ з особливою

точкою b припускалося, що функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$. Можна узагальнити поняття невласного інтеграла. Нехай функція $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою принаймні у невласному розумінні на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [a; b)$. Невласним інтегралом другого ступеня функції $f : [a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ називається границя

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow b-} \int_a^{\eta} f(x) dx.$$

Аналогічно, виходячи з невласного інтеграла другого ступеня можна визначити невласний інтеграл третього ступеня і т.д.

Приклад 4. Інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|\sin \frac{1}{x}|}} dx$ є невластним інтегралом другого ступеня в точці 0.

Приклад 5. Інтеграл $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{|\sin x|}} dx$ є невластним інтегралом другого ступеня в точці $+\infty$.

8. Невласні інтеграли в розумінні головного значення. Інтегралом у розумінні головного значення функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ в ∞ називається границя

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} f(x) dx.$$

Інтегралом у розумінні головного значення функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ в точці $x_0 \in (a; b)$ називається границя

$$v.p. \int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx \right).$$

Приклад 1. Інтеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2}$ є розбіжним як невластний інтеграл, але

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^2} = \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \int_{-\eta}^{\eta} \frac{x dx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \lim_{\eta \rightarrow +\infty} \ln(1+x^2) \Big|_{-\eta}^{\eta} = 0.$$

Приклад 2. Інтеграл $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$ є розбіжним як невластний інтеграл, але

$$v.p. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\ln \varepsilon - \ln \varepsilon) = 0.$$

Приклад 3. $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx$ є розбіжним. Водночас,

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-a}^a \sin x dx = \lim_{a \rightarrow +\infty} \left(-\cos x \Big|_{-a}^a \right) = 0.$$

9. Гамма-функція

Так називається функція Γ , визначена рівністю

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt. \quad (1)$$

Інтеграл (1) є збіжним для $x \in (0; +\infty)$.

Приклад 1. $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_0^{+\infty} = 1.$

Приклад 2. Інтегруванням частинами переконуємося, що

$$\Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt = -t^x e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x), \quad x > 0,$$

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1), \quad x > 1,$$

$$\Gamma(x+1) = x(x-1)\Gamma(x-1) = \dots = x(x-1)\dots(x-n+1)\Gamma(x-n+1), \quad x > n-1.$$

Зокрема,

$$\Gamma(1+n) = n(n-1)\dots 2\Gamma(1) = n!,$$

тобто $\Gamma(1+n) = n!$.

10. Поняття про функції обмеженої варіації. Нехай $[a;b] \subset \mathbb{R}$ – деякий проміжок (скінченний), $F:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка функція, $\tau = \{x_k : k \in \overline{0;n}\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, – розбиття проміжку $[a;b]$, $\lambda = \lambda_\tau = \max\{\Delta x_k : k \in \overline{0;n-1}\}$, $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$, – діаметр розбиття. Функція $F:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ називається функцією обмеженої варіації на проміжку $[a;b]$, якщо

$$V_{[a;b]}(F) := \sup_{\tau} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| \right\} < +\infty. \quad (1)$$

При цьому число $V_{[a;b]}(F)$ називається повною варіацією функції F на проміжку $[a;b]$. Можна також сказати, що

$$V_{[a;b]}(F) := \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)|.$$

Теорема 1. Якщо функція $F:[a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[a;b]$, то вона є функцією обмеженої варіації на $[a;b]$ і

$$V_{[a;b]}(F) = \int_a^b |F'(x)| dx.$$

Доведення. Справді, згідно з першою теоремою про середнє для визначених інтегралів

$$F(x_{k+1}) - F(x_k) = \int_{x_k}^{x_{k+1}} F'(x) dx = F'(\xi_k) \Delta x_k, \quad \xi_k \in [x_k; x_{k+1}].$$

Тому

$$\sum_{k=0}^{n-1} |F(x_{k+1}) - F(x_k)| = \sum_{k=0}^{n-1} |F'(\xi_k)| \Delta x_k.$$

Остання сума є інтегральною сумою для інтегралу $\int_a^b |F'(x)| dx$. ►

Приклад 1. Кожна монотонна на $[a; b]$ функція $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є функцією обмеженої варіації на проміжку $[a; b]$ і $V_{[a; b]}(F) = |F(b) - F(a)|$.

Приклад 2. Якщо $F(x) = x^3$, то $V_{[0; 1]}(F) = 1 - 0 = 1$.

Приклад 3. Кожна функція $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, яка задовольняє умову Ліпшиця $(\exists c_1)(\exists \{x_1; x_2\} \subset [a; b]) : |F(x_2) - F(x_1)| \leq c_1 |x_2 - x_1|$, є функцією обмеженої варіації на проміжку $[a; b]$.

Приклад 4. Кожна функція $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, яка подається у вигляді $F(x) = \int_a^x \varphi(t) dt$, де функція $\varphi : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровною за Ріманом на проміжку $[a; b]$, є функцією обмеженої варіації на $[a; b]$.

Приклад 5. Кожна функція $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, яка є диференційовною на проміжку $[a; b]$, є функцією обмеженої варіації на $[a; b]$.

Можна довести наступне твердження.

Теорема 2. Клас функцій $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ обмеженої варіації на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$ збігається з класом функцій $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, які допускають подання у вигляді різниці $F = F_1 - F_2$ двох неспадних на $[a; b]$ функцій $F_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ та $F_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$.

11. Поняття про інтеграл Стільт'єса. Нехай $[a; b] \subset \mathbb{R}$ – деякий проміжок (скінченний), а $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ – деякі функції. Множину $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$ точок таких, що $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $n \in \mathbb{N}$, будемо називати розбиттям проміжку $[a; b]$ або τ -розбиттям, а число $\lambda = \lambda_\tau = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$, $\Delta x_k := x_{k+1} - x_k$, – діаметром розбиття. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$ візьмемо довільну точку ξ_k і побудуємо суму $\sigma = \sigma_{f, F}(\tau; \xi)$:

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \Delta F_k, \quad \Delta F_k = F(x_{k+1}) - F(x_k).$$

Інтегралом Стільт'єса функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ за функцією $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a; b]$ називається границя

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma. \quad (1)$$

Інтеграл Стільт'єса функції f за функцією $F(x) = x$ є інтегралом Рімана функції f :

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)dx.$$

Теорема 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, а функція $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx,$$

де справа стоїть інтеграл Рімана.

Доведення. Справді,

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta F_k = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)F'(u_k)\Delta x_k, \quad u_k \in [x_k; x_{k+1}].$$

Але

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)F'(u_k)\Delta x_k &= \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)F'(\xi_k)\Delta x_k \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(F'(u_k) - F'(\xi_k))\Delta x_k \end{aligned}$$

і

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(F'(u_k) - F'(\xi_k))\Delta x_k = 0.$$

Тому $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = \int_a^b f(x)F'(x)dx$. ►

Можна довести наступне твердження.

Теорема 2. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, а функція $F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на $[a; b]$ всюди, за винятком, можливо, скінченної кількості точок c_k , $a = c_0 < \dots < c_m = b$, і звуження функції F на кожний проміжок $(c_k; c_{k+1}) \subset [a; b]$ допускає неперервно диференційовне продовження на $[c_k; c_{k+1}]$, то

$$\int_a^b f(x)dF(x) = \int_a^b f(x)F'(x)dx + f(a)(F(a+) - F(a))$$

$$+ \sum_{k=1}^{m-1} f(c_k)(F(c_k+) - F(c_k-)) + f(b)(F(b) - F(b-)). \quad (2)$$

Зауваження 1. Ми розглядали інтеграл Стільт'єса по проміжку $[a;b]$. Трапляються інтеграли Стільт'єса по проміжках $(a;b)$, $(a;b]$ та $[a;b)$. При цьому, в означенні інтеграла по $[a;b)$ точки ξ_k беруться з проміжку $[x_k; x_{k+1})$ і $\Delta F_k = F(x_{k+1}) - F(x_k)$. Тоді останній доданок у правій частині формули (2) відсутній. Аналогічне можна сказати про інтеграли Стільт'єса по проміжках $(a;b]$ та $(a;b)$.

Приклад 1. Якщо $F(x) = x^3$, то

$$\int_0^2 \frac{5}{3} x^2 dF(x) = \int_0^2 \frac{5}{3} x^2 3x^2 dx = 32.$$

Приклад 2. Якщо $F(x) = \begin{cases} 2, & x = -2, \\ 3x, & x \in (-2; 3), \\ 5, & x = 3, \end{cases}$ то

$$\int_{-2}^3 x^2 dF(x) = 4(-6 - 2) + 9(5 - 9) + 3 \int_{-2}^3 x^2 dx = -68 + 35 = -33.$$

Приклад 3. Якщо $F(x) = \sum_{\mathbb{N} \ni k \leq x} k^2$, то

$$\int_{-2}^4 x dF(x) = 1 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 = 36.$$

12. Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення невідладного інтеграла на проміжку $[a;b)$.
2. Сформулюйте означення невідладного інтеграла на проміжку $(a;b]$.
3. Сформулюйте означення невідладного інтеграла на проміжку $[0; +\infty)$.
4. Сформулюйте означення невідладного інтеграла на проміжку $(-\infty; 0]$.
5. Сформулюйте означення невідладного інтеграла на проміжку $(-\infty; +\infty)$.
6. Сформулюйте означення невідладного інтеграла на проміжку $[-1; 1]$ з особливою точкою $c = 0$.
7. Сформулюйте означення абсолютно збіжного невідладного інтеграла.
8. Сформулюйте означення умовно збіжного невідладного інтеграла.
9. Сформулюйте й доведіть критерій Коші збіжності невідладного інтеграла.

10. Сформулюйте й доведіть теорему про збіжність невласного інтеграла невід'ємної функції.
11. Сформулюйте й доведіть теорему про зв'язок між збіжністю та абсолютною збіжністю невласного інтеграла.
12. Сформулюйте й доведіть ознаку Абеля збіжності невласного інтеграла.
13. Сформулюйте і доведіть ознаку Діріхле збіжності невласного інтеграла.
14. Сформулюйте означення невласного інтеграла в розумінні головного значення в ∞ .
15. Сформулюйте означення невласного інтеграла в розумінні головного значення з особливими точками ∞ і 0 .
16. Сформулюйте означення функції обмеженої варіації.
17. Сформулюйте означення інтеграла Стільт'еса.

13. Вправи й задачі теоретичного характеру.

1. Доведіть твердження

1. Функція $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$ є непарною.
2. Функція $Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt$ є нескінченно диференційовною на проміжку $[0; +\infty)$.
3. $\int_0^{\pi} \ln \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$.
4. $\int_{b-\pi/2}^{b+\pi/2} \ln |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \ln |\sin x| dx$, $b \in \mathbb{R}$.
5. $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = 2 \int_0^{\pi/4} \ln \sin x dx$.
6. $\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x dx$.
7. $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{tg} x} dx = - \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$.
8. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx$.
9. $\int_0^{\pi} x \ln \sin x dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} \ln \sin x dx$.

10. $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = -\int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx.$
11. $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x} dx.$
12. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = -\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x} dx.$
13. $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} \ln|1-1/x^2| dx = \int_0^{\pi/2} \cos 2x \ln \operatorname{ctg} x dx.$
14. $\int_0^{\pi/2} \cos 2x \ln \operatorname{ctg} x dx = \frac{\pi}{2}.$
15. $\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2} dx = \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} dx.$
16. $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^{\pi/2} e^{\sin x} dx.$
17. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2+x^2} dx.$
18. $\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$
19. $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$
20. $\int_0^{\pi/2} \ln|\sin^2 x - a^2| dx = \int_{b-\pi/2}^{b+\pi/2} \ln|\sin x| dx, 0 < a \leq 1, b = \arcsin a.$
21. $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2-b/x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} e^{-2\sqrt{ab}} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx, a > 0, b > 0.$
22. $\int_{-1}^1 \frac{1}{(a^2-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2-1}}, a > 1.$
23. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-1}} dx = \frac{\arcsin a}{a\sqrt{1-a^2}}, 0 < a < 1.$
24. $\int_{-1}^1 \frac{1}{(a^2+x^2)\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{\pi}{a\sqrt{a^2+1}}, a > 0.$

$$25. \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 - 1}} dx = \frac{\ln(a + \sqrt{1 + a^2})}{a\sqrt{1 + a^2}}, \quad a > 0.$$

$$26. \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{\ln(a + \sqrt{a^2 - 1})}{a\sqrt{a^2 - 1}}, \quad a > 1.$$

$$27. \int_1^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{\arccos a}{a\sqrt{1 - a^2}}, \quad 0 < a < 1.$$

$$28. \int_0^{\sin \varphi} \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = \int_0^{\varphi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \psi}}, \quad k \in [0;1), \quad \varphi \in [0; \pi/2].$$

$$29. \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_0^1 f\left(\frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2}, \quad \text{якщо один з цих інтегралів є збіжним.}$$

$$30. \int_a^b f(x) dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{+\infty} f\left(b - \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x^2}, \quad \text{якщо } -\infty < a < b < +\infty \text{ і один з цих інтегралів є}$$

збіжним.

$$31. I_n = nI_{n-1}, \quad \text{якщо } I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} dt \text{ і } n \in \mathbb{N}.$$

$$32. I_n = -nI_{n-1}, \quad \text{якщо } I_n = \int_0^{+\infty} \ln^n t dt \text{ і } n \in \mathbb{N}.$$

$$33. I_n = \frac{n(n-1)}{1+a^2} I_{n-2}, \quad \text{якщо } I_n = \int_0^{+\infty} e^{-at} \sin^n t dt, \quad a > 0 \text{ і } n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}.$$

$$34. \int_0^{+\infty} e^{-at} (t^n e^{-t})^{(n)} dt = \frac{a^n n!}{(a+1)^{n+1}}, \quad a > 0, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

35. Якщо $a \leq b$, функція $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[a; b]$ і

$$f(x) \geq 0 \text{ для всіх } x \in [a; b), \text{ то } \int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

36. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$ для кожного $c \in \mathbb{R}$, якщо інтеграл в лівій частині цієї рівності є збіжним.

37. Якщо функція $f: (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і монотонною на проміжку $(0; 1]$,

$$\text{то } \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n).$$

38. Існує функція $f: (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегровна на проміжку $(0; 1]$, для якої рівність

$$\int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k/n) \text{ не є справедливою.}$$

39. Якщо функція $f : [0;1) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і монотонною на проміжку $[0;1)$,

$$\text{то } \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(k/n).$$

40. Якщо функція $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною і інтегрованою на проміжку

$$(0; +\infty), \text{ то } \int_0^{+\infty} f(x) dx = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{k=1}^{+\infty} f(hk).$$

$$41. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = e^0 \int_0^1 \ln x dx.$$

$$42. \int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}.$$

2. Доведіть твердження

1. $\int_0^{+\infty} f(ax + b/x) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x^2 + 4ab}) dx$, якщо $a > 0$, $b > 0$ і інтеграл в лівій частині рівності є збіжним.

2. $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = (f(0) - f(+\infty)) \ln \frac{b}{a}$, якщо $a > 0$, $b > 0$, функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; +\infty)$ і існує скінченна границя $f(+\infty) := \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

3. $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$, якщо $a > 0$, $b > 0$, функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[0; +\infty)$ і збіжним є інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$.

4. $\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx = f(0) \ln \frac{b}{a}$, якщо $a > 0$, $b > 0$, функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $(0; +\infty)$ і збіжним є інтеграл $\int_0^1 \frac{f(x)}{x} dx$.

5. $\int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \ln x \frac{dx}{x} = \ln a \int_0^{+\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x}$, якщо $a > 0$ і один з цих інтегралів є збіжним.

6. $\int_0^{+\infty} f(x^a + x^{-a}) \ln x \frac{dx}{x} = 0$, якщо $a > 0$ і інтеграл є збіжним.
7. $\int_0^{+\infty} f(x^a + x^{-a}) \ln x \frac{dx}{1+x^2} = 0$, якщо $a > 0$ і інтеграл є збіжним.
8. $\int_0^{+\infty} f((ax - b/x)^2) dx = \frac{1}{a} \int_0^{+\infty} f(x^2) dx$, якщо $a > 0$, $b > 0$ і інтеграл у правій частині рівності є збіжним.
9. $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x^2) dx = 0$, якщо інтеграл $\int_0^{+\infty} xf(x^2) dx$ є збіжним.
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x^2) dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x^2) dx$, якщо інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x^2) dx$ є збіжним.
11. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і обмеженою на проміжку $[a; b]$, $(\forall x \in [a; b]) : m \leq f(x) \leq M$, а функція $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою і приймає значення одного знаку на $(a; b)$, то функція fg є інтегрованою на $[a; b]$ і $(\exists \mu \in [m; M]) : \int_a^b f(x)g(x) dx = \mu \int_a^b g(x) dx$.
12. $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow +\infty$, якщо функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною і абсолютно інтегрованою на проміжку $[1; +\infty)$.
13. Існує функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, абсолютно інтегровна на проміжку $[1; +\infty)$, для якої $f(x) \neq o(1)$, $x \rightarrow +\infty$.
14. Якщо $f(t) = \sin(t^2)$, то інтеграл $\int_1^{+\infty} f(t) dt$ є збіжним і $f(x) \neq o(1)$, $x \rightarrow +\infty$.
15. Якщо $f(x) = (-1)^{[x^2]}$, то інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ є збіжним і $f(x) \neq o(1)$, $x \rightarrow +\infty$.
16. $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow +\infty$, якщо функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[1; +\infty)$ і існує $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
17. $f(x) = o(1)$, $x \rightarrow +\infty$, якщо функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною і абсолютно інтегрованою на проміжку $[1; +\infty)$ і функція f' є обмеженою на проміжку $[1; +\infty)$.
18. $f(x) = o(1/x)$, $x \rightarrow +\infty$, якщо функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[1; +\infty)$ і існує $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x)$.

19. $f(x) = o(1/x)$, $x \rightarrow +\infty$, якщо функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[0; +\infty)$ і інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ є збіжним.

20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^\rho} = 0$, якщо $\rho \in \mathbb{R}$, функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[1; +\infty)$ і інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{f(x)}{x^{\rho+1}} dx$ є збіжним.

21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\rho+1} f(x) = 0$, якщо $\rho \in \mathbb{R}$, функція $f : (0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $(0; 1]$ і інтеграл $\int_0^1 x^\rho f(x) dx$ є збіжним.

22. $\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx$ є збіжним абсолютно, якщо збіжним абсолютно є інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ і функція $g : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є обмеженою на проміжку $[1; +\infty)$.

23. Існують такі функція $g : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, обмежена на проміжку $[1; +\infty)$, і функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, що інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x)g(x) dx$ є розбіжним, а інтеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ є збіжним.

24. Якщо $T \in (0; +\infty)$, функція $g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[0; T]$, $(\forall x \in [0; +\infty)) : g(x+T) = g(x)$ і $\int_0^T g(x) dx = 0$, а функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[0; +\infty)$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ є збіжним.

25. Якщо $T \in (0; +\infty)$, функція $g : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегрованою на проміжку $[0; T]$, $(\forall x \in [0; +\infty)) : g(x+T) = g(x)$ і $\int_0^T g(x) dx \neq 0$, а функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на проміжку $[0; +\infty)$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, то інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)g(x) dx$ є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

26. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і $(\exists q \in (0; 1))(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(x+1) \leq qf(x)$.
27. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і $(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(x+1) \geq f(x)$.
28. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і $(\exists q \in (0; 1/2))(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(2x) \leq qf(x)$.
29. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і $(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(2x) \geq f(x)/2$.
30. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і $(\exists q \in (0; 1/2))(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(x^2) \leq qf(x)/x$.
31. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і $(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(x^2) \geq f(x)/(2x)$.
32. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і $(\exists q \in (0; 1))(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(e^x) \leq qe^{-x}f(x)$.

33. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і $(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(e^x) \geq e^{-x} f(x)$.

34. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є збіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і існує така зростаюча на проміжку $[0; +\infty)$ функція $\varphi : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, що функція φ' є інтегрованою на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$, $(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : \varphi(x) \geq x$ і $(\exists q \in (0; 1))(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(\varphi(x)) \leq qf(x) / \varphi'(x)$.

35. Інтеграл $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ є розбіжним, якщо функція $f : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною та інтегрованою за Ріманом на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$ і існує така зростаюча на проміжку $[0; +\infty)$ функція $\varphi : [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, що функція φ' є інтегрованою на кожному проміжку $[a; \eta] \subset [0; +\infty)$, $(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : \varphi(x) \geq x$, $\varphi(x) \neq x$ і $(\exists a \in [0; +\infty))(\forall x \in [a; +\infty)) : f(\varphi(x)) \geq f(x) / \varphi'(x)$.

36. Якщо функція f' є неспадною на проміжку $[0; +\infty)$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, то інтеграл $\int_0^{+\infty} \sin(f(x))dx$ є збіжним.

37. Якщо функція f' є неспадною на проміжку $[0; +\infty)$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$, то інтеграл $\int_0^{+\infty} \cos(f(x))dx$ є збіжним.

38. $\int_0^{+\infty} e^{-nx^2} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n}$, якщо $n \in \mathbb{N}$.

39. $\int_0^1 (1-x^2)^n dx \leq \int_0^1 e^{-nx^2} dx$, якщо $n \in \mathbb{N}$.

40. $\int_x^{+\infty} f(t)dt \sim O(x^{\alpha+1})$, $x \rightarrow +\infty$, якщо $f(x) = O(x^\alpha)$, $x \rightarrow +\infty$ і $\alpha < -1$.

$$41. \int_x^{+\infty} f(t) dt \sim -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \text{ якщо } f(x) \sim x^\alpha, \quad x \rightarrow +\infty \text{ і } \alpha < -1.$$

$$42. \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$43. \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\cos x}{x} + O(x^{-2}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$44. \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt = -\frac{\sin x}{\sqrt{x}} + O(x^{-3/2}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$45. \operatorname{li} x \sim \frac{x}{\ln x}, \quad x \rightarrow 0+, \text{ якщо } \operatorname{li} x = \begin{cases} \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, & x \in (0;1), \\ \text{v.p.} \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, & x \in (1;+\infty). \end{cases}$$

$$46. \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2 \ln t} dt \sim \frac{1}{t \ln t}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$47. \int_x^{+\infty} \cos t^2 dt = -\frac{\sin x^2}{x} + o(1/x^2), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$48. \int_a^b dF(x) = F(b) - F(a) \quad \text{для кожної функції } F : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{для якої}$$

$$D(f) = [a; b].$$

$$49. \int_a^b (f_1(x) + f_2(x)) dF(x) = \int_a^b f_1(x) dF(x) + \int_a^b f_2(x) dF(x), \quad \text{якщо останні інтеграли}$$

існують.

$$50. \int_a^b f(x) d(F_1(x) + F_2(x)) = \int_a^b f(x) dF_1(x) + \int_a^b f(x) dF_2(x), \quad \text{якщо останні інтеграли}$$

існують.

$$51. \int_a^b c_1 f(x) d(c_2 F(x)) = c_1 c_2 \int_a^b f(x) dF(x), \quad \text{якщо останній інтеграл існує, де } c_1 \text{ та } c_2$$

— числові сталі.

$$52. \int_a^b f(x) dF(x) = \int_a^c f(x) dF(x) + \int_c^b f(x) dF(x), \quad \text{якщо } a < c < b \text{ і перший з трьох}$$

написаних інтегралів існує.

53. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0], \\ 1, & x \in (0; 1], \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-1; 0), \\ 1, & x \in [0; 1], \end{cases}$$

то інтеграли $\int_{-1}^0 f(x)dF(x)$ і $\int_0^1 f(x)dF(x)$ існують, але інтеграл $\int_{-1}^1 f(x)dF(x)$ не існує.

14. Вправи й задачі розрахункового характеру

1. Знайдіть

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$2. \int_1^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2 + 1)^2}.$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cos 2x dx.$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \sin 3x dx.$$

$$5. \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - 1}.$$

$$6. \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

$$7. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^3 - 1}.$$

$$8. \int_3^{+\infty} \frac{xdx}{x^3 + 1}.$$

$$9. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+2)}.$$

$$10. \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+3)}.$$

$$11. \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x} dx.$$

$$12. \int_0^{+\infty} x^4 e^{-x} dx.$$

$$13. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

$$14. \int_0^{+\infty} e^{-\sqrt[3]{x}} dx.$$

$$15. \int_2^{+\infty} \frac{xdx}{x^2 + 2x - 3}.$$

$$16. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)(x+2)}.$$

$$17. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)\ln^2(x+3)}.$$

$$18. \int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x^2+1)(x+1)}.$$

$$19. \int_0^{+\infty} (2x+3)e^{-x} dx.$$

$$20. \int_0^{+\infty} (-x+3)e^{-x} dx.$$

21. $\int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\operatorname{arctg} x)}{x^2 + 1} dx.$

22. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(-\operatorname{arctg} x)}{x^2 + 1} dx.$

23. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 9} dx.$

24. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$

25. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}} dx.$

26. $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2} dx.$

27. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$

29. $\int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{|x|}}{(1+|x|)^2} dx.$

29. $\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} dx.$

30. $\int_0^{+\infty} x^3 e^{-x^2} dx.$

31. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^3}.$

32. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$

33. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}.$

34. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^4}.$

35. $\int_{-\infty}^1 \frac{\exp(\operatorname{arctg}|x|)}{x^2 + 1} dx.$

36. $\int_{-\infty}^0 \frac{\sin(\operatorname{arctg}|x|)}{x^2 + 1} dx.$

37. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x + 1} dx.$

38. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$

39. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2 + x} dx.$

40. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 4x + 3} dx.$

41. $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx.$

42. $\int_0^{+\infty} (x+1)e^{-x} dx.$

43. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x}.$

44. $\int_{e^2}^{+\infty} \frac{1}{x \ln x \ln^2 \ln x} dx.$

45.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx.$$

46.
$$\int_1^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx.$$

47.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^{3/2}} dx.$$

48.
$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx.$$

49.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln^2 x + 1)} dx$$

50.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(\ln x - 1)^2} dx.$$

51.
$$\int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx, n \in \mathbb{N}.$$

52.
$$\int_0^{+\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx, n \in \mathbb{N}.$$

53.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx, n \in \mathbb{N}.$$

54.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)^n} dx, n \in \mathbb{N}.$$

2. Знайдіть

1.
$$\int_0^3 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{9-x^5}}.$$

2.
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt{\cos x}}.$$

3.
$$\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^6}}.$$

4.
$$\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$$

5.
$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x}.$$

6.
$$\int_0^{\pi/2} \frac{e^{-\operatorname{ctg} x} dx}{\sin^2 x}.$$

7.
$$\int_0^{\sqrt{2}/2} \frac{x^4 dx}{(\sqrt{1-x^2})^3}.$$

8.
$$\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}.$$

9.
$$\int_{-1}^e \ln|x| dx.$$

10.
$$\int_{-1}^e x \ln|x| dx.$$

11.
$$\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+x}}.$$

12.
$$\int_{-1}^0 \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x}}.$$

13.
$$\int_0^e \ln^2 x dx.$$

14.
$$\int_0^1 \ln \sqrt{x} dx.$$

15. $\int_{-1}^2 \frac{x^3}{\sqrt{|x-1|}} dx.$

16. $\int_{-1}^3 \frac{x^3 dx}{\sqrt{|x-2|}}.$

17. $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} dx.$

18. $\int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{|x-2|}}.$

19. $\int_{-1}^1 \frac{3x+1}{\sqrt{|x|}} dx.$

20. $\int_{1/2}^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}.$

21. $\int_0^e x \ln x dx.$

22. $\int_0^1 \frac{e^{-1/x}}{x^2} dx.$

23. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}.$

24. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x^2-1}}.$

25. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}.$

26. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}.$

27. $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4x+3}}.$

28. $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}.$

29. $\int_{-1}^1 \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x^2}}.$

30. $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x}}.$

31. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}.$

32. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-2x}}.$

33. $\int_0^e \ln x dx.$

34. $\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx.$

35. $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}.$

36. $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt{x-1}}.$

37. $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx.$

38. $\int_{-1}^1 \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$

39.
$$\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}.$$

40.
$$\int_0^3 \frac{x^5 dx}{\sqrt{9-x^2}}.$$

41.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}} dx.$$

42.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x-1}} dx.$$

43.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}.$$

44.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{|x|}}{(1+|x|)^2} dx.$$

45.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(\operatorname{arctg} x)}{x^2+1} dx.$$

46.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\operatorname{arctg} x)}{x^2+1} dx.$$

47.
$$\int_0^1 \ln^n x dx, n \in \mathbb{N}.$$

48.
$$\int_{-1}^1 \ln \frac{1+x}{1-x} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3. Дослідіть на збіжність інтеграл

1.
$$\int_1^{+\infty} v \ln \frac{v^3+2}{v^3+1} dv.$$

2.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{v}} \sqrt{\ln \frac{v^3+2}{v^3+1}} dv.$$

3.
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{\ln^x 2} dx.$$

4.
$$\int_1^{+\infty} \frac{e^x}{\lg^x 37} dx.$$

5.
$$\int_1^{+\infty} x^6 e^{-x^2} dx.$$

6.
$$\int_1^{+\infty} x^6 e^{-\sqrt{x}} dx.$$

7.
$$\int_1^{+\infty} (1+1/x)^x \frac{1}{2x+3} dx.$$

8.
$$\int_1^{+\infty} (1+x)^{1/x} \frac{1}{x} dx.$$

9.
$$\int_1^{+\infty} \frac{2^x+5^x}{5^x+4^x} dx.$$

10.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^{-1/x} dx.$$

11.
$$\int_1^{+\infty} \sqrt{v} \operatorname{arctg} \frac{1}{2v^2+3} dv.$$

12.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2t+3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2t+3} dt.$$

13.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{\tau}+3} \arccos \frac{1}{5\tau+3} d\tau.$$

14.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2\sqrt{u}+3} \arccos \frac{1}{5u+3} du.$$

15.
$$\int_1^{+\infty} \sqrt[6]{t+1} \ln(1+1/t\sqrt{t}) dt.$$

16.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln t}{t\sqrt{t}} dt.$$

17.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y+\sqrt{y}} dy.$$

18.
$$\int_1^{+\infty} \frac{y}{y^2+1} \cos \frac{1}{y^3} dy.$$

19.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{t+\sqrt{t}}} \sin \frac{3}{t+7} dt.$$

20.
$$\int_1^{+\infty} \sqrt[6]{x+\sqrt{x}} \arcsin \frac{1}{2x+\sqrt{x}} dx.$$

21.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

22.
$$\int_1^{+\infty} \sqrt[6]{1+\sqrt{x}} \arcsin \frac{1}{x\sqrt{x}} dx.$$

23.
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{x^{3/2}}}{1+e^x} dx.$$

24.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+\ln x} dx.$$

25.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1+\ln(2+x)}{1+x^2} dx.$$

26.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+e^x} dx.$$

27.
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{\cos x}}{x+1} dx.$$

28.
$$\int_0^{+\infty} \sqrt[3]{x^7} e^{-x^2} dx.$$

29.
$$\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} \sin^2 \frac{1}{x} dx.$$

30.
$$\int_0^{+\infty} x^{\sqrt{2}} e^{-x} dx.$$

31.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1+x}{2+x^4} dx.$$

32.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{1+x^3}.$$

33.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^3} dx.$$

34.
$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+4\sqrt{x}) dx}{1+x^3}.$$

35.
$$\int_0^{\infty} \frac{2+x^2}{x^3+x^6+1} dx.$$

36.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{\sqrt{x^4+x^2+5}} dx.$$

37.
$$\int_1^{+\infty} x \sin^2 \frac{1}{x^2} dx.$$

38.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x} dx.$$

39.
$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

40.
$$\int_0^{+\infty} \frac{(x+4) dx}{4+x\sqrt{x}}.$$

41.
$$\int_1^{+\infty} \sqrt{x} \arcsin \frac{1}{x} dx.$$

42.
$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

43.
$$\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} dx.$$

44.
$$\int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx.$$

45. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx.$

46. $\int_2^{+\infty} \frac{x^2}{\ln^4 x} dx.$

47. $\int_0^{+\infty} \frac{x^4}{2^x} dx.$

48. $\int_0^{+\infty} \frac{3^x}{x^5} dx.$

49. $\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx.$

50. $\int_0^{+\infty} \frac{3^x+1}{e^x+2} dx.$

51. $\int_1^{+\infty} e^{-\ln^2 x} dx.$

52. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\ln x}} dx.$

53. $\int_1^{+\infty} e^{-\operatorname{arctg}^2 x} dx.$

54. $\int_1^{+\infty} e^{-\sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx.$

55. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln x}} dx.$

56. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln x}} dx.$

57. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}{x} dx.$

58. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} dx.$

4. Дослідіть на збіжність інтеграл

1. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3+1} \ln(t+1)} dt.$

2. $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{u}}{(2u^2+1) \ln^3(u+1)} du.$

3. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1} \ln 2x} dx.$

4. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(2x^2+\sqrt{x}) \ln(x+1)} dx.$

5. $\int_1^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^3+1) \ln(x+1)} dx.$

6. $\int_1^{+\infty} \frac{y+3}{(y^2+2) \ln \ln^2(y+1)} dy.$

7. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+1} \ln(x+1)} dx.$

8. $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(2x^2+1) \ln^3(x+1)} dx.$

9. $\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{(x^2+1) \ln^3(x+2)} dx.$

10. $\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+3)^2 \ln(t+3) \ln \ln(t+3)}.$

11. $\int_e^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{x \ln^2 x} dx.$

12. $\int_{20}^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{\sqrt{x} \ln x} dx.$

13. $\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{(x+1) \ln(x+1)} dx.$

14. $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+3}{(x^3+2) \ln^2(x+1)} dx.$

15. $\int_1^{+\infty} \frac{k+3}{(k^2+2)\ln^2(k+1)} dk.$
16. $\int_2^{+\infty} \frac{v}{(3v^3+2)\ln(v+1)} dv.$
17. $\int_4^{+\infty} \frac{x^3+2}{(x^4+1)\ln \ln^4(2x+1)} dx.$
18. $\int_5^{+\infty} \frac{2x^2+3}{(x^3+2)\ln \ln^2 x \ln x} dx.$
19. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln^4 \ln(t^3+2)}{(t+1)\ln^3(2t+1)} dt.$
20. $\int_2^{+\infty} \frac{\ln \ln(t^2+3)}{(t^3+2)\ln^2(t+1)} dt.$
21. $\int_1^{+\infty} \frac{t}{(3t^3+2)\ln^2 \ln(t+1)} dt.$
22. $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+3}{(x^4+1)\ln(x+1)} dx.$
23. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t^3+1}\ln(t+1)} dt.$
24. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(y+1) - \ln y}{\ln^2(y+1)} dy.$
25. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+1}\ln^2(2x)} dx.$
26. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2u+\sqrt{u})\ln^2(u+1)} du.$
27. $\int_2^{+\infty} \frac{2x+1}{(x^3+3)\ln^2(x+1)} dx.$
28. $\int_0^{+\infty} \frac{k^3+2}{(k^4+1)\ln(2k+1)} dk.$
29. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(k+1)}{(k+1)^2} dk.$
30. $\int_{30}^{+\infty} \frac{1}{x \ln \ln \ln^7 x} dx.$
31. $\int_3^{+\infty} \frac{1}{t \ln^2 t} dt.$
32. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(t+1)\ln^3(t+1)} dt.$
33. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln \ln x}{(2x+3)\ln^3(2x+1)} dx.$
34. $\int_1^{+\infty} \frac{\ln \ln^4 x}{(2x+3)\ln^3(2x+1)} dx.$
35. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\ln(x+1)\ln^2 \ln(x+1)} dx.$
36. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{(x+3)^2 \ln(x+3)\ln \ln(x+3)}.$
37. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\ln^2(k+1)} dk.$
38. $\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}\ln(x+1)} dx.$
39. $\int_9^{+\infty} \frac{1}{(\ln \ln x)^{\ln x}} dx.$
40. $\int_9^{+\infty} \frac{1}{(\ln x)^{\ln \ln x}} dx.$
41. $\int_5^{+\infty} \frac{1}{x \ln \ln^5 x} dx.$
42. $\int_4^{+\infty} \frac{\ln \ln^4 x}{x \ln^3 x} dx.$

5. Дослідіть на збіжність інтеграл

1. $\int_0^{1/2} \frac{\ln x dx}{(1+e^x)\sqrt{x}}.$

2. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{x|\ln x|}.$

3. $\int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{x} |\ln x|}.$
4. $\int_0^1 \sqrt{|\ln x|} dx.$
5. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\arcsin x}} dx.$
6. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{arctg} x}} dx.$
7. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx.$
8. $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} dx.$
9. $\int_0^{1/2} \frac{\sqrt{x}}{\sin x} dx.$
10. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sin x}{\sqrt{x^3}} dx.$
11. $\int_{\pi/6}^{\pi} \frac{\sqrt{x - \pi}}{\sin x} dx.$
12. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{\operatorname{tg} x} dx.$
13. $\int_0^{\pi/2} \sqrt{x} \ln \sin x dx.$
14. $\int_0^1 \frac{1 + x^{7/3}}{\sqrt{1 - x}} dx.$
15. $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{e^{\sin x} - 1}.$
16. $\int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} x}{x^{3/2}} dx.$
17. $\int_0^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{x - 1}}.$
18. $\int_0^{\pi/2} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$
19. $\int_0^5 \sqrt{\frac{2 + x}{x - 5}} dx.$
20. $\int_0^1 \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x}} dx.$
21. $\int_{-5}^5 \frac{\sqrt[3]{1 + x^4}}{x^{2/3}} dx.$
22. $\int_0^1 \frac{x^2}{(\ln(1 + x) - x)^2} dx.$
23. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{x} \sqrt[3]{1 + x^4}}{\ln(1 + \operatorname{tg} x)} dx.$
24. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt{x} e^x}{\ln(1 + \sin x)} dx.$
25. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt[3]{x} 2^x}{\operatorname{tg}^2 x} dx.$
26. $\int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt[3]{x} 2^x}{\sin^{3/2} x} dx.$
27. $\int_0^1 \frac{1}{x - \sin x} dx.$
28. $\int_0^1 \frac{1}{e^x - \cos x} dx.$

$$29. \int_0^{\pi/4} \frac{x}{\operatorname{tg}^{2/3}(x - \pi/4)} dx.$$

$$30. \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt[3]{x} 2^x}{\sin^{3/2}(x - \pi/4)} dx.$$

$$31. \int_1^2 \frac{e^{-\sin x} dx}{(x-1)^2}.$$

$$32. \int_1^2 \frac{e^{-\sin x} dx}{\sqrt{x-1}}.$$

$$33. \int_0^{1/2} \frac{dx}{\ln x}.$$

$$34. \int_0^{1/2} \frac{dx}{x \ln x}.$$

$$35. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\arcsin x} dx.$$

$$36. \int_0^{1/2} \frac{\sqrt[3]{x}}{\operatorname{arctg} x} dx.$$

$$37. \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt[3]{x} 2^x}{\ln(1 + \operatorname{tg} x)} dx.$$

$$38. \int_0^{\pi/4} \frac{\sqrt[3]{x} 2^x}{\ln(1 + \sin x)} dx.$$

$$39. \int_0^{\pi/2} \ln |\sin^2 x - a| dx, \quad a \in (0; 1].$$

$$40. \int_0^{\varphi} \frac{dt}{\sqrt{\cos t - \cos \varphi}}, \quad \varphi \in (0; \pi/2].$$

$$41. \int_0^{\varphi} \frac{1}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{t}{2}}} dt, \quad \varphi \in (0; \pi].$$

$$42. \int_0^{1/2} \frac{dx}{e^{\sqrt{x}} - 1}.$$

$$43. \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{e^{\sin x} - 1} dx.$$

$$44. \int_0^1 \frac{x dx}{e^x - \cos x}.$$

6. Дослідіть на збіжність інтеграл

$$1. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|+1}{1+x^2 \ln^2 |x|} dx.$$

$$2. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{|\ln |\ln |x|| + x^4 \ln^2 |x|} dx.$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{e^{-x} + x \ln |x|} dx.$$

$$4. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + x \ln |x| |\ln \ln^2 |x||} dx.$$

$$5. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|+1}{e^x + x \ln^3 |x|} dx.$$

$$6. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|+1}{e^{|x|} + \ln x^2} dx.$$

$$7. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|+1}{x^2 \ln^2 |x|} dx.$$

$$8. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4 \ln^2 |x|} dx.$$

9. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|+1}{e^{-x} + \sqrt{|1-x|^5}} dx.$
10. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{e^x + \ln^2|x|} dx.$
11. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|+1}{e^x + \sqrt{|1-x|}} dx.$
12. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2+1}{e^x + x^4} dx.$
13. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^3+1}{(1+x^4)\sqrt{|x|}} dx.$
14. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(1+x^4)\sqrt{|x-1|^3}} dx.$
15. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(1+x^2)\sqrt{|x|}} dx.$
16. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{(1+x^3)\sqrt{|x-1|}} dx.$
17. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(e^x + e^{-x})|\ln|x||} dx.$
18. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{|e^{2x} - e^{-x}|} dx.$
19. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{e^{2x} + e^{-x}} dx.$
20. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{(e^{2x} + e^{-x})\sqrt{x^2-1}} dx.$
21. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{x^2-1}} dx.$
22. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{|x|}} dx.$
23. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$
24. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xe^{-|x|}}{\sqrt{x^2+1}} dx.$
25. $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx.$
26. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{|e^{2x}-1|}}.$
27. $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 \sqrt{\ln x}}.$
28. $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{|e^{2x}-1|}}.$
29. $\int_0^{+\infty} \frac{|\ln x| dx}{x \sqrt{x^2-1}}.$
30. $\int_0^{+\infty} \frac{x - \ln(1+x)}{x^3} \frac{1}{1+x^2} dx.$
31. $\int_0^1 \frac{dx}{|\ln x|}.$
32. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} |\ln x|}.$

33.
$$\int_0^1 \frac{-\ln x dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

34.
$$\int_0^{\pi} \frac{-\ln \sin x}{\sqrt{x}} dx.$$

35.
$$\int_0^{+\infty} x^{\sqrt{2}} |\ln x| e^{-x} dx.$$

36.
$$\int_{-1}^1 \frac{\ln(2 + \sqrt[3]{|x|}) dx}{\sqrt[3]{|x|}}.$$

37.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx.$$

38.
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\sqrt{|x|})^3 dx}{(e^{2x} + e^{-x}) |\ln(1+|x|) - |x||}.$$

7. Дослідіть на збіжність інтеграл

1.
$$\int_0^{+\infty} x^4 e^{-\sqrt[3]{x}} \sin^3 x dx.$$

2.
$$\int_0^{+\infty} \frac{x\sqrt{x} \sin x}{e^x(x - \sin x)} dx.$$

3.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x \ln x dx}{\sqrt{x^3} \sqrt{x^2 - 1}}.$$

4.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x}(x-1)}.$$

5.
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\sqrt{x} \sqrt{|x-1|}}.$$

6.
$$\int_0^1 \frac{\sin x dx}{\sqrt{1-x^2} - 1+x^2}.$$

7.
$$\int_1^2 \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{(x-1)(2-x)}}.$$

8.
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x + 3 \sin x}{e^{\sqrt{x}}} dx.$$

9.
$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{xx^2}} dx.$$

10.
$$\int_1^{+\infty} (\sqrt{1+1/t} - \ln(1+1/t)) \sin t dt.$$

11.
$$\int_4^{+\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{t} - \ln \left(1 + \frac{2}{t} \right) \right) \sin t^2 dt.$$

12.
$$\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{sh} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2} \right) \sin t^4 dt.$$

13.
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t^2 dt}{t - \ln(1+t)}.$$

14.
$$\int_0^1 \frac{\sin^{3/2} \pi x dx}{x - e^{x-1}}.$$

15.
$$\int_0^1 \frac{\cos 4x \cos \frac{\pi x}{2} dx}{\sqrt{x} \sqrt{1-x}}.$$

16.
$$\int_{-1}^0 \frac{\ln(-x) \cos 7x dx}{x - e^{x+1}}.$$

17.
$$\int_{-2}^0 \frac{\sqrt{-x} \ln(3+x) \cos 7x dx}{x+1+e^{x+2}}.$$

18.
$$\int_{-3}^0 \frac{\sqrt{-x} (\sqrt{\ln(4+x)} - 1) \cos x dx}{x+2-e^{x+3}}.$$

19. $\int_1^{+\infty} \sqrt{t} (\operatorname{sh} \ln(1+1/t) - 1/t) dt.$
20. $\int_1^{+\infty} \sqrt{t} \left(\operatorname{sh} \arcsin \frac{2}{t} - \frac{2}{t} \right) dt.$
21. $\int_2^{+\infty} (e^{\arcsin 1/x} - 1 - 2/x) dx.$
22. $\int_2^{+\infty} x^2 \left(\sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{6x^3} \right) dx.$
23. $\int_2^{+\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \ln \frac{x+1}{x-1} dx.$
24. $\int_3^{+\infty} (\sqrt{u+1} - \sqrt[4]{u^2+u+1}) du.$
25. $\int_2^{+\infty} \sin y (\sqrt{y^2+1} - \sqrt[3]{y^3+1}) dy.$
26. $\int_0^{+\infty} (\sqrt[3]{y^3+1} - \sqrt[4]{y^3+1}) dy.$
27. $\int_5^{+\infty} \left(\ln \frac{2x+1}{2x-1} - 1 \right) dx.$
28. $\int_4^{+\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right)^x dx.$
29. $\int_2^{+\infty} (e^{4/x} - 1 - 4/x) \sin x dx.$
30. $\int_1^{+\infty} \sin t (\sin 4/t - 4/t) dt.$
31. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{(x^2+1)^{3/2}}.$
32. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin^3 x dx.$
33. $\int_0^{\infty} \frac{\sin 3x}{x+x^2} dx.$
34. $\int_0^{+\infty} \frac{x \cos x + 2 \sin x}{x^3+1} dx.$
35. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \frac{1-\cos x}{x^2 \sqrt{x}} dx.$
36. $\int_0^{\infty} \frac{\cos x + 3 \sin x}{e^{-\sqrt{x}} \sqrt{x}} dx.$
37. $\int_1^{+\infty} \sin k \left(\operatorname{sh} \frac{1}{2k} - \ln(1+1/2k) \right) dk.$
38. $\int_1^{+\infty} \left(\operatorname{tg} \frac{3}{m} + \ln \left(1 - \frac{3}{m} \right) \right) \sin m dm.$
39. $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x + x \cos x}{1+x^3} dx.$
40. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{1+e^x} dx.$
41. $\int_1^{+\infty} \operatorname{tg} \left(\frac{\sin x}{x} \right) dx.$
42. $\int_1^{+\infty} \left(\int_t^{t+1} e^{-\sqrt[3]{x}} dx \right) dt.$
43. $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{t} - \sin \frac{1}{t} \right)^{\sqrt{t}} dt.$
44. $\int_1^{+\infty} t^2 e^{-\sqrt[4]{t}} \cos t dt.$
45. $\int_{-4}^0 \frac{\sqrt{-x} \sin(4+x) \cos x}{x+3+e^{x+4}} dx.$
46. $\int_{-1}^0 \frac{(1+x)^{3/2} \cos 4x}{x+1-\sin \pi x} dx.$

8. З'ясуйте, для яких p , q та s збіжним є інтеграл

$$1. \int_0^1 x^q \ln^p x dx.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^q \ln^p x}.$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx.$$

$$4. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x^q \ln^p x \ln^s \ln x}.$$

$$5. \int_{e^2}^{+\infty} \frac{dx}{x^q \ln^p x \ln \ln^s x}.$$

$$6. \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sin^p x \cos^q x} dx.$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^q + x^p}.$$

$$8. \int_0^{+\infty} \frac{1}{p^x x^q} dx.$$

9. Знайдіть

$$1. \text{v.p.} \int_{-7}^7 \frac{dx}{1-x^2}.$$

$$2. \text{v.p.} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x-x^2}.$$

$$3. \text{v.p.} \int_0^5 \frac{dx}{x^2-5x+4}.$$

$$4. \text{v.p.} \int_{-1}^2 \frac{dx}{x-x^2}.$$

$$5. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x dx.$$

$$6. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x dx.$$

$$7. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2} dx.$$

$$8. \text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{arctg} x dx.$$

10. Дослідіть на абсолютну і умовну збіжність інтеграли

$$1. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{x^2}.$$

$$2. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{x}}.$$

$$3. \int_0^{+\infty} \frac{\sin x dx}{\sqrt{x}}.$$

$$4. \int_0^{+\infty} \frac{x^2 \sin x}{1+x^3} dx.$$

$$5. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \cos x}{x+100} dx.$$

$$6. \int_0^{+\infty} x^2 \operatorname{cose}^x dx.$$

$$7. \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x+1/x)}{x} dx.$$

$$8. \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x} dx.$$

11. Знайдіть границі

$$1. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \sin t} dt.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt}{e^{-x^2} / x}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 0^+} x \int_x^1 \frac{\cos t}{t^2} dt.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t^2} dt}{-\ln x}.$$

12. Доведіть нерівності

$$1. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \leq \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

$$2. \left| \int_1^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2t dt \right| \leq \int_1^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

$$3. \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq 1/e.$$

$$4. \left| \int_1^{+\infty} t^2 e^{-t^2} \cos t dt \right| \leq \int_1^{+\infty} t^2 e^{-t} dt.$$

13. Знайдіть

$$1. \int_{-1}^2 x d(x^2).$$

$$2. \int_0^{\pi/2} \sin x d(x^2).$$

$$3. \int_{-2}^1 x dF(x), F(x) = [x].$$

$$4. \int_{-2}^1 x dF(x), F(x) = x[x].$$

$$5. \int_{-3}^2 x^2 dF(x), F(x) = \begin{cases} 1, & x = -3, \\ x, & -3 < x < -1, \\ 0, & x = -1, \\ x^3, & -1 < x \leq 0, \\ x^2, & 0 < x < 1, \\ 3, & 1 \leq x \leq 2, \\ 1, & 2 < x < 3, \\ 2, & x = 3. \end{cases}$$

$$6. \int_{-1}^3 x^2 dF(x), F(x) = \begin{cases} x, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2x+1, & 0 < x < 1, \\ 2, & x = 1, \\ e^x, & 1 < x \leq 3. \end{cases}$$

15. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру

- 1.31. $\frac{1}{2}$. 1.32. 2. 1.33. $\frac{\pi}{2}$. 1.34. $\frac{\pi}{4}$. 1.35. $e^{\frac{\pi}{2}} - 1$. 1.36. 1. 1.37. $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$.
- 1.38. $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. 1.39. $\ln 2$. 1.40. $\frac{1}{2} \ln 3$. 1.41. 2. 1.42. 2. 1.43. $\frac{1}{\ln 2}$. 1.44. $\frac{1}{\ln 2}$.
- 1.45. $\frac{\pi}{2}$. 1.46. $\frac{1}{4} \ln 2$. 1.47. 0. 1.48. $\frac{\pi}{6}$. 1.49. $\frac{\pi}{2}$. 1.50. -1. 1.51. $\Gamma(n+1)$. 1.52. $\frac{1}{2} \Gamma(n+1)$.
- 1.53. $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(n+1)}{\Gamma(n)}$. 2.31. 2. 2.32. 0,75. 2.33. 0. 2.34. $-\frac{4}{9}$. 2.35. π .
- 2.36. $\frac{8}{3}$. 2.37. $\frac{21}{5}$. 2.38. $\frac{102}{7}$. 2.39. $\frac{16}{3}$. 2.40. $\frac{648}{5}$. 2.41. $\frac{\pi}{2}$. 2.42. π . 2.43. $\frac{\pi}{2}$. 2.44. π .
- 2.45. $e^{\frac{\pi}{2}} - e^{-\frac{\pi}{2}}$. 2.46. 2. 2.47. $(-1)^n \Gamma(n+1)$. 2.48. 0. 3.31. збіжний. 3.32. збіжний. 3.33. збіжний. 3.34. збіжний. 3.35. збіжний. 3.36. розбіжний. 3.37. збіжний. 3.38. розбіжний. 3.39. збіжний. 3.40. розбіжний. 3.41. розбіжний. 3.42. збіжний. 3.43. збіжний. 3.44. збіжний. 3.45. збіжний. 3.46. розбіжний. 3.47. збіжний. 3.48. розбіжний. 3.49. збіжний. 3.50. розбіжний. 3.51. збіжний. 3.52. розбіжний. 3.55. збіжний. 3.56. розбіжний. 3.57. розбіжний. 3.58. збіжний. 4.31. збіжний. 4.32. збіжний. 4.33. збіжний. 4.34. збіжний. 4.35. збіжний. 4.36. розбіжний. 4.37. розбіжний. 4.38. розбіжний. 4.39. збіжний. 4.40. збіжний.

Розділ 9. Застосування визначеного інтеграла

За допомогою визначеного інтеграла можна знаходити площу, об'єм, роботу, масу, координати центра мас, статичні моменти, моменти інерції та багато інших характеристик геометричних, природничих та суспільних об'єктів і явищ. Тут ми ілюструємо основні ідеї, які лежать в основі відповідних застосувань. При цьому досить добре буде видно суть основного методу математичного аналізу: для вивчення складного явища потрібно розбити його на простіші, вивчити останні, а потім висновок про його властивості зробити на основі властивостей простіших, використовуючи властивості границь та сум. Наведені нижче теореми та їхні доведення дуже приблизно відповідають суті цих термінів, оскільки потребують багатьох уточнень та відповідних означень (на них читач натрапить при вивченні подальших розділів математичного аналізу).

1. Площа криволінійної трапеції. Якщо деяка плоска фігура є об'єднанням скінченної кількості попарно неперетинних багатокутників (багатокутників), то її площа дорівнює сумі площ цих багатокутників. Криволінійною трапецією називається множина $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$, тобто це множина точок площини, яка обмежена лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$ і $y = f(x)$, де $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ – невід'ємна

функція на проміжку $[a; b]$.

Криволінійну трапецію не можна подати у вигляді об'єднання скінченної кількості многокутників. Для знаходження площі криволінійної трапеції природно поступити так. Розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ на n частин. Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$, як на основі, побудуємо два прямокутники з висотами $m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$ і

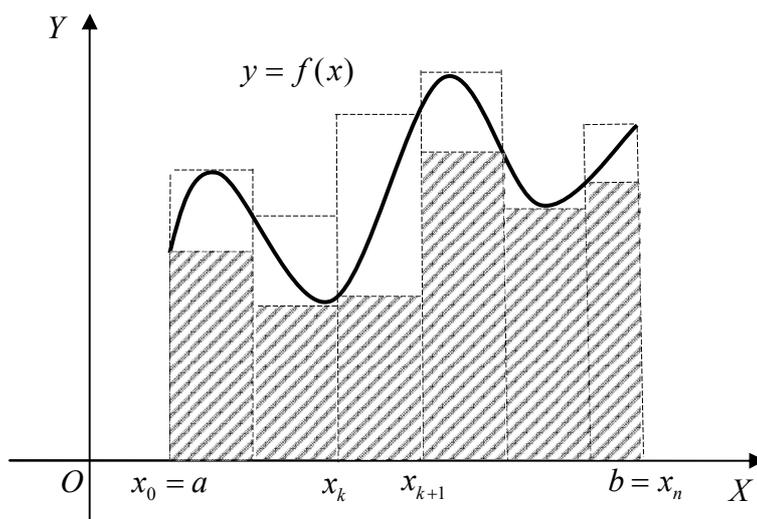


Рис.1

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}.$$

Ці прямокутники будемо називати відповідно вхідними й вихідними. Площі k -го вхідного й вихідного прямокутників відповідно рівні $m_k \Delta x_k$ і $M_k \Delta x_k$. Суми площ вхідних і вихідних прямокутників відповідно дорівнюють

$$\underline{\sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \bar{\sigma} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Якщо

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{\sigma} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{\sigma} = P, \quad (1)$$

то число P приймають за площу криволінійної трапеції.

Теорема 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і неперервною на проміжку $[a; b]$, то криволінійна трапеція $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ має площу P і

$$P = \int_a^b f(x)dx. \quad (2)$$

Доведення. Справді, оскільки функція f є неперервною, то $(\exists \xi'_k \in [x_k; x_{k+1}]): f(\xi'_k) = m_k$ і $(\exists \xi''_k \in [x_k; x_{k+1}]): f(\xi''_k) = M_k$. Тому суми $\underline{\sigma}$ і $\bar{\sigma}$ є інтегральними сумами для інтегралу (2), а оскільки функція f є неперервною, то границі (1) існують і дорівнюють інтегралу (2). ►

Так само переконуємося у справедливості наступного твердження.

Теорема 2. Якщо функції $y_1: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $y_2: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервними на проміжку $[a; b]$ і $y_1(x) \leq y_2(x)$ для $x \in [a; b]$, то площа узагальненої криволінійної трапеції

$E = \{(x; y) : y_1(x) \leq y \leq y_2(x), a \leq x \leq b\}$ знаходиться за формулою

$$P = \int_a^b (y_2(x) - y_1(x))dx.$$

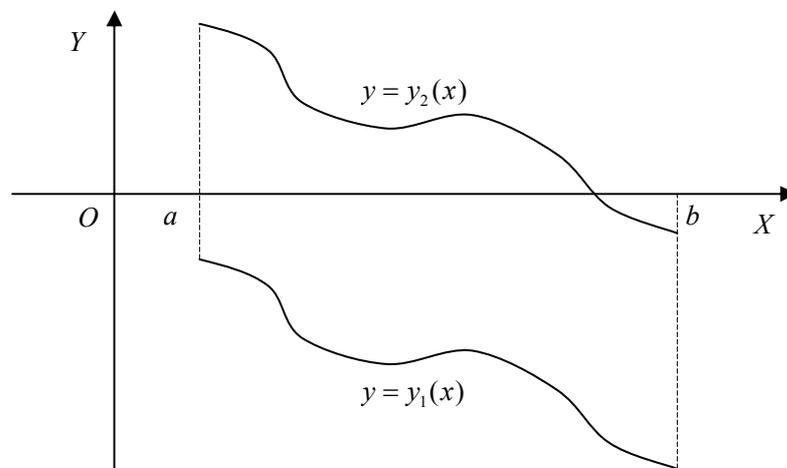


Рис.2.

З теореми 1 випливає такий геометричний зміст первісної F функції f : різниця $F(b) - F(a)$ дорівнює площі криволінійної трапеції.

Приклад 1. Якщо $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq x^2, 1 \leq x \leq 2\}$, то

$$P = \int_1^2 x^2 dx = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Приклад 2. Якщо E – множина, обмежена кривими $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$,

$y = e^x$ і $y = e^{-x}$, то

$$P = \int_{-1}^0 e^x dx + \int_0^1 e^{-x} dx = 2 - \frac{2}{e}.$$

Приклад 3. Якщо E – множина, обмежена кривими $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$, то

$$P = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 4. Якщо E – множина, обмежена еліпсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, то

$$P = 4 \int_0^a \sqrt{b^2 - b^2 \frac{x^2}{a^2}} dx = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4ab \int_0^{\pi/2} \sin^2 t dt = \pi ab.$$

Зауваження 1. За допомогою інтеграла Рімана можна знаходити площі обмежених фігур. За допомогою невластних інтегралів можна знаходити площі необмежених фігур.

Приклад 5. Якщо $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq x^{-2}, 1 \leq x < +\infty\}$, то

$$P = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1.$$

Зауваження 2. Формула (2) придатна і для знаходження площі криволінійної трапеції $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$, якщо функція f задана параметрично системою

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta]. \end{cases}$$

У цьому випадку формула (2) набирає вигляду

$$P = \int_{\alpha}^{\beta} y(t) dx(t),$$

якщо функція $x : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[\alpha; \beta]$ і $x'(t) > 0$ для всіх $t \in [\alpha; \beta]$.

Приклад 6. Знаходячи площу фігури, яка обмежена віссю абсцис і однією

аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

отримуємо

$$P = \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt = \int_0^{2\pi} 1 dt - \int_0^{2\pi} 2 \cos t dt + \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = 3\pi.$$

2. Полярні координати. Площа криволінійного сектора. Кожній точці A площини з декартовими координатами $(x; y)$ можна поставити у відповідність полярні координати $(\varphi; \rho)$, де ρ – відстань від точки O (початку координат) до точки A , а φ – кут між вектором \overrightarrow{OA} і додатним напрямом осі OX (тобто вектором \vec{i}). Декартові координати $(x; y)$ і полярні координати $(\varphi; \rho)$ точки A площини пов'язані формулами

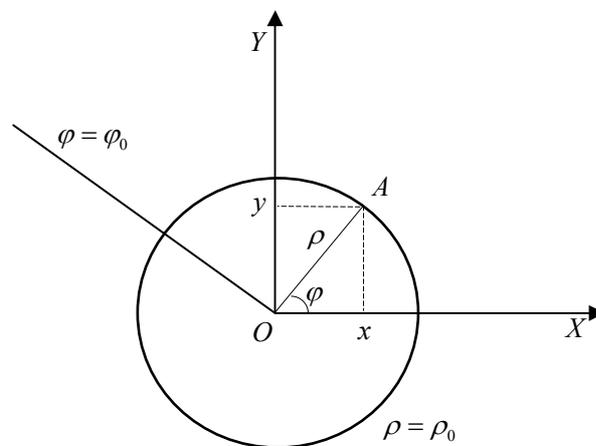


Рис.1.

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases} \quad (1)$$

У полярній системі координат $\varphi = \varphi_0$ – це рівняння променя, а $\rho = \rho_0$ – рівняння кола. У полярній системі координат ρ – відстань і тому $\rho \geq 0$. Проте інколи на формули (1) дивляться як на формули, що задають відображення однієї площини на іншу, і тоді ρ може бути і від'ємним.

Відомо, що площа кругового сектора знаходиться за формулою

$$P = \frac{1}{2} R^2 \varphi. \quad (2)$$

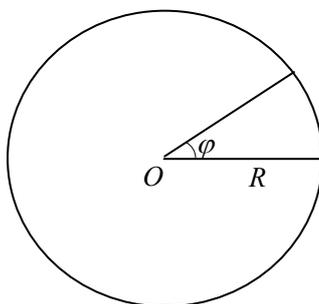


Рис.2.

Криволінійним сектором називається задана в полярній системі координат множина $E = \{(\varphi; \rho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$, де $\rho : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка невід’ємна функція на проміжку $[\alpha; \beta]$. Інакше кажучи, криволінійний сектор – це фігура E , обмежена променями $\varphi = \alpha$ та $\varphi = \beta$ і деякою кривою, яка в полярній системі координат має рівняння $\rho = \rho(\varphi)$.

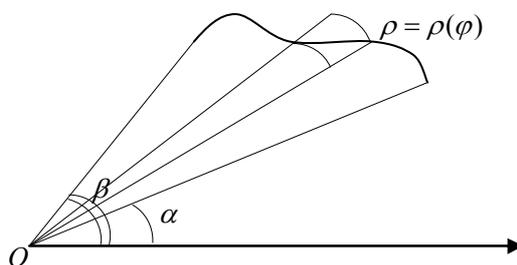


Рис.3.

Теорема 1. Якщо функція $\rho : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід’ємною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то площа криволінійного сектора $E = \{(\varphi; \rho) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$ знаходиться за формулою

$$P = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \quad (3)$$

Доведення. Розглянемо розбиття $\tau = \{\varphi_k : k \in \overline{0; n}\}$ проміжку $[\alpha; \beta]$ таке, що $\alpha = \varphi_0 < \dots < \varphi_n = \beta$. Нехай $\Delta\varphi_k = \varphi_{k+1} - \varphi_k$ і $\lambda = \max\{\Delta\varphi_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. У кожному куті, обмеженому променями $\varphi = \varphi_k$ і $\varphi = \varphi_{k+1}$, побудуємо два кругові сектори з радіусами

$$m_k = \min\{\rho(\varphi) : \varphi \in [\varphi_k; \varphi_{k+1}]\}, \quad M_k = \max\{\rho(\varphi) : \varphi \in [\varphi_k; \varphi_{k+1}]\}.$$

Згідно з формулою (2) суми площ вхідних і вихідних кругових секторів відповідно рівні

$$\underline{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta\varphi_k, \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta\varphi_k.$$

Функція ρ є неперервною на проміжку $[\alpha; \beta]$. Тому існують такі $\xi'_k \in [\varphi_k; \varphi_{k+1}]$ і $\xi''_k \in [\varphi_k; \varphi_{k+1}]$, що $m_k = \rho(\xi'_k)$ і $M_k = \rho(\xi''_k)$. Тому суми $\underline{\sigma}$ і $\bar{\sigma}$ є інтегральними сумами для інтегралу

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi.$$

Функція $\rho^2/2$ є неперервною на проміжку $[\alpha; \beta]$, а тому є інтегрованою на $[\alpha; \beta]$. Отже,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{\sigma} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{\sigma} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) d\varphi. \blacktriangleright$$

Приклад 1. Якщо E – множина, обмежена кардіоїдою $\rho = 1 + \cos \varphi$, то

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} 1 d\varphi + \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi = \frac{3\pi}{2}.$$

Приклад 2. Якщо $E = \{(\varphi; \rho) : 1 + \cos \varphi \leq \rho \leq 3 \cos \varphi\}$, то

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (3 \cos \varphi)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} (1 + \cos \varphi)^2 d\varphi \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} d\varphi - \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos \varphi d\varphi + 4 \int_{-\pi/3}^{\pi/3} \cos^2 \varphi d\varphi = -\frac{\pi}{3} - \sqrt{3} + \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3} = \pi. \end{aligned}$$

3. Довжина кривої (шляху). Кожна неперервна крива чи шлях γ задається параметрично

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta], \quad (1)$$

де $\gamma_1 : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2 : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ – функції, неперервні на проміжку $[\alpha; \beta]$. Точку $A(\gamma_1(\alpha); \gamma_2(\alpha))$ називають початком шляху, а точку $B(\gamma_1(\beta); \gamma_2(\beta))$ –

його кінцем. Для знаходження довжини шляху γ розглянемо розбиття $\tau = \{t_k : k \in \overline{0; n}\}$, $\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta$ проміжку $[\alpha; \beta]$. Нехай $\Delta t_k = t_{k+1} - t_k$ і $\lambda = \max \{\Delta t_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. Точкам t_k на шляху відповідають точки $M_k(x_k; y_k)$, де $x_k = \gamma_1(t_k)$ і $y_k = \gamma_2(t_k)$. З'єднаємо послідовно точки M_k відрізками. Отримаємо ламану з довжиною

$$l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} M_k M_{k+1}.$$

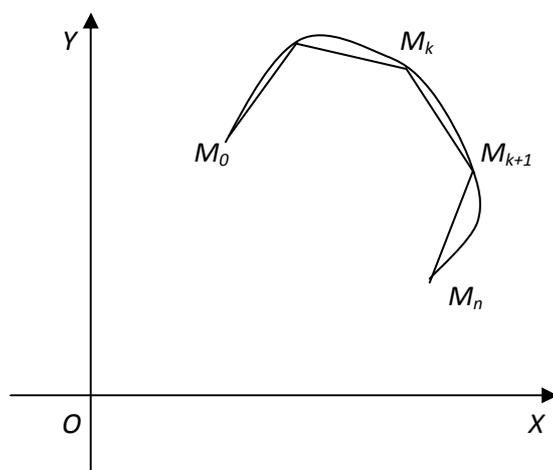


Рис. 1.

Шлях γ називається спрямлюваним, якщо $\sup \{l_\tau : \tau\} = L < +\infty$. При цьому число L називається довжиною спрямлюваного шляху γ .

Теорема 1. Якщо функції $\gamma_1 : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2 : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, то шлях, заданий системою (1), є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt. \quad (2)$$

Доведення. Маємо

$$M_k M_{k+1} = \sqrt{(\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2 + (\gamma_2(t_{k+1}) - \gamma_2(t_k))^2} = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}.$$

За теоремою Лагранжа

$$x_{k+1} - x_k = \gamma_1'(\tau_k) \Delta t_k, \quad \tau_k \in [t_k; t_{k+1}],$$

$$y_{k+1} - y_k = \gamma_2'(\tilde{\tau}_k) \Delta t_k, \quad \tilde{\tau}_k \in [t_k; t_{k+1}].$$

Тому

$$l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\gamma_1'^2(\tau_k) + \gamma_2'^2(\tilde{\tau}_k)} \Delta t_k.$$

Функція $\sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)}$ є неперервною, а тому і обмеженою на проміжку $[\alpha; \beta]$.

Отже,

$$l_\tau = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\gamma_1'^2(\tau_k) + \gamma_2'^2(\tilde{\tau}_k)} \Delta t_k \leq c_1 \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = c_1(\beta - \alpha)$$

для деякої сталої c_1 , незалежної від τ . Тому шлях γ є спрямлюваним. Нехай

$$\sigma = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{\gamma_1'^2(\tau_k) + \gamma_2'^2(\tau_k)} \Delta t_k.$$

Тоді

$$|l_\tau - \sigma| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \sqrt{\gamma_1'^2(\tau_k) + \gamma_2'^2(\tilde{\tau}_k)} - \sqrt{\gamma_1'^2(\tau_k) + \gamma_2'^2(\tau_k)} \right| \Delta t_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma_2'(\tau_k) - \gamma_2'(\tilde{\tau}_k)| \Delta t_k,$$

бо $|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + b_1^2}| \leq |b - b_1|$. За теоремою Кантора функція γ_2' є рівномірно неперервною на проміжку $[\alpha; \beta]$. Тому для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|\gamma_2'(\tau_k) - \gamma_2'(\tilde{\tau}_k)| < \varepsilon$ для кожного розбиття τ , для якого $\lambda < \delta$. Отже,

$$|l_\tau - \sigma| \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \varepsilon(\beta - \alpha),$$

якщо $\lambda < \delta$. Таким чином, $l_\tau - \sigma \rightarrow 0$, якщо $\lambda \rightarrow 0$. Але σ – це інтегральна сума для інтегралу

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t)} dt.$$

Тому $\sigma \rightarrow I$, якщо $\lambda \rightarrow 0$. Отже, $l_\tau \rightarrow I$, якщо $\lambda \rightarrow 0$. Але якщо $\tau \subset \tilde{\tau}$, то $l_\tau \leq l_{\tilde{\tau}}$.

Тому $\lim_{\lambda \rightarrow 0} l_\tau = \sup \{l_\tau : \tau\}$ і теорема 1 доведена. ►

Наслідок 1. Якщо шлях γ заданий рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, і функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[a; b]$, то цей шлях є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (3)$$

Доведення. Для отримання цього наслідку досить зауважити, що шлях γ можна розглядати як заданий параметрично системою

$$\begin{cases} x = x, \\ y = f(x), \end{cases} \quad x \in [a; b]. \quad \blacktriangleright \quad (4)$$

Наслідок 2. Якщо шлях γ , заданий у полярній системі координат рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$, і функція $\rho : [\alpha; \beta] \rightarrow [0; +\infty)$ є неперервно диференційовною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то такий шлях є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + \rho'^2(\varphi)} d\varphi. \quad (5)$$

Доведення. Для отримання цього наслідку досить зауважити, що в даному випадку система (1) має вигляд

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases} \quad \varphi \in [\alpha; \beta],$$

$$\text{і } x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2. \quad \blacktriangleright$$

Якщо γ – спрямлюваний шлях, то його частина, що відповідає проміжку $[a; t]$ також спрямлюваний шлях. Якщо функції $\gamma_1 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2 : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, то довжина цієї частини шляху (він називається дугою) знаходиться за формулою

$$l = \int_a^t \sqrt{\gamma_1'^2(\tau) + \gamma_2'^2(\tau)} d\tau.$$

Диференціал dl функції $l : [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ називається диференціалом дуги, тобто

$$dl = \sqrt{\gamma_1'^2(\tau) + \gamma_2'^2(\tau)} d\tau.$$

Аналогічно, $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx$ і $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi$, якщо відповідний шлях заданий рівнянням $y = y(x)$ і $\rho = \rho(\varphi)$.

Теорема 2. Для того, щоб шлях γ , заданий системою (1), був спрямлюваним, необхідно і достатньо, щоб функції γ_1 і γ_2 були функціями обмеженої варіації на проміжку $[\alpha; \beta]$.

Доведення. Справді, нехай шлях γ є спрямлюваним. Тоді

$$\sup_{\tau} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2 + (\gamma_2(t_{k+1}) - \gamma_2(t_k))^2} \right\} < +\infty. \quad (6)$$

Але

$$|\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k)| \leq \sqrt{(\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2 + (\gamma_2(t_{k+1}) - \gamma_2(t_k))^2}, \quad (7)$$

$$|\gamma_2(t_{k+1}) - \gamma_2(t_k)| \leq \sqrt{(\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k))^2 + (\gamma_2(t_{k+1}) - \gamma_2(t_k))^2}. \quad (8)$$

Тому

$$\sup_{\tau} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma_1(t_{k+1}) - \gamma_1(t_k)| \right\} < +\infty, \quad \sup_{\tau} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} |\gamma_2(t_{k+1}) - \gamma_2(t_k)| \right\} < +\infty. \quad (9)$$

Отже, функції γ_1 і γ_2 є функціями обмеженої варіації. Навпаки, нехай функції γ_1 і γ_2 є функціями обмеженої варіації. Тоді виконується (9). Але $\sqrt{|a|^2 + |b|^2} \leq |a| + |b|$. Тому виконується (6). ►

Шлях γ в просторі \mathbb{R}^3 задається системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \\ z = \gamma_3(t), \quad t \in [\alpha; \beta]. \end{cases} \quad (10)$$

Означення спрямлюваного шляху в \mathbb{R}^3 формулюється за аналогією.

Теорема 3. Якщо функції $\gamma_1: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $\gamma_2: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_3: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, то шлях γ , заданий системою (10), є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \gamma_2'^2(t) + \gamma_3'^2(t)} dt. \quad (11)$$

Доведення. Ця теорема доводиться так само, як і теорема 1. ►

Приклад 1. Якщо γ – це астроида

$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases}$$

то

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9\cos^4 t \sin^2 t + 9\cos^2 t \sin^4 t} dt = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} |\sin 2t| dt = 6 \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = 6.$$

Приклад 2. Якщо γ – це частина параболи $y = x^2 / 2$, $x \in [0; 1]$, то

$$L = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \ln(\sqrt{2} - 1).$$

Приклад 3. Якщо γ – це частина логарифмічної спіралі $\rho = e^\varphi$, $\varphi \in [0; \pi]$,

то

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{e^{2\varphi} + e^{2\varphi}} d\varphi = \sqrt{2} \int_0^{\pi} e^\varphi d\varphi = \sqrt{2}(e^\pi - 1).$$

Приклад 4. Якщо γ – це просторова крива

$$\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \\ z = t, \quad t \in [0; \pi / 2], \end{cases}$$

то

$$L = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1+1} dt = \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} 1 dt = \pi\sqrt{2} / 2.$$

Шлях γ в просторі \mathbb{R}^n задається системою

$$\begin{cases} x_1 = \gamma_1(t), \\ \dots \\ x_n = \gamma_n(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta]. \quad (12)$$

Означення спрямлюваного шляху в \mathbb{R}^n формулюється за аналогією.

Теорема 4. Якщо всі функції $\gamma_j: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на проміжку $[\alpha; \beta]$, то шлях γ , заданий системою (12), є спрямлюваним і його довжина знаходиться за формулою

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\gamma_1'^2(t) + \dots + \gamma_n'^2(t)} dt. \quad (13)$$

Доведення. Ця теорема доводиться так само, як і теорема 1. ►

4. Площа поверхні обертання. Нехай крива γ задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. При обертанні навколо осі OX ця крива описує поверхню Δ , яка називається поверхнею обертання.

Для знаходження площі поверхні обертання розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ на n частин. Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\lambda_{\tau} = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. Кожній точці x_k на кривій відповідає точка $M_k(x_k; y_k)$, де $y_k = f(x_k)$. З'єднаємо послідовно точки M_k . Отримаємо ламану. Ця ламана при обертанні опише фігуру з

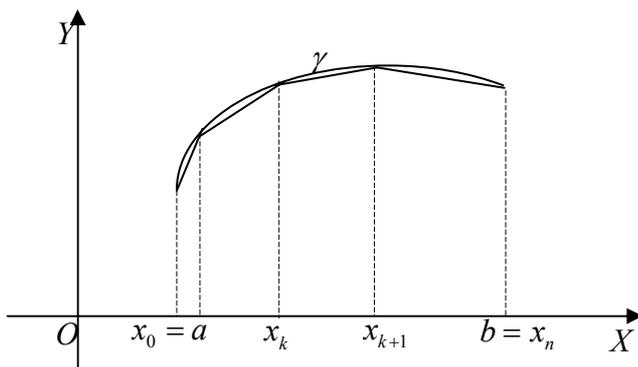


Рис.1.

площею S_{τ} , яка є об'єднанням бічних поверхонь зрізаних конусів. Якщо існує скінченна границя $S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_{\tau}$, то ця границя називається площею поверхні обертання.

Теорема 1. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на

проміжку $[a; b]$, то поверхня, утворена обертанням кривої $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, навколо осі OX має площу, яку можна знайти за формулою

$$S = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (1)$$

Доведення. Для простоти будемо вважати, що $f(x) \geq 0$, якщо $x \in [a; b]$. При обертанні навколо осі OX відрізок $M_k M_{k+1}$ опише зрізаний конус, площа бічної поверхні якого рівна $\pi(y_k + y_{k+1}) \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}$. Тому

$$S_\tau = \pi \sum_{k=0}^{n-1} (y_k + y_{k+1}) \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_k^2}. \quad (2)$$

За теоремою Лагранжа $\Delta y_k = f'(\xi_k) \Delta x_k$, $\xi_k \in (x_k; x_{k+1})$. Отже,

$$S_\tau = \pi \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_k) + f(x_{k+1})) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k.$$

Нехай

$$\sigma = 2\pi \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k.$$

Маємо

$$S_\tau - \sigma = \pi \sum_{k=0}^{n-1} ((f(x_{k+1}) - f(\xi_k) + f(x_k) - f(\xi_k)) \sqrt{1 + f'^2(\xi_k)} \Delta x_k).$$

Функція $\sqrt{1 + f'^2(x)}$ є неперервною і, отже, обмежена на проміжку $[a; b]$. Тому $(\exists c_1)(\forall x \in [a; b]): \sqrt{1 + f'^2(x)} \leq c_1$. Функція f є неперервною і, отже, рівномірно неперервною на $[a; b]$. Тому для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що $|f(x_{k+1}) - f(\xi_k)| < \varepsilon$ і $|f(x_k) - f(\xi_k)| < \varepsilon$ для кожного розбиття τ , для якого $\lambda_\tau < \delta$. Отже,

$$|S_\tau - \sigma| \leq 2\pi c_1 \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = 2\pi c_1 (b - a) \varepsilon,$$

якщо $\lambda_\tau < \delta$. Таким чином,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (S_\tau - \sigma) = 0. \quad (3)$$

Але σ є інтегральною сумою для інтегралу (1). Тому

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx.$$

Звідси випливає твердження теореми. ►

Приклад 1. Якщо Δ – поверхня, утворена при обертанні навколо осі абсцис частини синусоїди $y = \sin x$, $x \in [0; \pi]$, то

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi} \sin x \sqrt{1 + \cos^2 x} dx = -2\pi \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \cos^2 x} d \cos x \\ &= -\pi \cos x \sqrt{1 + \cos^2 x} \Big|_0^{\pi} - \pi \ln \left(\cos x + \sqrt{1 + \cos^2 x} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= 2\pi\sqrt{2} + \pi \ln \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned}$$

Зауваження 1. Оскільки $\sqrt{1 + y'^2} dx = dl$, то формулу (1) можна переписати у вигляді

$$S = 2\pi \int_0^L |y| dl.$$

За останньою формулою можна знаходити площу поверхні обертання і тоді, коли крива γ задана параметрично або в полярній системі координат

Приклад 2. Якщо Δ – поверхня, утворена при обертанні навколо осі абсцис лемніскати $\rho = \sqrt{\cos 2\varphi}$, то

$$S = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sqrt{\cos 2\varphi} dl = 4\pi \int_0^{\pi/4} \sin \varphi d\varphi = 2\pi(2 - \sqrt{2}).$$

5. Об'єм тіла обертання. Нехай

$E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$ – криволінійна трапеція і функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною на проміжку $[a; b]$. При обертанні навколо осі OX ця трапеція опише певну фігуру T , яка називається тілом обертання. Знайдемо його об'єм. Для цього розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ на n частин. Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. На

кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$, як на основі, побудуємо два прямокутники з висотами

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\} \quad \text{і} \quad M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}.$$

Об'єм тіл (це циліндри), які опишуть відповідно k -й вхідний і k -й вихідний прямокутники, рівні $\pi m_k^2 \Delta x_k$ і $\pi M_k^2 \Delta x_k$. Суми об'ємів усіх вхідних і вихідних циліндрів відповідно рівні

$$\underline{V} = \pi \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \Delta x_k, \quad \bar{V} = \pi \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \Delta x_k.$$

Якщо існують скінченні границі

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^-} \underline{V} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{V} = V,$$

то число V приймають за об'єм тіла обертання.

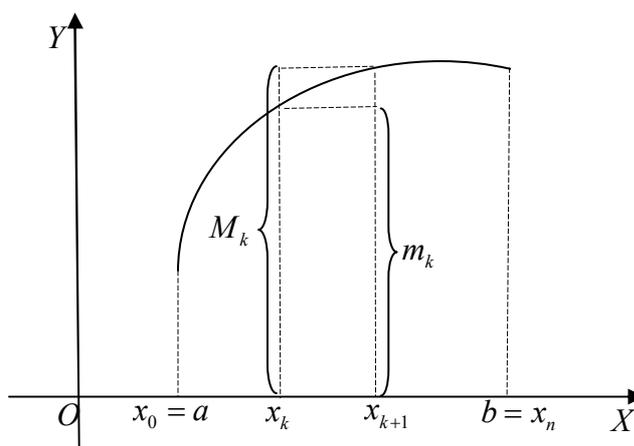


Рис.1.

Теорема 1. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a; b]$, то тіло, утворене при обертанні криволінійної трапеції $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ навколо осі OX має об'єм і

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (1)$$

Доведення. Функція f є неперервною на $[a; b]$. Тому за другою теоремою Вейерштрасса $(\exists \xi'_k \in [x_k; x_{k+1}]) : f(\xi'_k) = m_k$ і

$(\exists \xi_k'' \in [x_k; x_{k+1}]): f(\xi_k'') = M_k$. Отже,

$$\underline{V} = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k') \Delta x_k, \quad \bar{V} = \pi \sum_{k=0}^{n-1} f^2(\xi_k'') \Delta x_k.$$

Функція πf^2 є неперервною, а тому інтегрованою на проміжку $[a; b]$. Отже, границя кожної з сум \underline{V} і \bar{V} дорівнює інтегралу (1). ►

Теорема 2. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[a; b]$, то тіло, утворене при обертанні криволінійної трапеції $E = \{(x; y): 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\}$ навколо осі OY має об'єм і

$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx. \quad (2)$$

Доведення цієї теореми є аналогічним до попередньої. ►

Приклад 1. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис частини криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ і $x = \pi$, то

$$V = \pi \int_0^{\pi} \sin^2 x dx = \pi \int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{\pi^2}{2}.$$

Приклад 2. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = x^3$ і $y = x$, то

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx - \pi \int_0^1 x^6 dx = \frac{4\pi}{21}.$$

Приклад 3. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями $y = x^3$, $y = -x$ і $x = 1$, то

$$V = \pi \int_0^1 x^2 dx = \frac{\pi}{3},$$

бо $x^3 \leq x$, якщо $x \in [0; 1]$.

Приклад 4. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис

фігури, обмеженої лініями $y = 0$, $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases}$ і $x = \pi$, то

$$V = \pi \int_0^{\pi} y^2 dx = \pi \int_0^{\pi} (1 - \cos t)^3 dt = \frac{5\pi^2}{2}.$$

Приклад 5. Якщо T – тіло, утворене при обертанні навколо осі абсцис фігури, обмеженої лініями, які задані в полярній системі координат рівняннями $\rho = e^{\varphi}$, $\varphi = 0$ і $\varphi = \pi$, то $x = \rho \cos \varphi = e^{\varphi} \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi = e^{\varphi} \sin \varphi$, $dx = e^{\varphi}(\cos \varphi - \sin \varphi)d\varphi$ і

$$V = \pi \int_{\pi}^0 e^{3\varphi} \sin^2 \varphi (\cos \varphi - \sin \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{15} (e^{3\pi} + 1).$$

6. Знаходження об'єму за площею поперечного перерізу.

Теорема 1. Нехай просторове тіло T розміщене між двома площинами $x = a$ та $x = b$ і при перетині його площиною π_x перпендикулярною до осі OX , яка проходить через точку осі OX з абсцисою x , утворює в перерізі фігуру з площею $P(x)$. Нехай ця функція $P: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$ і, крім цього, нехай будь-які два таких перерізи є такими, що їх проєкції на площину YOZ містяться один в одному. Тоді об'єм тіла T знаходиться за формулою

$$V = \int_a^b P(x) dx. \quad (1)$$

Доведення. Розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ на n частин. Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$, як на основі побудуємо два прямокутники, які лежать в площині OXY і мають висоти $m_k = \min \{P(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$ і $M_k = \max \{P(x) : x \in [x_k; x_{k+1}]\}$. Об'єми тіл (це циліндри), які описують при обертанні навколо осі OX відповідно k -й вхідний і k -й вихідний прямокутники, рівні $m_k \Delta x_k$ і $M_k \Delta x_k$. Суми

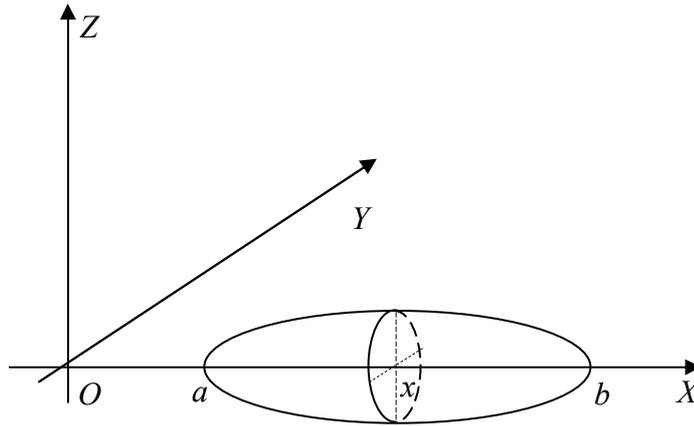


Рис.1.

об'ємів всіх вхідних і вихідних циліндрів відповідно рівні

$$\underline{V} = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k, \quad \bar{V} = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Функція P є неперервною на проміжку $[a; b]$. Тому існують скінченні границі

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \underline{V} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \bar{V} = \int_a^b P(x) dx.$$

Тіло T містить об'єднання всіх вхідних циліндрів і міститься в об'єднанні усіх вихідних циліндрів. Тому ми приходимо до формули (1). ►

Приклад 1. Для знаходження об'єму еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

зауважимо, що це тіло T лежить між площинами $x = -a$ та $x = a$ і при перетині його площиною, перпендикулярною до осі OX , що проходить через

точку цієї осі з абсцисою x , у перетині утворюється еліпс $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$,

площа якого $P(x) = \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2)$. Тому

$$V = \int_{-a}^a \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2) dx = \frac{4\pi abc}{3}.$$

Приклад 2. Нехай T – піраміда з площею основи P_0 і висотою h . Нехай система координат $OXYZ$ вибрана так, що точка O є вершиною піраміди і висота піраміди лежить на осі OX . Якщо $P(x)$ – площа перерізу піраміди площиною перпендикулярною до основи, яка проходить через точку з абсцисою

x , то $\frac{P(x)}{P_0} = \frac{x^2}{h^2}$ і тому $P(x) = P_0 \frac{x^2}{h^2}$. Отже,

$$V = \int_0^1 P_0 \frac{x^2}{h^2} dx = P_0 / 3h^2,$$

– об'єм піраміди.

7. Середнє значення функції на проміжку. Якщо здійснюється вимірювання деякої величини y (наприклад, струму в електричному колі), у результаті якого отримано n значень цієї величини y_k , $k \in \overline{0; n-1}$, то середнім значенням величини y називається число $\underline{y} = \frac{y_0 + \dots + y_{n-1}}{n}$, тобто середнім значенням функції $y: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, яка на проміжку $[a; b]$ набуває лишень n значень $y_k = y(x_k)$, називається число

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(x_k).$$

Припустимо, що $y: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ – довільна функція, інтегровна на проміжку $[a; b]$. Для знаходження середнього значення цієї функції на проміжку $[a; b]$ розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$, проміжку $[a; b]$ на n рівних частин. Тоді $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$ функцію y можна приблизно вважати сталою: $y(x) = y(x_k)$, $x \in [x_k; x_{k+1}]$, а число $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(x_k) = \frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} y(x_k) \Delta x_k$ прийняти за її середнє значення на $[a; b]$.

Але

$$\frac{1}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} y(x_k) \Delta x_k \rightarrow \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx.$$

Тому середнім значенням функції $y: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a; b]$ називають число

$$\underline{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b y(x) dx.$$

Приклад 1. Середнім значенням функції $f(x) = \sin x$ на проміжку $[0; \pi]$ є

число

$$\underline{y} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}.$$

Середнім значенням функції $y: [a; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a; +\infty)$ називається границя

$$\underline{y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_a^x y(t) dt.$$

Приклад 2. Оскільки $\int_0^x t \cos t dt = x \sin x + \cos x - 1$, то границя

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x t \cos t dt$ не існує і функція $f(t) = t \cos t$ середнього значення на проміжку $[0; +\infty)$ не має.

Середнім значенням функції $y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ називається границя

$$\underline{y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} \int_{-x}^x y(t) dt.$$

Приклад 3. Оскільки $\int_{-x}^x \frac{1}{1+t^2} dt = 2 \operatorname{arctg} x$ і $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} 2 \operatorname{arctg} x = 0$, то

середнім значенням функції $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$ є число $\underline{y} = 0$.

Функція

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(t) dt, & x = a, \\ \frac{1}{2\delta} \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(t) dt, & x \in (a; b), \\ \frac{1}{\delta} \int_{x-\delta}^x f(t) dt, & x = b, \end{cases}$$

називається усередненням функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[a; b]$.

Приклад 4. Якщо $f(x) = x^2$, то

$$f_{\delta}(x) = \begin{cases} \frac{(x+\delta)^3 - x^3}{3\delta}, & x = a, \\ \frac{(x+\delta)^3 - (x-\delta)^3}{6\delta}, & x \in (a; b), \\ \frac{x^3 - (x-\delta)^3}{3\delta}, & x = b, \end{cases}$$

$f_{\delta}(x) \rightarrow x^2$, якщо $\delta \rightarrow 0+$.

Приклад 5. Якщо функція $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a; b]$, то $f_{\delta}(x) \rightarrow f(x)$ для кожного $x \in [a; b]$, якщо $\delta \rightarrow 0+$, бо за теоремою про середнє $f_{\delta}(x) = f(c) \rightarrow f(x)$, якщо $\delta \rightarrow 0+$, де $c \in [x - \delta; x + \delta] \cap [a; b]$.

8. Робота. Нехай під дією сталої сили F точка пройшла шлях S рухаючись прямолінійно, причому напрям руху збігається з напрямом дії сили. Тоді виконана цією силою робота рівна FS . Якщо ж сила не є сталою, тобто $F = F(x)$, але всі інші припущення зберігаються, то для знаходження роботи поступаємо так. Розглянемо розбиття $\tau = \{x_k : k \in \overline{0; n}\}$, $a = x_0 < \dots < x_n = b$,

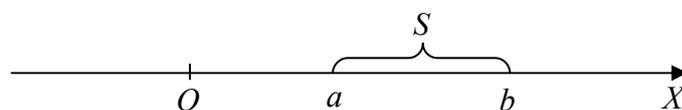


Рис.1.

проміжку $[a; b]$ на n частин. Нехай $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ і $\lambda = \max \{\Delta x_k : k \in \overline{0; n-1}\}$. На кожному проміжку $[x_k; x_{k+1}]$ силу можна вважати приблизно сталою, а виконану нею роботу рівною $F(x_k)\Delta x_k$. Робота виконана силою на проміжку $[a; b]$ приблизно дорівнює

$$\sum_{k=0}^{n-1} F(x_k)\Delta x_k.$$

А це є інтегральна сума для інтегралу

$$A = \int_a^b F(x)dx.$$

За цією формулою і знаходять роботу в ситуації, що розглядається.

Приклад 1. Якщо під дією сили $F(x) = xe^{x^2}$ матеріальна точка перемістилася по відрізку $[0;1]$ з точки 0 в точку 1, то $A = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{x^2} dx^2 = \frac{1}{2}(e-1)$.

9. Маса стержня. Якщо стержень $[a;b]$ є однорідним зі сталою лінійною густиною ρ і довжиною l , то його маса рівна ρl . Якщо ж стержень неоднорідний з лінійною густиною $\rho = \rho(x)$ і функція $\rho: [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною на проміжку $[a;b]$, то для знаходження його маси поступають так.

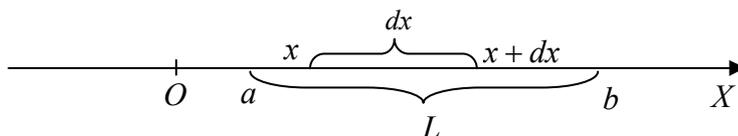


Рис.1.

Розіб'ємо стержень на маленькі частини довжини dx . Маса частини стержня $[x; x+dx]$ приблизно рівна $\rho(x)dx$. Тому маса всього стержня знаходиться за формулою (ми навели міркування, прийняті у фізиці, хоч могли міркувати так само, як і в попередньому пункті)

$$M = \int_a^b \rho(x) dx.$$

Приклад 1. Якщо $\rho(x) = 1/x^2$, то, знаходячи масу стержня $[1;2]$, отримуємо $M = \int_1^2 \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{2}$.

10. Статичні моменти й координати центра мас кривої. Перша теорема Гульдіна. Якщо на площині задано n матеріальних точок (x_k, y_k) з масами m_k , то статичними моментами цієї системи точок відносно осей OX і OY називають відповідно суми

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k y_k, \quad \sum_{k=0}^{n-1} m_k x_k.$$

Нехай тепер матеріальну криву γ задано параметрично системою

$$\begin{cases} x = \gamma_1(t), \\ y = \gamma_2(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \end{cases}$$

де функції $\gamma_1: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ і $\gamma_2: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовними на

проміжку $[\alpha; \beta]$, довжина якої L і лінійна густина, тобто маса одиниці довжини, є сталою і рівною $\rho = 1$.

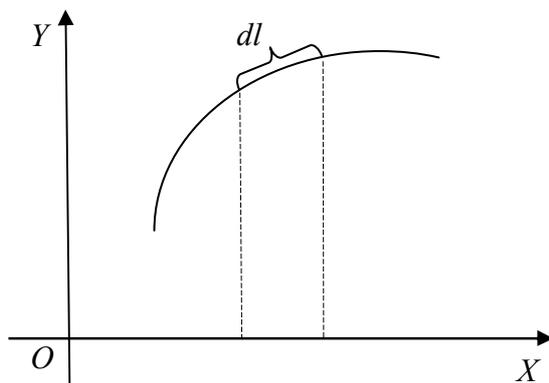


Рис.1.

Потрібно знайти статичні моменти кривої γ . Для цього візьмемо маленьку частинку кривої довжини dl . Маса цієї частинки рівна $\rho dl = dl$. Розглядаючи цю частинку як матеріальну точку $(x; y)$ приходимо до висновку, що статичні моменти цієї частинки відносно координатних осей OX і OY приблизно рівні ydl і xdl , відповідно. Усю криву можна уявити як сукупність скінченного числа таких частинок. Тому статичними моментами кривої відносно координатних осей OX і OY називають відповідно числа

$$K_x = \int_{\alpha}^{\beta} y dl, \quad K_y = \int_{\alpha}^{\beta} x dl,$$

де dl – диференціал дуги. Центр мас кривої – це така точка $(\bar{x}; \bar{y})$, що якщо в неї помістити всю масу кривої, то вона буде мати такі ж статичні моменти, як і вся крива. Маса кривої дорівнює $\rho L = L$. Отже, $\bar{x}L = K_y$, $\bar{y}L = K_x$. Тому

$$\bar{x} = \frac{K_y}{L}, \quad \bar{y} = \frac{K_x}{L}.$$

Це і є формули для знаходження координат центра мас кривої. Останню формулу можна переписати так $\int_{\alpha}^{\beta} y dl = \bar{y}L$, тобто $S = 2\pi \bar{y}L$. Ця формула виражає зміст наступної першої теореми Гульдіна.

Теорема 1. *Площа поверхні обертання, утвореної при обертанні плоскої кривої навколо осі, яка її не перетинає і лежить з кривою в одній площині, дорівнює добутку довжини кривої і довжини кола, яке описує її центр мас.*

Приклад 1. Для знаходження центра мас $(\bar{x}; \bar{y})$ частини кола $E = \{(x; y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ зауважимо, що $L = \pi / 2$,

$$K_x = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1, \quad K_y = \int_0^1 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1-x^2)^{-1/2} d(1-x^2) = 1.$$

Тому $\bar{x} = \frac{2}{\pi}$, $\bar{y} = \frac{2}{\pi}$.

11. Центр мас й статичні моменти пластинки. Друга теорема Гульдїна

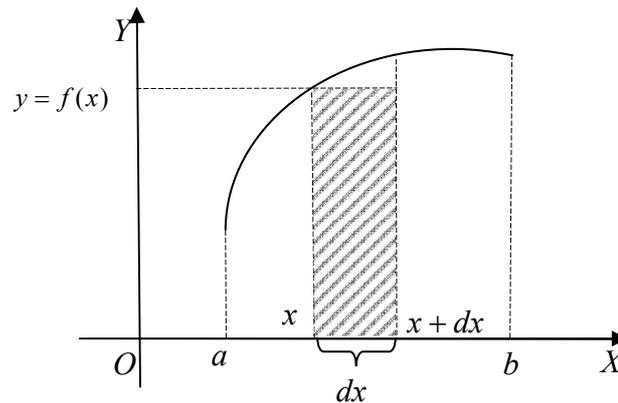


Рис.1.

Нехай $E = \{(x; y) : 0 \leq y \leq f(x), a \leq x \leq b\} \subset \mathbb{R}^2$ – криволінійна трапеція і функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є невід'ємною і неперервною на проміжку $[a; b]$. Припустимо, що на цій трапеції розміщена речовина з сталою плоскою густиною (тобто масою одиниці площі) $\rho = 1$. Вважаємо відомим, що статичні моменти прямокутника з сторонами паралельними осям координат, відносно осей OX і OY відповідно рівні my_0 і mx_0 , де $(x_0; y_0)$ – точка перетину діагоналей, а m – його маса. Знайдемо статичні моменти пластинки, тобто криволінійної трапеції E . Для цього розіб'ємо пластинку прямими, паралельними до осі OY , на маленькі частинки. Виділену елементарну частину пластинки (див. рис. 1.) приблизно можна вважати прямокутником із статичними моментами $\frac{1}{2}y^2 dx$ і $xy dx$. Отже, статичними моментами пластинки відносно осей OX і OY природно назвати числа

$$K_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx, \quad K_y = \int_a^b xy dx.$$

Маса пластинки рівна її площі P . Центр мас пластинки – це така точка $(\bar{x}; \bar{y})$,

що якщо в неї помістити всю масу пластинки, то вона буде мати такі ж статичні моменти, як і вся пластинка. Отже, $\bar{x}P = K_y$ і $\bar{y}P = K_x$, звідки

$$\bar{x} = \frac{K_y}{P}, \quad \bar{y} = \frac{K_x}{P}.$$

Це є формули для знаходження координат центра мас пластинки. Останню формулу можна переписати так $\frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx = \bar{y}P$, тобто $V = 2\pi\bar{y}P$. Ця рівність виражає зміст другої теореми Гульдіна.

Теорема 1. *Об'єм тіла обертання, утвореного при обертанні плоскої фігури навколо осі, яка її не перетинає і лежить з нею в одній площині, дорівнює добутку площі фігури і довжини кола, яке описує її центр мас.*

Приклад 1. Для знаходження центра мас $(\bar{x}; \bar{y})$ частини еліпса

$$E = \left\{ (x; y) : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \leq 1, x \geq 0, y \geq 0 \right\} \text{ зауважимо, що } P = 3\pi / 2,$$

$$K_x = \frac{1}{2} \int_0^2 9 \left(1 - \frac{x^2}{4} \right) dx = 6, \quad K_y = \frac{3}{2} \int_0^2 x \sqrt{4 - x^2} dx = 4.$$

$$\text{Тому } \bar{x} = \frac{8}{3\pi}, \quad \bar{y} = \frac{4}{\pi}.$$

12. Наближені методи знаходження визначених інтегралів. У відповідному випадку визначений інтеграл дорівнює площі певної криволінійної трапеції. У цьому полягає геометричний зміст інтеграла і на цьому базуються наближені методи його обчислення. Виходячи з означення визначеного інтеграла функції $y : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, можемо записати, що

$$\int_a^b y(x) dx \approx \sum_{k=0}^{n-1} y(\xi_k) \Delta x_k. \quad (1)$$

Це є наближена формула для знаходження визначених інтегралів. Вибираючи в ній відповідне n , ξ_k і Δx_k , отримуємо різноманітні варіанти наближеної формули (1).

1. Формула прямокутників. Розіб'ємо проміжок $[a; b]$ на n рівних частин. Тоді $\Delta x_k = (b - a) / n$, $x_k = a + k(b - a) / n$. Виберемо $\xi_k = x_k$ і перепишемо формулу (1) вигляді

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} y(x_k). \quad (2)$$

Якщо взяти $\xi_k = x_{k+1}$, то матимемо

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n y(x_k). \quad (3)$$

Формули (2) і (3) називаються формулами прямокутників.

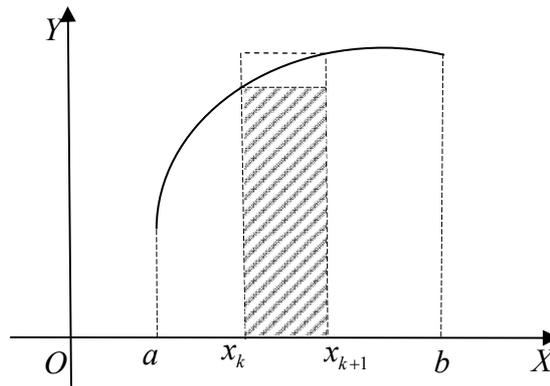


Рис.1.

2. *Формула трапецій.* Додавши почленно формули (2) і (3), отримаємо формулу

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left(\frac{y(x_0) + y(x_n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y(x_k) \right),$$

яка називається формулою трапецій.

3. *Формула Сімпсона.* Розіб'ємо проміжок $[a; b]$ на $2n$ рівних частин.

Тоді $\Delta x_k = (b-a) / 2n$, $x_k = a + k \frac{b-a}{2n}$ і

$$\int_a^b y(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left(y(x_0) + y(x_{2n}) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y(x_{2k}) + 4 \sum_{k=0}^{n-1} y(x_{2k+1}) \right).$$

Ця формула називається параболічною формулою Сімпсона. Вона отримується, якщо на кожному проміжку $[x_{2k}; x_{2k+2}]$ функцію y замінити квадратним тричленом, графік якого проходить через точки $(x_{2k}; y(x_{2k}))$, $(x_{2k+1}; y(x_{2k+1}))$ та $(x_{2k+2}; y(x_{2k+2}))$.

За певних обмежень можна оцінити похибку (абсолютну й відносну) кожної з написаних формул, але це є не нашим завданням.

Приклад 1. Для знаходження інтегралу $\int_0^3 \frac{dx}{(1+x^2)^3}$ поділимо проміжок $[0;3]$ на три рівні частини. Тоді $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Тоді за формулою прямокутників

$$\int_0^3 \frac{dx}{(1+x^2)^3} \approx 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{25} = \frac{233}{200}.$$

13. Запитання для самоконтролю

1. Що беруть за площу криволінійної трапеції?
2. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі криволінійної трапеції.
3. Що беруть за площу криволінійного сектора?
4. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі криволінійного сектора.
5. Який шлях називають спрямлюваним?
6. Що називають довжиною спрямлюваного шляху?
7. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження довжини спрямлюваного шляху.
8. Що беруть за площу поверхні обертання?
9. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження площі поверхні обертання.
10. Що беруть за об'єм тіла обертання?
11. Запишіть і обґрунтуйте формулу для знаходження об'єму тіла обертання.

14. Вправи й задачі теоретичного характеру

1. Доведіть твердження

1. Довжина однієї дуги епіциклоїди

$$\begin{cases} x = a((n+1)\cos t - \cos(n+1)t), \\ y = a((n+1)\sin t - \sin(n+1)t), \end{cases} \quad a > 0, \text{ дорівнює } 8a(1+1/n).$$

2. Довжина однієї дуги гіпоциклоїди

$$\begin{cases} x = a((n-1)\cos t + \cos(n-1)t), \\ y = a((n-1)\sin t - \sin(n-1)t), \end{cases} \quad a > 0, \text{ дорівнює } 8a(1-1/n).$$

3. Якщо функція $\rho: [\alpha; \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервною і невід'ємною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то об'єм тіла, утвореного при обертанні криволінійного сектора $E = \{(\rho; \varphi) : \alpha \leq \varphi \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(\varphi)\}$ навколо полярної осі, знаходиться за формулою

$$P = \frac{2\pi}{3} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi) \sin \varphi d\varphi.$$

15. Вправи й задачі розрахункового характеру

1. Знайдіть площу фігури, яка обмежена заданими кривими або задана іншими вказаними умовами
 1. $y = -x^2 - x + 2$, $y = x + 2$.
 2. $y = 1 - x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $y = 0$.
 3. $y = -x^2 + 4x$, $y = -x + 4$.
 4. $y = 2 - x$, $y = x^2$.
 5. $y = x^2$, $y = 0$, $y = -3x + 4$.
 6. $y = (4 - x^2)$, $y = x^2 - 2x$.
 7. $y = x^2$, $x = 0$, $y = -3x + 4$.
 8. $y = x^2$, $y = 2x - 1$, $x = 0$.
 9. $y = x^2$, $y = (x - 2)^2$, $y = 4$.
 10. $y = (x + 2)^2$, $y = 0$, $x = 0$.
 11. $y^2 + x^2 = 1$, $y + x = 1$.
 12. $y = x^2 - 2x$, $y = 4 - x^2$.
 13. $y = -x^2$, $y = -(x - 2)^2$, $y = -3$.
 14. $y = -x^2$, $y = -2x - 1$, $x = 0$.
 15. $y = 2x - x^2 + 3$, $y = x^2 - 4x + 3$.

$$16. y^2 = x + 1, y^2 = 9 - x.$$

$$17. y = (x - 2)^2, y = 0, x = 0.$$

$$18. x = 4 - y^2, x = y^2 - 2y.$$

$$19. x = 4 - (y - 1)^2, x = y^2 - 4y + 3.$$

$$20. y = x^2, y + x = 2.$$

$$21. y = 2^x, y = 2, x = 2.$$

$$22. y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x.$$

$$23. y^2 = x^3, y = 4, x = 0.$$

$$24. y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$$

$$25. y = x^2 - 4x + 7, y = x + 3.$$

$$26. y = -x^2, x = 0, y = -3x - 4.$$

$$27. y = -x^2 + 4, y = x + 2.$$

$$28. y = -3x^2 + x + 2, y = -x + 1.$$

$$29. y^2 = 4x, 4y = x^2.$$

$$30. xy = 6, y = -x + 7.$$

$$31. y = e^x, y = 0, x = 0, x = 1.$$

$$32. y = x^2 - 4x + 4, y = x.$$

$$33. y = -x^2 + x + 2, y = -x + 2.$$

$$34. y = -x^2 - 4x, y = x + 4.$$

$$35. y = -x^2 + 4, y = -x + 2.$$

$$36. y = -3x^2 - x + 2, y = x + 1.$$

$$37. y = -x^2 + 1, y = x^2 - 1.$$

38. $y^2 = -x + 1, y^2 = x.$

39. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

40. $\sqrt{y} = x, y = 2x, y = 2, x \in [0; \sqrt{2}].$

2. Знайдіть площу фігури, яка обмежена заданими кривими або задана іншими вказаними умовами

1. $y = |\lg x|, y = 0, x = 0,1, x = 10.$

2. $y = \arcsin|x|, y = \pi / 3.$

3. $y = x \operatorname{arctg} x, y = 0, x = \sqrt{3}.$

4. $y = -x^2, y = 0, y = -3x - 4.$

5. $y = \frac{1}{x\sqrt{1 + \ln x}}, y = 0, x = 1, x = e^3.$

6. $y = -x^2, x = 0, y = -3x - 4.$

7. $y = x^2, y = (x - 2)^2, x = 0.$

8. $y = 2 \operatorname{tg} x, y = \frac{4}{3} \cos x.$

9. $y = -x^2, y = -(x + 2)^2, x = 0.$

10. $y = |\operatorname{arctg} x|, y = \pi / 3.$

11. $y = e^{|x|}, y = 0, x = -1, x = 1.$

12. $y = |\sin x|, y = 0, x = -\pi / 4, x = \pi / 4.$

13. $y = \frac{x}{1 + \sqrt{x}}, y = 0.$

14. $y = \frac{1}{1 + x^2}, y = \frac{x^2}{2}.$

15. $y = \ln x, y = \ln^2 x.$

$$16. y = |\ln x|, y = 1.$$

$$17. y = |\arcsin x|, y = \pi / 3.$$

$$18. y = \arccos|x|, y = \pi / 3.$$

$$19. y = |\operatorname{arctg} x|, y = \pi / 4.$$

$$20. y = \frac{\ln x}{4x}, y = x \ln x.$$

$$21. y = |-x^2 - 4x|, y = 0.$$

$$22. x^2 + y^2 \leq 1, x^2 - 2y^2 \leq 1/4.$$

$$23. y = \arccos|x|, y = 1/2.$$

$$24. 4y = 8x - x^2, 4y = x + 6.$$

$$25. y = \sqrt{e^x - 1}, y = 0, x = \ln 2.$$

$$26. xy = 6, y = 7 - x.$$

$$27. y = |x - 2|, y = |x|, y = 0.$$

$$28. y = x - 1, y^2 = x + 1.$$

$$29. y = x^2 e^{-x}, y = 0, x = -1.$$

$$30. y = \sin x, y = \cos x.$$

$$31. y = \arccos x, y = 0. x = 0.$$

$$32. y = x^2, y = (x - 2)^2, y = 4, x \in [0; 2].$$

$$33. y = \frac{1}{1 + \cos x}, y = 0, x = -\pi / 2, x = \pi / 2.$$

$$34. y = \operatorname{arctg}|x|, y = \pi / 3.$$

$$35. \frac{x^2}{4} + y^2 \leq 1, \frac{x^2}{2} - y^2 \geq 1.$$

$$36. y = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}, y = 0, x = 1.$$

$$37. y = \arccos x, y = \arcsin x, y = 0.$$

$$38. y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x, x = 0.$$

3. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими, заданими в полярній системі координат, або задана іншими вказаними умовами

1. $\rho = 1, \rho(\cos \varphi - \sin \varphi) = 1.$

2. $\rho = \sin \varphi.$

3. $\rho = \sin 2\varphi.$

4. $\rho = \frac{1}{2}, \rho = \cos 2\varphi.$

5. $\rho = 3 + \cos 4\varphi.$

6. $\rho = \cos \varphi + \sin \varphi.$

7. $\rho = 3/2, \rho = 2 + \cos \varphi.$

8. $\rho = 2 \cos \varphi, \rho = 3 \cos \varphi.$

9. $\rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi.$

10. $\rho = 3 + \cos 2\varphi.$

11. $\rho = 2, \rho = 3 - 2 \cos \varphi, \varphi = 0, \varphi = \pi / 4.$

12. $\rho = \frac{1}{1 + 0,5 \cos \varphi}.$

13. $\rho = 4, \rho = 1 + \cos \varphi, \varphi = 0, \varphi = \pi / 4.$

14. $\rho = \cos \varphi, \rho = 2 \cos \varphi.$

15. $\rho = 2 \sin \varphi, \rho = 4 \sin \varphi.$

16. $\rho = 3 + 2 \cos \varphi.$

17. $\rho^2 + \varphi^2 = 1.$

18. $\rho = \varphi, \varphi = 0$.
19. $\rho = 2\sin 2\varphi$.
20. $\rho = \cos 5\varphi$.
21. $\rho = 2 + \cos 2\varphi, \rho = 2 + \sin \varphi$.
22. $\rho = 2 - \cos 4\varphi, \rho = 3 + \cos 4\varphi$.
23. $\rho = \operatorname{tg} \varphi, \varphi = \pi / 4$.
24. $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.
25. $(x^2 + y^2)^2 \leq x^2 - y^2, x^2 + y^2 \geq 1/2$.
26. $\rho = \cos 4\varphi$.
27. $\rho = 1 + \sin 4\varphi$.
28. $x^4 + y^4 = xy$.
29. $x^4 + y^4 = x^2$.
30. $\rho = 1 + \cos 4\varphi$.
31. $\{(\rho; \varphi) : \rho \in [1; 4], \varphi \in [0; \pi]\}$.
32. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq 3 + 2\cos \varphi, \varphi \in [0; \pi / 2]\}$.
33. $\{(\rho; \varphi) : \rho \geq \sqrt{\cos 2\varphi}, \rho \leq \sqrt{2} / 2\}$.
34. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq 3 + 2\cos \varphi, \varphi \in [\pi / 2; \pi]\}$.
35. $\rho = \cos \varphi$.
36. $\rho = 2\sin \varphi$.
37. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \cos \varphi, \rho \geq \cos 2\varphi\}$.
38. $\{(\rho; \varphi) : \rho \leq \sqrt{3} + 3\sin \varphi, \rho \geq \sin \varphi\}$.
39. $x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 9, y \geq x, y \leq -\sqrt{3}x$.
40. $(x^2 + y^2)^2 \leq 2xy$.

$$41. x^4 + y^4 \leq x^2 y.$$

$$42. \varphi = 4\rho - \rho^2, \varphi = 0.$$

$$43. \rho = \sin^3 \frac{\varphi}{3}, \varphi = 0, \varphi = 2\pi.$$

44. $\rho = \varphi, \varphi = 0, \varphi = 4\pi$ (фігура, що лежить між першим і другим витками спіралі Архімеда).

4. Знайдіть площу фігури, яка обмежена кривими, заданими параметрично або іншими вказаними умовами

$$1. x \geq 0, \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$3. (\text{евольвента кола}) \begin{cases} x = 2(\cos t + t \sin t), \\ y = 2(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi], \quad x = 2.$$

$$4. y \geq 0, \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 3 \sin t. \end{cases}$$

$$5. y \geq 0, \begin{cases} x = \sqrt{2} \cos t, \\ y = 2\sqrt{2} \sin t. \end{cases}$$

$$6. y \geq 0, \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$7. x \geq 0, \begin{cases} x = 24 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$8. x = 0, y = 0, y = 8, \begin{cases} x = 8(t - \sin t), \\ y = 8(1 - \sin t). \end{cases}$$

$$9. x \geq 0, \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 4 \sin t. \end{cases}$$

$$10. x = 0, x = 1/2, \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

$$11. x = 0, \begin{cases} x = 4t^2 - 6t, \\ y = 2t. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x = 3t / (1 + t^3), \\ y = 3t^2 / (1 + t^3). \end{cases}$$

$$13. y = 0, y = 3, \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$14. x = 0, \begin{cases} x = 4 \cos^4 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$15. y \leq 0, \begin{cases} x = 3 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$16. y \geq x, \begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x = \sin 2t, \\ y = \sin t. \end{cases}$$

$$18. (y - x)^2 = x^5.$$

$$19. y^2 = (1 - x^2)^3.$$

$$20. (\text{епіциклоїда}) \begin{cases} x = (R + r) \cos t - r \cos \frac{R + r}{r} t, \\ y = (R + r) \sin t - r \sin \frac{R + r}{r} t, \end{cases} \quad R > r > 0.$$

$$21. (\text{гіпоциклоїда}) \begin{cases} x = (R - r) \cos t - r \cos \frac{R - r}{r} t, \\ y = (R - r) \sin t - r \sin \frac{R - r}{r} t, \end{cases} \quad R > r > 0, \frac{R}{r} \in \mathbb{N}.$$

$$22. (\text{астроїда}) x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, \quad a > 0.$$

$$23. \begin{cases} x = 3t^2, \\ y = 3t - t^3. \end{cases}$$

$$24. y = 0, \begin{cases} x = 2t, \\ y = 4t^2 - 6t. \end{cases}$$

$$25. x = 0, y = 0, y = 4, \begin{cases} x = 4(t - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t). \end{cases}$$

$$26. y = 0, \begin{cases} x = 4 \cos^3 t, \\ y = 4 \sin^4 t. \end{cases}$$

$$27. y \geq 0, \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} x = t^2 / (1 + t^2), \\ y = (t - t^3) / (1 + t^3). \end{cases}$$

$$29. y^2 = x(x - 1)^2.$$

$$30. \begin{cases} x = 2 \sin 2t, \\ y = 2 \sin t. \end{cases}$$

$$31. x \geq 0, \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

$$32. (\text{кардіоїда}) \begin{cases} x = a(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = a(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad a > 0.$$

$$33. (\text{лист Декарта}) \quad x^3 + y^3 = 3axy$$

(указівка: $x = 3at / (1 + t^3)$, $y = 3at^2 / (1 + t^3)$).

$$34. x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

$$35. (\text{трактриса}) \quad x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}, \quad y \in (0; a) \quad (\text{указівка: } y = \sin t).$$

5. Знайдіть довжину кривої

$$1. \begin{cases} y^2 = 2ax - x^2, \\ z = \frac{a}{4} \ln \frac{a+x}{a-x}, \end{cases} \quad x \in [0; x_0], \quad a > 0, \quad x_0 \in (0; a).$$

$$2. \begin{cases} x = at, \\ y = \sqrt{3abt^2}, \\ z = 3bt^3, \end{cases} \quad t \in [0; t_0], \quad a > 0, \quad b > 0.$$

$$3. \rho = 5(1 - \cos \varphi), \quad \varphi \in [-\pi/3; 0].$$

$$4. \rho = 2e^{3\varphi/3}, \quad \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$5. \rho = \sqrt{2}e^\varphi, \quad \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$6. \rho = 7(1 - \sin \varphi), \quad \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$7. \begin{cases} x = 3(t - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [\pi; 2\pi].$$

$$8. \begin{cases} x = 4(\cos t + t \sin t), \\ y = 4(\sin t - t \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$9. \begin{cases} x = 3(2 \cos t - \cos 2t), \\ y = 3(2 \sin t - \sin 2t), \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$10. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

$$11. \begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

$$12. \begin{cases} x = 8 \cos^3 t, \\ y = 8 \sin^3 t, \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

$$13. \begin{cases} x = e^t (\cos t + \sin t), \\ y = e^t (\cos t - \sin t), \end{cases} \quad t \in [\pi/2; \pi].$$

$$14. \begin{cases} x = 2(t - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0; \pi/2].$$

$$15. y = \sqrt{1-x^2} + \arcsin x, x \in [0; 7/9].$$

$$16. y = \sqrt{1-x^2} + \arccos x, x \in [0; 8/9].$$

$$17. y = 2 + \operatorname{ch} x, x \in [0; 1].$$

$$18. y = \arcsin x - \sqrt{1-x^2}, x \in [\ln \sqrt{15}; \ln \sqrt{24}].$$

$$19. y = 1 - \ln \sin x, x \in [\pi/6; \pi/3].$$

$$20. y = 2 - e^x, x \in [\ln \sqrt{3}; \ln \sqrt{8}].$$

$$21. y = \operatorname{ch} x + 3, x \in [0; 1].$$

$$22. y = \ln \cos x + 2, x \in [0; \pi/6].$$

$$23. y = \operatorname{sh} x + 3, x \in [0; 2].$$

$$24. y = \ln \frac{5}{2x}, x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$$

$$25. y = \ln(1-x^2), x \in [0; 1/4].$$

$$26. y = \ln(x^2-1), x \in [2; 3].$$

$$27. y = \sqrt{x-x^2} + \arcsin \sqrt{x}.$$

$$28. x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

$$29. y = \ln \sin x, x \in [\pi/3; \pi/2].$$

$$30. \rho = 3e^{3\varphi/2}, \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$31. y = \operatorname{ch} x, x \in [0; 1].$$

$$32. y = \ln x, x \in [\sqrt{3}; \sqrt{8}].$$

$$33. \begin{cases} x = 5(t - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} t \in [0; \pi].$$

$$34. \begin{cases} x = \cos t + t \sin t, \\ y = \sin t - t \cos t, \end{cases} t \in [0; \pi].$$

$$35. \rho = 2(1 - \cos \varphi), \varphi \in [-\pi; -\pi/2].$$

$$36. \rho = 3\varphi, \varphi \in [0; 4/3].$$

$$37. \rho = 3(1 + \sin \varphi), \varphi \in [-\pi/6; 0].$$

$$38. \rho = 1 - \sin \varphi, \varphi \in [-\pi/2; \pi/2].$$

$$39. \begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt, \end{cases} \quad a > 0, b > 0, \quad t \in [0; t_0].$$

$$40. \begin{cases} x^2 = 3y, \\ 2xy = 9z, \end{cases} \quad x \in [0; x_0].$$

$$41. \begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \\ z = e^t, \end{cases} \quad t \in (-\infty; 0].$$

$$42. \begin{cases} x^2 + y^2 = 2az, \\ y = x \operatorname{tg} \frac{z}{a}, \end{cases} \quad a > 0.$$

$$43. y = \int_{-\pi/2}^x \sqrt{\cos t} dt, \quad x \in [-\pi/2; \pi/2].$$

6. Знайдіть об'єм тіл, утворених при обертанні навколо осі OX плоских фігур, обмежених вказаними кривими

1. $y = -x^2 + 5x + 6, y = 0.$

2. $y = 3 \sin x, y = \sin x, x = \pi/2.$

3. $y = 2x - x^2, y = -x + 2.$

4. $y = \arccos \frac{x}{3}, y = \arccos x, y = 0.$

5. $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2).$

$$6. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

$$7. y = \sin x, y = -x, x = \pi / 2.$$

$$8. y = xe^x, y = 0, x = 1.$$

$$9. y = 2x - x^2, y = 0.$$

$$10. y = \operatorname{tg} x, y = -x, x = \pi / 4.$$

$$11. y = \cos x, y = -x, x = \pi / 4.$$

$$12. y = \cos x, y = -x, x = \pi / 4, x = \pi / 2.$$

$$13. y = \arcsin x, y = x, x = 1 / 2.$$

$$14. y = \arcsin x, y = -x, x = \sqrt{2} / 2.$$

$$15. y = \operatorname{arctg} x, y = x, x = 1.$$

$$16. y = \operatorname{arctg} x, y = -x, x = 1.$$

$$17. y = \cos x, y = -x, x = \pi / 2.$$

$$18. y = \arccos x, y = -x, x = 1.$$

$$19. y = \operatorname{arccotg} x, y = -x, x = \sqrt{3}.$$

$$20. (y - 3)^2 + 3x = 0.$$

$$21. x^2 + xy + y^2 = 0.$$

$$22. \rho = \sin 2\varphi.$$

$$23. \rho = 1 + \cos \varphi.$$

$$24. y = 0, x = 3/2, x = 3, \begin{cases} x = 3(1 - \cos t), \\ y = 3(t - \sin t). \end{cases}$$

$$25. y = e^x, y = 1 + x, x = 1.$$

$$26. y = e^x, y = -1 - x, x = 0, x = 1.$$

$$27. y = \sin x, y = 2x / \pi, x = \pi / 3, x = \pi / 4.$$

$$28. y = \sin x, y = -2x / \pi, x = \pi / 3, x = \pi / 4.$$

$$29. y = \ln(1 + x), y = x, x = 1.$$

$$30. y = \ln(1 + x), y = -x, x = 1.$$

$$31. y = \sqrt{x}, y = 0, x = 1.$$

$$32. y = x^2, y = 4.$$

$$33. y = \sqrt{x}, y = x.$$

$$34. y = x^2, y = -x.$$

$$35. y = \sqrt{x}, y = -x, x = 1.$$

$$36. y = x^2, y = -x, x = 1.$$

$$37. y = 0, \begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} t \in [0; 2\pi].$$

$$38. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = 3 \sin^3 t. \end{cases}$$

$$39. \rho = e^\varphi, \varphi = 0, \varphi = \pi.$$

$$40. \rho = \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

$$41. x^4 + y^4 = xy.$$

$$42. x^4 + y^4 = x^2.$$

$$43. \rho = \varphi^2, \rho = 5.$$

$$44. \varphi = (\rho + 1 / \rho) / 2, \rho = 1, \rho = 3.$$

7. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо осі OY плоскої фігури, обмеженої вказаними кривими

$$1. y = x^2, y = 4.$$

$$2. y = \sqrt{x}, y = x.$$

$$3. y = x^2, y = -x.$$

$$4. y = \sqrt{x}, y = -x, x = 1.$$

$$5. y = x^2, y = -x, x = 1.$$

$$6. y = e^x, y = -1 - x, x = 0, x = 1.$$

$$7. y = 2x - x^2, y = 0.$$

$$8. (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

8. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо прямої $y = x$ фігури обмеженої кривою

$$1. (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

9. Знайдіть об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо прямої $\rho \cos \varphi = -1/4$ фігури обмеженої кривою

$$1. (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

10. Знайдіть об'єм тіла, яке обмежене поверхнями

$$1. z = 4x^2 + y^2, z = 2.$$

$$2. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1, z = 0, z = 1.$$

$$3. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$$

$$4. x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 = x.$$

$$5. \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{4} = 1, z = 0, z = 1.$$

$$6. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2z, \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = z^2.$$

$$7. \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 6, \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1.$$

8. $z = x^2 + 2y^2, x^2 + 2y^2 + z^2 = 1.$
9. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 1.$
10. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$
11. $\frac{x^2}{16} + y^2 - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$
12. $y = 2\sqrt{1 - x^2/3}, z = y\sqrt{3}, z = 0.$
13. $z = 2x^2 + 8y^2, z = 4.$
14. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{36} = -1, z = 12.$
15. $z = x^2 + 5y^2, z = 5.$
16. $z = 2x^2 + 18y^2, z = 6.$
17. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{196} = 1, z = 0, z = 7.$
18. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{144} = 1, z = 0, z = 6.$
19. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{64} = -1, z = 16.$
20. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1, z = 0, z = 2.$
21. $x^2 + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 3.$
22. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{100} = 1, z = 0, z = 5.$
23. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$

$$24. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} - \frac{z^2}{100} = -1, z = 20.$$

$$25. y = \sqrt{9 - x^2}, z = x, z = 0.$$

$$26. \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} - z^2 = 1, z = 0, z = 4.$$

$$27. y = 4\sqrt{1 - x^2/9}, z = y\sqrt{3}, z = 0.$$

$$28. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{36} = 1, z = 0, z = 3.$$

$$29. y = \sqrt{9 - x^2}, z = y, z = 0.$$

$$30. \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{64} = 1, z = 0, z = 4.$$

$$31. z = x^2 + 4y^2, z = 2.$$

$$32. z = -3x^2 - y^2, z = -3.$$

$$33. y = \sqrt{1 - x^2/9}, z = y, z = 0.$$

$$34. \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1.$$

11.Прямий круговий конус радіуса R і висотою H перетятий площиною, яка проходить через центр основи і є паралельною до твірної. Знайдіть об'єм кожного з тіл, на які ця площина розбиває конус.

12.Два похилі кругові циліндри мають однакову висоту H , спільну верхню основу радіуса R , а круги нижніх основ дотикаються. Знайдіть об'єм спільної частини цих конусів.

13.Знайдіть площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі OX вказаної кривої

$$1. y = x\sqrt{x}, x \in [0;1].$$

$$2. y = 2\sqrt{x}, x \in [0;3].$$

$$3. y^2 = 2x, x \in [0;3].$$

4. $y = \sin x, x \in [0; \pi]$.
5. $y = \operatorname{tg} x, x \in [0; \pi / 4]$.
6.
$$\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t, \end{cases} t \in [0; \pi / 2].$$
7.
$$\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} t \in [0; \pi].$$
8. $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$.
9. $\rho = \cos 2\varphi$.
10. $\rho = 2a \sin \varphi, a > 0$.
11. $y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, x \in [0; a], a > 0$.
12. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b > 0$.
13. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, b > a > 0$.
14.
$$\begin{cases} x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \\ y = a \sin t. \end{cases}$$
15.
$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t. \end{cases}$$
16. $(y - a / 2)^2 + x^2 = a^2, a > 0$.
17. $y = \sqrt{a^2 - x^2}, a > 0$.
18. $y = x^2, x \in [0; 1]$.
19. $y = a \cos \frac{\pi x}{2a}, x \in [-a; a], a > 0$.
20. $4x^2 + 3y^2 = 12$.

$$21. y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2} \ln x, x \in [1; e].$$

$$22. y = \frac{1}{4} x^3, x \in [0; 2].$$

$$23. y = e^{-x}, x \in [0; +\infty).$$

$$24. x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}, a > 0.$$

$$25. x^2 + y^2 = y.$$

$$26. x^2 + y^2 = x.$$

$$27. y = 1 + \sqrt{4 - x^2}.$$

$$28. y = 1 - \sqrt{4 - x^2}.$$

$$29. y = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [a; R], 0 < a \leq R.$$

$$30. y = \sqrt{R^2 - x^2}, x \in [a; b], 0 < a \leq b \leq R.$$

$$31. y = \frac{1}{x}, x \in [1; e].$$

$$32. y = \cos \frac{\pi x}{2}, x \in [-1; 1].$$

$$33. \rho = 1 + \cos \varphi.$$

$$34. x^{2/3} + y^{2/3} = 1.$$

$$35. (y - 1/2)^2 + x^2 = 1.$$

$$36. x^2 + (y - a)^2 = R^2, a \geq R > 0.$$

14. Знайдіть середнє значення функції f на проміжку Δ

$$1. f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x + 4}}, \Delta = [\ln 5; \ln 12].$$

$$2. f(x) = \frac{x^3}{(x^2 + 1)^{2/3}}, \Delta = [\sqrt{7}; \sqrt{26}].$$

3. $f(x) = \frac{\ln x}{x(1 - \ln^2 x)}, \Delta = [e^2; e^3].$
4. $f(x) = \operatorname{arctg}(x^3 + \sqrt{x}), \Delta = [0; +\infty).$
5. $f(x) = \ln \frac{2x^{10} + x + 1}{x^{10} + x + 2}, \Delta = [0; +\infty).$
6. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{3x+1}}, \Delta = [0; 5].$
7. $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^4}, \Delta = [0; 1].$
8. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4}}, \Delta = [0; 5].$
9. $f(x) = \frac{1}{1 - e^x}, \Delta = [\ln 2; 2 \ln 2].$
10. $f(x) = \frac{e^x \sqrt{e^x - 1}}{e^x + 3}, \Delta = [0; \ln 5].$
11. $f(x) = \frac{\sqrt{x+1} + 1}{\sqrt{x+1} - 1}, \Delta = [3; 5].$
12. $f(x) = \frac{1}{e^x(e^{-x} + 3)}, \Delta = [0; \ln 2].$
13. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}, \Delta = [-1; 1].$
14. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{9 + 6x - 9x^2}}, \Delta = [1/3; 4/3].$
15. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + x + 1}, \Delta = [-1/2; 1].$
16. $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3x + 2}, \Delta = [7; 10].$

$$17. f(x) = \frac{1}{\sin^3 x}, \Delta = [\pi/3; \pi/2].$$

$$18. f(x) = \cos^2 x \sin^4 x, \Delta = [\pi/2; \pi].$$

$$19. f(x) = \cos^5 x, \Delta = [0; \pi/2].$$

$$20. f(x) = \operatorname{ctg}^3 x, \Delta = [\pi/6; \pi/2].$$

$$21. f(x) = \operatorname{arctg}(\sqrt{x} - \sqrt{x-1}), \Delta = [0; +\infty).$$

$$22. f(x) = x^4 \sqrt{x^2 - 1}, \Delta = [0; 3].$$

$$23. f(x) = \frac{\sqrt{16 - x^2}}{x^4}, \Delta = [0; 4].$$

$$24. f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x}, \Delta = [0; 4].$$

$$25. f(x) = \frac{1}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}, \Delta = [0; 3].$$

$$26. f(x) = \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}}, \Delta = [\pi^2/9; \pi^2].$$

$$27. f(x) = x \ln(x-1), \Delta = [2; 3].$$

$$28. f(x) = \sqrt{x} \ln x, \Delta = [1; e^2].$$

$$29. f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x}, \Delta = [0; 1].$$

$$30. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, \Delta = [1; \sqrt{3}].$$

$$31. f(x) = \frac{\cos x}{4 + \sqrt{\sin x}}, \Delta = [0; \pi/2].$$

$$32. f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}, \Delta = [0; \pi/3].$$

$$33. f(x) = \frac{1 - e^x}{1 + e^x}, \Delta = [0; \ln 3].$$

$$34. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x^5 - 8x + 1}{x^5 + 10x + 2}, \Delta = [0; +\infty).$$

$$35. f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^{10} + x + 1}}{4x^5 + x + 2}, \Delta = [0; +\infty).$$

$$36. f(x) = \frac{x^7 - 8x + 1}{2x^7 + 8x + 2}, \Delta = [0; +\infty).$$

$$37. f(x) = \frac{x^3 - 8x + 1}{9x^3 + 10x + 2}, \Delta = [0; +\infty).$$

$$38. f(x) = \sin x, \Delta = [0; +\infty).$$

15. Знайдіть координати центра мас і статичні моменти відносно координатних осей кривої

1. $y = \operatorname{ch} x, x \in [0; 1].$

2. $y = \cos x, x \in [0; \pi / 2].$

3.
$$\begin{cases} x = 1 - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \quad t \in [0; \pi]. \end{cases}$$

4.
$$\begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t, \quad t \in [0; \pi / 2]. \end{cases}$$

5. $\rho = 1 + \cos \varphi, \varphi \in [0; \pi / 2].$

6. $\rho = \varphi, \varphi \in [0; \pi].$

16. Знайдіть координати центра мас і статичні моменти пластини, обмеженої кривими, відносно координатних осей

1. $y = \frac{2}{1+x^2}, y = x^2.$

2. $y = \sin x, y = 0,5, x = 0, x = \pi / 2.$

3. $\rho = 2 + \cos \varphi.$

4. $\rho = \cos \varphi.$

$$5. \begin{cases} x = 4 \cos t, \\ y = 9 \sin t. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x = \cos^3 t, \\ y = \sin^3 t. \end{cases}$$

17. Знайдіть наближене значення інтеграла, використовуючи формулу трапецій

$$1. \int_0^1 \frac{dx}{1+x}, n=6.$$

$$2. \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}, n=10.$$

18. Знайдіть наближене значення інтеграла, використовуючи формулу Сімпсона

$$1. \int_0^1 \sqrt{x} dx, n=4.$$

$$2. \int_1^2 \frac{dx}{x}, n=6.$$

16. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру

1.31. $e-1$. 1.32. 4,5. 1.33. $\frac{4}{3}$. 1.34. 4,5. 1.35. 4,5. 1.36. $\frac{32}{27}$. 1.37. $\frac{8}{3}$. 1.38.

$2\sqrt{2}/3$. 1.39. 9. 1.40. $4\sqrt{2}/3 - 1$. 2.31. 1. 2.32. $10/3$. 2.33. 2. 2.34. $\ln 2$. 2.35.

$2\pi - \sqrt{2} \ln 3 - 4 \arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$. 2.36. 0,25. 2.37. $\sqrt{2} - 1$. 2.38. $\ln 2$. 3.31. $7,5\pi$. 3.32.

$6 + 2,75\pi$. 3.33. $\frac{\pi}{12} - \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{8}$. 3.34. $2,75\pi - 6$. 3.35. $\frac{\pi}{4}$. 3.36. π . 3.37. $\frac{\pi}{8}$. 3.38.

3.39. $\frac{35\pi}{12}$. 3.40. 1. 3.41. $\pi\sqrt{2}/16$. 3.42. $16/3$. 3.43. $\frac{27\sqrt{3}}{128} + \frac{5\pi}{16}$. 3.44. $8\pi^3$. 4.31.

$\frac{3\pi}{16}$. 4.32. $4,5\pi a^2$. 4.33. $1,5a^2$. 4.34. $\frac{3\pi}{8}$. 4.35. $1,5\pi a^2$. 5.31. $\frac{1}{2} \frac{e^2 - 1}{e}$.

5.32. $1 - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{2}$. 5.33. 20. 5.34. $\frac{\pi^2}{2}$. 5.35. $4\sqrt{2}$. 5.36. $\frac{3}{2} \ln 2 + \frac{3\pi}{2} \left(\sqrt{\pi^2 + 1} - \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{4} \right)$.

5.37. $6(\sqrt{3} - \sqrt{2})$. 5.38. 4. 5.39. $k\sqrt{a^2 - b^2}$. 5.40. $x_0 + \frac{2}{27}x_0^3$. 5.41. $\sqrt{3}$. 5.42. $2\sqrt{2}\pi a$.

6.31. $\frac{\pi}{2}$. 6.32. $\frac{128\pi}{5}$. 6.33. $\frac{\pi}{6}$. 6.34. $\frac{2\pi}{15}$. 6.35. $\frac{\pi}{3}$. 6.36. $\frac{\pi}{3}$. 6.37. $5\pi^2$. 6.38. $\frac{96\pi}{35}$. 6.39.

$\frac{\pi}{15}(e^{3\pi} + 1)$. 6.40. $\pi \left(\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{2}}{4} \ln(1 + \sqrt{2}) \right)$. 10.31. $\frac{2}{3}\pi$. 10.32. 3π . 10.33. 2. 10.34. 32π .

13.31. $\pi \left(\sqrt{2} - \frac{\sqrt{e^4 + 1}}{e^2} + \ln \frac{e^2 + \sqrt{e^4 + 1}}{1 + \sqrt{2}} \right)$. 13.32. $\frac{2}{\pi} \left(2 \ln \frac{\sqrt{4 + \pi^2} + \pi}{\sqrt{4 + \pi^2} - \pi} + \pi \sqrt{4 + \pi^2} \right)$. 13.33. $\frac{32\pi}{5}$.

13.34. $\frac{12\pi}{5}$. 14.31. $\frac{2(2 + 8 \ln 0,8)}{\pi}$. 14.32. $\frac{4}{\pi}$. 14.33. $\frac{\ln 0,75}{\ln 3}$. 14.34. $\frac{\pi}{4}$. 14.35. $\ln 0,25$.

14.36. $\frac{1}{2}$. 14.37. $\frac{1}{9}$. 14.38. 0.

Розділ 10. Числові ряди

Поняття суми числового ряду є узагальненням поняття суми скінченного числа доданків на випадок, коли множина доданків є нескінченною. Це узагальнення можна здійснити багатьма способами. Найважливіший з них розглядається нижче.

1. Поняття числового ряду. Необхідна умова збіжності. Нехай (a_k) – довільна послідовність дійсних чисел. Символ

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots \quad (1)$$

називається числовим рядом і позначається

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k . \quad (2)$$

Числа $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$ називають членами ряду, відповідно першим, другим, ..., k -им і т.д. Число a_k називають ще загальним членом ряду. Послідовність (S_n) , де

$$S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, \dots, S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, \dots,$$

називається послідовністю частинних сум ряду (1). Ряд (1) називається збіжним в \mathbb{R} , якщо існує скінченна границя послідовності його частинних сум:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \neq \infty . \quad (3)$$

При цьому число S називається сумою ряду (1) або сумою послідовності (a_k) , або сумою членів послідовності (a_k) і цей факт записують так:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k . \quad (4)$$

Ряд, який не є збіжним в \mathbb{R} , називається розбіжним в \mathbb{R} .

Якщо границя (3) існує, але дорівнює ∞ , то кажуть, що ряд (1) має нескінченну суму.

Із означення випливає, що зміна скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність, але впливає на його суму.

Теорема 1 (необхідна умова збіжності). *Якщо ряд (1) є збіжним, то його загальний член прямує до нуля, тобто*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0. \quad (5)$$

Доведення. Оскільки, $a_n = S_n - S_{n-1}$, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0,$$

звідки випливає (5). ►

Таким чином, якщо умова (5) не виконується, то ряд (1) є розбіжним. Проте, якщо (5) виконується, то ряд (1) не обов'язково є збіжним (див. далі).

Ряд

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \quad (6)$$

називають залишком ряду (1). Безпосередньо із означення випливає, що ряд (1) і його залишок є одночасно збіжними або розбіжними.

Теорема 2. *Якщо ряд (1) є збіжним, то його залишок прямує до нуля, тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$.*

Доведення. Оскільки, r_n – це сума ряду (6), то $S = S_n + r_n$, звідки випливає потрібне. ►

Зауваження 1. *Якщо ряд (1) є збіжним, то $S_n \rightarrow S$. Тоді $S \approx S_n$, абсолютна похибка цієї формули не перевищує $|r_n|$ і ця похибка прямує до нуля, якщо $n \rightarrow \infty$. Тому за допомогою формули $S \approx S_n$ можна знайти наближене значення суми збіжного ряду з наперед заданою точністю.*

Зауваження 2. *Наше означення ряду досить формальне. Правильніше, напевно, рядом називати послідовність (S_n) або функцію, яка послідовності (a_k) ставить у відповідність число S за описаною вище процедурою. Далі, вживаючи слово “ряд” ми, інколи, розумітимемо і його суму. Це не призводить до непорозумінь, оскільки з тексту завжди зрозуміло, який саме аспект терміну мається на увазі.*

Зауваження 3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i = \sum_{j=0}^{\infty} a_{j+1} = \sum_{s=-1}^{\infty} a_{s+2} = \dots,$$

тобто індекс сумування є нічим: неважливо яким символом (k, n, i, \dots) його позначати, але важливо, у яких межах цей символ змінюється.

Приклад 1 (сума нескінченно спадної геометричної прогресії).

Послідовність (aq^{n-1}) називається геометричною прогресією. Якщо $|q| < 1$, то геометрична прогресія називається нескінченно спадною. Сумою нескінченно спадної геометричної прогресії називається число

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n,$$

де $S_n = a + aq + \dots + aq^{n-1}$ – сума перших n її членів. Оскільки

$$S_n = a \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

і $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, якщо $|q| < 1$, то $S = \frac{a}{1 - q}$. Отже, сума нескінченно спадної геометричної прогресії – це сума ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{k-1} + \dots$$

і вона дорівнює $\frac{a}{1 - q}$, тобто $\frac{a}{1 - q} = \sum_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$.

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ є розбіжним, бо не виконується

умова (5) (тут $a_k = (-1)^{k+1}$), ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1^{k-1} = 1 + 1 + 1 + 1 + \dots$ також є розбіжним.

Таким чином, зі сказаного вище випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$ є збіжним, якщо $|q| < 1$ і є розбіжним, якщо $|q| \geq 1$ (якщо $|q| > 1$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$).

Приклад 3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1$, бо

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

При цьому абсолютна похибка Δ наближеної формули

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} \approx \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

дорівнює $\frac{1}{4}$, бо $\Delta = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1/4$.

Приклад 4. Оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{3k^2 - k}{10k^2 + 9k + 1} = \frac{3}{10}$, то ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 - k}{10k^2 + 9k + 1}$ є розбіжним.

Приклад 5. Оскільки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^{-n^2/2} \right)^{-2n/n^2} = 1,$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{n^2}\right)^n$ є розбіжним.

Приклад 6.

$$0,(9) = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \dots + \frac{9}{10^k} + \dots = \frac{9}{10} \sum_{k=1}^{\infty} (1/10)^{k-1} = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1-1/10} = 1.$$

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sin k^2$ є розбіжним. Справді, припустимо протилежне.

Тоді $\sin k^2 \rightarrow 0$. Тому $\sin(k+1)^2 \rightarrow 0$. Але

$$\sin(k+1)^2 = \sin(k^2 + 2k + 1) = \sin k^2 \cos(2k+1) + \cos k^2 \sin(2k+1).$$

Звідси випливає, що $\sin(2k+1) \rightarrow 0$ і тому $\sin(2k+3) \rightarrow 0$. Але $\sin(2k+3) = \sin(2k+1)\cos 2 + \cos(2k+1)\sin 2$. Отже, $\cos(2k+1) \rightarrow 0$. Таким чином, $\cos^2(2k+1) + \sin^2(2k+1) \rightarrow 0$. Суперечність.

Приклад 8. Якщо $|a_{k+1}|/|a_k| \geq 1$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то умова (5) не виконується і тому ряд (1) є розбіжним.

2. Сума рядів. Добуток ряду на число. Сполучна властивість збіжних рядів.

Теорема 1. Якщо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

і має суму S , то для будь-якої сталої c є збіжним ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = ca_1 + ca_2 + \dots \tag{2}$$

і має суму $\mathcal{S} = cS$, тобто $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Доведення. Нехай S_n і \mathcal{S}_n – n -ні частинні суми рядів (1) і (2) відповідно.

Тоді

$$\mathcal{S}_n = ca_1 + \dots + ca_n = c(a_1 + \dots + a_n) = cS_n,$$

звідки випливає потрібне. ►

Теорема 2. Якщо збіжними є ряд (1) і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k, \tag{3}$$

то збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \dots \quad (4)$$

і має суму $S^0 = S + S^*$, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k,$$

де S і S^* – суми рядів (1) і (3) відповідно.

Доведення. Нехай S_n , S_n^* і S_n^0 – n -ні частинні суми рядів (1), (3) і (4) відповідно. Тоді $S_n^0 = (a_1 + b_1) + \dots + (a_n + b_n) = S_n + S_n^*$, звідки випливає потрібне.



Наступна теорема вказує на те, що для рядів справедливий аналог асоціативного закону додавання.

Теорема 3. Нехай $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ – довільна підмножина натуральних чисел таких, що $1 = n_1 < n_2 < \dots$. Тоді, якщо збіжним є ряд (1), то збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{m=n_k}^{n_{k+1}-1} a_m = (a_{n_1} + \dots + a_{n_2-1}) + (a_{n_2} + \dots + a_{n_3-1}) + \dots \quad (5)$$

і має ту ж суму, що і ряд (1).

Доведення. Нехай \mathcal{S}_k – k -а частинна сума ряду (5), а S_k – k -а частинна сума ряду (1). Тоді $\mathcal{S}_k = S_{n_{k+1}-1}$. Тому (підпоследовність має ту ж границю, що і последовність)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{S}_k = \lim_{k \rightarrow +\infty} S_{n_{k+1}-1} = S,$$

де S – сума ряду (1). ►

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{10^k} + \frac{7}{k(k+1)} \right)$ є збіжним, оскільки збіжними є ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{10^k} \text{ та } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

3. Критерій Коші збіжності ряду

Теорема 1. Для того щоб ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

був збіжним, необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall p > 0) : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon. \quad (2)$$

Доведення. Згідно з означенням, ряд (1) називається збіжним, якщо збіжною є последовність (S_n) його частинних сум. Тому, за критерієм Коші

збіжності послідовності, ряд (1) збіжний тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall p > 0) : |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

Залишилося зауважити, що $S_{n+p} - S_n = \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k$. ►

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ є збіжним. Справді,

$$\left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n}^{n+p} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n-1} < \varepsilon.$$

Бачимо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* = [1/\varepsilon] + 2)(\forall n \geq n^*)(\forall p > 0) : \left| \sum_{k=n}^{n+p} \frac{1}{k^2} \right| < \varepsilon$$

і згідно з критерієм Коші розглядуваний ряд є збіжним. При цьому абсолютна похибка Δ наближеної формули

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \approx \sum_{k=1}^3 \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$$

не перевищує $\frac{1}{3}$, бо $\Delta = \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=4}^{\infty} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=4}^{\infty} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{3}$.

Приклад 2. Гармонійний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{k} + \dots \quad (3)$$

є розбіжним. Справді,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+n} \geq \frac{n}{n+n} = \frac{1}{2}. \quad (4)$$

Тому

$$(\exists \varepsilon = 1/2)(\forall n^*)(\exists n = n^*)(\exists p = n^* - n) : \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k} \right| \geq \varepsilon.$$

Отже, згідно з критерієм Коші розглядуваний ряд є розбіжним. Із (4) випливає, що залишок ряду (3) не прямує до нуля. Звідси також отримуємо розбіжність ряду (3). Зауважимо також, що в даному випадку $a_k = 1/k$ і $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$.

4. Ознаки збіжності додатних рядів. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

називається додатним, якщо $(\forall k \in \mathbb{N}) : a_k > 0$.

Теорема 1 (критерій збіжності додатного ряду). Для того щоб додатний ряд (1) був збіжним, необхідно і достатньо, щоб послідовність його

частинних сум була обмеженою зверху.

Доведення. Послідовність S_n частинних сум додатного ряду є неспадною, а така послідовність має скінченну границю тоді і тільки тоді, коли вона є обмеженою зверху. ►

Теорема 2 (ознака порівняння). Нехай ряд (1) і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (2)$$

є додатними, і

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : a_k \leq b_k. \quad (3)$$

Тоді: а) якщо збіжним є ряд (2), то збіжним є ряд (1); б) якщо розбіжним є ряд (1), то розбіжним є ряд (2).

Доведення. Із (3) випливає, що n -а частинна сума ряду (1) не перевищує n -ої частинної суми ряду (2). Тому твердження а) отримуємо з критерію збіжності додатного ряду, а твердження б) є наслідком а) і отримується міркуваннями від супротивного. ►

Наслідок 1. Нехай ряди (1) і (2) є додатними і існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k / b_k = \gamma. \quad (4)$$

Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$, то ряди (1) і (2) є одночасно збіжними або одночасно розбіжними; 2) якщо $\gamma = +\infty$ і ряд (2) є розбіжним, то розбіжним є і ряд (1); 3) якщо $\gamma = 0$ і ряд (2) є збіжним, то збіжним є і ряд (1).

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2k^2 + 1}$ є додатним і розбіжним, бо розбіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{і} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{k}{2k^2 + 1}}{\frac{1}{k}} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{5^k + 1}$ є додатним і збіжним, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{5^k}$ і

$$\frac{9}{5^k + 1} \leq \frac{9}{5^k}.$$

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+3}}{3^k - 2^k}$ є додатним і збіжним, бо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2/3)^k \quad \text{і} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+3}}{3^k - 2^k} = 8.$$

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}$ є додатним і збіжним, бо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 \text{ і } \sin \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k^2}.$$

Зауваження 1. Нема такого універсального числового ряду (2), щоб, порівнявши з ним будь-який ряд (1), можна було б зробити висновок про збіжність чи розбіжність ряду (1) (див. нижче). Найчастіше порівнюють заданий ряд з рядами $\sum_{k=0}^{\infty} q^k$, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^\alpha k}$.

Теорема 3 (інтегральна ознака збіжності ряду). Нехай ряд (1) є додатним і існує неперервна незростаюча на $[1; +\infty]$ функція $f: [0; +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ така, що $(\forall k \in \mathbb{N}): f(k) = a_k$. Тоді ряд (1) і інтеграл

$$\int_1^{+\infty} f(x) dx$$

є одночасно збіжними або розбіжними.

Доведення. Оскільки f – незростаюча функція, то

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k).$$

Тому

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n f(k),$$

$$\sum_{k=2}^{n+1} a_k \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq \sum_{k=1}^n a_k,$$

$$S_{n+1} - a_1 \leq \int_1^{n+1} f(x) dx \leq S_n. \quad (5)$$

Оскільки послідовності (S_n) і (q_n) , де

$$q_n = \int_1^{n+1} f(x) dx,$$

є неспадними, то вони мають скінченні або нескінченні границі. Звідси та з (5) випливає, що ці границі є одночасно скінченними або нескінченними. Тому теорему 3 доведено. ►

Наслідок 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ є збіжним, якщо $\alpha > 1$ і є розбіжним, якщо $\alpha \leq 1$ і,

зокрема, гармонійний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ є розбіжним.

Доведення. Справді, це справедливо, бо в даному випадку $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ і

для таких α є збіжним або розбіжним інтеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha}$. ►

Приклад 5. Ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3 + 1}$ є збіжним, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^3}$ і $\frac{1}{k^3 + 1} \leq \frac{1}{k^3}$

для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Приклад 6. Ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2\sqrt{k} - 1}$ є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^{1/2}}$ і

$\frac{1}{2\sqrt{k} - 1} \geq \frac{1}{2\sqrt{k}}$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{2k+3}{k^3+2}$ є збіжним, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+3}{\frac{1}{k^2}} = 2.$$

Наслідок 3. Ряд $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln^\alpha k}$ є збіжним, якщо $\alpha > 1$ і є розбіжним, якщо $\alpha \leq 1$.

Доведення. Справді, це справедливо, бо в даному випадку $f(x) = \frac{1}{x \ln^\alpha x}$ і

для таких α є збіжним або розбіжним інтеграл $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln^\alpha x}$. ►

Приклад 8. Ряд $\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln^2 k}$ є збіжним.

Приклад 9. Ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2 \ln(k+1)}$ є збіжним, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ і

$\frac{1}{k^2 \ln(k+1)} \leq \frac{1}{k^2}$ для всіх $k \geq 2$.

Приклад 10. Ряд $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{k} \ln(k+1)}$ є розбіжним, бо розбіжним є ряд

$$\sum_{k=2}^\infty \frac{1}{k \ln k} \text{ і } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{k} \ln(k+1)}}{\frac{1}{k \ln k}} = +\infty.$$

Приклад 11. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1} \ln^3(k+1)}$ є збіжним, бо збіжним є інтеграл

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1) \ln^3(x+1)} dx, \text{ збіжним є ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \ln^3(k+1)} \text{ і } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1} \ln^3(k+1)}}{\frac{1}{(k+1) \ln^3(k+1)}} = 1.$$

Приклад 12. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \cos \frac{k}{k^2+1} \sin \frac{1}{k}$ є збіжним, бо

$$0 < \cos \frac{k}{k^2+1} \leq 1, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$0 < \sin \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \cos \frac{k}{k^2+1} \sin \frac{1}{k} \leq \frac{1}{k\sqrt{k}} \text{ для всіх } k \in \mathbb{N},$$

і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ є збіжним.

Приклад 13. Нехай існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k k^\alpha = \gamma.$$

Тоді: 1) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha \leq 1$, то ряд (1) є розбіжним (потрібно врахувати, що із накладених умов випливає, що всі члени ряду (1), за винятком хіба-що скінченного числа, є додатними).

Приклад 14. Нехай

$$a_k = \frac{\gamma}{k^\alpha} + o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha \leq 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 15. Якщо $\alpha > 1$ і $a_k = O\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$, $k \rightarrow \infty$, то ряд (1) є збіжним.

Теорема 4 (ознака Коші). Нехай ряд (1) є додатним і існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q. \quad (6)$$

Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $q > 1$, то цей ряд є розбіжним.

Доведення. Нехай $q < 1$ і $q_1 \in (q; 1)$ – деяке число. Тоді за означенням

границі при всіх $k \geq k^*$ буде виконуватись $\sqrt[k]{a_k} \leq q_1$, тобто $a_k \leq q_1^k$. Але ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_1^k$$

є збіжним. Тому за ознакою порівняння ряд (1) збіжний. Якщо $q > 1$, то $\sqrt[k]{a_k} > 1$ при $k \geq k^*$. Тому загальний член ряду (1) не прямує до нуля. Отже, ряд (1) розбіжний. ►

Приклад 16. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1-1/k)^{k^2}$ є збіжним, оскільки тут $a_k = (1-1/k)^{k^2}$ і

$$q = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{(1-1/k)^{k^2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1-1/k)^k = 1/e < 1.$$

Приклад 17. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k + (3^k + (-3)^k)/2}$ є збіжним, бо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \text{ і } \frac{1}{2^k + (3^k + (-3)^k)/2} \leq \frac{1}{2^k} \text{ для всіх } k \in \mathbb{N}. \text{ Проте,}$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{2^k}} = \frac{1}{2}, \text{ якщо } k = 2n+1,$$

$$\sqrt[k]{a_k} = \sqrt[k]{\frac{1}{2^k + 3^k}} = \frac{1}{3} \sqrt[k]{\frac{1}{1 + (2/3)^k}}, \text{ якщо } k = 2m.$$

Тому $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k}$ не існує.

Доведення теореми 4 показує, що справедливим є наступне твердження.

Теорема 4' (ознака Коші). Нехай ряд (1) є додатним. Тоді: 1) якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q < 1$, то ряд є збіжним; 2) якщо $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = q > 1$, то ряд є розбіжним.

Зауваження 2. Якщо $q = 1$ або границя (6) не існує, то ряд (1) може бути збіжним, а може бути і розбіжним. Для з'ясування цього потрібно скористатись іншими ознаками. Так, $q = 1$ для обох рядів $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, але перший з них є розбіжним, а другий – збіжним. Сказане тут стосується і наступної теореми.

Теорема 5 (ознака д'Аламбера). Нехай ряд (1) є додатним і існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q. \quad (7)$$

Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Доведення. Ця теорема випливає з попередньої, оскільки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k},$$

якщо остання границя існує. ►

Приклад 18. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{3^k}$ є збіжним, оскільки тут $a_k = \frac{k^2}{3^k}$, $a_{k+1} = \frac{(k+1)^2}{3^{k+1}}$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(k+1)^2 3^k}{3^{k+1} k^2} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 19. Для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ (тут і далі $(2k)!! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k$,

$$(2k+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k+1)), \quad a_k = \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, \quad a_{k+1} = \frac{(2k+2)!!}{(2k+3)!!} \quad i$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(2k+2)!!(2k+1)!!}{(2k+3)!!(2k)!!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+2}{2k+3} = 1. \quad \text{Тому ознака д'Аламбера не}$$

приводить до бажаного висновку про збіжність чи розбіжність ряду.

Доведення теореми 4 показує, що справедливим є наступне твердження.

Теорема 5' (ознака д'Аламбера). Нехай ряд (1) є додатним. Тоді: 1)

якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q < 1$, то ряд (1) є збіжним; 2) якщо $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q > 1$, то ряд (1) є

розбіжним.

Зауваження 3. При дослідженні рядів часто буває корисною формула Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n (1 + \varepsilon_n),$$

де $\varepsilon_n \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$. Цю формулу ми доведемо пізніше.

Приклад 20. Оскільки, згідно з формулою Стірлінга,

$$\frac{(2k)!}{k^{2k}} = \sqrt{4\pi k} \frac{(2k/e)^{2k}}{k^{2k}} (1 + o(1)) = \sqrt{4\pi k} (2/e)^{2k} (1 + o(1)), \quad \text{якщо } k \rightarrow \infty, \text{ то ряд}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{k^{2k}} \text{ є збіжним.}$$

Приклад 21. Оскільки

$$\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} = \frac{((2k)!!)^2}{(2k+1)!} = \frac{2^{2k} (k!)^2}{\sqrt{2\pi(2k+1)} ((2k+1)/e)^{2k+1}} (1 + o(1))$$

$$= \frac{2^{2k} 2\pi k k^{2k} e}{\sqrt{2\pi(2k+1)} (2k+1)^{2k+1}} (1 + o(1)) = \frac{\pi e}{\sqrt{2\pi(2k+1)}} (1 + o(1)), \quad k \rightarrow \infty,$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ є розбіжним.

Зуваження 4. При дослідженні рядів часто буває корисною формула Тейлора з додатковим членом у формі Пеано.

Приклад 22. Оскільки, згідно з формулою Тейлора,

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \frac{1}{\sqrt[3]{k}} + O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)^3\right)^2 = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad \text{якщо } k \rightarrow \infty, \quad \text{то ряд}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{k}} - \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k}}\right)^2 \text{ є збіжним.}$$

Приклад 23. Оскільки, згідно з формулою Тейлора,

$$\left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2 \sim \frac{1}{4k}, \quad \text{якщо } k \rightarrow \infty, \quad \text{то ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt[4]{k}}\right)^2 \text{ є}$$

розбіжним.

Наведених вище фактів досить для дослідження більшості додатних рядів, які зустрічаються на практиці. Правда, є багато інших ознак збіжності рядів (недавно ряд нових ознак знайшов професор В.Ф.Слюсарчук). Як приклад, наведемо ознаки Раабе та Гаусса.

Теорема 6 (Раабе). Якщо ряд (1) є додатним і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = p,$$

то ряд (1) є збіжним, якщо $p > 1$ і є розбіжним, якщо $p < 1$.

Приклад 24. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k k!}{k^k}$ є розбіжним, бо

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{(k+1)^{k+1} e^k k!}{k^k e^{k+1} (k+1)!} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{(k+1)^k}{k^k e} - 1 \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{(1+1/k)^k}{e} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(e^{k \ln(1+1/k)-1} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(e^{-\frac{1}{2k} + o(1/k)} - 1 \right) \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(-\frac{1}{2k} + o\left(\frac{1}{k}\right) \right) = -\frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Приклад 25. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}}$ є розбіжним, бо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\sqrt{\frac{(2k)!!(2k+3)!!}{(2k+1)!!(2k+2)!!}} - 1 \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \left(\sqrt{\frac{2k+3}{2k+2}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{k \rightarrow \infty} k \frac{\sqrt{2k+3} - \sqrt{2k+2}}{\sqrt{2k+2}} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\sqrt{2k+2}(\sqrt{2k+3} + \sqrt{2k+2})} = \frac{1}{4}.$$

Теорема 7 (Гаусса). Якщо ряд (1) є додатним і

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

для деякого $\varepsilon > 0$ та деякої обмеженої послідовності (θ_n) , то ряд (1) є: а) збіжним, якщо $\lambda > 1$ або $\lambda = 1$ і $\mu > 1$; б) розбіжним, якщо $\lambda < 1$ або $\lambda = 1$ і $\mu \leq 1$.

Приклад 26. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}$ є розбіжним, бо

$$\begin{aligned} \frac{a_k}{a_{k+1}} &= \frac{(2k)!!(2k+3)!!}{(2k+1)!!(2k+2)!!} = \frac{2k+3}{2k+2} = 1 + \frac{1}{2k+2} = 1 + \frac{1}{2k} \cdot \frac{1}{1+1/k} \\ &= 1 + \frac{1}{2k}(1+1/k+o(1/k)) = 1 + \frac{1}{2k} + O(1/k^2). \end{aligned}$$

Приклад 27. Ряд

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} + \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdot \beta \cdot (\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} + \dots$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0,$$

є збіжним, якщо $\gamma - \alpha - \beta > 0$, і є розбіжним, якщо $\gamma - \alpha - \beta \leq 0$. Справді,

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(1+k)(\gamma+k)}{(\alpha+k)(\beta+k)} = \frac{(1+1/k)(1+\gamma/k)}{(1+\alpha/k)(1+\beta/k)} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{k} + O(1/k^2)$$

для всіх $k \in \mathbb{N}$ і ми приходимо до потрібного висновку на основі ознаки Гаусса.

5. Зауваження про ознаки збіжності додатних рядів.

Теорема 1. Для кожного збіжного додатного ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

існує збіжний додатний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{2}$$

такий, що $a_k / b_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Доведення. Нехай $b_k = \sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}$, $r_k = \sum_{n=k+1}^{\infty} a_n$. Тоді $a_k = r_{k-1} - r_k$ і

$\frac{a_k}{b_k} = \frac{r_{k-1} - r_k}{\sqrt{r_{k-1}} - \sqrt{r_k}} = \sqrt{r_{k-1}} + \sqrt{r_k} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$. Крім цього, ряд (2) є збіжним, бо його n -а частинна сума рівна $\sqrt{r_0} - \sqrt{r_n}$. ►

Теорема 2. Для кожного розбіжного додатного ряду (2) існує розбіжний додатний ряд (1) такий, що $a_k / b_k \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Доведення. Нехай $a_k = \sqrt{S_k} - \sqrt{S_{k-1}}$, де $S_0 = 0$ і $S_n = \sum_{k=1}^n b_k$. Тоді

$b_k = S_k - S_{k-1}, \frac{a_k}{b_k} = \frac{1}{\sqrt{S_k} + \sqrt{S_{k-1}}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а n -а частинна сума ряду (1)

рівна $\sqrt{S_n}$ і тому ряд (1) є розбіжним. ►

Із останніх двох теорем випливає, що не існує такого універсального додатного ряду, порівнявши з яким заданий ряд, можна було зробити висновок про його збіжність чи розбіжність.

6. Ознаки збіжності знакопозередних рядів. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots, \quad (1)$$

де $u_k > 0$, називають знакопозередним.

Теорема 1 (ознака Лейбніца). Якщо

$$(\forall k \in \mathbb{N}) : u_{k+1} \leq u_k, \quad (2)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0, \quad (3)$$

то знакопозередний ряд (1) є збіжним.

Доведення. Нехай S_n – n -а частинна сума ряду (1). Тоді

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + \dots + (u_{2m-1} - u_{2m}) = S_{2(m-1)} + (u_{2m-1} - u_{2m}) \geq S_{2(m-1)}$$

і

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - \dots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \leq u_1.$$

Отже, послідовність (S_{2m}) є неспадною і обмеженою зверху. Тому існує скінченна границя

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_{2m} = S.$$

Але завдяки (3) $S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1} \rightarrow S$. Отже, існує $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S \neq \infty$ і тому ряд (1) є збіжним. ►

Наслідок 1. Якщо виконуються умови теореми Лейбніца, то $|S - S_n| \leq |u_{n+1}|$, тобто абсолютна похибка наближеної формули $S \approx S_n$ не перевищує модуля першого відкинутого члена.

Доведення. Справді, послідовність S_{2m} є неспадною. Тому $S_{2m} \leq S$.

Подібно показується, що послідовність S_{2m+1} є незростаючою і $S \leq S_{2m+1}$. Тому $0 < S - S_{2m} \leq S_{2m+1} - S_{2m} = u_{2m+1}$ і $0 < S_{2m-1} - S \leq S_{2m-1} - S_{2m} = u_{2m}$, звідки випливає потрібне. ►

Наслідок 2. Якщо виконуються умови теореми Лейбніца, то

$$u_1 - u_2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k \leq u_1,$$

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k \leq u_1 - u_2 + u_3,$$

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - u_6 \leq \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} u_k \leq u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5,$$

...

Зауваження 1. Ознаку Лейбніца можна застосовувати і до ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k u_k = -u_1 + u_2 - u_3 + u_4 - \dots,$$

де $u_k > 0$, оскільки ряд (1) одержується з останнього ряду множенням його членів на число -1 .

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ є збіжним, бо $u_{k+1} = \frac{1}{k+1} < \frac{1}{k} = u_k$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0.$$

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\operatorname{arctg} k}{k}$ є збіжним, бо $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{arctg} k}{k} = 0$,

$$\left(\frac{\operatorname{arctg} k}{k} \right)' = \frac{\frac{k}{1+k^2} - \operatorname{arctg} k}{k^2} \leq 0 \quad \text{для достатньо великих } k \text{ і тому}$$

$u_{k+1} = \frac{\operatorname{arctg}(k+1)}{k+1} < \frac{\operatorname{arctg} k}{k} = u_k$ для таких k (зміна скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність).

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k + \sqrt{k}}{k^2}$ є збіжним, бо

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k + \sqrt{k}}{k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{3/2}},$$

а останні два ряди є збіжними.

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2 + (-1)^k}{k}$ є розбіжним, бо

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2+(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k \frac{2}{k} + \frac{1}{k} \right)$ і в протилежному випадку ми приходимо до

суперечливого висновку, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ є збіжним. Разом з цим, $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2+(-1)^k}{k} = 0$.

Таким чином, вимога монотонності послідовності (u_k) у теоремі Лейбніца є суттєвою.

Приклад 5. Абсолютна похибка наближеної формули

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k} \approx \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$ не перевищує $\frac{1}{n+1}$. При цьому, ця похибка буде

меншою за 10^{-2} , якщо $n = 100$.

Приклад 6. Ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)}{k!\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)}, \quad \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0,$$

є збіжним, якщо $\gamma - \alpha - \beta > -1$, і є розбіжним, якщо $\gamma - \alpha - \beta \leq -1$. Справді,

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(1+k)(\gamma+k)}{(\alpha+k)(\beta+k)} = \frac{(1+1/k)(1+\gamma/k)}{(1+\alpha/k)(1+\beta/k)} = 1 + \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{k} + O(1/k^2),$$

$$\frac{(\alpha+k-1)(\beta+k-1)}{k(\gamma+k-1)} = 1 + \frac{(\alpha+k-1)(\beta+k-1)}{k(\gamma+k-1)} - 1$$

$$= 1 + \frac{(1+(\alpha-1)/k)(1+(\beta-1)/k)}{(1+(\gamma-1)/k)} - 1 = 1 - \frac{\gamma - \alpha - \beta + 1}{k} + O(1/k^2)$$

для $k \in \mathbb{N}$. Отже, в першому випадку $a_{k+1} \leq a_k$ для всіх достатньо великих k і

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha+k-1)(\beta+k-1)}{k(\gamma+k-1)} = 0$, бо $1-x \leq \exp(-x)$, якщо $x \in \mathbb{R}$. Тому ми

приходимо до потрібного висновку. У другому випадку

$a_n = \prod_{k=1}^n \frac{(\alpha+k-1)(\beta+k-1)}{k(\gamma+k-1)} \geq \prod_{k=1}^n (1+O(1/k^2))$ і тому загальний член ряду не

прямує до нуля. Отже, знову приходимо до потрібного висновку.

7. Ознаки збіжності рядів з довільними членами.

Теорема 1 (про перетворення Абеля). Нехай (a_k) і (b_k) – дві довільні

послідовності, $A_0 = 1$ і $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, якщо $n > 1$. Тоді для будь-яких $n \in \mathbb{N}$ і

$p \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ справедлива формула Абеля

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1}.$$

Доведення. Оскільки $a_k = A_k - A_{k-1}$, то

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k &= \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n+1}^{n+p} A_{k-1} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+p} A_k b_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} A_k b_{k+1} = \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k (b_k - b_{k+1}) + A_{n+p} b_{n+p} - A_n b_{n+1}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Приклад 1 (лема Абеля). Якщо $m \leq a_1 + a_2 + \dots + a_k \leq M$ для всіх $k \in \overline{1; n}$ і $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n > 0$, то

$$m b_1 \leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq M b_1.$$

Справді, нехай $s_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k$. Тоді

$$\begin{aligned} a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n &= s_1 b_1 + (s_2 - s_1) b_2 + \dots + (s_n - s_{n-1}) b_n \\ &= (b_1 - b_2) s_1 + (b_2 - b_3) s_2 + \dots + (b_{n-1} - b_n) s_{n-1} + b_n s_n \\ &\leq (b_1 - b_2) M + (b_2 - b_3) M + \dots + (b_{n-1} - b_n) M + b_n M = b_1 M \end{aligned}$$

і

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \geq (b_1 - b_2) m + (b_2 - b_3) m + \dots + (b_{n-1} - b_n) m + b_n m = b_1 m.$$

Теорема 2 (ознака Діріхле). Якщо послідовність частинних сум ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

є обмеженою зверху, а послідовність (b_k) є монотонною і $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0$, то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \tag{2}$$

є збіжним.

Доведення. Використовуючи монотонність послідовності (b_k) і тотожність Абеля для деякої сталої c_1 отримуємо

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| \leq c_1 \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k - b_{k+1}| + c_1 (|b_{n+p}| + |b_{n+1}|) \leq 2c_1 (|b_{n+p}| + |b_{n+1}|).$$

Тому на основі критерію Коші збіжності ряду приходимо до твердження теореми. \blacktriangleright

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k}$ є збіжним, оскільки $\left| \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{4} \right| \leq 1 + \sqrt{2}$, а

послідовність $(1/k)$ є монотонною і $1/k \rightarrow 0$, $k \rightarrow +\infty$.

Теорема 3 (ознака Абеля). Якщо ряд (1) є збіжним, а послідовність

(b_k) є монотонною і обмеженою, то ряд (2) є збіжним.

Доведення. Використовуючи монотонність послідовності (b_k) і тотожність Абеля, для кожного $\varepsilon > 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k b_k \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |A_k| |b_k - b_{k+1}| + |A_{n+p}| |b_{n+p}| + |A_n| |b_{n+1}| \\ &\leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k - b_{k+1}| + \varepsilon (|b_{n+p}| + |b_{n+1}|) < 2\varepsilon (|b_{n+p}| + |b_{n+1}|), n \geq n(\varepsilon), p \geq 2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Тому на основі критерію Коші збіжності ряду приходимо до твердження теореми. \blacktriangleright

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k} \cdot \frac{2^k + 1}{2^k}$ є збіжним, оскільки збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k}, \text{ а послідовність } \left(\frac{2^k + 1}{2^k} \right) \text{ є монотонною і обмеженою.}$$

Приклад 4. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln k]}}{k} \quad (3)$$

є розбіжним. Справді, якщо б ряд (3) був збіжним, то збіжним був би також ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sum_{k=[e^{n-1}]}^{[e^n]-1} \frac{1}{k}. \quad (4)$$

Але

$$\sum_{k=[e^{n-1}]}^{[e^n]-1} \frac{1}{k} \geq \frac{[e^n] - [e^{n-1}]}{[e^n] - 1} = \frac{1 - \left[\frac{e^{n-1}}{e^n} \right]}{1 - \left[\frac{1}{e^n} \right]} \rightarrow 1 - \frac{1}{e}, n \rightarrow \infty.$$

Тому ряд (4) є розбіжним. Суперечність.

8. Абсолютно збіжні ряди. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

називається абсолютно збіжним, якщо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|. \quad (2)$$

Теорема 1. Якщо ряд (1) є абсолютно збіжним, то він є збіжним.

Доведення. Це впливає із критерію Коші і нерівності

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |a_k|. \blacktriangleright$$

Ряд, який не є абсолютно збіжним, називається абсолютно розбіжним.

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ є збіжним абсолютно, оскільки $\left| (-1)^k \frac{1}{k^2} \right| = \frac{1}{k^2}$

і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ є збіжним.

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ не є збіжним абсолютно, оскільки $\left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{k}$

і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ є розбіжним.

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \left(\arcsin \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right)$ є збіжним абсолютно, оскільки

$$\left| \sqrt{k} \left(\arcsin \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right) \right| / \frac{1}{k\sqrt{k}} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{і ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} \text{ є збіжним.}$$

Приклад 4. Якщо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{3}$$

є додатним, збіжним і $(\forall k \in \mathbb{N}) : |a_k| \leq b_k$, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Приклад 5. Нехай ряд (3) є додатним і існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| / b_k = \gamma$. Тоді:

1) якщо $0 < \gamma < +\infty$, то ряд (1) є збіжним абсолютно тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд (3); 2) якщо $\gamma = +\infty$ і ряд (3) є розбіжним, то ряд (1) не є збіжним абсолютно; 3) якщо $\gamma = 0$ і ряд (3) є збіжним, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Приклад 6. Нехай існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q$. Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 7. Оскільки

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|(-1)^k k^3 / 2^k|} = \frac{1}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} (\sqrt[k]{k})^3 = \frac{1}{2},$$

то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k^3 / 2^k$ є збіжним абсолютно.

Приклад 8. Нехай існує границя $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}| / |a_k| = q$. Тоді: 1) якщо $q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 9. Нехай існує границя

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k| / q^k = \gamma.$$

Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $0 < q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $0 < \gamma \leq +\infty$ і $q \geq 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 10. Оскільки $\left| \frac{1 + (-1)^k 2^k + 2^k}{3^k + (-1)^k 4^k + 4^k} \right| \leq \frac{1 + 2 \cdot 2^k}{3^k} \leq 4 \left(\frac{2}{3} \right)^k$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (2/3)^k$

є збіжним, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + (-1)^k 2^k + 2^k}{3^k + (-1)^k 4^k + 4^k}$ є збіжним абсолютно.

Приклад 11. Нехай $|a_k| = \frac{\gamma}{k^\alpha} + o\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$, $k \rightarrow \infty$. Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $\alpha > 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $0 < \gamma < +\infty$ і $\alpha < 1$, то ряд (1) не є збіжним абсолютно.

Приклад 12. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \arcsin \frac{(-1)^k}{k}$ є збіжним абсолютно, оскільки

$$\left| \frac{1}{k} \arcsin \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \right| = \left| \frac{(-1)^k}{k\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right) \right| = \frac{1}{k\sqrt{k}} + o\left(\frac{1}{k\sqrt{k}}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ є збіжним.

Приклад 13. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(-1)^k k}{k+1} \arcsin \frac{(-1)^k}{k^2}$ є збіжним абсолютно, оскільки

$$\left| \cos \frac{(-1)^k k}{k+1} \arcsin \frac{(-1)^k}{k^2} \right| \leq \left| \arcsin \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \quad \text{і ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \text{ є збіжним.}$$

Приклад 14. Якщо $\alpha > 1$ і $|a_k| = O\left(\frac{1}{k^\alpha}\right)$, $k \rightarrow \infty$, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Приклад 15. Якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Якщо $\underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 16. Нехай $|a_k| = \gamma q^k + o(q^k)$, $k \rightarrow \infty$. Тоді: 1) якщо $0 \leq \gamma < +\infty$ і $0 < q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно; 2) якщо $0 < \gamma \leq +\infty$ і $q \geq 1$, то ряд (1) є розбіжним.

Приклад 17. Якщо $0 < q < 1$ і $|a_k| = O(q^k)$, $k \rightarrow \infty$, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Приклад 18. Якщо $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}| / |a_k| = q < 1$, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_{k+1}|/|a_k| = q > 1$, то ряд (1) є розбіжним.

9. Переставна властивість абсолютно збіжних рядів. Разом з рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

розглянемо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\cdot}, \quad (2)$$

який отримуємо з ряду (1) шляхом перестановки його членів, тобто зміною номерів його членів.

Теорема 1. Якщо ряд (1) є збіжним абсолютно, то збіжним є також ряд (2) і має ту ж суму, що і ряд (1).

Доведення. Розглянемо ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{\cdot}|. \quad (4)$$

Нехай S , S^{\cdot} , S° , $S^{\circ\cdot}$ – суми рядів (1), (2), (3) і (4) відповідно, а S_n , S_n^{\cdot} , S_n° і $S_n^{\circ\cdot}$ – їх n -ні частинні суми. Оскільки $(\forall m)(\exists n) : S_m^{\circ} \leq S_n^{\circ}$ і ряд (3) є збіжним, то неспадна послідовність (S_m°) є обмеженою зверху і тому має скінченну границю. Отже, ряд (4) є збіжним. Тому збіжним є і ряд (2). Покажемо, що $S = S^{\cdot}$. Для заданого $\varepsilon > 0$ знайдемо n^{\cdot} таке, що

$$r_{n^{\cdot}} = \sum_{k=n^{\cdot}+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon / 3.$$

Тоді $|S - S_{n^{\cdot}}| < \frac{\varepsilon}{3}$. Виберемо m настільки великим, щоб в S_m^{\cdot} входили всі доданки, які входять в $S_{n^{\cdot}}$, і $|S^{\cdot} - S_m^{\cdot}| < \varepsilon / 3$. Тоді

$$|S - S^{\cdot}| \leq |S - S_{n^{\cdot}}| + |S^{\cdot} - S_m^{\cdot}| + |S_m^{\cdot} - S_{n^{\cdot}}| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \sum_{k=n^{\cdot}+1}^{\infty} |a_k| < \varepsilon.$$

А це і означає, що $S = S^{\cdot}$. Теорему 1 доведено. ►

Значимо, що вимога абсолютної збіжності ряду у теоремі 1 є істотною, що впливає з теореми Рімана, яка буде наведена у наступних пунктах. Більше того, якщо ряд (1) збіжний умовно, то для будь-якого A , $-\infty \leq A \leq +\infty$, можна так переставити члени ряду (1), що сума ряду (2) буде дорівнювати A .

10. Добуток рядів. Добутком за Коші рядів

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad (1)$$

і

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad (2)$$

називається ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k, \quad (3)$$

де

$$c_k = \sum_{j=1}^k a_j b_{k+1-j}. \quad (4)$$

При знаходженні суми ряду (3) знаходимо суму всеможливих добутоків членів рядів (1) і (2). При цьому

$$c_1 = a_1 b_1, \quad c_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1, \quad c_3 = a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1, \\ c_4 = a_1 b_4 + a_2 b_3 + a_3 b_2 + a_4 b_1, \dots$$

Теорема 1. Якщо ряди (1) і (2) абсолютно збіжні і мають суми \tilde{S} і S^* ,

то збіжним є ряд (3), має суму $S = \tilde{S} \cdot S^*$ і $\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |a_j b_{k+1-j}| < +\infty$.

Доведення. Для кожного n знайдеться m таке, що

$$\sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^k |a_j b_{k+1-j}| \leq \sum_{k=1}^m |a_k| \cdot \sum_{k=1}^m |b_k| \leq A \cdot B,$$

де

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|, \quad B = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|.$$

Отже, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^k |a_j b_{k+1-j}|$$

є збіжним. Але

$$S_n = \tilde{S}_n \cdot S_n^*,$$

де \tilde{S}_n , S_n^* і S_n – n -ні частинні суми рядів (1), (2) і (3) відповідно. Звідси випливає твердження теореми. ►

Приклад 1. Нехай $a_k = \frac{1}{k!}$ і $b_k = (-1)^k \frac{1}{k!}$. Тоді

$$c_0 = a_0 b_0 = 1, \quad c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = -1 + 1 = 0, \quad c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2} = 0,$$

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = -\frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0, \quad c_4 = 0, \quad \dots$$

Тому $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!} = 1$.

11. Умовно збіжні ряди. Згідно з попередніми пунктами, кожний абсолютно збіжний ряд є збіжним. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

називається умовно збіжним, якщо він є збіжним, але не є абсолютно збіжним. Іншими словами можна сказати, що ряд (1) називається умовно збіжним, якщо він є збіжним, а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \quad (2)$$

є розбіжним.

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ є збіжним умовно, оскільки він є збіжним, а

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ є розбіжним.

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}$ є збіжним абсолютно (отже, є збіжним), бо

збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{1}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right)$ є умовно збіжним. Справді,

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$, $x \rightarrow 0$. Отже,

$$\ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) = \frac{(-1)^k}{k+1} - \frac{1}{2(k+1)^2} + o \left(\frac{1}{(k+1)^2} \right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2(k+1)^2} + o \left(\frac{1}{(k+1)^2} \right) \right), \quad k \rightarrow \infty.$$

є збіжними. Тому збіжним є і розглядуваний ряд. Разом з цим,

$\left| \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) \right| = \left| \frac{(-1)^k}{k+1} + o \left(\frac{1}{k} \right) \right| \sim \frac{1}{k}$, $k \rightarrow \infty$. Тому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \ln \left(1 + (-1)^k \frac{1}{k+1} \right) \right|$ є

розбіжним.

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+(-1)^k \frac{1}{k+1}\right) \frac{k}{k+1}$ є збіжним умовно, оскільки $\left|\ln\left(1+(-1)^k \frac{1}{k+1}\right) \frac{k}{k+1}\right| \sim \frac{1}{k}$, якщо $k \rightarrow \infty$, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+(-1)^k \frac{1}{k+1}\right)$ є збіжним (див. приклад 3), а послідовність $\left(\frac{k}{k+1}\right)$ є монотонною і обмеженою.

Теорема 1. Якщо ряд (1) є умовно збіжним, то множина $\{a_k^+\}$ його додатних членів і множина $\{a_k^-\}$ його від'ємних членів є нескінченними, ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+, \quad (3)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^- \quad (4)$$

є розбіжними і мають суми $+\infty$ та $-\infty$ відповідно.

Доведення. Якщо одна з множин $\{a_k^+\}$ чи $\{a_k^-\}$ була б скінченною, то ряд (1) збігався би абсолютно, оскільки поведінка скінченного числа членів ряду не впливає на його збіжність. Тому ці множини є нескінченними. Далі, припустимо, що ряд (3) є збіжним. Нехай S_n , $|S_n|$, S_n^+ і S_n^- – n -ні частинні суми рядів (1), (2), (3) та (4), відповідно. Тоді для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдуться такі $m_n \in \mathbb{N}$ та $k_n \in \mathbb{N}$, що $m_n \leq m_{n+1}$, $k_n \leq k_{n+1}$ і $|S_n| = S_{m_n}^+ - S_{k_n}^-$. Множини $\{m_n\}$ і $\{k_n\}$ є необмеженими, бо в протилежному випадку одна із множин $\{a_k^+\}$ чи $\{a_k^-\}$ була б скінченною. Послідовність (S_n^+) є неспадною, а послідовність (S_n^-) є незростаючою. Оскільки $\lim_{n \rightarrow \infty} |S_n| = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{m_n}^+ < +\infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{k_n}^- = -\infty$. Але для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдуться такі $s_n \in \mathbb{N}$ та $v_n \in \mathbb{N}$, що $s_n \leq s_{n+1}$, $v_n \leq v_{n+1}$ і $S_n = S_{s_n}^+ + S_{v_n}^-$. Як і вище переконуємось, що множини $\{s_n\}$ і $\{v_n\}$ є необмеженими, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{s_n}^+ < +\infty$ і $\lim_{n \rightarrow \infty} S_{v_n}^- = -\infty$. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$. Суперечність. Отже, ряд (3) не може бути збіжним. Аналогічно переконуємося, що ряд (4) не може бути збіжним. ►

Теорема 2 (Рімана). Якщо ряд (1) є умовно збіжним, то для кожного $A \in [-\infty; +\infty]$ можна так переставити його члени, що сума отриманого ряду буде дорівнювати A .

Доведення. Згідно з попередньою теоремою, ряди (3) і (4) є розбіжними.

Нехай $A \in \mathbb{R}$, p_1 – найменше натуральне число, для якого $A < \sum_{k=1}^{p_1} a_k^+$, p_2 –

найменше натуральне число, для якого $\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- \leq A$, ..., p_m – найменше

натуральне число, для якого

$$A < \sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} a_k^+ + \sum_{k=p_2+1}^{p_4} a_k^- + \dots + \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} a_k^- + \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} a_k^+,$$

якщо m – непарне натуральне число, і

$$\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} a_k^+ + \sum_{k=p_2+1}^{p_4} a_k^- + \dots + \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} a_k^+ + \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} a_k^- \leq A,$$

якщо m – парне натуральне число. Ряд

$$\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} a_k^+ + \sum_{k=p_2+1}^{p_4} a_k^- \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^* \quad (5)$$

є шуканим. Справді, за побудовою

$$A + a_{p_2}^- \leq S_{p_1+p_2}^* \leq A, \quad A \leq S_{p_2+p_3}^* \leq A_2 + a_{p_3}^-, \quad A + a_{p_4}^- \leq S_{p_3+p_4}^* \leq A, \quad A \leq S_{p_4+p_5}^* \leq A + a_{p_5}^-,$$

...

Тому $S_{p_n+p_{n+1}}^* \rightarrow A$. Але за побудовою для кожного $m \in \mathbb{N}$ знайдеться таке

$n = n_m \in \mathbb{N}$, що $S_{p_n+p_{n+1}}^* \leq S_m^* \leq S_{p_{n+1}+p_{n+2}}^*$. Отже, $S_m^* \rightarrow A$ і у випадку $A \in \mathbb{R}$ теорему

доведено. Якщо $A = +\infty$, то визначаємо послідовність (p_n) наступним чином.

Нехай p_1 – найменше натуральне число, для якого $1 < \sum_{k=1}^{p_1} a_k^+$, p_2 – найменше

натуральне число, для якого $\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- \leq 1 - 1/2$, ..., p_m – найменше

натуральне число, для якого

$$m < \sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} a_k^+ + \sum_{k=p_2+1}^{p_4} a_k^- + \dots + \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} a_k^- + \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} a_k^+,$$

якщо m – непарне натуральне число, і

$$\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} a_k^+ + \sum_{k=p_2+1}^{p_4} a_k^- + \dots + \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} a_k^+ + \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} a_k^- \leq m/2,$$

якщо m – парне натуральне число. Знову ряд (5) є шуканим. Якщо $A = -\infty$, то визначаємо послідовність (p_n) наступним чином. Нехай p_1 – найменше натуральне число, для якого $1/1 < \sum_{k=1}^{p_1} a_k^+$, p_2 – найменше натуральне число, для

якого $\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- \leq 1/1 - 2$, ..., p_m – найменше натуральне число, для якого

$$-m/2 < \sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} a_k^+ + \sum_{k=p_2+1}^{p_4} a_k^- + \dots + \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} a_k^- + \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} a_k^+,$$

якщо m – непарне натуральне число, і

$$\sum_{k=1}^{p_1} a_k^+ + \sum_{k=1}^{p_2} a_k^- + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} a_k^+ + \sum_{k=p_2+1}^{p_4} a_k^- + \dots + \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} a_k^+ + \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} a_k^- \leq -m,$$

якщо m – парне натуральне число. Переконаємось і тепер, що ряд (5) є шуканим. ►

Наслідок 1. Якщо за будь-якої перестановки членів ряду (1) одержується збіжний ряд, то ряд (1) є збіжним абсолютно.

Приклад 5. Переставимо члени умовно збіжного ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k}$ так,

щоб отриманий таким чином ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^i$ мав суму $S=1$. Нехай p_1 – найменше

натуральне число, для якого $1 < \sum_{k=1}^{p_1} \frac{1}{2k}$, p_2 – найменше натуральне число, для

якого $\sum_{k=1}^{p_1} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{p_2} \frac{1}{2k-1} \leq 1$, ..., p_m – найменше натуральне число, для якого

$$1 < \sum_{k=1}^{p_1} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{p_2} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} \frac{1}{2k} - \sum_{k=p_2+1}^{p_4} \frac{1}{2k-1} + \dots - \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} \frac{1}{2k},$$

якщо m – непарне натуральне число, і

$$\sum_{k=1}^{p_1} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{p_2} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} \frac{1}{2k} - \sum_{k=p_2+1}^{p_4} \frac{1}{2k-1} + \dots + \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} \frac{1}{2k} - \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} \frac{1}{2k-1} \leq 1,$$

якщо m – парне натуральне число. Ряд

$$\sum_{k=1}^{p_1} \frac{1}{2k} - \sum_{k=1}^{p_2} \frac{1}{2k-1} + \sum_{k=p_1+1}^{p_3} \frac{1}{2k} - \sum_{k=p_2+1}^{p_4} \frac{1}{2k-1} + \dots + \sum_{k=p_{m-3}+1}^{p_{m-1}} \frac{1}{2k} - \sum_{k=p_{m-2}+1}^{p_m} \frac{1}{2k-1}$$

є шуканим.

12. Застосування рядів до дослідження послідовностей. Сума ряду – це границя послідовності (S_n) його частинних сум. Навпаки, якщо ми маємо послідовність (y_n) , то розглянувши ряд

$$y_1 + (y_2 - y_1) + \dots + (y_{k+1} - y_k) + \dots = y_1 + \sum_{k=1}^{\infty} (y_{k+1} - y_k)$$

переконаємося, що для цього ряду $S_n = y_n$ і його сума дорівнює границі послідовності (y_n) . Тому вивчення властивостей рядів зводиться до вивчення властивостей послідовностей і навпаки. Кожна теорема про послідовності має свій аналог для рядів і навпаки. Часто зведення дослідження послідовності до дослідження ряду є досить доцільним, оскільки приводить до спрощення міркувань.

Приклад 1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k!}{k^k} = 0$. Справді, розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, у якому $a_k = \frac{k!}{k^k}$.

Тоді $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k^k (k+1)!}{(k+1)^{k+1} k!} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(1+1/k)^k} = \frac{1}{e}$. Отже, розглядуваний ряд є

збіжним, його загальний член прямує до нуля і ми приходимо до потрібного висновку.

Приклад 2. Існує скінченна границя (стала $\gamma_0 = \ln \sqrt{2\pi} = 0,57\dots$

називається сталою Ейлера) $\gamma_0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right)$. Справді,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) + \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} - \ln n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) + \ln \frac{n+1}{n},$$

звідки

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right) + \ln \frac{n+1}{n} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) \right).$$

Залишилось зауважити, що

$$\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = O\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty,$$

і тому останній ряд є збіжним. Таким чином, $\gamma_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right)$.

Приклад 3. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma_0 = \frac{\theta_n}{n}$, $\theta < \theta_n < 1$, $n > 1$. Справді,

$$\begin{aligned} s_n &:= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma_0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= -\ln n + \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \\ &= \ln \frac{n+1}{n} - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k(2k+1)} &\leq \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} \leq \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2k(2k-1)}, \\ \frac{1}{2n+1} &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right) \leq \frac{1}{2n-1}, \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(2n-1)} &< \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(2n+1)}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{1}{2n+1}\right) < s_n < \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{1}{2n-1}\right),$$

звідси отримуємо потрібний висновок.

13. Числові нескінченні добутки. Нехай $(u_k): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ – деяка послідовність дійсних чисел. Символ

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k \cdot \dots \quad (1)$$

називається добутком членів послідовності (u_k) або нескінченним числовим добутком зі загальним членом u_k і позначається

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (2)$$

Цей символ також називається нескінченним добутком. При цьому

$$\pi_n = \prod_{k=1}^n u_k = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

називається n -им частинним добутком добутку (1). Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n = p \neq 0, \infty, \quad (3)$$

то добуток (1) називається збіжним, а число p – його значенням і цей факт записують так

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (4)$$

Зауваження 1. Наше означення нескінченного добутку досить формальне. Правильніше, напевно, нескінченним числовим добутком називати послідовність (π_n) або функцію, яка послідовності (u_k) ставить у відповідність число p за описаною вище процедурою, або границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n$. Далі, під терміном “нескінченний добуток” ми, інколи, розуміємо і його значення. Це не призводить до непорозумінь, оскільки з тексту завжди зрозуміло, який саме аспект терміну мається на увазі.

Приклад 1. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} 1 = 1 \cdot 1 \cdot \dots$ є збіжним і $\prod_{k=1}^{\infty} 1 = 1$, бо

$$\pi_n = \prod_{k=1}^n 1 = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1.$$

Приклад 2. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (-1)^k$ є розбіжним, бо $\pi_n = \prod_{k=1}^n (-1)^k = (-1)^n$ і границя (3) не існує.

Приклад 3. Добуток $\prod_{k=2}^{\infty} (1 - 1/k^2) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - 1/(m+1)^2)$ є збіжним і

$$\prod_{k=2}^{\infty} (1 - 1/k^2) = 1/2, \text{ бо}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n (1 - 1/k^2) &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (n-1)(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \cdot \dots \cdot n^2} = \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Теорема 1. Якщо добуток (2) є збіжним, то $u_n \rightarrow 1$, якщо $n \rightarrow \infty$.

Доведення. Це так, бо $u_n = \pi_n / \pi_{n-1}$. ►

Наслідок 1. Якщо добуток (1) є збіжним, то $u_k > 0$ для всіх $k \geq k^*$.

Приклад 4. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k+10}{k^2}$ є розбіжним, бо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+10}{k^2} = 0$.

Приклад 5. Оскільки $k^2(e^{1/k} - 1) \rightarrow +\infty$, то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} k^2(e^{1/k} - 1)$ є розбіжним.

Добуток $r_s = \prod_{k=s+1}^{\infty} u_k = \prod_{k=1}^{\infty} u_{k+s}$ називається залишком добутку (2).

Теорема 2. Якщо всі $u_k \neq 0$, то добуток (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є кожний його залишок і при цьому $r_s \rightarrow 1$, якщо $s \rightarrow \infty$.

Доведення. Справді, нехай $\pi_n = \prod_{k=1}^n u_k = \left(\prod_{k=1}^s u_k \right) \left(\prod_{k=s+1}^n u_k \right)$. Тому збіжність добутку (2) рівносильна збіжності кожного його залишку. При цьому,

$$p = \left(\prod_{k=1}^s u_k \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=s+1}^n u_k \right) = r_s \prod_{k=1}^s u_k$$

$$\text{і } \lim_{s \rightarrow \infty} r_s = p / \lim_{s \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^s u_k = p / p = 1. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 3. Добуток (2), у якому всі $u_k > 0$, є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln u_k. \quad (5)$$

Доведення. Справді, це випливає з рівності

$$\pi_n = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln u_k\right), \quad \sum_{k=1}^n \ln u_k = \ln \pi_n. \quad \blacktriangleright$$

Теорема 4. Добуток (2), в якому $u_k = 1 + a_k$ і всі $a_k > 0$, є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k. \quad (6)$$

Доведення. Справді, якщо добуток є збіжним, то $u_k \rightarrow 1$, $a_k \rightarrow 0$ і $\ln(1 + a_k) \sim a_k$, якщо $k \rightarrow \infty$. Ряди (5) і (6) є додатними. Тому збіжність ряду (6) впливає зі збіжності ряду (5). Навпаки, якщо ряд (6) є збіжним, то $a_k \rightarrow 0$ і $\ln u_k = \ln(1 + a_k) \sim a_k$. Тому збіжність ряду (5) і, отже, збіжність добутку (2) впливає зі збіжності ряду (6). \blacktriangleright

Теорема 5. Добуток (2), у якому $u_k = 1 + a_k$ і всі $a_k < 0$, є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд (6).

Доведення цієї теореми таке ж як і попередньої. \blacktriangleright

Теорема 6. Добуток (2), у якому $u_k = 1 + a_k$, є збіжним, якщо збіжними є ряд (6) і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2. \quad (7)$$

Доведення. Справді,

$$\frac{a_k - \ln(1 + a_k)}{a_k^2} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad k \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Тому разом з рядом (7) збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k - \ln(1 + a_k)),$$

а тому і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1+a_k)$. Отже, добуток (2), є збіжним. ►

Приклад 6. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1+1/k^x)$ є збіжним, якщо $x > 1$, і є розбіжним, якщо $x \leq 1$.

Приклад 7. Якщо ряд (7) є розбіжним, а ряд (6) є збіжним, то добуток (2), в якому $u_k = 1+a_k$, є розбіжним. Справді, згідно з (8) $a_k - \ln(1+a_k) \leq a_k^2 \leq 4(a_k - \ln(1+a_k))$ для достатньо великих k . Тому, якщо б добуток був збіжним, то ми б мали суперечність.

Добуток (2), у якому $u_k = 1+a_k$, називається абсолютно збіжним, якщо збіжним абсолютно є ряд (6).

Теорема 7. Якщо добуток (2) є абсолютно збіжним, то він є збіжним.

Доведення. Справді, нехай $P_n = \prod_{k=1}^n (1+|a_k|)$. Тоді ряд $P_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (P_n - P_{n-1})$ є збіжним,

$$P_n - P_{n-1} = |a_n| \prod_{k=1}^{n-1} (1+|a_k|), \quad \pi_n - \pi_{n-1} = a_n \prod_{k=1}^{n-1} (1+a_k), \quad |\pi_n - \pi_{n-1}| \leq P_n - P_{n-1},$$

ряд $q = \pi_1 + \sum_{k=2}^{\infty} (\pi_n - \pi_{n-1})$ є збіжним і $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\pi_1 + \sum_{k=2}^n (\pi_n - \pi_{n-1}) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n$.

Тому нам достатньо довести, що $q \neq 0$, а це так, бо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k / (1+a_k)|$ є збіжним, добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k / (1+a_k))$ є збіжним і $\pi_n = \left(\prod_{k=1}^n (1 - a_k / (1+a_k)) \right)^{-1}$. ►

Приклад 8. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1+(-1)^k / k^x)$ є збіжним абсолютно, якщо $x > 1$, є збіжним, якщо $1/2 < x \leq 1$, і є розбіжним, якщо $x \leq 1/2$.

Приклад 9. Оскільки $\frac{k^2}{k^2+1} = 1 - \frac{1}{k^2+1}$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$ є збіжним, то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+1}$ є збіжним абсолютно.

Приклад 10. Оскільки $\frac{k^3}{k^3+1} = 1 - \frac{1}{k^3+1}$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3+1}$ є збіжним, то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{k^3}{k^3+1} \right|$ є збіжним, а добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3}{k^3+1}$ є розбіжним, оскільки $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{k^3}{k^3+1}$ не існує. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{k^3}{k^3+1} - 1 \right|$ також є розбіжним. Тому абсолютна збіжність добутку (2) не є рівносильною збіжності добутку $\prod_{k=1}^{\infty} |u_k|$.

Приклад 11. Якщо $u_k = (-1)^k$, то добуток (2) є розбіжним, а добуток $\prod_{k=1}^{\infty} |u_k|$ є збіжним.

Приклад 12. Нехай $\{p_k\}$ – множина всіх простих чисел: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, Оскільки кожне натуральне число $k > 1$ подається єдиним чином у вигляді добутку $k = p_{v_1(k)} \cdot \dots \cdot p_{v_m(k)}$ простих чисел, $\frac{1}{1-1/p_j^x} = \sum_{k=0}^{\infty} p_j^{-kx}$ для кожного $x \geq 1$ і кожного простого числа p_j , то

$$\prod_{p_j \leq m} \frac{1}{1-1/p_j^x} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k^x} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \right)',$$

де “'” означає, що сумування поширюється тільки на ті $k \geq m+1$, які подаються у вигляді добутку простих чисел, які є меншими m . Якщо $x > 1$, то

$$\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \right)' \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k^x} \rightarrow 0, \text{ якщо } m \rightarrow \infty. \text{ Тому}$$

$$\prod_j \frac{1}{1-1/p_j^x} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}, \quad x > 1.$$

Якщо $x = 1$, то $\prod_{p_j \leq m} \frac{1}{1-1/p_j^x} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} + \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{k} \right)' \geq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} \rightarrow \infty$, якщо $m \rightarrow \infty$. Тому

множина всіх простих чисел є нескінченною. Функція

$$\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$$

називається дзета-функцією Рімана. Отже,

$$\zeta(x) = \frac{1}{\prod_{j=1}^{\infty} (1 - 1/p_j^x)}, \quad x > 1.$$

Зауваження 2. Інколи збіжність добутку розуміють трохи загальніше. Власне, добуток (2) називається збіжним (в узагальненому розумінні), якщо для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\pi}_n = r_{n_0} \neq 0, \infty, \quad \tilde{\pi}_n := \prod_{k=n_0+1}^n u_k.$$

При цьому, число $r = r_{n_0} \prod_{k=1}^{n_0} u_k$ називається значенням нескінченного добутку (2)

і цей факт записують у вигляді (4). Таким чином, в цьому розумінні добуток може бути збіжним і якщо скінченна кількість його співмножників дорівнюють нулеві і тоді значення добутку дорівнює нулеві.

Теорема 8. Добуток (2), в якому всі $u_k \geq 0$, є збіжним (в узагальненому розумінні) тоді і тільки тоді, коли для деякого $n_0 \in \mathbb{N}$ є збіжним ряд

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \ln u_k. \quad (9)$$

Аналогічно переформулюються і доводяться аналоги інших теорем, наведених вище.

Приклад 13. Якщо $u_1 = 2$, $u_2 = u_3 = 0$ і $u_k = \frac{k^2}{k^2 + 1}$, якщо $k \geq 3$, то добуток

(2) є збіжним у вказаному в зауваженні 2 розумінні і $\prod_{k=1}^{\infty} u_k = 0$.

Приклад 14. Оскільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$ є збіжним, то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - xe^{-\sqrt{k}})$ є абсолютно збіжним для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 15. Оскільки $\cos \frac{x}{k} - 1 = (1 + o(1)) \frac{x^2}{2k^2}$, $k \rightarrow \infty$, для кожного $x \in \mathbb{R}$ і

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ є збіжним, то добуток $\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{k}$ є абсолютно збіжним для кожного $x \in \mathbb{R}$.

14. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення збіжного ряду.
2. Сформулюйте означення суми ряду.
3. Для яких q є збіжним ряд $\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}$? Чому дорівнює його сума?
4. Сформулюйте теорему про необхідну умову збіжності ряду.
5. Наведіть приклад розбіжного ряду, загальний член якого прямує до нуля.
6. Чи існує збіжний ряд, загальний член якого не прямує до нуля?
7. Сформулюйте і доведіть критерій Коші збіжності ряду.
8. Сформулюйте і доведіть критерій збіжності додатного ряду.
9. Сформулюйте і доведіть ознаку порівняння.
10. Сформулюйте і доведіть інтегральну ознаку збіжності ряду.
11. Для яких α збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^\alpha$?
12. Сформулюйте і доведіть ознаку д'Аламбера збіжності ряду.
13. Сформулюйте і доведіть ознаку Коші збіжності ряду.
14. Сформулюйте і доведіть ознаку Лейбніца та наслідок з неї.
15. Сформулюйте і доведіть теорему про перетворення Абеля.
16. Сформулюйте і доведіть ознаку Абеля збіжності ряду.
17. Сформулюйте і доведіть ознаку Діріхле збіжності ряду.
18. Сформулюйте означення абсолютно збіжного ряду.
19. Чи існує збіжний ряд, який не є абсолютно збіжним?
20. Сформулюйте і доведіть теорему Рімана про умовно збіжні ряди.

15. Вправи і задачі теоретичного характеру.

1. Доведіть твердження

1. $(1-x) \sum_{k=1}^n x^{k-1} = 1 - x^n$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.
2. $\sum_{k=1}^n kx^{k-1} = \frac{1 + (n-1)x^n - nx^{n+1}}{(1-x)^2}$, $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 1$, $n \in \mathbb{N}$.
3. $(1-x) \prod_{k=1}^n (1+x^{2^{k-1}}) = 1 - x^{2^n}$, $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$4. \sum_{k=1}^n \frac{2^{k-1} x^{2^{k-1}}}{1+x^{2^{k-1}}} = \frac{x}{1-x} - \frac{2^n x^{2^n}}{1-x^{2^n}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad x \neq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Якщо існує така функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, що $a_k = f(k+1) - f(k)$, то

$$\sum_{k=1}^n a_k = f(n+1) - f(1).$$

$$6. \sum_{k=1}^n \ln \cos \frac{x}{2^k} = \ln \prod_{k=1}^n \cos \frac{x}{2^k} = \ln \sin x - n \ln 2 - \ln \sin \frac{x}{2^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \frac{x}{2^n} \neq \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg} x, \quad n \in \mathbb{N}, \quad \frac{x}{2^n} \neq \frac{\pi}{2} + \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{arctg} \frac{c}{c^2 + (a+n)(a+n-1)} = \operatorname{arctg} \frac{c}{a+n-1} - \operatorname{arctg} \frac{c}{a+n}, \quad a > 0, \quad c > 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$9. \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2} = \operatorname{arctg} \frac{n}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$10. \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2 + k + 1} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$11. \sum_{k=1}^n \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2k(2k-1)} = \frac{\pi}{3} - \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{4n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$12. \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+2} - 2\sqrt{k+1} + \sqrt{k}) = 1 - \sqrt{2} - \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$13. \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2n}{2n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$14. \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$15. \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k+3)k(k+6)} = \frac{1}{18} \left(\frac{73}{60} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} + \frac{1}{n+4} + \frac{1}{n+5} + \frac{1}{n+6} \right), \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$16. \sum_{k=1}^n \frac{1}{(a+k-1)(a+k)(a+k+1)} = \frac{1}{2a(a+1)} - \frac{1}{2(a+n)(a+n-1)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$17. \sum_{k=2}^n \ln(1 - 1/k^2) = \ln \frac{n+1}{2n}.$$

$$18. \sum_{k=2}^n \ln \frac{k^3 - 1}{k^3 + 1} = \ln \frac{2(n^2 + n + 1)}{3n(n+1)} \quad (\text{указівка: } (k+1)^2 - (k+1) + 1 = k^2 + k + 1).$$

$$19. \sum_{k=2}^n \ln(1 - 2/k(k+1)) = \ln \frac{n+2}{3n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$20. \sum_{k=1}^n \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{9n+3}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$21. \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$22. \sum_{k=1}^n \frac{k+1}{k^2(k+2)^2} = \frac{3}{8} - \frac{1}{4(n+1)^2} - \frac{1}{4(n+2)^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$23. \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} 3^k \sin^3 \frac{x}{3^k} = \frac{3}{4}(x - \sin x), \quad x \in \mathbb{R} \text{ (указівка: } 4 \sin^3 \varphi = 3 \sin \varphi - \sin 3\varphi).$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} (-3)^{-k} \cos^3(3^k x) = \frac{3}{4} \cos x - \cos^3 x, \quad x \in \mathbb{R} \text{ (указівка: } 4 \cos^3 \varphi = 3 \cos \varphi + \cos 3\varphi).$$

$$26. \sum_{n=1}^{\infty} (C_{n+1}^{k+1})^{-1} = \frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N} \text{ (указівка: } (C_{n+1}^{k+1})^{-1} = \frac{k+1}{k} ((C_{n+k-1}^{k+1})^{-1} - (C_{n+k}^k)^{-1})).$$

$$27. -\frac{\pi}{2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{x^2 + k^2} < \frac{\pi}{2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$$28. \frac{\pi}{2} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} < \frac{\pi+1}{2}.$$

29. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_n(k)}{Q_m(k)}$ є збіжним, якщо P_n і Q_m – поліноми степенів n та m відповідно, $n \leq m-2$ і $Q_m(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$.

30. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_n(k)}{Q_m(k)}$ є розбіжним, якщо P_n і Q_m – поліноми степенів n та m відповідно і $n > m-2$.

2. Доведіть твердження

$$1. \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \frac{1}{(\alpha-1)n^{\alpha-1}}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$2. \frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

$$3. 0 < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(1+n) < 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

4. Якщо функція $f: [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[1; +\infty)$, то

$$\left| \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^{n+1} f(x) dx \right| \leq \int_1^{n+1} |f'(x)| dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

5. Якщо функція $f : [1; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є неперервно диференційовною на проміжку $[1; +\infty)$, то

$$\left| \sum_{k=m}^n f(k) - \int_m^{n+1} f(x) dx \right| \leq \int_m^{n+1} |f'(x)| dx, \quad n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}.$$

6. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1} - a_n)$ є розбіжним, якщо $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$.

7. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k/k$ є додатним і збіжним, якщо $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \rightarrow 0$.

8. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[k]}}{k^\alpha |\sin(k\pi\sqrt{2})|}$ є збіжним, якщо $\alpha > 1$.

9. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos 2^k|}{k}$ є розбіжним (указівка: $|\cos 2^k| + |\cos 2^{k+1}| \geq c_1 > 0$).

10. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin k^2|}{k}$ є розбіжним (указівка: $|\sin(k-1)^2| + |\sin k^2| + |\sin(k+1)^2| \geq c_1 > 0$).

11. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\sin(k + \ln k)|}{k}$ є розбіжним (указівка:

$$|\sin k + \ln k| + |\sin(k+1 + \ln(k+1))| \geq c_1 > 0).$$

12. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos(\ln k)|}{k}$ є розбіжним.

13. Якщо $(\exists g > 1)(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall k \geq n') : k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \geq g$, то додатний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є збіжним.

14. Якщо $(\exists n' \in \mathbb{N})(\forall k \geq n') : k \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} - 1 \right) \leq 1$, то додатний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є розбіжним.

15. Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2$ є збіжним, якщо ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є збіжним і додатним.

16. Існують такі розбіжні ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ і $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, що ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k)$ є збіжним.

17. Якщо ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ і $\sum_{k=1}^{+\infty} (a_k + b_k)$ є збіжними, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ також є збіжним.

18. Якщо ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ і $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ є збіжними і $a_k \leq c_k \leq b_k$ для всіх $k \in \mathbb{N}$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ є збіжним.

19. Існує такий розбіжний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, що ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2$ є збіжним.

20. Існує такий збіжний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$, що ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2$ є розбіжним.

21. Якщо додатні ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ і $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ є розбіжними, то розбіжним є ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \max\{a_k, b_k\}$.

22. Існують такі додатні розбіжні ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ і $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, що ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \min\{a_k, b_k\}$ є збіжним.

23. Існують такі додатні розбіжні ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ і $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$, що ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \min\{a_k, b_k\}$ є розбіжним.

24. Ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k b_k|$, $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k + b_k|^2$ та $\sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k| + |b_k|) / k$ є збіжними, якщо збіжними є ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^2$ та $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_k|^2$.

25. Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є розбіжним, якщо існує $\lim_{k \rightarrow \infty} k a_k = q \neq 0$.

26. Якщо додатний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є збіжним і послідовність (a_k) є монотонною, то $\lim_{k \rightarrow \infty} k a_k = 0$.

27. Якщо додатний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є збіжним, то збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{a_k a_{k+1}}$.

28. Якщо додатний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є збіжним, то збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \sqrt{a_k} / k$.

29. Якщо додатний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є збіжним, то збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k / \sqrt[k]{a_k}$.

30. Якщо додатний ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є збіжним, то збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{\ln(1+k)} \ln(1+1/a_k).$$

31. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k x_k$ є збіжним для кожної послідовності (x_k) , збіжної до нуля,

то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ є збіжним (указівка: припустивши, що твердження не є справедливим, розглянути послідовність $x_k = \text{sign } a_k / n$, якщо $k_n < k \leq k_{n+1}$, де

$$\sum_{k=k_n+1}^{k_{n+1}} |a_k| \geq n).$$

32. Якщо ряди $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ і $\sum_{k=1}^{+\infty} |b_{k+1} - b_k|$ є збіжними, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k a_k$ є збіжним.

33. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ є збіжним, має суму S і $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, то $\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m S_n \rightarrow S$.

34. $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1} \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k q^{k-1}$, $|q| < 1$.

35. Ряд (добуток за Коші) $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\beta} \right)$ є збіжним, якщо $\alpha > 0$, $\beta > 0$ і $\alpha + \beta > 1$.

36. Ряд (добуток за Коші) $\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\alpha} \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^\beta} \right)$ є розбіжним, якщо $\alpha > 0$, $\beta > 0$ і $\alpha + \beta < 1$.

37. Ряд (добуток за Коші) $\left(1 - \sum_{k=1}^{+\infty} (3/2)^k \right) \left(\sum_{k=1}^{+\infty} (3/2)^k (2^k + 2^{-k-1}) \right)$ є розбіжним.

38. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n a_k}{\sum_{k=1}^n b_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$, якщо всі $b_k > 0$, ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ є розбіжним і остання границя існує.

39. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n b_k a_k}{\sum_{k=1}^n b_k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, якщо всі $b_k > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_n}{\sum_{k=1}^n b_k} = 0$ і остання границя існує.

3. Доведіть твердження

1. $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + 1/2^{2^k}) = 2$.

2. $\prod_{k=0}^{\infty} (1 + x^{2^k}) = \frac{1}{1-x}$.

3. $\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}$.

$$4. \prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{k+1}} = \frac{2}{\pi}.$$

$$5. \prod_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$6. \prod_{k=1}^{\infty} \frac{9k^2}{9k^2 - 1} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ є збіжним, а ряди $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ і $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ є розбіжними, якщо

$$a_k = \begin{cases} -\frac{1}{\sqrt{n}}, & k = 2n - 1, \\ -\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\sqrt{n}}, & k = 2n. \end{cases}$$

8. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$, в якому всі $u_k > 0$ є збіжним абсолютно тоді і тільки тоді,

коли абсолютно збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \ln u_k$.

9. $\sum_{k=1}^n a_k \leq \prod_{k=1}^n (1 + a_k) \leq \exp\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)$, якщо всі $a_k > 0$.

10. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + a_k)$ є збіжним, якщо для деякого $m \in \mathbb{N}$ збіжними є ряди

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2, \dots, \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{m-1}, \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^m.$$

11. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) \exp(a_k)$ є збіжним, якщо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2$.

12. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) \exp\left(a_k + \frac{a_k^2}{2}\right)$ є збіжним, якщо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^3$.

13. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - a_k) \exp\left(a_k + \frac{a_k^2}{2} + \frac{a_k^3}{3}\right)$ є збіжним, якщо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^4$.

14. Добуток $\prod_{k=1}^{\infty} u_k$ є збіжним тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall n > n^*)(\forall m > n^*): |1 - \pi_n / \pi_m| < \varepsilon.$$

$$15. \prod_{k=1}^{\infty} (1 + q^k) = \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k-1})}, \quad |q| < 1.$$

$$16. \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^9 q^{j10^{k-1}} \right) = \frac{1}{1 - q}, \quad |q| < 1.$$

16. Вправи і задачі розрахункового характеру

1. Знайдіть суму ряду

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 - k}{(k + 3)(k + 1)k}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 - k}{(k + 2)(k + 1)k}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - k}{(k + 3)(k + 1)k}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 - k}{(k + 2)(k + 1)k}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - k}{(k + 2)(k + 1)k}.$$

$$11. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{-5 - k}{(k + 2)(k^2 - 1)}.$$

$$13. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{-2 - k}{(k - 2)(k - 1)k}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8 + 3k}{(k + 2)(k + 1)k}.$$

$$17. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{6}{(k - 2)(k - 1)k}.$$

$$19. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{3k + 1}{(k - 2)(k - 1)k}.$$

$$21. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{(k + 1)(k - 1)k}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 + k}{(k + 2)(k + 1)k}.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 + 3k}{(k + 2)(k + 1)k}.$$

$$27. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{-2 + 5k}{(k - 1)(k + 2)k}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{49k^2 + 7k - 12}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{49k^2 - 56k - 33}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{25k^2 - 5k - 6}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{49k^2 + 21k - 16}.$$

$$10. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2 + k - 2}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{9k^2 + 12k - 5}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{8}{9k^2 + 6k - 8}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{4k^2 + 8k + 3}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{9k^2 + 3k - 2}.$$

$$20. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{7}{k^2 + k - 2}.$$

$$22. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{12}{9k^2 - 12k - 5}.$$

$$24. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{9k^2 + 21k - 8}.$$

$$26. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{21}{49k^2 - 14k - 48}.$$

$$28. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{12}{36k^2 - 24k - 5}.$$

$$29. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{5k-2}{(k+2)(k-1)k}.$$

$$31. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$$33. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k}.$$

$$35. \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^2}.$$

$$30. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{16}{16k^2 - 8k - 15}.$$

$$32. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+5)}.$$

$$34. \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k} (1+4^k).$$

$$36. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k}.$$

2. Дослідіть на збіжність ряд

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \arcsin \frac{1}{k}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\sqrt{k}}} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[6]{k+1} \ln(1+1/k\sqrt{k}).$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{k+\sqrt{k}}} \sin \frac{3}{k+7}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+3}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k}+3} \arccos \frac{1}{5k+3}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{5k\sqrt{k+1}+1} \cos \frac{\sqrt{k}}{k^3+2k}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{k} \right).$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{5^k \sqrt{k} + 4} \sin^3 \frac{k+1}{k\sqrt{k+2}}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+2)^{-2k}}{(k+1/k)^{-2k-1} (k+1)}.$$

$$21. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2}{3^n + 4^n}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} k \ln \frac{k^3+2}{k^3+1}$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[6]{1+\sqrt{k}} \arcsin \frac{1}{k\sqrt{k}}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1} \cos \frac{1}{k^3}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt[6]{k+\sqrt{k}} \arcsin \frac{1}{2k+\sqrt{k}}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+3}.$$

$$12. \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{m}+3} \arccos \frac{1}{5m+3}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+3}{5k^2+1} \operatorname{ctg} \frac{1}{k^3+2k}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{(k+1/k)^k (k+1)}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{7^k \sqrt[9]{9} + 5} \arcsin^3 \frac{k+1}{k\sqrt{k+2}}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k+1}{3^k+8} \cos \frac{1}{k}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \arcsin^2 \frac{1}{k}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} \frac{k^3+2}{k^3+1}.$$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^3} \operatorname{arccctg} \frac{k^3 + 2}{k^3 + 1}$.
26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 3}{2k^3 + 4} \sin \frac{\pi k}{4}$.
27. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{2k^3 - 4k}{6k^3 + 7k^2 + 1}$.
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k^4 + 6k}{k^5 + 7k^2 + 3k + 1}$.
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{3k^2 + 3k + 1}{6k^2 + k^2 + 3k + 1}$.
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{k^4 + 3k + 1}{10k^4 + 13k^2 + 1}$.
31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 3}{5k + 4}$.
32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3}{5k^2 - 4}$.
33. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 3}{5k^2 + 4}$.
34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 3}{k^3 + 4}$.
35. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^2 + 1}$.
36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}$.
37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^3 + k + 2}{k^5 + k^2 + 1}$.
38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^8 + k + 4}{5k^{13} + 2k^3 + 1}$.
39. $\sum_{k=1}^{\infty} (1 + 1/3k^2)^{-k^2 - 2}$.
40. $\sum_{k=1}^{\infty} (1 + 1/k)^{k+2}$.
41. $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\sqrt{p+1}}$.
42. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{q^3 \sqrt{q+1}}$.
43. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^2 + 3k + 1}{6k^4 + k^2 + 3k + 1}$.
44. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 + 3k + 1}{10k^4 + 13k^2 + 1}$.
45. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1}$.
46. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + 1}{k^3 \sqrt[4]{k+1}}$.
47. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3} + 1}{k^2 + 3k + 1}$.
48. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3 + 5}{k^5 + 4k^4 + 3}$.
49. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{2/3} + 1}{k\sqrt{k} + 3k + 1}$.
50. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^3 + 5}{\sqrt{k^5 + 4k^2 + 3}}$.
51. $\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + 1/k^2)$.
52. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k+3}$.
53. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1})$.
54. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})$.
55. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 3}{k(5\sqrt{k} + 4)}$.
56. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{k^2(\sqrt[k]{k} + 10)}$.
57. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k^2} - \sqrt[3]{k^2 - 1})$.
58. $\sum_{k=1}^{\infty} (k^{3/2} - \sqrt{k^3 - 1})$.

59. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{1}{k^2}.$

61. $\sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{1}{k^2}.$

63. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \arccos \frac{1}{k^2}.$

65. $\sum_{k=1}^{\infty} k \arcsin \frac{1}{k^3}.$

60. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{k}}.$

62. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{1}{k^2}.$

64. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2}.$

66. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{k^2}.$

3. Дослідіть на збіжність ряд

1. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{\sqrt{3^k}}.$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cos \frac{1}{3^k}.$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} e^k \ln(1 + 1/2^k).$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \sin e^{-\sqrt{k}}.$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} 2^{-\sqrt{k}}.$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k} + 3} \arccos 3^{-\sqrt{k}}.$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cos 4^{-k}.$

15. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} \ln(1 + 2^k).$

17. $\sum_{n=1}^{\infty} 9^n \sin^3 \frac{1}{2^n}.$

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln k + \sqrt[3]{k}}}.$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2}{3^k + 4^k}.$

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt[5]{n}}}.$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln k \sqrt{\ln \ln(k+4)}}}.$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{3^k} \arcsin \frac{1}{3^k + 1}.$

4. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{3^k}.$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} 3^k \cos \frac{1}{4^k}.$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}.$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k} + 3} \operatorname{arctg} e^{-\sqrt{k}}.$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\sqrt{k} + 3} \arcsin 3^{-\sqrt{k}}.$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} e^k \ln(1 + 1/3^k).$

16. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \ln(1 + e^k).$

18. $\sum_{m=1}^{\infty} 8^m \arcsin^3 e^{-m}.$

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln k + \sqrt[3]{k}}}.$

22. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 2}{3^k + 2\sqrt{k}}.$

24. $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{4^{\sqrt[3]{m}}}.$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{3^k + 5^k}.$

27.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{1+5^k}.$$

29.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{6+5^{2k-4}}.$$

31.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+3^k}.$$

33.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k+3^{k-3}}.$$

35.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\sqrt{k}}}.$$

37.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln k}}.$$

39.
$$\sum_{p=1}^{\infty} \sqrt{p} \sin \frac{1}{p(p+1)}.$$

41.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\sqrt[3]{\ln k}}}.$$

43.
$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{3^n} - \sqrt{3^{n-1}}).$$

45.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{2^n + 3^n}.$$

28.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{4^k + 8}.$$

30.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 3^{2k+3}}{2^k + 5^{k-1}}.$$

32.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+2^k}.$$

34.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k+3^{k-4}}.$$

36.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt[3]{k}}}.$$

38.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln k}}.$$

40.
$$\sum_{q=1}^{\infty} \sqrt{3^q} \sin \frac{1}{2^{q-1}}.$$

42.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln^2 k}}.$$

44.
$$\sum_{m=1}^{\infty} (\sqrt[3]{2^m} - \sqrt[3]{2^{m-1}}).$$

46.
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n + n}.$$

4. Використовуючи критерій Коші, доведіть збіжність або розбіжність ряду

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{2^k}.$$

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k(k+1)}.$$

4.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{k^2}.$$

5. Дослідіть на збіжність ряд

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 2}{(k^4 + 1) \ln \ln^4(2k + 1)}.$$

2.
$$\sum_{k=4}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 2) \ln \ln^2 k \ln k}.$$

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^4 \ln(k^3 + 2)}{(k+1) \ln^3(2k+1)}.$$

4.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln \ln(k^2 + 3)}{(k^3 + 2) \ln^2(k+1)}.$$

5.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(3k^3 + 2) \ln^2 \ln(k+1)}.$$

6.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{(k^2 + 2) \ln \ln^2(k+1)}.$$

7.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3 + 1} \ln(k+1)}.$$

8.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(k+1) - \ln k}{\ln^2(k+1)}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1} \ln^2 2k}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^3+3) \ln^2(k+1)}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+2}{(k^4+1) \ln(2k+1)}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(3k^3+2) \ln(k+1)}.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+1} \ln(k+1)}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1} \ln 2k}.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^3+1) \ln(k+1)}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3+1} \ln(k+1)}.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k^2+1) \ln^3(k+1)}.$$

$$27. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln \ln k}{k \ln^2 k}.$$

$$29. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 \ln k}.$$

$$31. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1)}.$$

$$33. \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln \ln k}{(2k+3) \ln^3(2k+1)}.$$

$$35. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \ln(k+1) \ln^2 \ln(k+1)}.$$

$$37. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^3(k+1)}.$$

$$39. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln k)^{\ln k}}.$$

$$41. \sum_{k=7}^{\infty} \frac{1}{k \ln \ln^5 k}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k+\sqrt{k}) \ln^2(k+1)}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{(k^3+1) \ln(k+1)}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{(k^3+2) \ln^2(k+1)}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{(k^2+2) \ln^2(k+1)}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(2k^2+1) \ln^3(k+1)}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(2k^2+\sqrt{k}) \ln(k+1)}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{(k^4+1) \ln(k+1)}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{(2k^2+1) \ln^3(k+1)}.$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)^2 \ln(k+3) \ln \ln(k+3)}.$$

$$28. \sum_{k=12}^{\infty} \frac{\ln \ln k}{\sqrt{k} \ln k}.$$

$$30. \sum_{k=12}^{\infty} \frac{1}{k \ln \ln \ln^7 k}.$$

$$32. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+1) \ln^3(k+1)}.$$

$$34. \sum_{k=4}^{\infty} \frac{\ln^4 \ln k}{(2k+3) \ln^3(2k+1)}.$$

$$36. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k+3)^2 \ln(k+3) \ln \ln(k+3)}.$$

$$38. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+1} \ln(k+1)}.$$

$$40. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln k)^{\ln \ln k}}.$$

$$42. \sum_{k=5}^{\infty} \frac{\ln \ln^4 k}{k \ln^3 k}.$$

6. Дослідіть на збіжність ряд

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+2^k)^k / 5^k$.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+3^k)^{-k} 6^k$.

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2^k)^k / 4^k$.

4. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{-2^k} 3^k$.

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/\ln(k+1))^{\ln(k+1)} / 3^k$.

6. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/\sqrt{k})^{-\sqrt{k}+2} 3^k$.

7. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/\ln(k+1))^{\sqrt{k}} / 3^k$.

8. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/\sqrt{k})^{-\ln k+2} 3^k$.

9. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/\ln(k+1))^{2k-1} / 2^k$.

10. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{-\ln k+2} 3^k$.

11. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/\sqrt{k})^{2k-1} / 3^k$.

12. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2\sqrt[3]{k})^{-k+2} 7^k$.

13. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{2k-1} / 3^k$.

14. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2k)^{-k+2} 7^k$.

15. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{k-2} / 4^k$.

16. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2k)^{-k+2} 4^k$.

17. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k^2)^{k-1} 4^k$.

18. $\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2k^2)^{k+1} / 3^k$.

19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\ln^2 k}}{k^{k+1}}$.

20. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\ln^3 k}}{(\sqrt{k})^k}$.

21. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^n}$.

22. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\sqrt{n})^n}$.

23. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{3^n}$.

24. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln n}}{2^n}$.

25. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt[3]{n}}}{2^n}$.

26. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{e^{\sqrt{n}} 2^n}$.

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{2^{k^2+1}}}$.

28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3^k}}{k}$.

29. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt{2^{k+1}}}$.

30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3^k}}{k^2}$.

31. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$.

32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{3^{k-1}}$.

33.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{2^{k+1} k}.$$

35.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{2^{k+1} k}.$$

37.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{k^3}.$$

39.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}.$$

41.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1)!}{2^{k+1} k}.$$

43.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! e^k}{k^k}.$$

45.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}.$$

47.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/k)^{k^2} / 4^k.$$

49.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k-1}{k+1} \right)^{k(k-1)}.$$

51.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{2^{k^2}}.$$

53.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k+1)!!}.$$

55.
$$\frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dots$$

57.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k + 3^k}.$$

59.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{2^k k^{3k}}.$$

61.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{((2k)!)^2}{2^k ((2k)!!)^3}.$$

34.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{3^{k-1} k^2}.$$

36.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{3k+1}{5^{k-2} k}.$$

38.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{k^4}.$$

40.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k k!}{k^k}.$$

42.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{2^{k-1} k^3}.$$

44.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{3^{k-1} k^k}.$$

46.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(3k)!}{(k+1)!^3}.$$

48.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (1+1/2k^2)^{-k^2} 5^k.$$

50.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^2+1}{k^2} \right)^{k^2}.$$

52.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k^2}}{(2k!)^2}.$$

54.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{k^2}}{(2k)!!}.$$

56.
$$\frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots$$

58.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{2^{k^2}}.$$

60.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{2^k (2k)!}.$$

62.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2k} (2k)!}{k^2 (2k)^{2k}}.$$

7. Використовуючи ознаки Раабе та Гауса, дослідіть на збіжність ряд

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \quad 2. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!} \right)^2$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sqrt{\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}} \quad 4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! e^k}{k^{k+1}}$$

8. З'ясуйте, для яких p , q та s збіжним є ряд

$$1. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k} \quad 2. \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k \ln^s \ln k}$$

$$3. \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln \ln^q k} \quad 4. \sum_{k=9}^{\infty} \frac{1}{k^p \ln^q k \ln \ln^s k}$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p}{q^k} \quad 6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k^q}$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p + 2}{k^4 + 1} \quad 8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + 4}{2k^q + 1}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3k^p + 1}{k^q + 1} \quad 10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 + 3k^q}{k^q + 3k^2 + 1}$$

$$11. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln^q k}{k^2} \quad 12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^q}{\ln^p k^5 + 3}$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^p + 1}{q^k} \quad 14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k + 1}{k^q}$$

9. Дослідіть на збіжність ряд

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{4k+1} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{2k} - \ln(1+1/2k) \right) \quad 2. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{3k+2} \left(\operatorname{tg} \frac{3}{k} + \ln \left(1 - \frac{3}{k} \right) \right)$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{4k^2+k} \left(\arcsin \frac{1}{k} - \ln(1+1/k) \right) \quad 4. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{3k+1} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{k} - \sqrt{1-4/k} \right)$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k+1} \left(\sqrt{1+1/k} - \ln(1+1/k) \right) \quad 6. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{3k} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{k} - \ln \left(1 + \frac{2}{k} \right) \right)$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k!}}{\prod_{i=1}^k (1 + \sqrt[3]{i})} \quad 8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^k \ln(1+i)}{\prod_{i=1}^k (1 + \ln(1+i))}$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{sh} \operatorname{tg}^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \quad 10. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^3+1} \left(\operatorname{tg} \operatorname{sh}^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right)$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\arcsin \operatorname{tg}^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right) \quad 12. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^3+1} \left(\operatorname{tg} \arcsin^2 \frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} \right)$$

13.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{sh} \operatorname{tg} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right).$$

15.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \left(\operatorname{sh} \ln(1+1/k) - 1/k \right).$$

17.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\operatorname{sh} 1/k} - 1 - 1/k \right).$$

19.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\sin \frac{1}{k} - \frac{1}{k} + \frac{1}{6k^3} \right).$$

21.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\sqrt{k}+1} \left(\ln \frac{\sqrt{k}+1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k} \right).$$

23.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^4+1} \left(\frac{\sqrt{k^2+1}}{k} - 1 - \frac{1}{2k^2} \right).$$

25.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k \sqrt{k^2+1} \left(\operatorname{sh} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} - \frac{1}{6k^3} \right).$$

27.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{arctg} \frac{2}{k} - \frac{2}{k} \right).$$

29.
$$\sum_{k=2}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \ln \frac{k+1}{k-1}.$$

31.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{4/k} - 1 - 4/k \right).$$

33.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\sin 4/k} - 1 - 4/k \right).$$

35.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^2+1} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) - \frac{1}{k} + \frac{1}{2k^2} \right).$$

37.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k^2+1} - \sqrt[3]{k^3+1} \right).$$

39.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-\sqrt[3]{k}}.$$

41.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \sin \frac{1}{k} \right)^{\sqrt{k}}.$$

43.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \ln \frac{k+1}{k} \right).$$

14.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\operatorname{tg} \operatorname{sh} \frac{1}{k} - \frac{1}{k} \right).$$

16.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k} \left(\operatorname{sh} \arcsin \frac{2}{k} - 2/k \right).$$

18.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\arcsin 1/k} - 1 - 2/k \right).$$

20.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\cos \frac{3}{k} - 1 - \frac{9}{2k^2} \right).$$

22.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \left(\ln \frac{3\sqrt{k}+1}{3\sqrt{k}-1} - 1 \right).$$

24.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^{12}+1} \left(\frac{\sqrt[3]{1+k^3}}{k} - 1 - \frac{1}{3k^3} \right).$$

26.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k^2+1} \left(\operatorname{ch} \frac{1}{k} - 1 - \frac{1}{2k^2} \right).$$

28.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2k+1} \left(\arcsin \frac{3}{k} - \frac{2}{k} \right).$$

30.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt{k+1} - \sqrt[4]{k^2+k+1} \right).$$

32.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sin 4/k - 4/k \right).$$

34.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{\operatorname{tg} 4/k} - 1 - 4/k \right).$$

36.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\ln \frac{2k+1}{2k-1} - 1 \right).$$

38.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{k^3+1} - \sqrt[4]{k^3+1} \right).$$

40.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 e^{-\sqrt[4]{k}}.$$

42.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln k}{k} \right)^k.$$

44.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} e^{-\sqrt[3]{x}} dx.$$

45. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 2k.$

46. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin^2 k^2.$

47. $\sum_{k=1}^{\infty} (k^{1/(k^2+1)} - 1).$

48. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k!}}{\prod_{i=1}^k (1 + \sqrt{i})}.$

49. $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \dots$

50. $\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[k]{k} - 1)^2.$

51. $\sum_{k=1}^{\infty} (k^{k-2} - 1).$

52. $\sum_{k=1}^{\infty} k^{-4} \ln(k^{k^2} + 1).$

53. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} k^2 \right).$

54. $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} k \right)^2.$

10. Дослідіть на збіжність ряд зі загальним членом a_k

1. $a_k = (-1)^k \cos k^2 \sin^3 \frac{1}{\sqrt{k}}.$

2. $a_k = (1 + 2^k \sin \pi k)^k / 4^k.$

3. $a_k = (-3)^{-k} + 6^k \arcsin^3 e^{-k}.$

4. $a_k = (-2)^{-k} + \frac{k}{k^2 + 1} \cos \frac{1}{k^3}.$

5. $a_k = \frac{k(3 + (-1)^k)^k}{k!}.$

6. $a_k = k \frac{(\sqrt{3} + (-1)^k)^k}{k^k}.$

7. $a_k = \frac{2^k + 3^{2k+3}}{2^k + 5^{k-1} \sin \pi k}$

8. $a_k = \frac{2^k + 3^{2k+3}}{5 + k! \cos \pi k}.$

9. $a_k = (1 + 1/k)^{-2k} 3^k + (-1)^k / k^2.$

10. $a_k = 2^k \sin \frac{1}{\sqrt{3^k}} + (-1)^k / k^2.$

11. $a_k = \begin{cases} 1/k^3, & k = 2m + 1, \\ \frac{-k^2 \sin \pi k}{k!}, & k = 2n. \end{cases}$

12. $a_k = \begin{cases} k/(k+1), & k = 2m + 1, \\ \frac{-\cos \pi k}{2^k}, & k = 2n. \end{cases}$

13. $a_k = \begin{cases} 1/k^2, & k = 2m + 1, \\ -1/k^3, & k = 2n. \end{cases}$

14. $a_k = \begin{cases} (1 + \sqrt{k})/k^2, & k = 2m + 1, \\ -(1 + \sqrt{k^3})/k^3, & k = 2n. \end{cases}$

15. $a_k = \frac{k^k 3 \sin \pi k + (-2)^{k(k-1)/2}}{3^k k!}.$

16. $a_k = \frac{3 \sin \pi k}{3^k \sin \frac{\pi}{k}}.$

17. $a_k = \frac{3 \sin k + (-2)^{k(k-1)/2}}{3^k}.$

18. $a_k = \frac{3 \cos \pi k + (-2)^{k(k-1)/2}}{4^k}.$

$$19. a_k = \begin{cases} 1/k^3, & k = 2m+1, \\ -1/2^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$20. a_k = \begin{cases} 1/k^{\ln k}, & k = 2m+1, \\ -1/3^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$21. a_k = \begin{cases} 1/2^k, & k = 2m+1, \\ -1/(1+1/k)^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$22. a_k = \begin{cases} 1/4^k, & k = 2m+1, \\ -(1+1/k)^{-k}, & k = 2n. \end{cases}$$

$$23. a_k = \begin{cases} k/(4k^2+1), & k = 2m+1, \\ -1/4^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$24. a_k = \begin{cases} 4^k/(4^k+3^k), & k = 2m+1, \\ -1/k^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$25. a_k = \frac{k \sin \frac{k\pi}{4}}{k^2+1}.$$

$$26. a_k = \frac{k^2 \cos \frac{k\pi}{4}}{k^2 + \sqrt{k}}.$$

$$27. a_k = \left(\frac{1 + \sin k}{3 + \sin k} \right)^k.$$

$$28. a_k = \left(\frac{1 + \cos k}{2 + \cos k} \right)^{2k}.$$

$$29. a_k = \frac{k(3+(-1)^k)^k}{3^k}.$$

$$30. a_k = k \frac{\sqrt{3} + (-1)^k}{3^k}.$$

$$31. a_k = \begin{cases} 1/k^k, & k = 2m+1, \\ -1/2^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$32. a_k = \begin{cases} 1/3^k, & k = 2m+1, \\ -1/2^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$33. a_k = \begin{cases} 1/2^k, & k = 2m+1, \\ -1/(2+1/k)^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$34. a_k = \begin{cases} 1/3^k, & k = 2m+1, \\ -(1+1/k)^{-k^2}, & k = 2n. \end{cases}$$

$$35. a_k = \begin{cases} k/(2k+1), & k = 2m+1, \\ -1/2^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$36. a_k = \begin{cases} 3^k/(2^k+3^k), & k = 2m+1, \\ -1/2^k, & k = 2n. \end{cases}$$

$$37. a_k = \frac{3+(-1)^k}{3^k}.$$

$$38. a_k = \frac{3+(-2)^k}{3^k}.$$

$$39. a_k = \int_0^{1/k} \frac{\sqrt{x}}{1+x^8} dx.$$

$$40. a_k = 1 / \int_1^k \sqrt{1+x^3} dx.$$

$$41. a_k = (e - (1+1/k)^k).$$

$$42. a_k = (e - (1+1/k)^k)^2.$$

$$43. a_k = \frac{\ln k!}{k^2}.$$

$$44. a_k = \frac{\ln k!}{k}.$$

11. Дослідіть ряд на абсолютну і умовну збіжність

$$1. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{(k+1)(k-1)}.$$

$$2. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{9 \ln^2 k + 5}.$$

$$3. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{9 \ln^2 \ln k + 5}.$$

$$4. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{18}{9k^2 + 21k - 8}.$$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{4+3k}{(k+1)k}$.
6. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{49k^2 - 14k - 48}$.
7. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{9 \ln^2 k + 5}$.
8. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{36k^2 - 24k - 5}$.
9. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^k}{ke^k + 1}$.
10. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{ke^k}{-k^2 e^k + 1}$.
11. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{-5k^2 + k - 1}$.
12. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{-5k^3 + 3}{6 - k^5 - 4k^4}$.
13. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{k^2 + 4k + 3}$.
14. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{2k^2 + k + 1}$.
15. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + \sin k}$.
16. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{-\sqrt{k^4 + 1} + \cos k}$.
17. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}}$.
18. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{2\sqrt[4]{k^8 + 1}}$.
19. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{1+k}$.
20. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 + 2k}{\sqrt[3]{9k^6 + 1}}$.
21. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{6 - \ln k + k}$.
22. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{6 - \ln \ln k + k}$.
23. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^k}{k!}$.
24. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{-5k^3 + 3}{6 - k^5 + 4k^4}$.
25. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{(k+2)(k+3)}$.
26. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{k}$.
27. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 + (-2)^k}{3^k}$.
28. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2 + (-1)^k k}{4^k}$.
29. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k \ln^2 k + 1}$.
30. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{\sqrt[3]{k^2 + 1}}$.
31. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{1 + \sqrt{k}}$.
32. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k^2 \ln^2 k + 1}$.
33. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{6 - \operatorname{arctg} k + k}$.
34. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{6 + \operatorname{arctg} k + k}$.
35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{e^k}$.
36. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{5k^2 + 3}{6 + k^9 + 4k^4}$.
37. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{(k+1)(k+2)}$.
38. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$.

$$39. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 + (-1)^k}{k^2}.$$

$$40. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 + (-1)^k k}{2^k}.$$

$$41. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k \ln k + 1}.$$

$$42. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k \ln k + 1}.$$

12. Дослідіть ряд на абсолютну і умовну збіжність

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{k^2 + 1}.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 + 3}{(k^4 + 1) \ln(k + 1)}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k + 1}{(k^3 + 1) \ln(k + 1)}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin^2 k}{k}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos 2k}{k}.$$

$$6. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi k^2}{k+1}}{\ln^2 k}.$$

$$7. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln k]}}{k + (-1)^k}.$$

$$8. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(3k^3 + 2) \ln(k + 1)}.$$

$$10. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 + \sin \frac{k\pi}{4}}.$$

$$11. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{\sqrt{k} + \sin \frac{k\pi}{4}}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k + 3}{(k^2 + 2) \ln^2(k + 1)}.$$

$$13. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\sqrt[k]{k^2} (k + 1)}.$$

$$14. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\sqrt[k]{\ln k^2} (k + 1)}.$$

$$15. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k + 1}{3^k + 2^k}.$$

$$16. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k + 1) \cos \frac{1}{k}}.$$

$$17. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k + 1}{2k^2 + 1}.$$

$$18. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2 + k}{2k^3 + 2}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4k + 1}{2k^3 + 1}.$$

$$20. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2 + k}{7k^4 + 2}.$$

$$21. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k + 1}{k \ln k}.$$

$$22. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k + 1}{k \ln \ln k}.$$

$$23. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k + 1}{k^2 \ln k}.$$

$$24. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k + 1}{k^2 \ln \ln k}.$$

$$25. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k + 1}{k^2 \ln^2 k}.$$

$$26. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k + 1}{k^2 \ln k \ln^2 \ln k}.$$

27.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{(k^3+3)\ln^2(k+1)}.$$

28.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2+3}{(k^3+1)\ln(k+1)}.$$

29.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^3+2}{(k^4+1)\ln(2k+1)}.$$

30.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2+3}{(k^3+2)\ln^2(k+1)}.$$

31.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k}.$$

32.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

33.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}.$$

34.
$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

35.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k^3+1}\ln(k+1)}.$$

36.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{(2k^2+1)\ln^3(k+1)}.$$

37.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3+1}\ln 2k}.$$

38.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{(2k^2+\sqrt{k})\ln(k+1)}.$$

39.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k}{k}.$$

40.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k}.$$

41.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{[k/2]} \frac{1}{k}.$$

42.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{[k/2]} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

43.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 + \sin \frac{k\pi}{4}}.$$

44.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{\sqrt[3]{k} + \sin \frac{k\pi}{4}}.$$

45.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \sin k^2}{k}.$$

46.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k \arccos(1/k)}{\sqrt[4]{k}}.$$

47.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{k! e^k}.$$

48.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{1+\frac{1}{k}}}.$$

13. Нехай S – сума ряду $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ і $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$. Знайдіть якомога менше натуральне число n , для якого $|S - S_n| < \Delta$

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k\sqrt{k}}, \Delta = 10^{-1}.$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}}, \Delta = 10^{-1}.$$

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2}, \Delta = 10^{-1}.$$

4.
$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln^2 k}, \Delta = 10^{-1}.$$

5.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!}, \Delta = 10^{-4}.$$

6.
$$\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k}, \Delta = 10^{-4}.$$

7. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{k(k+1)}, \Delta = 10^{-2}.$

8. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{2(k^2+1)}, \Delta = 10^{-2}.$

9. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{3^k+1}, \Delta = 10^{-3}.$

10. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2^k+1}, \Delta = 10^{-3}.$

11. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{2k^2+1}, \Delta = 10^{-2}.$

12. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k^3+2}, \Delta = 10^{-2}.$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{2k^3+1}, \Delta = 10^{-2}.$

14. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4}{k^4+2}, \Delta = 10^{-2}.$

15. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{5^k+1}, \Delta = 10^{-3}.$

16. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4^k+1}, \Delta = 10^{-3}.$

17. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln k}, \Delta = 10^{-3}.$

18. $\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln \ln k}, \Delta = 10^{-3}.$

19. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k(k+10)}, \Delta = 10^{-2}.$

20. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k(k+8)}, \Delta = 10^{-2}.$

21. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln^2(k+1)}, \Delta = 10^{-2}.$

22. $\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\ln^2 \ln k}, \Delta = 10^{-2}.$

23. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^3+1}, \Delta = 10^{-3}.$

24. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^4+1}, \Delta = 10^{-3}.$

25. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+7}, \Delta = 10^{-2}.$

26. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k+8}}, \Delta = 10^{-2}.$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^2+3}, \Delta = 10^{-3}.$

28. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k+1}{2k^2+k+1}, \Delta = 10^{-3}.$

29. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^5+2}, \Delta = 10^{-3}.$

30. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k^6+1}, \Delta = 10^{-3}.$

31. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^3}, \Delta = 10^{-3}.$

32. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^4}, \Delta = 10^{-3}.$

33. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{1+k}, \Delta = 10^{-3}.$

34. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k}{9k^6+1}, \Delta = 10^{-4}.$

35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{(2k)!}, \Delta = 10^{-4}.$

36. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+10!!)}, \Delta = 10^{-5}.$

37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}, \Delta = 10^{-2}.$

38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}, \Delta = 10^{-3}.$

39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}, \Delta = 10^{-4}.$

40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k}, \Delta = 10^{-4}.$

14. Дослідіть на збіжність нескінченні добутки

1. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n) e^{1/n}$.

2. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n) e^{-1/n}$.

3. $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + 1/\sqrt{k}) e^{-1/\sqrt{k}}$.

4. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/\sqrt{n}) e^{1/\sqrt{n}}$.

5. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/\sqrt{n}) e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}}$.

6. $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - 1/\sqrt{k}) e^{\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k}}$.

7. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/\sqrt{n}) e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n\sqrt{n}}}$.

8. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/\sqrt{n}) e^{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n\sqrt{n}}}$.

9. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n^2) e^{1/n}$.

10. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n) e^{-1/n^2}$.

11. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1 + 1/n}$.

12. $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-1/n}}{1 - 1/n^2}$.

13. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-1/n}}{1 + 1/n}$.

14. $\prod_{k=2}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{1 - 1/k^2}$.

15. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + (e^{1/n} - 1 - 1/n))$.

16. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + (\sin 1/n - 1/n))$.

17. $\prod_{k=1}^{\infty} \cos^2 \frac{1}{k}$.

18. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\cos \frac{1}{n^4}}$.

19. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}$.

20. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + 1/n}$.

21. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n) \cos \frac{1}{n}$.

22. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$.

23. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n) \cos \frac{1}{n}$.

24. $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{\ln(1+n) - \ln n}$.

25. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n / \ln n)$.

26. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + (-1)^n / \sqrt[3]{n})$.

27. $\prod_{n=1}^{\infty} \left(n \sin \frac{1}{n} \right)^2$.

28. $\prod_{n=1}^{\infty} (n \ln(1 + 1/n))^3$.

29. $\prod_{n=1}^{\infty} (n \ln(e^{1/n} - 1))^2$.

30. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n)^{1/(n+1)}$.

31. $\prod_{n=1}^{\infty} 1/n$.

32. $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 2^n}{2 + 3^n}$.

33. $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 + 2}{k^4 + 1}$.

34. $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 2}{2^k + 1}$.

35. $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + k + 1}{k^2 + k}$.

36. $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^2 + 1}}$.

37. $\prod_{n=1}^{\infty} e^{1/n}$.

38. $\prod_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$.

39. $\prod_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{1}{n}$.

40. $\prod_{n=1}^{\infty} n^2 \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}$.

41. $\prod_{n=1}^{\infty} \cos \frac{1}{n^4}$.

42. $\prod_{n=1}^{\infty} n^2 \arcsin \frac{1}{n^2}$.

43. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/2^n)$.

44. $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/3^n)$.

45. $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + (-1)^k / \ln^3 k)$.

46. $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k} + (-1)^{k+1}}$.

17. Відповіді до вправ й задач розрахункового характеру

1.31. $1/2$. 1.32. $23/90$. 1.33. $3/2$. 1.34. $(5e^2 - 8)/((e^2 - 1)(e^2 - 4))$. 1.35. $\pi/4$. 1.36. 3 . 2.31. Розбігається. 2.32. Розбігається. 2.33. Розбігається. 2.34. Розбігається. 2.35. Збігається. 2.36. Збігається. 2.37. Збігається. 2.38. Збігається. 2.39. Розбігається. 2.40. Розбігається. 2.41. Збігається. 2.43. Збігається. 2.44. Розбігається. 2.45. Збігається. 2.46. Збігається. 2.47. Збігається. 2.48. Збігається. 2.49. Розбігається. 2.50. Розбігається. 2.51. Збігається. 2.52. Розбігається. 2.53. Розбігається. 2.54. Розбігається. 2.55. Розбігається. 2.56. Розбігається. 2.57. Збігається. 2.58. Збігається. 2.59. Збігається. 2.60. Розбігається. 2.61. Розбігається. 2.62. Розбігається. 2.63. Розбігається. 2.64. Розбігається. 2.65. Збігається. 2.66. Збігається. 3.31. Збігається. 3.32. Збігається. 3.33. Збігається.

3.34. Збігається. 3.35. Збігається. 3.36. Збігається. 3.37. Збігається. 3.38. Розбігається. 3.39. Збігається. 3.40. Збігається. 3.41. Розбігається. 3.42. Збігається. 3.43. Розбігається. 3.44. Розбігається. 3.45. Розбігається. 3.46. Збігається. 5.31. Збігається. 5.32. Збігається. 5.33. Збігається. 5.34. Збігається. 5.35. Збігається. 5.36. Збігається. 5.37. Розбігається. 5.38. Розбігається. 5.39. Збігається. 5.40. Розбігається. 5.41. Розбігається. 5.42. Збігається. 6.31. Збігається. 6.32. Збігається. 6.33. Розбігається. 6.34. Розбігається. 6.35. Збігається. 6.36. Збігається. 6.37. Розбігається. 6.38. Розбігається. 6.39. Збігається. 6.40. Збігається. 6.41. Розбігається. 6.42. Розбігається. 6.43. Розбігається. 6.44. Збігається. 6.45. Збігається. 6.46. Розбігається. 6.47. Збігається. 6.48. Розбігається. 6.49. Збігається. 6.50. Розбігається. 6.51. Збігається. 6.52. Розбігається. 6.53. Розбігається. 6.54. Розбігається. 6.55. Збігається. 6.56. Збігається. 6.57. Збігається. 6.58. Збігається. 6.59. Розбігається. 6.60. Збігається. 6.61. Розбігається. 6.62. Розбігається. 9.31. Збігається. 9.32. Збігається. 9.33. Збігається. 9.34. Збігається. 9.35. Збігається. 9.36. Розбігається. 9.37. Розбігається. 9.38. Збігається. 9.39. Збігається. 9.40. Збігається. 9.41. Збігається. 9.42. Розбігається. 9.43. Збігається. 9.44. Збігається. 9.45. Розбігається. 9.46. Розбігається. 9.47. Збігається. 9.48. Збігається. 9.49. Збігається. 9.50. Розбігається. 9.51. Збігається. 9.52. Збігається. 9.53. Збігається. 9.54. Збігається. 10.31. Збігається. 10.32. Збігається. 10.33. Розбігається. 10.34. Збігається. 10.35. Розбігається. 10.36. Розбігається. 10.37. Збігається. 10.38. Збігається. 10.39. Збігається. 10.40. Збігається. 10.41. Розбігається. 10.42. Збігається. 10.43. Розбігається. 10.44. Розбігається. 11.31. Збігається умовно. 11.32. Збігається абсолютно. 11.33. Збігається умовно. 11.34. Збігається умовно. 11.35. Збігається абсолютно. 11.36. Збігається абсолютно. 11.37. Збігається умовно. 11.38. Збігається умовно. 11.39. Збігається абсолютно. 11.40. Збігається умовно. 11.41. Збігається умовно. 11.42. Збігається умовно. 12.31. Збігається умовно. 12.32. Збігається умовно. 12.33. Збігається абсолютно. 12.34. Збігається абсолютно. 12.35. Збігається абсолютно. 12.36. Збігається абсолютно. 12.37. Збігається умовно. 12.38. Збігається абсолютно. 12.39. Збігається умовно. 12.40. Збігається умовно. 12.41. Збігається умовно. 12.42. Збігається умовно. 12.43. Збігається абсолютно. 12.44. Збігається умовно. 12.45. Збігається умовно. 12.46. Збігається умовно. 12.47. Збігається умовно. 12.48. Збігається умовно. 13.31. $n \geq 10$. 13.32. $n \geq 5$. 13.33. $n \geq 999997$. 13.34. $n \geq 4$. 13.35. $n \geq 3$. 13.36. $n \geq 5$. 13.37. $n \geq 100$. 13.38. $n \geq 250$. 13.39. $n \geq 14$. 13.40. $n \geq 8$. 14.31. Розбігається. 14.32. Розбігається. 14.33. Збігається. 14.34. Збігається. 14.35. Збігається. 14.36. Збігається. 14.37. Розбігається. 14.38. Збігається. 14.39. Збігається. 14.40. Збігається. 14.41. Збігається. 14.42. Збігається. 14.43. Збігається. 14.44. Збігається. 14.45. Розбігається.

Розділ 11. Функціональні ряди

Функціональні ряди відіграють дуже важливу роль у різних розділах математики та її застосуваннях. За допомогою таких рядів визначаються багато спеціальних функцій, знаходяться значення елементарних функцій, розв'язуються різні рівняння і т.д. Вивчення функціональних рядів відомим чином пов'язане з вивченням функціональних послідовностей. Найважливішими функціональними рядами є степеневі ряди та тригонометричні ряди. Збіжність функціонального ряду можна визначити різноманітними способами. Найважливіші з них розглядаються нижче.

1. Збіжність і рівномірна збіжність функціональних послідовностей. Функціональною послідовністю називається така функція, областю визначення якої є множина всіх натуральних чисел, а множина значень належить множині всіх функцій із \mathbb{R} в \mathbb{R} . Щоб задати функціональну послідовність, досить кожному натуральному числу k поставити у відповідність функцію $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Функціональні послідовності позначатимемо так: (f_k) або $(f_k(x))$. Для кожного конкретного x функціональна послідовність $(f_k(x))$ перетворюється в числову. Функціональна послідовність (f_k) називається збіжною в точці x , якщо збіжною в \mathbb{R} є числова послідовність $(f_k(x))$.

Приклад 1. Послідовність $(x^k) = (x; x^2; \dots)$ є функціональною. В даному випадку f_k – це функції, визначені формулою $f_k(x) = x^k$. Якщо $x = 1/2$, то ця функціональна послідовність перетворюється в числову послідовність $(1/2^k)$.

Приклад 2. Послідовність $(x + \sin kx) = (x + \sin x; x + \sin 2x; \dots)$ є функціональною. В даному випадку f_k – це функції, визначені формулою $f_k(x) = x + \sin kx$. Якщо $x = \pi/4$, то ця функціональна послідовність перетворюється в числову послідовність $(\pi/4 + \sin k\pi/4)$.

Приклад 3. Функціональна послідовність $(x^k) = (x; x^2; \dots)$ є збіжною в точці $x = 1/2$, бо збіжною в \mathbb{R} є числова послідовність $(1/2^k)$: $\lim_{k \rightarrow \infty} 1/2^k = 0$.

Приклад 4. Кожна числова послідовність (a_k) є функціональною, оскільки в цьому випадку всі функції f_k є сталими функціями: $f_k(x) = a_k$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 5. Послідовність $(2/3^k)$ є функціональною, f_k є сталими функціями: $f_k(x) = 2/3^k$ для всіх $x \in \mathbb{R}$.

Функціональна послідовність (f_k) називається збіжною до функції f на множині E або поточково збіжною до f на E , якщо для кожного $x \in E$ числова послідовність $(f_k(x))$ збігається в \mathbb{R} до числа $f(x)$:

$$(\forall x \in E) : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x), \quad (1)$$

тобто якщо

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*) : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (2)$$

Функціональна послідовність (f_k) називається рівномірно збіжною до функції f на множині E , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall x \in E) : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (3)$$

Різниця між (2) і (3) полягає в тому, що в (3) k^* залежить тільки від $\varepsilon > 0$, а в (2) k^* залежить від ε і точки $x \in E$. Можна сказати і так. Функціональна послідовність (f_k) називається рівномірно збіжною на множині E , якщо

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \{|f_k(x) - f(x)| : x \in E\} = 0. \quad (4)$$

Кожна рівномірно збіжна на E послідовність є збіжною на E поточково. Обернене твердження не обов'язково справедливе, що впливає із наступного прикладу.

Число $\|f\|_E = \sup\{|f(x)| : x \in E\}$ називається \sup -нормою функції f на множині $E \subset \mathbb{R}$. Кажуть, що послідовність (f_k) збігається до f за \sup -нормою, якщо $\lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k - f\|_E = 0$. Бачимо, що рівномірна збіжність послідовності (f_k) на множині E рівносильна її збіжності за \sup -нормою на E .

Коли кажуть, що функціональна послідовність збігається (рівномірно збігається) на множині E , то це означає, що існує функція, до якої вона збігається (рівномірно збігається) на E .

Приклад 6. Функціональна послідовність $(x^k + 2x)$ є збіжною до функції $f(x) = 2x$ на множині $E = (-1; 1)$. Справді,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x^k + 2x) = 2x, \quad x \in (-1; 1),$$

бо $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0$, $|x| < 1$. Але ця послідовність не є рівномірно збіжною на $E = (-1; 1)$,

бо $|x^k + 2x - 2x| = |x^k| = 1/2 > 1/3$, якщо $x = (\sqrt[k]{2})^{-1}$. Тому

$$(\exists \varepsilon = 1/3)(\forall k^*)(\exists k = k^*)(\exists x = 1/\sqrt[k]{2} \in (-1; 1)) : |x^k + 2x - 2x| \geq \varepsilon.$$

Приклад 7. Функціональна послідовність $(x^k + 2x)$ є рівномірно збіжною на кожному проміжку $[-r; r]$, $0 < r < 1$. Справді, якщо $\frac{1}{r} = 1 + \alpha$, то

$$\frac{1}{r^k} = (1 + \alpha)^k \geq \alpha k \quad i$$

$$|x^k + 2x - 2x| = |x^k| \leq r^k = \frac{1}{(1 + \alpha)^k} \leq \frac{1}{\alpha k} < \varepsilon, \quad k > 1/\alpha\varepsilon.$$

Отже,

$$(\forall r \in (0; 1))(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* = [1/\alpha\varepsilon] + 1)(\forall k \geq k^*)(\forall x \in [-r; r]) :$$

$$|x^k + 2x - 2x| < \varepsilon. \quad (4)$$

Тому на проміжку $[-r; r]$ розглядувана послідовність є рівномірно збіжною. Зрозуміло, що в (4) k^* залежить від r , але не залежить від $x \in [-r; r]$.

Приклад 8. Оскільки

$$\sup_{x \in [0;1]} \left\{ \left| \frac{kx}{1+k+x} - x \right| \right\} \leq \frac{2}{k+1} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

то послідовність $f_k(x) = \frac{kx}{1+k+x} - x$ рівномірно збігається до 0 на $[0;1]$.

Приклад 9. Оскільки $((\forall x \in (0; +\infty)) : \lim_{k \rightarrow \infty} \arctg kx = \pi/2)$, то послідовність $f_k(x) = \arctg kx$ збігається на $(0; +\infty)$ поточково до $\pi/2$. Але $\sup_{x \in (0; +\infty)} \{ |\arctg kx - \pi/2| \} = \pi/2$ і тому збіжність не є рівномірною.

Теорема 1 (критерій Коші рівномірної збіжності послідовності). Для того щоб функціональна послідовність (f_k) рівномірно збігалась на множині E , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall p > 0)(\forall x \in E) : |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon. \quad (1)$$

Доведення. Нехай послідовність (f_k) рівномірно збігається на E . Тоді для деякої функції f маємо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall x \in E)(\forall p > 0) :$$

$$|f_k(x) - f(x)| < \varepsilon/2 \text{ і } |f_{k+p}(x) - f(x)| < \varepsilon/2.$$

Оскільки $|f_{k+p}(x) - f_k(x)| \leq |f_{k+p}(x) - f(x)| + |f_k(x) - f(x)|$, то звідси отримаємо (1). Навпаки, нехай виконується (1). Тоді для кожного $x \in E$ числова послідовність $(f_k(x))$ є фундаментальною. Тому за критерієм Коші збіжності числових послідовностей знайдеться така функція f , що

$$(\forall x \in E) : \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x).$$

Отже, спрямувавши в (1) p до $+\infty$, отримуємо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall x \in E) : |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 10. Функціональна послідовність

$$f_k(x) = \sum_{j=1}^k \frac{\cos jx^2}{j^2}$$

є рівномірно збіжною на \mathbb{R} , оскільки

$$\begin{aligned} |f_{k+p}(x) - f_k(x)| &= \left| \sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{\cos jx^2}{j^2} \right| \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=k+1}^{k+p} \frac{1}{j(j-1)} \\ &= \sum_{j=k+1}^{k+p} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j} \right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+p} \leq \frac{1}{k} \end{aligned}$$

для всіх $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ та $p \in \mathbb{N}$, і тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* = [1/\varepsilon] + 1)(\forall k \geq k^*)(\forall p > 0)(\forall x \in \mathbb{R}): |f_{k+p}(x) - f_k(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (критерій Коші рівномірної збіжності послідовності в термінах sup-норми). Для того щоб функціональна послідовність (f_k) рівномірно збігалась на множині E , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall n \geq k^*): \|f_n - f_k\|_E < \varepsilon.$$

Доведення. Ця теорема є іншим формулюванням теореми 1. ►

2. Означення функціонального ряду, його збіжність і рівномірна збіжність. Нехай $(f_k(x))$ – функціональна послідовність. Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x) + \dots \quad (1)$$

називається функціональним рядом. Для кожного конкретного x функціональний ряд (1) перетворюється в числовий ряд.

Приклад 1. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x^k$ є функціональним рядом і $f_k(x) = x^k$. Взявши

$x = 1/2$, отримуємо числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1/2)^k$, який є збіжним.

Функція

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$$

називається n -ою частинною сумою ряду (1). Ряд (1) називається збіжним в точці x , якщо збіжним в \mathbb{R} є відповідний числовий ряд. Ряд (1) називається збіжним на множині E або поточково збіжним на множині E до функції f , якщо до f на множині E збіжною є послідовність його частинних сум $(S_n(x))$, тобто якщо

$$(\forall x \in E) : \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = f(x). \quad (2)$$

При цьому $f(x)$ називається сумою ряду (1) і цей факт записується так

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Функція

$$r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$$

називається n -им залишком ряду. Ряд (1) є збіжним на E тоді і тільки тоді, коли збіжним на E є кожний його залишок. При цьому

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x). \quad (3)$$

Множина E , на якій ряд (1) є збіжним (абсолютно збіжним), називається множиною збіжності (абсолютної збіжності) цього ряду.

Приклад 2. Розглянемо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(x+1)^k}$. Нехай $f_k(x) = \frac{1}{k(x+1)^k}$. Тоді

$$f_{k+1}(x) = \frac{1}{(k+1)(x+1)^{k+1}}, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|f_{k+1}(x)|}{|f_k(x)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k|x+1|^k}{(k+1)|x+1|^{k+1}} = \frac{1}{|x+1|}.$$

ознакою д'Аламбера для тих $x \in \mathbb{R}$, для яких $|x+1| > 1$, ряд є збіжним абсолютно, а для тих $x \in \mathbb{R}$, для яких $|x+1| < 1$, ряд є розбіжним. Якщо $|x+1| = 1$, то $x = 0$ або $x = -2$. У точці $x = 0$ наш ряд перетворюється в

числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$, який є розбіжним. В точці $x = -2$ наш ряд перетворюється

в числовий ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$, який є збіжним умовно. Тому множина

$(-\infty; -2] \cup (0; +\infty)$ є множиною збіжності ряду, а множина $(-\infty; -2) \cup (0; +\infty)$ є множиною абсолютної збіжності розглядуваного ряду.

Означення збіжності ряду до функції f на множині E можна сформулювати так. Ряд (1) називається збіжним на множині E до функції f , якщо

$$(\forall x \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*): |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Ряд (1) називається рівномірно збіжним на множині E до функції f , якщо на E до f рівномірно збігається послідовність його частинних сум, тобто якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall x \in E): |S_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Із (3) випливає, що ряд (1) рівномірно збігається на E тоді і тільки тоді коли на E його залишок рівномірно прямує до 0, тобто якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall x \in E): |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 1 (критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду). Для того щоб функціональний ряд (1) рівномірно збігався на множині E , необхідно і достатньо, щоб

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall p \geq 0)(\forall x \in E): \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Ця теорема випливає із критерію Коші рівномірної збіжності послідовності.

Наслідок 1. Якщо функціональний ряд (1) є рівномірно збіжним на множині E , то його загальний член рівномірно прямує до нуля, тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*)(\forall k \geq k^*)(\forall x \in E): |f_k(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (ознака Вейерштрасса). Якщо існує такий збіжний додатний числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k, \tag{4}$$

що

$$(\forall x \in E)(\forall k): |f_k(x)| \leq \alpha_k, \tag{5}$$

то функціональний ряд (1) є рівномірно і абсолютно збіжним на множині E .

Доведення. Оскільки ряд (4) є збіжним, то його залишок прямує до нуля, тобто

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*) : \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k < \varepsilon. \quad (6)$$

Але

$$|r_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall x \in E) : |r_n(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| < \varepsilon,$$

тобто на E ряд (1) є збіжним рівномірно і абсолютно. ►

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку

$(-\infty; +\infty)$, бо $\frac{1}{k^2 + x^2} \leq \frac{1}{k^2}$, $k \in \mathbb{N}$, $x \in (-\infty; +\infty)$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$ є збіжним.

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} kxe^{-k^5 x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $[0; +\infty)$, бо

$\sup_{x \in [0; +\infty)} \left\{ kxe^{-k^5 x^2} \right\} = \frac{e^{-1/2}}{k\sqrt{2k}}$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ є збіжним.

Приклад 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k / k$ є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$ і

$\sum_{k=1}^{\infty} |(-1)^k / k| = \sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ – розбіжний ряд. Тому умови теореми Вейєрштрасса не є необхідними.

Приклад 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k}$ є поточково збіжним на проміжку $(1; +\infty)$ і для

інших $x \in \mathbb{R}$ він є розбіжним, бо $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$.

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k}$ є рівномірно збіжним на кожному проміжку

$[\alpha; +\infty)$, $\alpha > 1$, бо цей ряд є додатним і $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k} \leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\alpha \ln k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}$.

Приклад 8. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-x \ln k}$ не є рівномірно збіжним на проміжку $(1; +\infty)$.

Справді,

$$\sum_{k=n+1}^{2n} e^{-x_n \ln k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} e^{-x_n \ln 2n} = n \frac{1}{(2n)^{1+1/n}} \geq \frac{1}{4}, \quad x_n := 1 + 1/n.$$

Тому

$$(\exists \varepsilon = 1/4)(\forall n^*)(\forall n \geq n^*)(\exists x_n \in (1; +\infty)) : \left| \sum_{k=n+1}^{2n} e^{-x_n \ln k} \right| \geq \varepsilon,$$

і згідно з критерієм Коші на проміжку $(1; +\infty)$ ряд не збігається рівномірно.

Теорема 3 (Діріхле). Нехай для кожного $x \in E$ послідовність $(b_k(x))$ є монотонною і рівномірно збіжною на множині E до нуля, а послідовність частинних сум ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \tag{7}$$

є рівномірно обмеженою на E , тобто $(\exists c_1)(\forall x \in E) : \left| \sum_{k=1}^n a_k(x) \right| \leq c_1$. Тоді ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x) \tag{8}$$

є рівномірно збіжним на E .

Доведення. Використовуючи монотонність послідовності (b_k) і тотожність Абеля

$$\begin{aligned} & \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \\ &= \sum_{k=n+1}^{n+p-1} A_k(x) (b_k(x) - b_{k+1}(x)) + A_{n+p}(x) b_{n+p}(x) - A_n(x) b_{n+1}(x), \quad A_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k(x), \end{aligned}$$

для деякої сталої c_1 отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| &\leq c_1 \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| + c_1 (|b_{n+p}(x)| + |b_{n+1}(x)|) \\ &\leq 2c_1 (|b_{n+p}(x)| + |b_{n+1}(x)|). \end{aligned}$$

Тому на основі критерію Коші рівномірної збіжності ряду приходимо до твердження теореми. ►

Теорема 4 (Абеля). *Нехай для кожного $x \in E$ послідовність $(b_k(x))$ є монотонною і рівномірно обмеженою на множині E . Тоді якщо ряд (7) є рівномірно збіжним на E , то і ряд (8) є рівномірно збіжним на E .*

Доведення. Використовуючи монотонність послідовності (b_k) і тотожність Абеля для кожного $\varepsilon > 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} a_k(x) b_k(x) \right| &\leq \sum_{k=n+1}^{n+p-1} |A_k(x)| |b_k(x) - b_{k+1}(x)| + |A_{n+p}(x)| |b_{n+p}(x)| + |A_n(x)| |b_{n+1}(x)| \\ &< \varepsilon \left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1} |b_k(x) - b_{k+1}(x)| + |b_{n+p}(x)| + |b_{n+1}(x)| \right) \\ &< 2\varepsilon (|b_{n+p}(x)| + |b_{n+1}(x)|), \quad n \geq n^*(\varepsilon), \quad p \geq 2. \end{aligned}$$

Тому на основі критерію Коші рівномірної збіжності ряду приходимо до твердження теореми. ►

Приклад 9. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ є збіжним для всіх $x \in \mathbb{R}$. Справді, якщо $x = 2\pi t$, $t \in \mathbb{Z}$, то ряд є збіжним і його сума дорівнює нулеві. Якщо $x \in (0; 2\pi)$, то

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| &= \left| \sum_{k=1}^n \frac{2 \sin \frac{x}{2} \sin kx}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{\cos(k - \frac{1}{2})x - \cos(k + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \\ &= \left| \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| = \left| -\frac{1 - \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} + \frac{1 - \cos(n + \frac{1}{2})x}{2 \sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{2}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Звідси за теоремою Діріхле отримуємо, що цей ряд є збіжним на $(0; 2\pi)$ (а тому і на $(-\infty; +\infty)$) і є рівномірно збіжний на кожному замкненому проміжку $[a; b] \subset (0; 2\pi)$. Але

$$|S_{2n}(1/n) - S_n(1/n)| = \left| \frac{\sin(n+1)\frac{1}{n}}{n+1} + \dots + \frac{\sin 2n\frac{1}{n}}{2n} \right|$$

$$\geq \frac{\sin(1 + 1/n) + \dots + \sin 2}{2n} \geq \frac{n \sin 1}{2n} = \frac{\sin 1}{2} = \varepsilon.$$

Тому

$$\left(\exists \varepsilon = \frac{\sin 1}{2} \right) (\forall n) (\exists n = n') (\exists p = n') (\exists x = 1/n) : |S_{n+p}(x) - S_n(x)| \geq \varepsilon.$$

Отже, згідно з критерієм Коші розглядуваний ряд не збігається рівномірно на $(0; 2\pi)$.

3. Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів

Ми знаємо, що справедливими є наступні твердження.

1. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \overline{1; n}$, є диференційовними на $[a; b]$, то диференційовною на $[a; b]$ є їхня сума і

$$\left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^n f_k'(x). \quad (1)$$

2. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \overline{1; n}$, є інтегровними на $[a; b]$, то інтегровною на $[a; b]$ є їхня сума і

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx. \quad (2)$$

3. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \overline{1; n}$, є неперервними в точці x_0 , то неперервною в точці x_0 є також функція

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x). \quad (3)$$

Поняття суми ряду є узагальненням поняття суми скінченного числа доданків на випадок, коли множина доданків є нескінченною. Тому природним є питання про справедливість аналогів цих тверджень для рядів. Ми побачимо, що це і справді так, але будуть і деякі відмінності. Так би мовити кількісні зміни ведуть і до деяких змін якісних.

Теорема 1 (про неперервність суми функціонального ряду). Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними в точці $x_0 \in [a; b]$ і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (4)$$

є рівномірно збіжним на проміжку $[a; b]$, то сума цього ряду функція

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (5)$$

є неперервною в точці x_0 .

Доведення. Нехай $S_n(x)$ і $r_n(x)$ – відповідно n -а частинна сума і залишок ряду (4). За умовою ряд (4) рівномірно збіжний. Тому $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n)(\forall x \in [a; b]): |r_n(x)| < \varepsilon / 3$ і, зокрема, $|r_n(x_0)| < \varepsilon / 3$. Крім цього, $f(x) = S_n(x) + r_n(x)$. Тому

$$|f(x) - f(x_0)| \leq |S_n(x) - S_n(x_0)| + |r_n(x_0)| + |r_n(x)|.$$

Але S_n – це скінченна сума неперервних функцій. Отже, S_n – неперервна функція в точці x_0 і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a; b], |x - x_0| < \delta): |S_n(x) - S_n(x_0)| < \varepsilon / 3.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in [a; b], |x - x_0| < \delta): |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \blacktriangleright$$

Приклад 1. Функції $f_k(x) = \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ є неперервними, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}$ є збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$, але його сума функція $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x \neq 0, \end{cases}$ не є неперервною. Отже, вимога рівномірної збіжності ряду в теоремі 1 є істотною.

Разом з цим, вимога рівномірної збіжності не є необхідною для неперервності суми. Арчела знайшов критерій: для того щоб сума f збіжного на $[a; b]$ ряду (4), члени якого є неперервними функціями, була функцією неперервною на $[a; b]$, необхідно і достатньо, щоб ряд збігався квазірівномірно, тобто щоб для кожного $\varepsilon > 0$ і кожного $n' \in \mathbb{N}$ проміжок $[a; b]$ можна було

покрити скінченною кількістю проміжків $(a_i; b_i)$, $i \in \overline{1; k}$, так, щоб існували такі натуральні числа $n_i \geq n^*$, що

$$(\forall i \in \overline{1; k})(\forall x \in (a_i; b_i) \cap [a; b]): |S_{n_i}(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Теорема 2 (Діні). Нехай усі функції $f_k: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними і невід'ємними на проміжку $[a; b]$, ряд (4) є збіжним на проміжку $[a; b]$ і його сума f є функцією неперервною на $[a; b]$. Тоді ряд (4) збігається на $[a; b]$ рівномірно.

Доведення. Функція $r_n(x) = f(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$ є неперервною, $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0$ для кожного $x \in [a; b]$, послідовність $(r_n(x))$ є незростаючою і $r_n(x) \geq 0$. Тому для доведення теореми достатньо показати, що $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in [a; b]): r_n(x) < \varepsilon$. Припустимо протилежне. Тоді $(\exists \varepsilon > 0)(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x_n \in [a; b]): r_n(x_n) \geq \varepsilon$. За теоремою Больцано-Вейерштрасса існує така підпослідовність (x_{n_m}) послідовності (x_n) , що $\lim_{m \rightarrow \infty} x_{n_m} = x^* \in [a; b]$. Тоді $\lim_{m \rightarrow \infty} r_s(x_{k_m}) = r_s(x^*)$. З іншого боку, $r_s(x_{k_m}) \geq r_{k_m}(x_{k_m}) \geq \varepsilon$, якщо $k_m \geq s$. Тому $r_s(x^*) = \lim_{m \rightarrow \infty} r_s(x_{k_m}) \geq \varepsilon$ для кожного $s \in \mathbb{N}$. Але $\lim_{s \rightarrow \infty} r_s(x^*) = 0$. Суперечність. ►

Теорема 3 (про граничний перехід під знаком ряду). Якщо $f_k: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, – деякі функції, $x_0 \in [a; b]$, існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k$ і ряд (4) є рівномірно збіжним на проміжку $[a; b]$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$$

і останній ряд є збіжним.

Доведення. Оскільки ряд є рівномірно збіжним на $[a; b]$, то згідно з критерієм Коші

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall p > 0)(\forall x \in [a; b]): \left| \sum_{k=n}^{n+p} f_k(x) \right| < \varepsilon.$$

Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall p > 0) : \left| \sum_{k=n}^{n+p} a_k \right| < \varepsilon$$

і

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall p > 0)(\forall x \in [a; b]) : \left| \sum_{k=n}^{n+p} \tilde{f}_k(x) \right| < \varepsilon,$$

де

$$\tilde{f}_k(x) = \begin{cases} f_k(x), & x \neq x_0, \\ a_k, & x = x_0. \end{cases}$$

Функції \tilde{f}_k є неперервними в точці x_0 , $\lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x)$ і згідно з критерієм

Коші ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

є рівномірно збіжним на $[a; b]$. Тому його сума є функцією неперервною в точці x_0 . Отже,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{f}_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} \tilde{f}_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x). \blacktriangleright$$

Приклад 2. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

$$\text{Тому } \lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}.$$

Теорема 4 (про почленне інтегрування функціонального ряду). Якщо всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a; b]$ і ряд (4) є рівномірно збіжним на $[a; b]$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

Доведення. За попередньою теоремою функція

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

є неперервною на $[a; b]$. Тому

$$I := \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx$$

існує. Нехай $r_n(x)$ – залишок ряду (4). Тоді

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x) + r_n(x).$$

Отже,

$$\begin{aligned} \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx &= \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n f_k(x) \right) dx + \int_a^b r_n(x) dx \\ &= \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx + \int_a^b r_n(x) dx, \end{aligned}$$

звідки

$$I - \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b r_n(x) dx.$$

Ряд (4) є рівномірно збіжним. Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall x \in [a; b]) : |r_n(x)| < \varepsilon.$$

Внаслідок цього,

$$\left| \int_a^b r_n(x) dx \right| \leq \int_a^b |r_n(x)| dx < \varepsilon(b-a), \quad n \geq n^*.$$

Отже,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*)(\forall x \in [a; b]) : \left| I - \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx \right| < \varepsilon(b-a),$$

і ми приходимо до потрібного висновку. ►

Приклад 3. Ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x \left(k^2 e^{-k^2 x^2} - (k-1)^2 e^{-(k-1)^2 x^2} \right)$$

є збіжним на проміжку $[0;1]$, $S_n(x) = xn^2 e^{-n^2 x^2}$, $f(x) = 0$ і $\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = 0$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 x \left(k^2 e^{-k^2 x^2} - (k-1)^2 e^{-(k-1)^2 x^2} \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(-e^{-k^2} + e^{-(k-1)^2} \right) = \frac{1}{2} \neq \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx. \end{aligned}$$

Тому умова рівномірної збіжності ряду є істотною в теоремі 4.

Приклад 4. Ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{kx}{1+k^2 x^2} - \frac{(k-1)x}{1+(k-1)^2 x^2} \right)$$

є поточково збіжним на проміжку $[0;1]$, але не є рівномірно збіжним. Разом з цим, $S_n(x) = \frac{nx}{1+n^2 x^2} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, $f(x) = 0$ і $\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = 0$. З іншого боку,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x) dx &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \left(\frac{kx}{1+k^2 x^2} - \frac{(k-1)x}{1+(k-1)^2 x^2} \right) dx \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{\ln(1+k^2)}{2k} - \frac{\ln(1+(k-1)^2)}{2(k-1)} \right) = 0 = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx. \end{aligned}$$

Тому умова рівномірної збіжності ряду не є необхідною в теоремі 4 (необхідні і достатні умови знайшов Арчела, але на них зупинятися не будемо).

Приклад 5. Функції

$$u_k(x) = \begin{cases} 1/k, & x \in [0; k], \\ k^2 - kx + 1/k^3, & x \in (k; k+1/k^4], \\ 0, & (k+1/k^4; +\infty) \end{cases}$$

є неперервними на проміжку $[0; +\infty)$, ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) = u_k(x) - u_{k-1}(x), \quad u_0(x) := 0$$

є рівномірно збіжним на проміжку $[0; +\infty)$ до функції $f(x) = 0$, але

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 f_k(x) dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx.$$

Тому вимога скінченності проміжку в теоремі 4 є істотною.

Приклад 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Тому

$$\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{1}{k^2 + x^2} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{k}.$$

Теорема 5 (про почленне диференціювання функціонального ряду).

Нехай функції f_k , $k \in \mathbb{N}$, є неперервно диференційовними на проміжку $[a; b]$, ряд (4) є збіжним на $[a; b]$ і на цьому ж проміжку рівномірно збіжним є також ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x). \quad (6)$$

Тоді для всіх $x \in [a; b]$ сума ряду (4) має похідну і

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x). \quad (7)$$

Доведення. Нехай $f(x)$ і $\mathcal{f}(x)$ суми рядів (4) і (6) відповідно. Потрібно показати, що $f'(x) = \mathcal{f}(x)$. За теоремою 1 функція \mathcal{f} неперервна на $[a; b]$. За теоремою 4 для всіх $x \in [a; b]$ маємо

$$\int_a^x \mathcal{f}(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x \mathcal{f}_k(t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} (f_k(x) - f_k(a)) = f(x) - f(a),$$

тобто

$$f(x) = f(a) + \int_a^x \mathcal{f}(t) dt.$$

Отже, $f'(x) = \mathcal{f}(x)$, $x \in [a; b]$ і теорема 5 доведена. ►

Приклад 7. Ряд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(e^{-(k-1)^2 x^2} - e^{-k^2 x^2} \right)$$

є збіжним на проміжку $[0;1]$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0;1), \\ 0, & x = 1, \end{cases}$ і

$\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(x) dx = 2 \sum_{k=1}^{\infty} x \left(k^2 e^{-k^2 x^2} - (k-1)^2 e^{-(k-1)^2 x^2} \right) = 0$, якщо $x \in [0;1]$. Тому умова рівномірної збіжності ряду (6) є істотною в теоремі 5.

Приклад 8. Ряд

$$f(x) = \ln(1+x^2) + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \ln(1+k^2 x^2) - \frac{1}{k-1} \ln(1+(k-1)^2 x^2) \right)$$

є поточково збіжним на проміжку $[0;1]$, $f(x) = 0$ і

$$\begin{aligned} & \left(\ln(1+x^2) \right)' + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \ln(1+k^2 x^2) - \frac{1}{k-1} \ln(1+(k-1)^2 x^2) \right)' \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 2 \left(\frac{kx}{1+k^2 x^2} - \frac{(k-1)x}{1+(k-1)^2 x^2} \right) = 0 = f(x), \quad x \in [0;1]. \end{aligned}$$

Останній ряд не є рівномірно збіжним. Тому умова рівномірної збіжності ряду (6) не є необхідною в теоремі 5.

Приклад 9. Ряд $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ є рівномірно збіжним на проміжку

$(-\infty; +\infty)$, але ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sin kx}{k^2} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}$ є розбіжним в точках $x = 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тому рівномірно збіжний ряд диференційовних функцій не можна, взагалі кажучи, почленно диференціювати.

Приклад 10. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-kx}$ є збіжним на проміжку $(0; +\infty)$, а ряд

$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)k^4 e^{-kx}$ є рівномірно збіжним на кожному проміжку $[a; b] \subset (0; +\infty)$. Тому

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-kx} \right)' = - \sum_{k=1}^{\infty} k^4 e^{-kx}, \quad x \in (0; +\infty).$$

Попередні теореми можна сформулювати і для функціональних послідовностей.

Теорема 6. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a; b]$ і послідовність (f_k) є рівномірно збіжною на $[a; b]$ до функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, то функція f є неперервною на $[a; b]$.

Теорема 7. Якщо $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, – деякі функції, $x_0 \in [a; b]$, існують скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f_k(x) = a_k$ і послідовність (f_k) є рівномірно збіжною на $[a; b]$, то

$$\lim_{[a; b] \ni x \rightarrow x_0} \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \lim_{[a; b] \ni x \rightarrow x_0} f_k(x).$$

Теорема 8. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a; b]$ і послідовність (f_k) є рівномірно збіжною на $[a; b]$, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) dx.$$

Теорема 9. Нехай всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними і монотонними на проміжку $[a; b]$, послідовність (f_k) є поточково збіжною на $[a; b]$ до неперервної на $[a; b]$ функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$. Тоді послідовність (f_k) збігається на $[a; b]$ рівномірно.

Теорема 10. Якщо функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервно диференційовними на проміжку $[a; b]$, послідовність (f_k) є збіжною на $[a; b]$, а послідовність (f'_k) є рівномірно збіжною на $[a; b]$, то

$$\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) \right)' = \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(x).$$

4. Степеневі ряди. Радіус і проміжок збіжності степеневого ряду. Степеневим рядом називається функціональний ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_k(x-a)^k + \dots \quad (1)$$

Якщо $a = 0$, то степеневий ряд має вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + \dots + c_k x^k + \dots \quad (2)$$

Останній ряд є завжди збіжним при $x = 0$.

Теорема 1 (Абеля). Якщо степеневий ряд (2) збігається в точці $x_0 \neq 0$, то він абсолютно збігається в кожній точці x , для якої $|x| < |x_0|$.

Доведення. Оскільки для $x = x_0$ ряд (2) є збіжним, то $c_k x_0^k \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$. Збіжна послідовність є обмеженою. Отже, $(\exists M > 0)(\forall k \in \mathbb{N}) : |c_k x_0^k| \leq M$. Тому

$$|c_k x^k| = |c_k x_0^k| |x / x_0|^k \leq M q^k$$

і $q = |x / x_0| < 1$, якщо $|x| < |x_0|$. Звідси і з ознаки порівняння випливає абсолютна збіжність ряду (2). ►

Наслідок 1. Якщо ряд (2) є розбіжним в точці $x_0 \neq 0$, то він є розбіжним для всіх x , для яких $|x| > |x_0|$.

Число R таке, що ряд (2) є збіжним, якщо $|x| < R$, і є розбіжним, якщо $|x| > R$, називається радіусом збіжності степеневого ряду (2), а проміжок $(-R; R)$ – проміжком збіжності. Якщо $R = 0$, то ряд (2) є збіжним тільки для $x = 0$. Якщо $R = +\infty$, то ряд (2) є збіжним для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Якщо $0 < R < +\infty$, то ряд (2) є збіжним абсолютно для $x \in (-R; R)$ і є розбіжним для $x \in (-\infty; -R) \cup (R; +\infty)$. В точках $x = -R$ і $x = R$ ряд може бути збіжним, а може бути і розбіжним. Для з'ясування цього потрібно провести додаткові дослідження. Можна також сказати, що радіус збіжності степеневого ряду (2) – це точна верхня межа тих r , для яких ряд (2) є збіжним абсолютно, якщо $|x| \leq r$.

Теорема 2 (Коші-Адамара). Радіус збіжності степеневого ряду знаходиться за формулою

$$R = 1 / \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}. \quad (3)$$

Доведення. Позначимо праву частину рівності (3) через R_1 . Нехай спочатку $R_1 = 0$. Тоді $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = +\infty$. Отже, для кожного $x \neq 0$ знайдеться така послідовність (n_k) , $n_k \rightarrow +\infty$, що $|c_{n_k}| \geq (1/|x|)^{n_k}$. Тому $|c_{n_k} x^{n_k}| \geq 1$. Звідси

впливає, що ряд (2) збігається тільки для $x=0$. Нехай тепер $R_1 = +\infty$. Тоді $\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 0$. Тоді для кожного $x \neq 0$ існує таке k^* , що $|c_k| \leq (1/(2|x|))^k$ для всіх $k \geq k^*$. Тому $|c_k x^k| \leq (1/2)^k$. Таким чином, ряд (2) є збіжним для всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже, $R = +\infty$. Нарешті, нехай $0 < R_1 < +\infty$. Тоді для кожного x , $|x| < R_1$, знайдуться x_1 , $|x| < |x_1| < R_1$ і k^* такі, що $|c_k| \leq (1/|x_1|)^k$ для всіх $k \geq k^*$. Тому $|c_k x^k| \leq (|x/x_1|)^k$ і ми приходимо до висновку, що ряд (2) є збіжним, якщо $|x| < R_1$. Крім цього, за означенням верхньої границі, для кожного x , $|x| > R_1$, знайдуться x_1 , $R_1 < |x_1| < |x|$, і послідовність (n_k) , $n_k \rightarrow +\infty$, такі, що $|c_{n_k}| \geq (1/|x_1|)^{n_k}$ і тому $|c_{n_k} x^{n_k}| \geq |x/x_1|^{n_k} \geq 1$. Отже, для кожного x , $|x| > R_1$, ряд (2) є розбіжним. Тому і справді радіус збіжності степеневого ряду знаходиться за формулою (3). ►

Наслідок 2. Радіус збіжності степеневого ряду (2) можна знайти за формулою

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|},$$

якщо остання границя існує.

Наслідок 3. Радіус збіжності степеневого ряду (2) можна знайти за формулою

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1}/c_k|,$$

якщо остання границя існує.

Приклад 1. Для ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} x^k$ маємо $c_k = \frac{1}{k!}$, $c_{k+1} = \frac{1}{(k+1)!}$ і

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1}/c_k| = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |k!/(k+1)!| = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |1/k+1| = +\infty.$$

Тому $R = +\infty$ і $(-\infty; +\infty)$ – проміжок збіжності.

Приклад 2. Для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{k} x^k$ маємо $c_k = \arcsin \frac{1}{k}$, $c_{k+1} = \arcsin \frac{1}{k+1}$ і

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1} / c_k| = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \arcsin \frac{1}{k+1} / \arcsin \frac{1}{k} \right| = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |k / (k+1)| = 1.$$

Тому $R = 1$ і $(-1; 1)$ – проміжок збіжності.

Приклад 3. Для ряду $\sum_{k=0}^{\infty} (1 - 1/k)^{k^2} x^k$ маємо $c_k = (1 - 1/k)^{k^2}$ і

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|} = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 1/k)^k = e.$$

Тому $R = e$ і $(-e; e)$ – проміжок збіжності.

Приклад 4. Для ряду $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^k$ маємо $c_k = \frac{1}{k+1}$, $c_{k+1} = \frac{1}{k+2}$,

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1} / c_k| = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |(k+1) / (k+2)| = 1. \text{ Тому } R = 1 \text{ і } (-1; 1) \text{ – проміжок}$$

збіжності. Якщо $x = 1$, то ряд є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$. Якщо

$x = -1$, то ряд є збіжним умовно, бо умовно збіжним є ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k+1}$.

Отже, $R = 1$ – радіус збіжності розглядуваного ряду, $(-1; 1)$ – його проміжок збіжності, на проміжку $[-1; 1)$ ряд є збіжним, для $x \notin [-1; 1)$ він є розбіжним.

Приклад 5. Для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \arctg \frac{1}{k^2} x^k$ маємо $c_k = 2^k \arctg \frac{1}{k^2}$,

$$c_{k+1} = 2^{k+1} \arctg \frac{1}{(k+1)^2}, \quad R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \left| 2^{k+1} \arctg \frac{1}{(k+1)^2} / 2^k \arctg \frac{1}{k^2} \right| = 1/2. \quad \text{Тому}$$

$R = 1/2$ і $(-1/2; 1/2)$ – проміжок збіжності. Якщо $x = 1/2$, то ряд є збіжним абсолютно, бо збіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \arctg \frac{1}{k^2}$. Якщо $x = -1/2$, то ряд є збіжним

абсолютно, бо збіжним абсолютно є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \arctg \frac{1}{k^2}$. Отже, $R = 1/2$ – радіус збіжності розглядуваного ряду, $(-1/2; 1/2)$ – його проміжок збіжності, на проміжку $[-1/2; 1/2]$ ряд є збіжним абсолютно, для $x \notin [-1/2; 1/2]$ ряд є розбіжним.

Теорема 3 (Абеля). Якщо степеневий ряд (1) збігається в точні $x_0 \neq a$, то він абсолютно збігається для всіх таких x , для яких $|x - a| < |x_0 - a|$.

Доведення цієї теореми аналогічне до доведення теореми 1. ►

Число R таке, що ряд (1) є збіжним, якщо $|x - a| < R$, і є розбіжним, якщо $|x - a| > R$, називається радіусом збіжності степеневого ряду (1), а проміжок $(a - R; a + R)$ – проміжком збіжності. Якщо $R = 0$, то ряд (1) є збіжним тільки для $x = a$. Якщо $R = +\infty$, то ряд (1) є збіжним для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$. Якщо $0 < R < +\infty$, то ряд (1) є збіжним абсолютно для $x \in (a - R; a + R)$ і є розбіжним для $x \in (-\infty; a - R) \cup (a + R; +\infty)$. В точках $x = a - R$ і $x = a + R$ ряд (1) може бути збіжним, а може бути і розбіжним. Для з'ясування цього, потрібно провести додаткові дослідження. Можна також сказати, що радіус збіжності степеневого ряду (1) – це точна верхня межа тих r , для яких ряд (1) є збіжним абсолютно, якщо $|x - a| \leq r$. Теорема 2 і наслідок 1 з неї (з тими ж формулюваннями) є справедливими і для ряду (1).

Приклад 6. Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n (x - 1)^{2n}$ маємо

$$c_k = \begin{cases} 2^{k/2}, & \text{якщо } k = 2m, \\ 0, & \text{якщо } k = 2m + 1. \end{cases}$$

Тому

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[2m]{|c_{2m}|}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[2m]{2^m}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отже, $R = 1/\sqrt{2}$ і $(1 - 1/\sqrt{2}; 1 + 1/\sqrt{2})$ – проміжок збіжності. Для $x \notin (1 - 1/\sqrt{2}; 1 + 1/\sqrt{2})$ розглядуваний ряд є розбіжним. Радіус збіжності можна знайти і так. Нехай $a_k = 2^k (x - 1)^{2k}$. Тоді $a_{k+1} = 2^{k+1} (x - 1)^{2(k+1)}$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2^{k+1} |x - 1|^{2(k+1)}}{2^k |x - 1|^{2k}} = 2|x - 1|^2.$$

Бачимо, що ряд є збіжним абсолютно, якщо $|x - 1| < 1/\sqrt{2}$, і є розбіжним, якщо $|x - 1| > 1/\sqrt{2}$. Отже, радіус збіжності ряду дорівнює $1/\sqrt{2}$. Якщо $x = 1 + 1/\sqrt{2}$, то ряд є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1^{2n}$. Якщо

$x = 1 - 1/\sqrt{2}$, то ряд є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{n=0}^{\infty} 1$. Отже, $R = 1/\sqrt{2}$ – радіус збіжності розглядуваного ряду, $(1 - 1/\sqrt{2}; 1 + 1/\sqrt{2})$ – його проміжок збіжності, для $x \notin (1 - 1/\sqrt{2}; 1 + 1/\sqrt{2})$ ряд є розбіжним.

Приклад 7. Для ряду $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \left(\frac{x+1}{2}\right)^k$ маємо

$$c_k = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!! 2^k}, \quad c_{k+1} = \frac{(2k+1)!!}{(2k+2)!! 2^{k+1}}$$

i

$$R = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} |c_{k+1} / c_k| = 1 / \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+1}{2(2k+2)} = 2.$$

Отже, $R = 2$ і $(-3; 1)$ – проміжок збіжності. Якщо $x = 1$, то отримуємо ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \quad \text{де } a_k := \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}. \quad \text{При цьому } \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(2k+2)!!(2k-1)!!}{(2k)!!(2k+1)!!} = \frac{2k+2}{2k+1} \geq 1 \quad i,$$

отже, загальний член ряду $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ не прямує до нуля. Тому цей ряд є розбіжний.

Якщо $x = -3$, то отримуємо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$, який також є розбіжним, бо його загальний член не прямує до нуля. Отже, $R = 2$ – радіус збіжності розглядуваного ряду, $(-3; 1)$ – його проміжок збіжності, для $x \notin (-3; 1)$ ряд є розбіжним.

5. Властивості степеневих рядів.

Теорема 1. Якщо степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_k(x-a)^k + \dots, \quad (1)$$

має радіус збіжності $R > 0$, то він є рівномірно збіжним на кожному замкненому проміжку $[\alpha; \beta]$, який належить проміжку $(a-R; a+R)$ збіжності степеневого ряду.

Доведення. Виберемо число r , $0 < r < R$ так, щоб $a-R < a-r < -\alpha < -\beta < a+r < a+R$. За теоремою Абеля ряд (1) є збіжним

абсолютно, якщо $x = a + r$. Але $(\forall x \in [\alpha; \beta])(\forall k): |c_k(x-a)^k| \leq |c_k|r^k$. Звідси і з ознаки Вейерштрасса отримуємо потрібний висновок. ►

Приклад 1. Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

має радіус збіжності $R=1$, $(-1;1)$ – його проміжок збіжності і функція

$f(x) = \frac{1}{1-x}$ є його сумою. При цьому,

$$S_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \frac{1-x^n}{1-x}$$

і

$$\sup_{x \in (-1;1)} \left| \frac{1}{1-x} - \frac{1-x^n}{1-x} \right| = \sup_{x \in (-1;1)} \frac{x^n}{1-x} \geq \frac{(1-\frac{1}{n})^n}{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{2e}, \quad n \geq n^*.$$

Тому наш ряд на $(-1;1)$ не збігається рівномірно. Таким чином, степеневий ряд на проміжку збіжності не обов'язково збігається рівномірно.

Наслідок 1. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то його сума є функцією неперервною на проміжку збіжності.

Доведення. Справді, функції $f_k(x) = c_k(x-a)^k$ є неперервними. Тому потрібний висновок отримуємо із теореми 1 і теореми про неперервність суми степеневих рядів. ►

Наслідок 2. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то його можна почленно інтегрувати по будь-якому проміжку $[\alpha; \beta]$, який належить проміжку збіжності:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x-a)^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \int_{\alpha}^{\beta} (x-a)^k dx, \quad [\alpha; \beta] \subset (a-R; a+R).$$

Доведення. Це твердження випливає із теореми 1 і теореми про почленне інтегрування функціонального ряду. ►

Наслідок 3. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то його сума функція f має похідну в кожній точці проміжку збіжності, ряд (1) можна почленно диференціювати на проміжку збіжності, тобто

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x-a)^{k-1},$$

і продиференційований степеневий ряд має такий же радіус збіжності, що і ряд (1).

Доведення. Цей наслідок випливає з теореми 1 і теореми про почленне диференціювання функціонального ряду. Потрібно тільки показати, що степеневий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k k (x-a)^{k-1} = c_1 + c_2 2(x-a) + \dots + c_{k+1} (k+1)(x-a)^k + \dots \quad (2)$$

має такий же радіус збіжності, що і ряд (1), а це так, бо

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_{k+1} (k+1)|} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k+1} \cdot \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \left(\sqrt[k+1]{|c_{k+1}|} \right)^{\frac{k+1}{k}} = \frac{1}{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Оскільки проміжок $(-1;1)$ є проміжком збіжності ряду

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{і} \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}, \quad \text{якщо } x \in (-1;1), \quad \text{то} \quad \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = 1/(1-x)^2, \quad \text{якщо } x \in (-1;1).$$

Наслідок 4. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$, то його сума має на проміжку збіжності похідні всіх порядків і ці похідні можна знайти почленным диференціюванням ряду і продиференційовані ряди мають радіус збіжності R .

Доведення. Цей наслідок безпосередньо випливає із наслідку 3, бо ряд (2) також є степеневим рядом. \blacktriangleright

Приклад 3. Оскільки проміжок $(-1;1)$ є проміжком збіжності ряду

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \text{і} \quad \left(\frac{1}{1-x} \right)'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}, \quad \text{якщо } x \in (-1;1), \quad \text{то}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)x^{k-2} = 2/(1-x)^3, \quad \text{якщо } x \in (-1;1).$$

Приклад 4. Оскільки проміжок $(-1;1)$ є проміжком збіжності ряду

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad \text{і} \quad f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2}, \quad \text{якщо } x \in (-1;1), \text{ то}$$

$$\int_0^x f'(x) dx = \operatorname{arctg} x \quad \text{і} \quad f(x) - f(0) = \operatorname{arctg} x, \quad \text{якщо } x \in (-1;1). \quad \text{Але } f(0) = 0. \quad \text{Тому}$$

$$f(x) = \operatorname{arctg} x \quad \text{і} \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = \operatorname{arctg} x, \quad \text{якщо } x \in (-1;1).$$

Приклад 5. Оскільки проміжок $(-1;1)$ є проміжком збіжності ряду

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \text{то}$$

$$\ln(1-x) = -\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^n dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^n dt = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad x \in (-1;1).$$

Теорема 2. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ і $f(x)$ – його сума, то для кожного $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + O(x-a)^{n+1}, \quad x \rightarrow a. \quad (3)$$

Доведення. Справді, нехай $0 < r < R$. За теоремою Абеля ряд (1) є збіжним абсолютно, якщо $x = a+r$. Але $(\forall x \in [a-r; a+r])(\forall k \in \mathbb{N}_0)$: $|c_k (x-a)^k| \leq |c_k| r^k$. Тому

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (x-a)^{k-n-1} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^{k-n-1} = r^{-n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} |c_k| r^k = O(1)$$

і

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (x-a)^k = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + (x-a)^{n+1} \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k (x-a)^{k-n-1} \\ &= \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + (x-a)^{n+1} O(1), \quad x \rightarrow a. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Наслідок 5. Якщо степеневий ряд (1) має радіус збіжності $R > 0$ і $f(x)$ – його сума, то для кожного $n \in \mathbb{N}_0$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + o(x-a)^n, \quad x \rightarrow a.$$

Приклад 6. Оскільки ряд $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{(k+1)^k}$ має радіус збіжності $R = +\infty$,

то

$$f(x) = 1 + O(x+1), \quad x \rightarrow -1,$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + O(x+1)^2, \quad x \rightarrow -1,$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{9}(x+1)^2 + O(x+1)^3, \quad x \rightarrow -1,$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+1) + \frac{1}{9}(x+1)^2 + o(x+1)^2, \quad x \rightarrow -1.$$

6. Ряд Тейлора. Рядом Тейлора функції f в околі точки a називається степеневий ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \dots \quad (1)$$

Теорема 1. Кожний степеневий ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k, \quad (2)$$

який має радіус збіжності $R > 0$ є рядом Тейлора своєї суми, тобто його коефіцієнти c_k знаходяться за формулами

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}. \quad (3)$$

Доведення. Справді, за властивостями степеневих рядів на проміжку збіжності справедливі рівності

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots,$$

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + \dots,$$

$$f''(x) = 2c_2 + 3 \cdot 2c_3(x-a) + \dots,$$

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2c_n + (n+1) \cdot n \cdot \dots \cdot 2c_{n+1}(x-a) + \dots,$$

...

Звідси послідовно отримуємо $f(a) = c_0$, $f'(a) = c_1$, $f''(a) = 2c_2$, ..., $f^{(n)}(a) = n!c_n, \dots$ ►

Якщо $a = 0$, то ряд Тейлора має вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \dots$$

Останній ряд часто називають рядом Маклорена.

Якщо на деякому проміжку $(\alpha; \beta)$ сума ряду (1) дорівнює $f(x)$, то кажуть, що на цьому проміжку функція f розвивається в ряд Тейлора. Можна переконатись, розглянувши, наприклад, функцію

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \end{cases}$$

і взявши $a = 0$, що сума ряду (1) може не дорівнювати $f(x)$ на жодному проміжку (ця функція f має похідні всіх порядків в кожній точці $x \in \mathbb{R}$).

Теорема 2. Функція $f(x) = e^x$ розвивається в ряд Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Доведення. Запишемо формулу Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x) \quad (4)$$

функції f в околі точки $a = 0$ з додатковим членом у формі Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (5)$$

Оскільки $f^{(k)}(x) = e^x$ і $f^{(k)}(0) = 1$, то

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_n(x), \quad R_n(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1}. \quad (6)$$

Але ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_n(x)$$

є збіжним для кожного $x \in \mathbb{R}$. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$ і з (6) випливає твердження теореми. ►

Теорема 3. Функція $f(x) = \sin x$ розвивається в ряд Тейлора

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Доведення. Запишемо формулу Тейлора (4) з додатковим членом у формі Лагранжа (5). Оскільки $f^{(n)}(x) = \sin(x + n\pi / 2)$, то

$$|R_n(x)| = \frac{|\sin(\theta x + (n+1)\pi / 2)|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \quad (7)$$

є збіжним для всіх $x \in (-\infty; +\infty)$ і тому його загальний член прямує до нуля. Тому $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$. Таким чином,

$$\sin x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Але

$$f^{(m)}(0) = \sin\left(m \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 2k, \\ (-1)^k, & \text{якщо } m = 2k + 1. \end{cases}$$

Тому із попередньої рівності випливає твердження теореми. ►

Теорема 4. Функція $f(x) = \cos x$ розвивається в ряд Тейлора

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Доведення. Запишемо формулу Тейлора (4) з додатковим членом у формулі Лагранжа (5). Оскільки $f^{(n)}(x) = \cos(x + n\pi / 2)$, то

$$|R_n(x)| = \frac{|\cos(\theta x + (n+1)\pi / 2)|}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Оскільки ряд (7) є збіжним для всіх $x \in \mathbb{R}$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ для кожного $x \in \mathbb{R}$.

Отже,

$$\cos x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{f^{(m)}(0)}{m!} x^m, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

Але

$$f^{(m)}(0) = \cos\left(m \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } m = 2k + 1, \\ (-1)^k, & \text{якщо } m = 2k. \end{cases}$$

Тому із попередньої рівності випливає твердження теореми. ►

Теорема 5. Функція $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, розвивається в ряд Тейлора

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^k (\alpha - j + 1)}{k!} x^k$$

на проміжку $(-1; 1)$. Тут $\prod_{j=1}^0 (\alpha - j + 1) := 1$. ►

Доведення. Запишемо формулу Тейлора (4) з додатковим членом у формі Коші

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^n f^{(n+1)}(\theta x)}{n!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1. \quad (8)$$

Оскільки $f^{(n)}(x) = (1+x)^{\alpha-n} \prod_{j=1}^n (\alpha-j+1)$, то

$$R_n(x) = \frac{(1-\theta)^n (1+\theta x)^{\alpha-n-1} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha-j+1)}{n!} x^{n+1}$$

$$= c_1 \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \frac{\prod_{j=1}^{n+1} (\alpha-j+1)}{n!} x^{n+1}, \quad c_1 = (1+\theta x)^{\alpha-1}$$

і

$$|R_n(x)| \leq c_1 u_n, \quad u_n = \frac{|x|^{n+1}}{n!} \prod_{j=1}^{n+1} (\alpha-j+1),$$

бо $\left| \frac{1-\theta}{1+\theta x} \right| \leq \frac{1-\theta}{1-\theta} = 1$. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ є збіжним, якщо $|x| < 1$. Отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$, якщо $|x| < 1$, і

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k, \quad |x| < 1.$$

Крім цього, $f^{(k)}(0) = \prod_{j=1}^k (\alpha-j+1)$ і тому теорема 5 доведена. ►

Наслідок 1. Функція $f(x) = \frac{1}{1-x}$ розвивається в ряд Тейлора

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

на проміжку $(-1; 1)$.

Наслідок 2. Якщо $\alpha = n \in \mathbb{N}$, то

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k, \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Наслідок 3.

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Теорема 6. Функція $f(x) = \ln(1+x)$ розвивається в ряд Тейлора

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}$$

на проміжку $(-1;1]$.

Доведемо тільки, що розвинення справедливе на проміжку $(-1;1)$. З наслідку 1 маємо

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n, \quad |t| < 1.$$

Тому

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^x t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

звідки випливає потрібне. ►

Приклад 1. $\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{(-x)^k}{k} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}, \quad x \in [-1;1).$

Приклад 2. $\ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k-1}, \quad x \in [-1;1).$

Приклад 3. Розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функцію $f(x) = \frac{1}{1+2x^2}$. Маємо

$$\frac{1}{1+2x^2} = \frac{1}{1 - (-\sqrt{2}x)^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-(\sqrt{2}x)^2 \right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 2^k x^{2k}, \quad |x| < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Приклад 4. Розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $a=1$ функцію $f(x) = \frac{1}{3+x}$. Маємо

$$f(x) = \frac{1}{4 - (-(x-1))} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-1}{4}\right)} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x-1}{4} \right)^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{4^{k+1}} (x-1)^k, \quad |x-1| < 4.$$

Приклад 5. Розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функцію

$$f(x) = \frac{1}{(x+2)(x+1)}. \text{ Маємо}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{(x+2)(x+1)} &= \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{1}{1-(-x)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-(-\frac{x}{2})} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-x)^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{x}{2}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) x^k, \quad |x| < 1. \end{aligned}$$

Приклад 6. Розвинемо в ряд Тейлора в околі точки $a=0$ функцію

$$f(x) = \arcsin x. \text{ Маємо}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\prod_{j=1}^k (-j+1/2)}{k!} x^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! x^{2k}}{k! 2^k}.$$

Тому

$$\begin{aligned} \arcsin x &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = x + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(2k-1)!! t^{2k}}{k! 2^k} dt = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! x^{2k+1}}{(2k+1)k! 2^k} \\ &= x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)!! x^{2k+1}}{(2k+1)(2k)!!}, \quad x \in (-1; 1). \end{aligned}$$

Приклад 7. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1/2}}{k!}$ є рівномірно збіжним на проміжку $[0; 1]$. Тому

$$\int_0^1 \frac{e^t - 1}{\sqrt{t}} dt = \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k! \sqrt{t}} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{t^{k-1/2}}{k!} dt = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k!(2k+1)}.$$

Приклад 8. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1/2}}{k!}$ є рівномірно збіжним на кожному проміжку

$$[a; b] \subset (-\infty; +\infty) \text{ і}$$

$$\int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)! \sqrt{t}} dt = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_0^x \frac{t^{2k+1/2}}{(2k+1)!} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+3/2}}{(2k+1)!(4k+3)}.$$

Тому функція

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2x^{2k+3/2}}{(2k+1)!(4k+3)}$$

є первісною функції $f(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{t}}$ на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

Приклад 9. $x - \frac{x^3}{3!} < \sin x < x$, $x \in (0; +\infty)$.

Приклад 10. $x < \sin x < x - \frac{x^3}{3!}$, $x \in (-\infty; 0)$.

Приклад 11. $\left| \sin x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+3}}{(2n+3)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 12. $1 - \frac{x^2}{2!} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 13. $\left| \cos x - \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right| \leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$, $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 14. $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$, $x \in (0; 1)$.

Приклад 15. $\left| \ln(1+x) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k} \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$, $x \in (-1; 1)$.

Приклад 16. Абсолютна похибка наближеної формули

$$\sin \frac{\pi}{10} \approx \frac{\pi}{10} - \frac{1}{3!} \left(\frac{\pi}{10} \right)^3$$

не перевищує 10^{-3} . Справді,

$$\sin \frac{\pi}{10} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{\pi}{10}\right)^{2k+1}.$$

Останній ряд є знакопозитивним. Тому розглядувана похибка Δ не перевищує

$$\frac{1}{5!} \cdot \left(\frac{\pi}{10}\right)^5 \leq \frac{1}{5!} \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{120} \cdot \frac{1}{32} \leq \frac{1}{3840} \leq \frac{1}{10^3}.$$

Приклад 17. Нехай $a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+1/2}}$. Тоді $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1/2}$. Але

$$\ln \frac{1+n}{n} = \ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \ln \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right) - \ln \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)(2n+1)^{2k-1}},$$

$$(n+1/2) \ln(1+1/n) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)(2n+1)^{2k-2}} < 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{3(2n+1)^{2m}},$$

$$1 < (n+1/2) \ln(1+1/n) < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}, \quad e < (1+1/n)^{n+1/2} < e^{1+1/12n(n+1)}.$$

Тому

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{1/12n(n+1)}, \quad a_n e^{-1/12n} < a_{n+1} e^{-1/12(n+1)}.$$

Отже, послідовність $(a_n e^{-1/12n})$ є незростаючою і обмеженою знизу. Тому має скінченну границю a і $a_n e^{-1/12n} < a < a_n$. Таким чином, знайдеться таке $\theta_n \in (0;1)$, що $n! = a \sqrt{n} (n/e)^n e^{\theta_n/n}$. Згідно з формулою Валліса,

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^2 n}{2(2n+1)} e^{(\theta_n - \theta_{2n})/12n} = \frac{a^2}{4}.$$

Таким чином, $a = \sqrt{2\pi}$ і ми приходимо до формули Стірлінга

$$n! = \sqrt{2\pi n} (n/e)^n e^{\theta_n/n}, \quad \theta_n \in (0;1).$$

Зауваження 1. Нехай S_{n+1} – простір поліномів $P_n = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$, степені яких не перевищують числа $n \in \mathbb{N}$. Це $n+1$ вимірний простір. Елементи

$$e_0 = 1, e_1 = x, \dots, e_n = x^n$$

є базисом цього простору, бо P_n єдиним чином подається у вигляді

$$P_n = c_0 e_0 + c_1 e_1 + \dots + c_n e_n.$$

Коли ми говоримо про розвинення функцій в ряд Тейлора, то мова йде про подання функції f у вигляді

$$f = c_0 e_0 + c_1 e_1 + \dots + c_k e_k + \dots,$$

де $e_k = x^k$. Маємо деяку аналогію з поліномами, але елементів e_k тепер є нескінченна кількість.

7. Означення синуса і косинуса. Наведене раніше означення функцій $f(x) = \sin x$ і $f(x) = \cos x$ та числа π пов'язані з геометричними фактами, які вважались десь обґрунтованими. Можна ввести означення цих функцій не користуючись відповідними геометричними фактами (це можна було зробити на самому початку вивчення математичного аналізу). Нехай

$$\widetilde{\cos} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \widetilde{\sin} x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}. \quad (1)$$

Кожний з цих рядів має радіус збіжності $\mathbb{R} = +\infty$. Тому $D(\widetilde{\sin}) = \mathbb{R}$ і $D(\widetilde{\cos}) = \mathbb{R}$. Основні етапи встановлення властивостей функцій $\widetilde{\sin}$ та $\widetilde{\cos}$ сконцентровані в наступних прикладах (ми використовуємо тут і далі позначення $\widetilde{\sin}$, $\widetilde{\cos}$ та $\widetilde{\pi}$, щоб підкреслити, що основні властивості, наведені нижче, встановлюються тільки на основі означення (1)).

Приклад 1. $\widetilde{\cos}(0) = 1$.

Приклад 2. $\widetilde{\sin}(0) = 0$.

Приклад 3. $\widetilde{\sin} x < x$, $x \in (0; +\infty)$, оскільки ряди (1) є знакопозитивними.

Приклад 4. $f(x) = \widetilde{\sin} x$ та $f(x) = \widetilde{\cos} x$ є неперервними на \mathbb{R} .

Приклад 5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\widetilde{\sin} x}{x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = 1$.

Приклад 6.

$$\widetilde{\sin}(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-x)^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = -\widetilde{\sin}x.$$

Приклад 7. $\widetilde{\cos}(-x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(-x)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \widetilde{\cos}x.$

Приклад 8. $\widetilde{\sin}'x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)' = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \widetilde{\cos}x.$

Приклад 9. $\widetilde{\cos}'x = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = -\widetilde{\sin}x.$

Приклад 10. $\widetilde{\cos}'(0) = 0$ і $\widetilde{\cos}''(0) = -1$. Тому в точці $x=0$ функція $f(x) = \widetilde{\cos}x$ має локальний максимум і $f(0) = 1$.

Приклад 11. Нехай $\varphi_1(x) = \sin(x - \beta) - \sin x \widetilde{\cos}\beta + \widetilde{\cos}x \sin \beta$,
 $\varphi_2(x) = \widetilde{\cos}(x + \beta) - \widetilde{\cos}x \widetilde{\cos}\beta + \sin x \sin \beta$ і $\varphi(x) = \varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)$. Тоді $\varphi_1(0) = 0$,
 $\varphi_2(0) = 0$, $\varphi(0) = 0$ і

$$\varphi'(x) = 2\varphi_1(x)\varphi_1'(x) + 2\varphi_2(x)\varphi_2'(x) = 2\varphi_1(x)\varphi_1'(x) - 2\varphi_1(x)\varphi_1'(x) = 0.$$

Тому $\varphi(x) = 0$, $\varphi_1(x) = 0$ і $\varphi_2(x) = 0$ для всіх $x \in \mathbb{R}$. Отже,

$$\widetilde{\sin}(x + \beta) = \widetilde{\sin}x \widetilde{\cos}\beta + \widetilde{\cos}x \widetilde{\sin}\beta, \quad \widetilde{\cos}(x + \beta) = \widetilde{\cos}x \widetilde{\cos}\beta - \widetilde{\sin}x \widetilde{\sin}\beta.$$

$$\widetilde{\sin}(x - \beta) = \widetilde{\sin}x \widetilde{\cos}\beta - \widetilde{\cos}x \widetilde{\sin}\beta, \quad \widetilde{\cos}(x - \beta) = \widetilde{\cos}x \widetilde{\cos}\beta + \widetilde{\sin}x \widetilde{\sin}\beta,$$

$$\widetilde{\sin}^2 x + \widetilde{\cos}^2 x = 1, \quad \widetilde{\sin}2x = 2\widetilde{\sin}x \widetilde{\cos}x, \quad \widetilde{\cos}2x = \widetilde{\cos}^2 x - \widetilde{\sin}^2 x.$$

Приклад 12. $1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)} \geq 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}_0$ та $x \in [0; 3]$.

Приклад 13.

$$\widetilde{\cos}x = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4k+2}}{(4k+2)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4k+3)(4k+4)} \right) \leq 1 - \frac{x^2}{2} \left(1 - \frac{x^2}{12} \right), \quad x \in [0; 3].$$

Приклад 14. $\widetilde{\cos}2 \leq 1 - \frac{2^2}{2} \left(1 - \frac{2^2}{12} \right) < 0$, $\widetilde{\cos}0 > 0$.

Приклад 15. $1 - \frac{x^2}{6} > 0$, якщо $x \in [0; 2]$.

Приклад 16.

$$\widetilde{\sin}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{4m+1}}{(4m+1)!} \left(1 - \frac{x^2}{(4m+2)(4m+3)} \right).$$

Приклад 17. $\widetilde{\sin}x > 0$, якщо $x \in [0; 2]$.

Приклад 18. Функція $f(x) = \widetilde{\sin}x$ є зростаючою на проміжку $x \in [0; 2]$.

Приклад 19. На проміжку $[0; 2]$ функція $f(x) = \widetilde{\cos}x$ має єдиний нуль, який позначається через $\tilde{\pi} / 2$.

Приклад 20. $\widetilde{\sin} \frac{\tilde{\pi}}{2} = 1$, бо $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, $\widetilde{\sin} \frac{\tilde{\pi}}{2} > 0$ і $\widetilde{\cos} \frac{\tilde{\pi}}{2} = 0$.

Приклад 21. $\widetilde{\sin} \left(\frac{\tilde{\pi}}{2} - x \right) = \widetilde{\cos} \frac{\tilde{\pi}}{2} \widetilde{\sin}(-x) + \widetilde{\sin} \frac{\tilde{\pi}}{2} \widetilde{\cos}(-x) = \widetilde{\cos}x$.

Приклад 22. $\widetilde{\sin} \left(\frac{\tilde{\pi}}{2} + x \right) = \widetilde{\cos} \frac{\tilde{\pi}}{2} \widetilde{\sin}x + \widetilde{\sin} \frac{\tilde{\pi}}{2} \widetilde{\cos}x = \widetilde{\cos}x$.

Приклад 23. $\widetilde{\cos} \left(\frac{\tilde{\pi}}{2} - x \right) = \widetilde{\cos} \frac{\tilde{\pi}}{2} \widetilde{\cos}(-x) - \widetilde{\sin} \frac{\tilde{\pi}}{2} \widetilde{\sin}(-x) = \widetilde{\sin}x$.

Приклад 24. $\widetilde{\cos} \left(\frac{\tilde{\pi}}{2} + x \right) = \widetilde{\cos} \frac{\tilde{\pi}}{2} \widetilde{\cos}x - \widetilde{\sin} \frac{\tilde{\pi}}{2} \widetilde{\sin}x = -\widetilde{\sin}x$.

Приклад 25. $\widetilde{\sin} \tilde{\pi} = \widetilde{\sin} \left(\frac{\tilde{\pi}}{2} + \frac{\tilde{\pi}}{2} \right) = \widetilde{\cos} \frac{\tilde{\pi}}{2} = 0$.

Приклад 26. $\widetilde{\cos} \tilde{\pi} = \widetilde{\cos} \left(\frac{\tilde{\pi}}{2} + \frac{\tilde{\pi}}{2} \right) = -\widetilde{\sin} \frac{\tilde{\pi}}{2} = -1$.

Приклад 27. На проміжку $(0; \tilde{\pi} / 2]$ функція $f(x) = \widetilde{\sin}x$ не має нулів, бо є зростаючою на цьому проміжку.

Приклад 28. На проміжку $[0; \tilde{\pi} / 2)$ функція $f(x) = \widetilde{\cos}x$ не має нулів.

Приклад 29. На проміжку $(\tilde{\pi}/2; \tilde{\pi})$ функція $f(x) = \widetilde{\sin}x$ не має нулів, бо $\widetilde{\sin}x = \widetilde{\cos}\left(x - \frac{\tilde{\pi}}{2}\right)$, $x - \frac{\tilde{\pi}}{2} \in (0; \tilde{\pi}/2)$, якщо $x \in (\tilde{\pi}/2; \tilde{\pi})$, і функція $\widetilde{\cos}$ є спадною на проміжку $(0; \tilde{\pi}/2)$.

Приклад 30. На проміжку $(\tilde{\pi}/2; \tilde{\pi})$ функція $f(x) = \widetilde{\cos}x$ не має нулів, бо $\widetilde{\cos}x = \widetilde{\sin}\left(\frac{\tilde{\pi}}{2} - x\right)$, $\frac{\tilde{\pi}}{2} - x \in (0; \tilde{\pi}/2)$, якщо $x \in (\tilde{\pi}/2; \tilde{\pi})$ і функція $\widetilde{\sin}$ є зростаючою на проміжку $(0; \tilde{\pi}/2)$.

Приклад 31. На проміжку $(\tilde{\pi}; 2\tilde{\pi})$ функція $f(x) = \widetilde{\sin}x$ не має нулів, бо $\widetilde{\sin}x = \widetilde{\sin}(x - \tilde{\pi})$ і $x - \tilde{\pi} \in (0; \tilde{\pi})$, якщо $x \in (\tilde{\pi}; 2\tilde{\pi})$.

Приклад 32. Функція $f(x) = \widetilde{\sin}x$ є періодичною і число $T = 2\tilde{\pi}$ є її періодом, бо

$$\widetilde{\sin}(2\tilde{\pi} + x) = \widetilde{\sin}\left(\frac{3\tilde{\pi}}{2} + \frac{\tilde{\pi}}{2} + x\right) = \widetilde{\cos}\left(\frac{3\tilde{\pi}}{2} + x\right) = -\widetilde{\sin}(\tilde{\pi} + x) = -\widetilde{\cos}\left(\frac{\tilde{\pi}}{2} + x\right) = \widetilde{\sin}x, \\ x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 33. Якщо $T \in (0; 2\tilde{\pi})$ і $\widetilde{\sin}(T + x) = \widetilde{\sin}x$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, то $\widetilde{\sin}T = 0$ і $T = \tilde{\pi}$. Але $\widetilde{\sin}\left(\frac{\tilde{\pi}}{2} + \tilde{\pi}\right) = \widetilde{\cos}\tilde{\pi} = -1 \neq \widetilde{\sin}\frac{\tilde{\pi}}{2}$. Тому число $T = 2\tilde{\pi}$ є найменшим додатним періодом функції $f(x) = \widetilde{\sin}x$.

Приклад 34. Функція $f(x) = \widetilde{\cos}x$ є періодичною і число $T = 2\tilde{\pi}$ є її найменшим додатним періодом, бо

$$\widetilde{\cos}(2\tilde{\pi} + x) = \widetilde{\sin}\left(2\tilde{\pi} + \frac{\tilde{\pi}}{2} + x\right) = \widetilde{\sin}\left(\frac{\tilde{\pi}}{2} + x\right) = \widetilde{\cos}x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Приклад 35. $-1 \leq \widetilde{\cos}x \leq 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, бо на проміжку $[0; \tilde{\pi}/2]$ функція $f(x) = \widetilde{\cos}x$ є спадною, $f(0) = 1$ і $f(\tilde{\pi}/2) = 0$.

Приклад 36. $-1 \leq \widetilde{\sin}x \leq 1$ для всіх $x \in \mathbb{R}$, бо $\widetilde{\sin}x = \widetilde{\cos}\left(\frac{\tilde{\pi}}{2} - x\right)$.

Приклад 37. Функція $f(x) = \widetilde{\cos}x$ є розв'язком рівняння

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y), \quad x \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

8. Функції Бесселя. За допомогою степеневих рядів можна визначити багато інших функцій і детально вивчити їхні властивості. В застосуваннях важливу роль відіграють функції Бесселя J_ν . Ці функції не є, взагалі кажучи, елементарними. Функцією Бесселя J_ν , $\nu \in \mathbb{N}_0$, називається функція, визначена рівністю

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!}. \quad (1)$$

Основні властивості функції J_ν встановлюються на основі означення (1). Деякі з цих властивостей відзначені в наступних прикладах.

Приклад 1. Число $R = +\infty$ є радіусом збіжності степеневого ряду (1) і $(-\infty; +\infty)$ – його проміжок збіжності. Отже, функції J_ν є нескінченно диференційовними на \mathbb{R} .

Приклад 2.

$$J'_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!}, \quad J''_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu)(2k+\nu-1) x^{2k+\nu-2}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!},$$

Приклад 3.

$$\begin{aligned} x^2 J''_\nu(x) + x J'_\nu(x) - \nu^2 J_\nu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} \left((2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} \left((2k+\nu)(2k+\nu-1) + (2k+\nu) - \nu^2 \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} \left((2k+\nu)^2 - \nu^2 \right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+\nu} 4k(k+\nu)}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} \\ &= x^2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2(k-1)+\nu}}{2^{2(k-1)+\nu} (k-1)!(k+\nu-1)!} = -x^2 J_\nu(x). \end{aligned}$$

$$\text{Отже, } J''_\nu(x) + \frac{1}{x} J'_\nu(x) - \left(\frac{\nu^2}{x^2} - 1 \right) J_\nu(x) = 0.$$

Приклад 4.

$$\begin{aligned}
\frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu+1}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu+1}}{2^{2k+\nu+1} k!(k+\nu+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu-1} (k-1)!(k+\nu)!} \\
&= \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^{\nu} \nu!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu-1} (k-1)!(k+\nu)!} \left(\frac{\nu}{2k} + \frac{1}{1} \right) = \frac{\nu x^{\nu-1}}{2^{\nu} \nu!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} = J'_{\nu}(x).
\end{aligned}$$

Отже, $J'_{\nu}(x) = \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) - J_{\nu+1}(x)$.

Приклад 5.

$$\begin{aligned}
J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu-1} k!(k+\nu-1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \nu x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+\nu) x^{2k+\nu-1}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!} = J'_{\nu}(x).
\end{aligned}$$

Отже,

$$J'_{\nu}(x) = J_{\nu-1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu}(x), \quad J_{\nu-1}(x) + J_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} J_{\nu}(x), \quad J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x) = 2\nu J'_{\nu}(x).$$

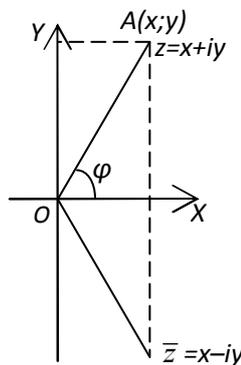
Приклад 6. Функція $\tilde{J}_{\nu}(x) = \sqrt{x} J_{\nu}(x)$ є розв'язком рівняння

$$\tilde{J}_{\nu}''(x) + \left(1 - \frac{\nu^2 - 1/4}{x^2} \right) \tilde{J}_{\nu}(x) = 0.$$

9. Комплексні числа.

Комплексним числом називається упорядкована пара $z = (x; y)$ дійсних чисел x і y , причому число x називається дійсною частиною комплексного числа z і позначається $x = \operatorname{Re} z$, а y — уявною і позначається

$y = \operatorname{Im} z$. Два комплексні числа $z_1 = (x_1; y_1)$ і $z_2 = (x_2; y_2)$ називаються рівними, якщо рівними є їх дійсні та уявні частини. Число $(x; 0)$ позначають через x : $x = (x; 0)$. Зокрема, $1 = (1; 0)$. Число $(0; y)$ називається чисто уявним, а число $i = (0; 1)$ називається уявною одиницею. Додавання і множення комплексних



чисел визначаються відповідно так: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$, $z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1)$. Із означення випливає, що $i^2 = i \cdot i = -1$ і кожне комплексне число $z = (x; y)$ можна записати в алгебраїчній формі: $z = x + iy$. Множину всіх комплексних чисел позначають через \mathbb{C} . Між множинами \mathbb{C} і \mathbb{R}^2 існує взаємно однозначна відповідність: числу $z = x + iy \in \mathbb{C}$ відповідає точка $A(x; y) \in \mathbb{R}^2$. Тому комплексні числа можна зображати точками площини в декартовій системі координат XOY . Число $\bar{z} = x - iy$ називається спряженим до числа z . Модулем комплексного числа z називається число $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Модуль комплексного числа z дорівнює довжині вектора \overrightarrow{OA} , який називається радіус-вектором числа z . Безпосередньо із означення випливає, що $|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$.
Справедливі нерівності

$$\frac{|x| + |y|}{\sqrt{2}} \leq |z| \leq |x| + |y|,$$

які перевіряються безпосередньо. Потрібно, правда, врахувати, що $x^2 + y^2 \geq 2|x||y|$. За означенням

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

Аргументом комплексного числа z називається кут $\varphi = \text{Arg } z$, утворений радіус-вектором числа z і додатним променем осі OX . Аргумент визначається з точністю до $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Головним значенням $\text{Arg } z$ називається таке число $\arg z \in \text{Arg } z$, яке належить проміжку $[-\pi; \pi)$. Справедлива формула $\text{Arg } z = \arg z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Для знаходження головного значення аргументу числа $z \neq 0$ справедлива формула

$$\arg z = \begin{cases} \text{arctg}(y/x), & x > 0, \\ \text{arctg}(y/x) + \pi, & x < 0, \quad y > 0, \\ \text{arctg}(y/x) - \pi, & x < 0, \quad y < 0, \\ \pi/2, & x = 0, \quad y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0, \quad y < 0. \end{cases} \quad (1)$$

Точніше кажучи, головним значенням аргументу комплексного числа $z \neq 0$ називається число $\arg z$, визначене рівністю (1). Множина $\text{Arg } z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ називається множиною аргументів числа $z \neq 0$.

Інколи головне значення аргументу береться з проміжку $[0; 2\pi)$ (тоді формулу (1) потрібно відповідним чином змінити), а символами “ $\text{Arg } z$ ” і “ $\text{arg } z$ ” позначають довільний елемент множини аргументів та інші речі. Тому в кожній конкретній ситуації потрібно з'ясувати зміст цих символів. Оскільки $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ і $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, то комплексне число z можна записати також у тригонометричній формі

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2)$$

та показниковій

$$z = r e^{i\varphi}. \quad (3)$$

Якщо число z записано у формі (2) чи (3), то $r = |z|$, а $\varphi \in \text{Arg } z$. Для арифметичних операцій над дійсними числами справедливі ті ж правила, що і для арифметичних операцій над дійсними числами.

Якщо $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ – задана функція, то її можна подати у вигляді $f = f_1 + i f_2$, де $f_1 = \text{Re } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ і $f_2 = \text{Im } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – дійсні функції дійсної змінної. За означенням

$$f'(t) = f_1'(t) + i f_2'(t),$$

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f_1(t) dt + i \int_a^b f_2(t) dt.$$

Приклад 1. $i^3 = i^2 i = -i$.

Приклад 2. $\arg 2 = 0$, $\arg(-4) = -\pi$, $\arg 3i = \pi / 2$,

$\arg(-3i) = -\pi / 2$.

Приклад 3. $|1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$, $\arg(1 + 3i) = \arctg 3$,

$1 + 3i = \sqrt{10} e^{i \arctg 3}$, $1 + 3i = \sqrt{10} (\cos \arctg 3 + i \sin \arctg 3)$.

Приклад 4.

$e^{i(\varphi + 2k\pi)} = \cos(\varphi + 2k\pi) + i \sin(\varphi + 2k\pi) = \cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}$, $k \in \mathbb{Z}$, $\varphi \in \mathbb{R}$.

Приклад 5. При множенні двох комплексних чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ та $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ їхні модулі перемножуються, а аргументи додаються, бо

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 ((\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Приклад 6. $|2e^{i\pi/3}| = 2$, $\arg(2e^{i\pi/3}) = \frac{\pi}{3}$,

$$2e^{i\pi/3} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}.$$

Приклад 7. $|-2e^{i\pi/3}| = 2$, $-2e^{i\pi/3} = 2e^{-i\pi} e^{i\pi/3} = 2e^{-i2\pi/3}$,

$$\arg(-2e^{i\pi/3}) = -\frac{2\pi}{3}.$$

Приклад 8.

$$\frac{2-i}{2+i} = \frac{(2-i)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(2-i)^2}{|2+i|^2} = \frac{4-4i+i^2}{4+1} = \frac{3-4i}{5} = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}i.$$

Приклад 9. $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \begin{cases} 2\pi, & \text{якщо } k = 0, \\ 0, & \text{якщо } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases}$

Справді,

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \int_{-\pi}^{\pi} (\cos kt + i \sin kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} \cos ktdt + i \int_{-\pi}^{\pi} \sin ktdt,$$

і ми приходимо до потрібного висновку. До цієї формули можна прийти і так

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} dt = \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt} d(ikt) = \frac{1}{ik} e^{ikt} \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{ik} (e^{ik\pi} - e^{-ik\pi}) = 0, \quad k \neq 0.$$

Приклад 10. Множина $U(0; R) = \{z : |z| < R\}$ є кругом з центром в початку координат і радіусом R .

Приклад 11. Множина $U(a; R) = \{z : |z - a| < R\}$ є кругом з центром в точці $a = a_1 + ia_2$ і радіусом R .

10. Границя послідовності і ряди з комплексними членами. Послідовністю в \mathbb{C} називається така функція, областю визначення якої є

множина натуральних чисел, а множина значень належить \mathbb{C} . Загальний член послідовності (z_n) можна подати у вигляді $z_n = x_n + iy_n$, де $x_n = \operatorname{Re} z_n$, $y_n = \operatorname{Im} z_n$. Число $c = a + ib$ називається границею послідовності (z_n) , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^*)(\forall n \geq n^*) : |z_n - c| < \varepsilon. \quad (1)$$

Теорема 1. Для того щоб число $c = a + ib$ було границею в \mathbb{C} послідовності (z_n) , $z_n = x_n + iy_n$, необхідно і достатньо, щоб число a було границею в \mathbb{R} послідовності (x_n) , а число b було границею в \mathbb{R} послідовності (y_n) , тобто $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + i \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$, якщо існує границя в лівій частині, або існують обидві гранці в правій частині цієї рівності.

Доведення. Ця теорема випливає з нерівностей

$$\frac{|x_n - a| + |y_n - b|}{\sqrt{2}} \leq |z_n - c| < |x_n - a| + |y_n - b|. \blacktriangleright$$

З цієї теореми випливає, що для границь послідовностей комплексних чисел справедливі аналоги теорем про границі послідовностей дійсних чисел (критерій Коші збіжності послідовності, теореми про єдиність границі, границю суми, частки і т.д.), які формулюються аналогічно.

Приклад 1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \left(k \sin \frac{2}{k} + i \sqrt[k]{2} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} k \sin \frac{2}{k} + i \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{2} = 2 + i.$

Приклад 2. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k^2 + 3ik}{k^2 + i} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2 + 3i/k}{1 + i/k^2} = 2.$

Ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k, \quad w_k = u_k + iv_k, \quad (2)$$

називається збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності (S_n) його частинних сум

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = A \neq \infty, \quad S_n := \sum_{k=1}^n w_k.$$

При цьому число A називається сумою ряду (2) і цей факт записують так

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} w_k .$$

Теорема 2. Для того щоб ряд (2) був збіжним і мав суму $A = A_1 + iA_2$, необхідно і достатньо, щоб були збіжними ряди $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ та $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ і мали суми A_1 та A_2 відповідно.

Доведення. Ця теорема є наслідком теореми 1. ►

Ряд (2) називається абсолютно збіжним, якщо збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |w_k| .$$

Теорема 3. Якщо ряд (2) є абсолютно збіжним, то він є збіжним.

Доведення цієї теореми, таке ж, як і для дійсних рядів. ►

Ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z-a)^k = c_0 + c_1(z-a) + \dots + c_k(z-a)^k + \dots \quad (3)$$

називається степеневим рядом.

Теорема 4 (Абеля). Якщо степеневий ряд є збіжним у точці $z_0 \neq a$, то він є абсолютно збіжним для всіх z , для яких $|z-a| < |z_0-a|$.

Доведення цієї теореми, таке ж, як і для дійсних рядів. ►

Число R таке, що при $|z-a| < R$ ряд (3) є збіжним, а при $|z-a| > R$ є розбіжним, називається радіусом збіжності степеневого ряду, а круг $\{z : |z-a| < R\}$ – кругом збіжності.

Теорема 5. Радіус збіжності степеневого ряду (3) знаходиться за формулою

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} .$$

Доведення цієї теореми, таке ж, як і для дійсних рядів. ►

Приклад 3. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{k^2} + i \frac{1}{k} \right)$ є розбіжним, бо розбіжним є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Приклад 4. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{\sqrt{k^5+1}} + i \frac{1}{k^2} \right)$ є збіжним, бо збіжними є ряди $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^5+1}}$ та $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

Приклад 5. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^4+1}+i}{ik^2+1}$ є розбіжним, бо $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k^4+1}+i}{ik^2+1} = -i \neq 0$.

Приклад 6. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+i}{ik^3+1}$ є збіжним абсолютно, бо $\left| \frac{k+i}{ik^3+1} \right| = \frac{|k+i|}{|ik^3+1|} = \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^6+1}}$ і є ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2+1}}{\sqrt{k^6+1}}$ є збіжним.

Приклад 7. Для ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{3n}}{4^n}$ маємо

$$c_k = \begin{cases} 1/4^{k/3}, & \text{якщо } k=3m, \\ 0, & \text{якщо } k \neq 3m. \end{cases}$$

Тому

$$R = \frac{1}{\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|c_k|}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[3m]{|c_{3m}|}} = \frac{1}{\lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[3m]{1/4^m}} = \sqrt[3]{4}.$$

Отже, $R = \sqrt[3]{4}$ – радіус збіжності і $\{z: |z| < \sqrt[3]{4}\}$ – круг збіжності розглядуваного степеневого ряду. Радіус збіжності можна знайти і так.

Нехай $w_n = \frac{|z|^{3n}}{4^n}$. Тоді $w_{n+1} = \frac{|z|^{3n+3}}{4^{n+1}}$ і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{w_{n+1}}{w_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n |z|^{3n+3}}{4^{n+1} |z|^{3n}} = \frac{|z|^3}{4}.$$

Бачимо, що ряд є збіжним абсолютно, якщо $|z| < \sqrt[3]{4}$, і є розбіжним, якщо $|z| > \sqrt[3]{4}$. Отже, радіус збіжності ряду дорівнює $\sqrt[3]{4}$ і $\{z: |z| < \sqrt[3]{4}\}$ – круг збіжності.

11. Зауваження про розбіжні ряди. Інколи розглядають і розбіжні ряди (як числові так і функціональні) і їм приписують певні узагальнені суми. Є різні підходи до таких проблем. Вкажемо на деякі з них.

1. *Метод середніх арифметичних (метод Чезаро).* В цьому сенсі числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \quad (1)$$

називається збіжним, якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = S, \quad S_n := \sum_{k=1}^n a_k.$$

При цьому число S називається сумою (сумою Чезаро, узагальненою сумою) ряду (1). Кожний збіжний в \mathbb{R} ряд є збіжним і в розумінні Чезаро і має в обох розуміннях однакову суму. Обернене твердження не є справедливим. Наприклад, ряд

$$1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

є розбіжним в \mathbb{R} , але є збіжним в розумінні Чезаро і має в цьому розумінні суму $S = 1/2$.

2. *Матричний метод.* Узагальненням методу Чезаро є матричний метод. Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

деяка нескінченна матриця. Сумою ряду (1) назвемо границю

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = S, \quad \sigma_n := \sum_{k=1}^n a_{nk} S_k.$$

Метод Чезаро отримується у випадку, коли

$$a_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{якщо } k \in \overline{1; n}, \\ 0, & \text{якщо } k > n. \end{cases}$$

3. Метод Пуассона-Абеля. Сумою ряду (1) назвемо число

$$\lim_{x \rightarrow -1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k = S.$$

4. Розбіжному функціональному ряду вдається приписати певну суму за допомогою використання різних функціональних просторів і різних збіжностей. Наприклад, функціональний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$$

назвемо збіжним до функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b \left| \sum_{k=1}^n f_k(x) - f(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

12. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення функціональної послідовності.
2. Сформулюйте означення функціональної послідовності, збіжної в точці x .
3. Сформулюйте означення функціональної послідовності, збіжної на множині E до функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
4. Сформулюйте означення функціональної послідовності, рівномірно збіжної на множині E до функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
5. Сформулюйте означення \sup -норми.
6. Сформулюйте означення функціональної послідовності, збіжної за \sup -нормою на множині E до функції $f : E \rightarrow \mathbb{R}$.
7. Сформулюйте і доведіть критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності.
8. Чи існує функціональна послідовність, яка на деякій множині E є збіжною рівномірно, але не є збіжною поточково?
9. Наведіть приклад послідовності, яка є поточково збіжною, але не є збіжною за \sup -нормою.
10. Який функціональний ряд називається поточково збіжним на множині E ?
11. Який функціональний ряд називається рівномірно збіжним на множині E ?
12. Сформулюйте і доведіть критерій Коші рівномірної збіжності функціонального ряду.
13. Сформулюйте і доведіть ознаку Вейерштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду.

14. Сформулюйте і доведіть ознаку Діріхле рівномірної збіжності функціонального ряду.
15. Сформулюйте і доведіть ознаку Абеля рівномірної збіжності функціонального ряду.
16. Сформулюйте і доведіть теорему про неперервність суми функціонального ряду.
17. Сформулюйте і доведіть теорему про граничний перехід під знаком функціонального ряду.
18. Сформулюйте і доведіть теорему про почленне інтегрування функціонального ряду.
19. Сформулюйте і доведіть теорему про диференціювання функціонального ряду.
20. Сформулюйте означення степеневого ряду.
21. Сформулюйте означення проміжку і радіуса збіжності функціонального ряду.
22. Сформулюйте і доведіть теорему про знаходження радіуса збіжності степеневого ряду.
23. Сформулюйте і доведіть теорему про рівномірну збіжність степеневого ряду.
24. Чи існує степеневий ряд, для якого $R=1$ – радіус збіжності, $(-1;1)$ – проміжок збіжності і на проміжку $[-1;1]$ він збігається рівномірно?
25. Чи існує степеневий ряд, для якого $R=1$ – радіус збіжності, $(-1;1)$ – проміжок збіжності і в точці $x=-1$ він є розбіжним, а в точці $x=1$ є збіжним.
26. Чи існує степеневий ряд, для якого $R=1$ – радіус збіжності, $(-1;1)$ – проміжок збіжності і на проміжку $(-1;1)$ він не збігається рівномірно?
27. Чи існує степеневий ряд, для якого $R=1$ – радіус збіжності, $(-1;1)$ – проміжок збіжності і на деякому проміжку $[a;b] \subset (-1;1)$ він не збігається рівномірно?
28. Сформулюйте означення ряду Тейлора.
29. Сформулюйте і доведіть теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = e^x$.
30. Сформулюйте і доведіть теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = \sin x$.
31. Сформулюйте і доведіть теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = \cos x$.
32. Сформулюйте і доведіть теорему про розвинення в ряд Тейлора функції

$$f(x) = (1+x)^{\alpha}.$$

33. Сформулюйте і доведіть теорему про розвинення в ряд Тейлора функції $f(x) = \ln(1+x)$.

13. Вправи і задачі теоретичного характеру

1. Доведіть твердження

1. Послідовність $f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [1/k; 1] \cup \{0\}, \\ 1, & (0; 1/k), \end{cases}$ є незростаючою для кожного

$x \in [0; 1]$, поточково і нерівномірно збігається на $[0; 1]$ до неперервної функції $f(x) = 0$.

2. Послідовність $f_k(x) = \begin{cases} 2k^2x, & x \in [0; 1/2k], \\ k - 2k^2(x - 1/3k), & x \in (1/2k; 1/k], \\ 0, & (1/k; 0), \end{cases}$ функцій,

неперервних на $[0; 1]$ поточково і нерівномірно збігається на $[0; 1]$ до неперервної на $[0; 1]$ функції $f(x) = 0$.

3. Послідовність $f_k(x) = x^k$ є незростаючою для кожного $x \in [0; 1]$, всі функції f_k є неперервними на $[0; 1]$ і послідовність (f_k) поточково і нерівномірно збігається на $[0; 1]$ до розривної функції $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$

4. Послідовність $f_k(x) = x^k$ є незростаючою для кожного $x \in [0; 1)$, всі функції f_k є неперервними на $[0; 1)$ і послідовність (f_k) поточково і нерівномірно збігається на $[0; 1)$ до неперервної на $[0; 1)$ функції $f(x) = 0$.

5. Для кожної функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $D(f) = [a; b]$, послідовність $f_k(x) = \frac{[kf(x)]}{k}$ є рівномірно збіжною на $[a; b]$ до f .

6. Для кожної функції $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$, для якої функція f' є неперервною на $(a; b)$, послідовність $f_k(x) = k(f(x + 1/k) - f(x))$ є рівномірно збіжною до f' на кожному проміжку $[a_1; b_1] \subset (a; b)$.

7. Існує послідовність функцій $f_k: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, для якої

$$\sup \left\{ \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) : x \in [0; +\infty) \right\} \neq \limsup_{k \rightarrow \infty} \left\{ f_k(x) : x \in [0; +\infty) \right\}$$

і обидві границі в останній рівності існують і є скінченними.

8. Для кожної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, неперервної на \mathbb{R} , для якої функція f' є

неперервною на $(a; b)$, послідовність $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (f(x+1/k) - f(x))$ є рівномірно збіжною до f на кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

9. Існують такі функціональні послідовності (φ_k) і (f_k) , які не є рівномірно збіжними на проміжку $[0; 1]$, а послідовність $(\varphi_k + f_k)$ є рівномірно збіжною на $[0; 1]$.

10. Якщо $(\exists q \in (0; 1))(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E) : \sqrt[k]{|f_k(x)|} \leq q$, то на множині E ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \quad (1)$$

є збіжним рівномірно і абсолютно.

11. Якщо $(\exists q \in (0; 1))(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E) : |f_{k+1}(x) / f_k(x)| \leq q$, то на множині E ряд є збіжним рівномірно і абсолютно.

12. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ збігається на множині E рівномірно, то і ряд (1) збігається на E рівномірно.

13. Якщо ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k(x)|$ збігається на множині E рівномірно і $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E) : |f_k(x)| \leq |b_k(x)|$, то і ряд (1) збігається на E рівномірно.

14. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+x^2}$ збігається рівномірно на проміжку $[0; 1]$, але не збігається абсолютно для кожного $x \in [0; 1]$.

15. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x^2)}{k^2}$ збігається рівномірно на проміжку $(-\infty; +\infty)$, але його не можна почленно диференціювати.

16. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} (1-x)x^k$ збігається абсолютно на проміжку $[0; 1]$, але не рівномірно на $[0; 1]$.

17. Ряд $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$, $f_k(x) = (-1)^k (1-x)x^k$, збігається абсолютно і рівномірно на

проміжку $[0; 1]$, але ряд $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x)|$ не є рівномірно збіжним на $[0; 1]$.

$$18. \text{Ряд } \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x), \quad f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 2^{-k-1}], \\ \frac{1}{k} \sin^2(\pi 2^{k+1} x), & x \in [2^{-k-1}; 2^{-k}], \\ 0, & x \in [2^{-k}; 1], \end{cases} \text{ збігається абсолютно і}$$

рівномірно на проміжку $[0; 1]$, але не існує такого збіжного числового ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k, \text{ що } (\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in E) : |f_k(x)| \leq |a_k|.$$

19. Якщо для кожного $m \in \mathbb{N}$ послідовність (a_{km}) є додатною і неспадною, то

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{km} = \sum_{m=1}^{\infty} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{km}.$$

$$20. \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{1+t^k} = \ln 2.$$

$$21. \lim_{t \rightarrow 1^-} (1-t^2) \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{t^k}{1-t^k} = \frac{\pi^2}{6}.$$

22. Якщо всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a; b]$ і ряд (1) є рівномірно збіжним на $[a; b]$, то рівномірно збіжним на $[a; b]$ є

$$\text{також ряд } \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^x f_k(x) dx.$$

23. Якщо всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є неперервними на проміжку $[a; b]$, ряд (1) є рівномірно збіжним на кожному замкненому проміжку $[a; \eta] \subset [a; b]$ і $(\exists c_1 \in \mathbb{R})(\forall x \in [a; b]) : |S_n(x)| \leq c_1$, то сума ряду (1) є інтегрованою в

$$\text{невласному розумінні на } [a; b] \text{ і } \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

24. Нехай всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є інтегровними і невід'ємними на

$$\text{кожному проміжку } [a; \eta] \subset [a; b] \text{ і } \int_a^{\eta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\eta} f_k(x) dx \text{ для кожного}$$

$$\eta \in [a; b]. \text{ Тоді } \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx, \text{ якщо принаймні одна із частин}$$

цієї рівності є скінченною.

25. Нехай всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є інтегровними на кожному

$$\text{проміжку } [a; \eta] \subset [a; b] \text{ і } \int_a^{\eta} \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^{\eta} f_k(x) dx \text{ для кожного } \eta \in [a; b].$$

Тоді $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$, якщо принаймні одне із чисел $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \right) dx$ або $\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b |f_k(x)| dx$ є скінченним.

26. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (1-x)(kx^k - (k-1)x^{k-1})$ є поточково збіжним на проміжку $[0;1]$ і його сума є функцією неперервною на $[0;1]$, але цей ряд не можна почленно інтегрувати на $[0;1]$.

27. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^3 + 1}$ є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

28. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + x^2}$ є неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

29. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(x-k)^2}$ має похідну на проміжку $[0;1]$.

30. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{tg}^k x$ має похідну на проміжку $(-\pi/4; \pi/4)$.

31. Функція $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^5 + 1}$ має другу похідну на проміжку $(-\infty; +\infty)$.

32. Функція $\zeta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^x}$ є нескінченно диференційовною на проміжку $(1; +\infty)$.

33. Функція $\theta(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e^{k\pi^2 x}} + e^{-k\pi^2 x} \right)$ є нескінченно диференційовною на проміжку $(0; +\infty)$.

34. Функція $\theta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x - r_k|}{3^k}$, де $r_k \in [0;1] \cap \mathbb{Q}$, є неперервною на проміжку $[0;1]$, диференційовною (недиференційовною) в точці $x \in [0;1]$, якщо x – раціональне (ірраціональне) число.

35. $\int_0^{+\infty} e^{-x} \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \right) dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_0^{+\infty} e^{-x} x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k k!$, якщо останній ряд є збіжним в \mathbb{R} .

36. Якщо всі функції $f_k : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є інтегровними на проміжку $[a;b]$ і ряд (1) є рівномірно збіжним на $[a;b]$ до функції $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{R}$, то функція f

є інтегровною на $[a;b]$ і $\int_a^b \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$.

37. Якщо всі функції $f_k : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$, є диференційовними на проміжку $[a; b]$, ряд (1) є збіжним в точці $x = a$ і ряд $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ є рівномірно збіжним на $[a; b]$, то ряд (1) є збіжним на $[a; b]$ до функції $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, диференційовної на $[a; b]$ і $\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(x)$.

38. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ є збіжним на проміжку $[0; 1)$ до функції $f(x) = 1 / (1 + x)$ і не є збіжним на проміжку $[0; 1]$, але

$$\int_0^1 f(x) dx = \ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^1 x^n dx.$$

39. Якщо ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ є збіжним і має суму s , то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ є рівномірно збіжним на проміжку $[0; 1]$ і $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s$ (теорема Абеля).

40. Якщо $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = s \in \mathbb{R}$ і $a_k = o(1/k)$, якщо $k \rightarrow \infty$, то ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ є збіжним і має суму s (теорема Таубера).

41. $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 1/2$, якщо $a_k = (-1)^k$, і ряд $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ є розбіжним.

42. Якщо функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ має на проміжку $[a; b]$ всі похідні до порядку $n+1 \in \mathbb{N}$ включно і функція $f^{(n+1)}$ є неперервною на $[a; b]$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x f^{(n+1)}(t) (x-t)^n dt \text{ для кожного } x \in [a; b] \text{ (формула}$$

Тейлора з додатковим членом в інтегральній формі).

43. $\int_0^1 x^{-x} dx = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-n}$.

44. $\lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{n=1}^{\infty} f(nh) = \int_0^{\infty} f(x) dx$, якщо функція $f : (0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ є монотонною на $(0; +\infty)$ і останній інтеграл є збіжним.

45. $f(x) = (1 - qx)f(qx)$, якщо $f(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k x)$, $x \in \mathbb{R}$, $|q| < 1$.

$$46. \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k(k+1)/2}}{\prod_{j=1}^k (q^j - 1)} x^k, \quad x \in \mathbb{R}, |q| < 1.$$

$$47. \frac{1}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k x)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{\prod_{j=1}^k (1 - q^j)} x^k, \quad x \in \mathbb{R}, |q| < 1.$$

$$48. \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k q^{(3k^2+k)/2}, \quad |q| < 1.$$

$$49. \frac{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k})}{\prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{2k-1})} = \sum_{k=0}^{\infty} q^{k(k+1)/2}.$$

14. Вправи і задачі розрахункового характеру

1. Знайдіть множину E , на якій поточково збіжною є функціональна послідовність (f_k) і функцію $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, яка є її границею

$$1. f_k(x) = \frac{x^k}{1 + x^{2k}}.$$

$$2. f_k(x) = \frac{(1+x)^k}{1+x^k}.$$

$$3. f_k(x) = \frac{kx^k}{(k+1)(1+2x)^k}.$$

$$4. f_k(x) = \frac{\ln(1+x^k)}{k^x}.$$

$$5. f_k(x) = \frac{|x|^k}{1+x^{2k}}.$$

$$6. f_k(x) = \frac{(1+|x|)^k}{1+x^k}.$$

$$7. f_k(x) = \frac{kx^k}{k^{2k}}.$$

$$8. f_k(x) = \frac{k!(1+x)^k}{k^k}.$$

$$9. f_k(x) = \frac{x^k}{(1+1/k)^{2k}}.$$

$$10. f_k(x) = \frac{k!(1+x)^k}{2^{k^2}}.$$

$$11. f_k(x) = \sqrt{x^2 + 1/k}.$$

$$12. f_k(x) = k\left((1+1/k)^x - 1\right).$$

$$13. f_k(x) = \frac{\log_x(1+2^k)}{k}.$$

$$14. f_k(x) = \frac{\ln(1+x/k)}{\sin x/k}.$$

$$15. f_k(x) = \frac{k^2}{\sqrt{k^4 + 1(1+x^{2k})}}.$$

$$16. f_k(x) = k \arcsin(1+x)^k.$$

17. $f_k(x) = \frac{2^k}{1+x^k}$.

18. $f_k(x) = \frac{(1+x)^k}{2^k}$.

19. $f_k(x) = \sin(\pi + x^k)$.

20. $f_k(x) = x + \ln(2 + x^k)$.

21. $f_k(x) = e^{x^k}$.

22. $f_k(x) = \operatorname{tg}(x + (1+x)^k)$.

23. $f_k(x) = x^2 + k^{\sqrt{k}} x^k$.

24. $f_k(x) = x + k^{-\sqrt{k}} x^k$.

25. $f_k(x) = \frac{\lg(1+x2^k)}{k}$.

26. $f_k(x) = \frac{\ln(k+x)}{\ln k}$.

27. $f_k(x) = \frac{x}{k} \ln \frac{x}{k}$.

28. $f_k(x) = \frac{\ln(1+x)^k}{1+x^k}$.

29. $f_k(x) = xk^3 e^{x-k}$.

30. $f_k(x) = x^k + (1 - 1/kx)^k$.

31. $f_k(x) = \sqrt[k]{x+x^k}$.

32. $f_k(x) = \sqrt[k]{x + \ln^k x}$.

33. $f_k(x) = \sqrt{x+k} - \sqrt{k}$.

34. $f_k(x) = \sqrt{x+k} - \sqrt[3]{k^3+1}$.

35. $f_k(x) = x^k \operatorname{tg} \frac{x}{k}$.

36. $f_k(x) = k(\sqrt[k]{x} - 1)$.

37. $f_k(x) = k^2(\sqrt[k]{x} - \sqrt[k+1]{x})$.

38. $f_k(x) = \left(\frac{x-1+\sqrt[k]{x}}{x}\right)^k$.

39. $f_k(x) = \left(\frac{\sqrt[k]{x} + \sqrt[k]{x+1}}{2}\right)^k$.

40. $f_k(x) = \sqrt[k]{1+x^k}$.

41. $f_k(x) = (x-1) \operatorname{arctg} x^k$.

42. $f_k(x) = \ln \frac{\frac{x}{k} + \sqrt{1 - \frac{x^2}{k^2}}}{\frac{1}{k} + \sqrt{1 - \frac{1}{k^2}}}$.

43. $f_k(x) = \frac{\sin^{2k+2} x + \sin^{2k+2} x}{\sin^{2k} x + \sin^{2k} x}$.

44. $f_k(x) = \sqrt[k]{1+4^k x \sin^{2k} x}$.

2. З'ясуйте, чи послідовність (f_k) є рівномірно збіжною на множині E

1. $f_k(x) = x^k - x^{2k} + 2x$, $E = [0;1]$.

2. $f_k(x) = \sqrt{x^2 + 1/k}$, $E = (-\infty; +\infty)$.
3. $f_k(x) = \sqrt{x^2 + k + 1} - \sqrt{x^2 + k}$, $E = (-\infty; +\infty)$.
4. $f_k(x) = \sqrt{x + 1/k^2}$, $E = [0; 1]$.
5. $f_k(x) = \frac{2xk}{1 + k^2x^2}$, $E = [0; +\infty)$.
6. $f_k(x) = \frac{1}{1 + xk}$, $E = [0; +\infty)$.
7. $f_k(x) = \frac{\sin kx}{k}$, $E = (-\infty; +\infty)$.
8. $f_k(x) = 2x^k + x^2$, $E = (-1; 1)$.
9. $f_k(x) = \frac{kx + x^2 + k^2}{x^2 + k^2}$, $E = [0; 1]$.
10. $f_k(x) = (1 - x)x^k$, $E = [0; 1]$.
11. $f_k(x) = \frac{x^k}{k^k}$, $E = [0; +\infty)$.
12. $f_k(x) = x^k - x^{k+2} + 2x$, $E = [0; 1]$.
13. $f_k(x) = \frac{x^{2k}}{k^{\sqrt{k}}}$, $E = [0; 2)$.
14. $f_k(x) = \frac{1}{x^2 + k}$, $E = (-\infty; +\infty)$.
15. $f_k(x) = \begin{cases} xk^2, x \in [0; 1/k], \\ 2kx - k^2x, x \in (1/k; 2/k], \\ 0, x \in (2/k; +\infty), \end{cases} \quad E = [0; 1]$.
16. $f_k(x) = \begin{cases} 1/k, x \in [0; k], \\ k^2 - kx + 1/k^3, x \in (k; k + 1/k^4], \\ 0, x \in (k + 1/k^4; +\infty), \end{cases} \quad E = [0; +\infty)$.
17. $f_k(x) = \sqrt[k]{2^k + |x|^k}$, $E = (-\infty; +\infty)$.
18. $f_k(x) = \sqrt[k]{3^k + |x|^k}$, $E = (-1; 1)$.
19. $f_k(x) = \operatorname{arctg} \frac{x}{k^2 + x^2}$, $E = (-\infty; +\infty)$.
20. $f_k(x) = \operatorname{arcsin} \frac{x}{k^2 + x^2}$, $E = (-\infty; +\infty)$.

$$21. f_k(x) = k \ln(1 + x^2 / k), \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$22. f_k(x) = k^2 (\sin(x + 1 / k^2) - \sin x), \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$23. f_k(x) = k((1 + x^2 / k)^{\sqrt{2}} - 1), \quad E = [0; 1].$$

$$24. f_k(x) = \operatorname{tg} \frac{\sqrt[3]{k}}{1 + x\sqrt{k}}, \quad E = [1; +\infty).$$

$$25. f_k(x) = \operatorname{tg} \frac{xk}{kx + k^2}, \quad E = [0; 1].$$

$$26. f_k(x) = k \ln(1 + x^2 / k), \quad E = (-1; 1).$$

$$27. f_k(x) = x^k / k!, \quad E = [0; +\infty).$$

$$28. f_k(x) = \operatorname{tg} \frac{1}{1 + xk}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$29. f_k(x) = \frac{kx + x^2}{x^2 + k^2}, \quad E = (-1; 1).$$

$$30. f_k(x) = x^2 + \sin x^k, \quad E = (-1; 1).$$

$$31. f_k(x) = \frac{2x}{k^2 + x^2}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$32. f_k(x) = \frac{2k}{k^2 + x^2}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$33. f_k(x) = kxe^{-kx}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$34. f_k(x) = e^{-kx}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$35. f_k(x) = \frac{x^k}{2^{k^2}}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$36. f_k(x) = \frac{2^k x^k}{k^{\sqrt{k}}}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$37. f_k(x) = \frac{kx}{x + k^2}, \quad E = [0; 1].$$

$$38. f_k(x) = \frac{x + k}{xk + k^2}, \quad E = [0; 1].$$

$$39. f_k(x) = \sin \frac{\sqrt{|x|}}{k^2 + k|x|}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$40. f_k(x) = \operatorname{ctg} \frac{k^2}{k^2 + k|x|}, \quad E = (-1; 1).$$

$$41. f_k(x) = \sqrt[k]{x \sin x}, \quad E = [0; \pi].$$

$$42. f_k(x) = \sqrt[k]{\sin x}, \quad E = [0; \pi].$$

3. Знайдіть множину точок збіжності і множину точок абсолютної збіжності ряду

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^k.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} x^k \operatorname{tg} \frac{x}{2^k}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k x^{2k-1}}.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(x-3)^{3k+1}}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1-x^k}.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{e^{kx}}.$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{x}{4^{2k}}.$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k}{1+x^k}.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{1+x^{2k}}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x(k+x)}{k} \right)^k.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^{2k}}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+x^{2k}}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{1+x^{2k}}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+x^k}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+x)^k}{1+x^k}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+x^k}{k}.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kx^k}{(k+1)(1+2x)^k}.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k (2k-1)!! x^k}{(2k)!! (1+x^2)^k}.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(x+1) \cdot \dots \cdot (x+k)}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k \sin^k x}{k^3}.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg}^k x}{k^2}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arcsin^k x}{k}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\arccos^k x}{k}.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{ctg}^k x}{k}.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^{2k} \sin(x - \pi k)}{k}.$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k x^{4k} \sin(2x + \pi k)}{k}.$$

27.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^k}.$$

28.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 3)^k}.$$

29.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 + 2x|^k}.$$

30.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 - x|^k}.$$

31.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}.$$

32.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2}{k^2 x^{2k+1}}.$$

33.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(x+k)^k}.$$

34.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(x-k)^{k/2}}.$$

35.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(x-1)^k}.$$

36.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2-4)^k}.$$

37.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{(x-k)(x+2k)}.$$

38.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x-k^2)(k+e^x)}.$$

39.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{|x|}}.$$

40.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} k^{|x-1|}}.$$

41.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2-1|^k}.$$

42.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2+1|^k}.$$

43.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{|x|}}.$$

44.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} k^{|x-1|}}.$$

45.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[k]{k}(1+x^k)}.$$

46.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k+|x|^k}.$$

47.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{\prod_{j=1}^k (1+x^j)}.$$

48.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^k)}{k^x}.$$

49.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k(x^k + x^{-k} / k^3).$$

50.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{-3}(x^k + x^{-k} k).$$

4. Дослідіть ряд на рівномірну збіжність на множині E

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^k}, E = [4; 5].$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 3)^k}, E = (-\infty; -4).$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 + 2x|^k}, E = (-\infty; -4).$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 - x|^k}, E = [4; +\infty).$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k+1}}{k \ln^2(1+k)}, E = [0; 2].$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^2}{k^2 x^{2k+1}}, E = [1; +\infty).$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(x+1)^{\sqrt{2k+1}}}, E = [1; +\infty).$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(x-k)^{k/2}}, E = (-\infty; 0).$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} kx e^{-kx}, E = [0; +\infty).$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k \sin^2 kx}{k(2k-1)2^k}, E = [-2; 2].$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{k^2}}{k^k}, E = [-3; -1].$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{|x-1|}}{k^4}, E = [0; 2].$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(k+e^x)}, E = (-1; +\infty).$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+xk^2}, E = [0; 1].$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|x^2 - 1|^k}, E = [-1; -1/2].$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k} k^{|x-1|}}, E = [2; +\infty).$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2k-1} \cos^2 kx}{k^2 4^k}, E = [-7; 3].$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{k^{|x+1|}}, E = (-\infty; -3).$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+x^{\sqrt{k}})}, E = (2; +\infty).$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2 + |x|^k}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^{3k+1}}{k 2^{k+1}}, E = [1; 3/2].$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln(1+x^k)}{k^2}, E = [-1; 1].$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} k^{-3} \left(\frac{x^k}{3^k} + x^{-k} \right), E = (-2; -1).$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \left(x^k + \frac{1}{x^k 3^k} \right), E = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right).$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k-1}}{2^k k}, E = (0; 1/2).$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}, E = [0; +\infty).$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x^k}, E = (2; +\infty).$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{(x-3)^k}, E = (-\infty; -1).$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{1-x^{2k}}}{2^k}, E = [-1; 1].$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{1+k^4 x^2}, E = (0; +\infty).$$

$$31. \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{x^k}{4^{2k}}, E = [0; 3].$$

$$32. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{x^2 + k^2}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$33. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1+x^{2k}}, E = (1; +\infty).$$

$$34. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+k)^2}{k^4}, E = [-4; 4].$$

$$35. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{1+x+k^2}, E = [-1; 3].$$

$$36. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+k) \cos kx}{1+k^3}, E = [1; 3].$$

$$37. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{x+3^k}, E = (-3; +\infty).$$

$$38. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{x+k^k}, E = (-1; +\infty).$$

$$39. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(k^2+x^2)}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$40. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2xk}{1+k^2 x^2}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$41. \sum_{k=1}^{\infty} x e^{-kx}, E = [0; +\infty).$$

$$42. \sum_{k=1}^{\infty} x^2 k^2 e^{-kx^2}, E = [0; +\infty).$$

$$43. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)(x+1+k)}, E = (0; +\infty).$$

$$44. \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+1}}{k+1} \right), E = (-1; 1).$$

$$45. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x+\sqrt{k}}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$46. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^k}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$47. \sum_{k=1}^{\infty} e^k \sin \frac{1}{x3^k}, E = (0; +\infty).$$

$$48. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$49. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}, E = (0; +\infty).$$

$$50. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{\sqrt{k(k+x)}}, E = [0; +\infty).$$

$$51. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sin x+k}, E = [0; 2\pi].$$

$$52. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi k}{3}}{\sqrt{k^2+x^2}}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$53. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin x \sin kx}{\sqrt{x+k}}, E = [0; +\infty).$$

$$54. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^2}{(1+x^2)^k}, E = (-\infty; +\infty).$$

$$55. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{x^2 + k}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$56. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\cos x + \sqrt{k}}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$57. \sum_{k=1}^{\infty} e^{-x} \sin(x^2 \sqrt{k}), \quad E = [0; +\infty).$$

$$58. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e^{-kx}}{\sqrt{k + x^2}}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$59. \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-x/k}^{x/k} \operatorname{arctg} t^2 dt, \quad E = [0; 3].$$

$$60. \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-x/k}^{x/k} \sin t^2 dt, \quad E = [-2; 2].$$

5. Використовуючи критерій Коші дослідіть на рівномірну збіжність ряд на множині E

$$1. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$2. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin kx}{2^k}, \quad E = (-\infty; +\infty).$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad E = (-1; 1).$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^k}, \quad E = [0; +\infty).$$

6. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневого ряду

$$1. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{2} x^k}{(k+1)(k-1)k}.$$

$$2. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{12 \sqrt[k]{k} x^k}{9k^2 - 12k - 5}.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 + \ln k}{(k+1)k} x^k.$$

$$4. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^k \ln^2 k}{9k^2 + 21k - 8} x^{2k}.$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(k+2)k} x^k.$$

$$6. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{k}}}{49k^2 - 14k - 48} x^k.$$

$$7. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k+2)}{2^k \sqrt[k]{\ln k}} x^k.$$

$$8. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{36k^2 - 24k - 5}{\sqrt[k]{3^{k+1}}}.$$

$$9. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{5k-2}{\sqrt[k]{2^{k^2+k}}} x^{2k}.$$

$$10. \sum_{k=3}^{\infty} \frac{k^2 \sqrt{2^{k^2+k}}}{k} x^{2k}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k 2^{3k+1}}{(2k+1)!} x^k.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(3k)!}}{5^k} x^k.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2/k)^{(k+1)^2} x^{2k}.$$

$$14. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 4^{k+1} x^{2k}}{(1 + 1/\sqrt{k})^{\sqrt{k}}}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! x^{2k+1}}{\sqrt{2^{k^2}}}.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(k!)^4 x^{2k+1}}{3^{k^2} \ln k}.$$

17.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k^2)! x^k}{(4k)!}.$$

18.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 (2k)!! x^k}{((2k+1)!!)^2}.$$

19.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k} x^{2k}.$$

20.
$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-2k} (1+4^k) x^k.$$

21.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k x^k}{\sqrt{k+1}}.$$

22.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 x^k}{3^k}.$$

23.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k x^{2k+1}}{3^k}.$$

24.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{k+1} x^{3k+1}}{k^2}.$$

25.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{\sqrt{k}}}{k} x^k.$$

26.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{\ln k}}{k+1} x^{2k}.$$

27.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln^2 k}{\sqrt{k+1}} x^{2k}.$$

28.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \sqrt{k+1} e^{\ln^3 k} x^k.$$

29.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k^k}}{k!} x^k.$$

30.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}}}{\sqrt{k!}} x^k.$$

31.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}.$$

32.
$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k.$$

33.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k}.$$

34.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k 2^{k+1} x^{3k+1}.$$

35.
$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} x^k.$$

36.
$$\sum_{k=0}^{\infty} k^{\ln k} x^k.$$

37.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k+1} x^{2k}.$$

38.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k k e^{-\ln^2 k} x^k.$$

39.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^k}{\sqrt{k!}} x^k.$$

40.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}}}{k!} x^k.$$

41.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^k.$$

42.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!}{4^k} x^k.$$

43.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (1-2/k)^{k^2} x^k.$$

44.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{k+1} x^k}{(1+1/k)^{2k}}.$$

45.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k! x^{2k}}{2^{k^2}}.$$

46.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^4 x^{2k}}{3^{k^2}}.$$

47.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 x^k}{(2k)!}.$$

48.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!! x^k}{(2k+1)!!}.$$

49.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-k+1) x^k}{k!}.$$

50.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k}{k! + 1 - \sin \frac{\pi k}{4}} x^{2k}.$$
 51.

$$1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \beta \cdot (\beta + 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)} x^2 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha \cdot (\alpha + 1) \cdot \dots \cdot (\alpha + k - 1) \cdot \beta \cdot (\beta + 1) \cdot \dots \cdot (\beta + k - 1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma + 1)} x^k + \dots$$

52.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k!(k+\nu)!}, \nu \in \mathbb{N}_0.$$

7. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневого ряду

1.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4 (2k)!! (x-3)^{2k}}{((2k+1)!!)^2}.$$

2.
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin \frac{1}{k} (x+2)^{2k}.$$

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k} - \sqrt{k-1}) (x-1)^k.$$

4.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln(1+1/2^k)}{9^k} (x-1)^k.$$

5.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{k} - \sqrt[3]{k-1}) (x+2)^k.$$

6.
$$\sum_{k=2}^{\infty} 2^{2k} \sin \frac{1}{\sqrt{3^k}} x^k.$$

7.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \cos k \sin \frac{1}{k(k+1)} (x+1)^k.$$

8.
$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin e^{-\sqrt{k}}}{2^k} (x-2)^{2k}.$$

9.
$$\sum_{k=3}^{\infty} \sqrt{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{2^k + 3} (x-2)^{2k}.$$

10.
$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{e^k \ln(1+1/3^k)}{k} x^{2k}.$$

11.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k 2^{3k+1}}{(2k+1)!} (x+1)^k$$

12.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{(3k)!}}{5^k} (x+1)^k.$$

13.
$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cos \frac{1}{3^k} (x-1)^{2k}.$$

14.
$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k \cos \frac{1}{2^k} (x+1)^k.$$

15.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (\sqrt[3]{2^k} - \sqrt[3]{2^{k-1}}) (x-1)^k.$$

16.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k} (x+1)^k.$$

17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 8} \cos \frac{1}{k} (x+1)^k .$
18. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2k^3 (x+1)^k}{\sqrt{k^5 + 4k^2 + 3}} .$
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \operatorname{arctg} \frac{1}{3^k} (x+1)^{2k} .$
20. $\sum_{k=1}^{\infty} k \ln \frac{3^k + 2}{3^k + 1} (x+1)^{2k} .$
21. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k^k + 3} (x+1)^k .$
22. $\sum_{k=1}^{\infty} \sin e^{-\sqrt{k}} (x+1)^{2k} .$
23. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2k+3} \operatorname{arctg} \frac{1}{2k+3} (x+3)^{2k} .$
24. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{arctg} 2^{-\sqrt{k}} (x-2)^k .$
25. $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{ctg} \frac{1}{2^k + 2k} (x-2)^{3k} .$
26. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^{-2}}{\ln(1+2^k)} (x+1)^k .$
27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 1}{3^k + 8} \cos \frac{1}{3^k} (x-1)^{2k} .$
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^{\ln k + \sqrt[3]{3}}} (x+1)^k .$
29. $\sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{k+1} \arcsin^2 \frac{1}{2^k} (x-2)^k .$
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k - 3^k}{2^k + 3^k} (x+2)^k .$
31. $\sum_{k=1}^{\infty} k! (x-4)^{k!} .$
32. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{\ln(2^k + k^k)} .$
33. $\sum_{k=1}^{\infty} k! (x+4)^{k^k} .$
34. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k+3^{k-4}} (x-6)^{3k+1} .$
35. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k^2} (x-4)^{k!} .$
36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^k + 3^{2k+3}}{2^k + 5^{k-1}} (x-5)^k .$
37. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1+1/\sqrt{k})^{2k\sqrt{k-1}}}{3^k} (x-4)^k .$
38. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 2}{3^k + 2^{\sqrt{k}}} (x+4)^k .$
39. $\sum_{k=1}^{\infty} 8^k \arcsin^3 e^{-k} (x-2)^k .$
40. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \arcsin \frac{1}{3^k} (x+3)^k .$
41. $\sum_{k=1}^{\infty} (\operatorname{arctg} 2^k - \pi/2) (x+1)^k .$
42. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k}{2^k} (x+2)^k .$

$$43. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(1 + 2 \cos \frac{\pi k}{4}\right)^k}{2^k} (x+3)^k.$$

$$44. \sum_{k=1}^{\infty} \arccos^3 e^{-k} (x+2)^k.$$

$$45. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \ln(1 + 2^{k^2}) (x+2)^k.$$

$$46. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k}{k} (x+1)^k.$$

$$47. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} \operatorname{arccotg} e^{-\sqrt{k}} (x+1)^{2k}.$$

$$48. \sum_{k=1}^{\infty} \arccos \frac{1}{3^k} (x+1)^{2k+1}.$$

$$49. \frac{4}{2} + \frac{4 \cdot 7}{2 \cdot 6} (x+4) + \frac{4 \cdot 7 \cdot 10}{2 \cdot 6 \cdot 10} (x+4)^2 + \dots$$

$$50. \frac{1000}{1} + \frac{1000 \cdot 1001}{1 \cdot 3} (x+3) + \frac{1000 \cdot 1001 \cdot 1002}{1 \cdot 3 \cdot 5} (x+3)^2 + \dots$$

8. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневому ряду та дослідіть степеневий ряд на збіжність на кінцях проміжку збіжності

$$1. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln k}{9 \ln^2 k + 5} (x-2)^k.$$

$$2. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k-1)} (x+2)^k.$$

$$3. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{18}{9k^2 + 21k - 8} (x+2)^k.$$

$$4. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{9 \ln^2 \ln k + 5} (x-2)^k.$$

$$5. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{k^2 + k + 1} (x-1)^k.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4 + 3k}{(k+1)k} (x-1)^k.$$

$$7. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{36k^2 - 24k - 5} (x+1)^k.$$

$$8. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{9 \ln \ln^2 k + 5} (x+1)^k.$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{ke^k}{-k^2 e^k + 1} (x-2)^{2k}.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{e^k}{ke^k + 1} (x+2)^{2k}.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-5k^3 + 3}{6 - k^5 - 4k^4} (x+2)^{2k}.$$

$$12. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{-5k^2 + k - 1} (x-2)^{2k}.$$

$$13. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{2k^2 + k + 1} (x-3)^{2k+1}.$$

$$14. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k^2 + 4k + 3} (x-3)^{2k+1}.$$

$$15. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2 + \sin k} (x+3)^k.$$

$$16. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{-\sqrt{k^4 + 1} + \cos k} (x+3)^k.$$

$$17. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2\sqrt[4]{k^8 + 1}} (x-3)^k.$$

$$18. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} \sin \frac{1}{\sqrt{k}} (x-3)^k.$$

$$19. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2 + 2k}{\sqrt[3]{9k^6 + 1}} (x-4)^k.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k}}{1+k} (x-4)^k.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6 - \ln \ln k + k} (x+4)^k.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{-5k^3 + 3}{6 - k^5 + 4k^4} (x-5)^{2k}.$$

$$25. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\ln \ln k}{k} (x+5)^k.$$

$$27. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3k^2 + (-1)^k k}{4^k} (x-6)^k.$$

$$29. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{\sqrt[3]{k^2 + 1}} (x-7)^{2k}.$$

$$31. \sum_{k=1}^{\infty} k(x-1)^k.$$

$$33. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3 + 1} (x+1)^k.$$

$$35. \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} (x-3)^k.$$

$$37. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-1)^k}{k}.$$

$$39. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} x^k.$$

$$41. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2 + (-1)^k}{k^2} (x+1)^k.$$

$$43. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{6 - \operatorname{arctg} k + k} (x+2)^{2k}.$$

$$45. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{7 - \operatorname{arcctg} k + k} (x+2)^{2k+1}.$$

$$47. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{k}{\sqrt[3]{k^2 + 1}} (x+8)^{2k}.$$

$$22. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{6 - \ln k + k} (x+4)^k.$$

$$24. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^k}{k!} (x-5)^k.$$

$$26. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{(k+2)(k+3)} (x+5)^k.$$

$$28. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-2)^k}{3^k} (x-2)^k.$$

$$30. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{\sqrt[3]{k^2 + 1}} (x-7)^{2k+1}.$$

$$32. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k + 2}{2^k + 3} x^k.$$

$$34. \sum_{k=1}^{\infty} \arcsin^2 \frac{1}{k} (x-1)^k.$$

$$36. \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\operatorname{arctg} e^{-\sqrt{k}}} (x+3)^k.$$

$$38. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k(x+1)^k}{k^2 + 1}.$$

$$40. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}}}{k!} (x+5)^k.$$

$$42. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln \ln k}{\ln^2 \ln k + 1} (x+8)^k.$$

$$44. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k e^k + 1} (x+8)^k.$$

$$46. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{k^2 \ln k + 1} (x+10)^k.$$

$$48. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \ln k}{k \ln^2 k + 1} (x-5)^k.$$

$$49. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^k k}{2^k} (x+2)^{2k+1}.$$

9. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневого ряду та дослідіть степеневий ряд на збіжність на кінцях проміжку збіжності

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 + 3}{(k^4 + 1)\ln(k+1)} (x-2)^k.$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \sin \pi \sqrt{k^2 + 1} (x-2)^k.$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sin^2 k}{k} (x+2)^k.$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^3 + 1)\ln(k+1)} (x+2)^k.$$

$$5. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi k^2}{k+1}}{\ln^2 k} x^k.$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos 2k}{k} x^k.$$

$$7. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k} + (-1)^k} (x-1)^k.$$

$$8. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ln k]}}{k + (-1)^k} (x-1)^k.$$

$$9. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 + \sin \frac{k\pi}{4}} (x+1)^k.$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(3k^3 + 2)\ln(k+1)} (x+1)^k.$$

$$11. \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k+3}{(k^2 + 2)\ln^2(k+1)} (x-2)^k.$$

$$12. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{\sqrt{k} + \sin \frac{k\pi}{4}} (x-2)^k.$$

$$13. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\sqrt[k]{\ln k^2} (k+1)} (x+2)^k.$$

$$14. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{\sqrt[k]{k^2} (k+1)} (x+2)^k.$$

$$15. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)} \cos \frac{1}{k} (x-3)^k.$$

$$16. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{3^k + 1}{3^k + 2^k} (x-3)^k.$$

$$17. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3k^2 + k}{2k^3 + 2} (x+3)^{2k+1}.$$

$$18. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+1}{2k^2 + 1} (x+3)^{2k}.$$

$$19. \sum_{k=2}^{\infty} \frac{3k^2 + k}{7k^4 + 2} x^{2k}.$$

$$20. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4k+1}{2k^3 + 1} x^k.$$

$$21. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k \ln \ln k} (x-2)^{2k+1}.$$

$$22. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k \ln k} (x-2)^{2k}.$$

$$23. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln \ln k} (x-4)^k.$$

$$24. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln k} (x-4)^k.$$

$$25. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln k \ln^2 \ln k} (x+4)^k.$$

$$26. \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{4k+1}{k^2 \ln^2 k} (x+4)^k.$$

27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 1)\ln(k+1)} (x+5)^{2k}$.
28. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^3 + 3)\ln^2(k+1)} (x+5)^{2k}$.
29. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2k^2 + 3}{(k^3 + 2)\ln^2(k+1)} (x-5)^{2k}$.
30. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3 + 2}{(k^4 + 1)\ln(2k+1)} (x-5)^{2k}$.
31. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{\sqrt{k}} x^k$.
32. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{k} x^k$.
33. $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k \ln^2 k} (x-2)^k$.
34. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k^2} (x-2)^k$.
35. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{(2k^2 + 1)\ln^3(k+1)} (x+2)^k$.
36. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^3 + 1}\ln(k+1)} (x+2)^k$.
37. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k^3 + 1}\ln 2k} (x-1)^k$.
38. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k}{k} (x-1)^k$.
39. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{k}]}}{k} (x+1)^k$.
40. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + \sqrt{k}}{(2k^2 + \sqrt{k})} (x+1)^k$.
41. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{\sqrt[3]{k} + \sin \frac{k\pi}{4}} x^{2k}$.
42. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 + \sin \frac{k\pi}{4}} x^{2k}$.
43. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{[k/2]} \frac{1}{\sqrt{k}} x^k$.
44. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{[k/2]} \frac{1}{k} x^k$.
45. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sqrt[k]{k}}{9k^2 + 12k - 5} (x-2)^k$.
46. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{36k^2 - 24k - 5}{\sqrt[k]{3^{k+1}}} (x-2)^k$.
47. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{k}}}{49k^2 + 14k - 48} (x-3)^k$.
48. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^{1+\frac{1}{k}}} (x+3)^{2k}$.
49. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin k \sin k^2}{k} (x-4)^k$.

10. Знайдіть радіус і проміжок збіжності степеневому ряду $\sum_{k=0}^{\infty} c_k (x-a)^k$

1. $a=0, c_k = (1 + 2^k \sin \pi k)^k / 4^k$.

2. $a=0, c_k = (-1)^k \cos k^2 \sin^3 \frac{1}{\sqrt{k}}$.

3. $a=1, c_k = (-2)^{-k} + \frac{k}{k^2 + 1} \cos \frac{1}{k^3}$.

4. $a=-1, c_k = k \frac{(\sqrt{3} + (-1)^k)^k}{k^k}$.

5. $a = -2$, $c_k = (-3)^{-k} + 6^k \arcsin^3 e^{-k}$.
6. $a = 2$, $c_k = \frac{k(3 + (-1)^k)^k}{k!}$.
7. $a = 3$, $c_k = (1 + 1/k)^{-2k} 3^k + (-1)^k / k^2$.
8. $a = -3$, $c_k = \frac{2^k + 3^{2k+3}}{2^k + 5^{k-1} \sin \pi k}$.
9. $a = 4$, $c_k = 2^k \sin \frac{1}{\sqrt{3^k}} + (-1)^k / k^2$.
10. $a = -4$, $c_k = \frac{2^k + 3^{2k+3}}{5 + k! \cos \pi k}$.
11. $a = 0$, $c_k = \begin{cases} k / (k + 1), k = 2m + 1, \\ \frac{-\cos \pi k}{2^k}, k = 2n. \end{cases}$
12. $a = 0$, $c_k = \begin{cases} 1 / k^3, k = 2m + 1, \\ \frac{-k^2 \sin \pi k}{k!}, k = 2n. \end{cases}$
13. $a = 1$, $c_k = \begin{cases} (1 + \sqrt{k}) / k^2, k = 2m + 1, \\ -(1 + \sqrt{k^3}) / k^3, k = 2n. \end{cases}$
14. $a = -1$, $c_k = \begin{cases} 1 / k^2, k = 2m + 1, \\ -1 / k^3, k = 2n. \end{cases}$
15. $a = -3$, $c_k = \frac{3 \sin \pi k}{3^k \sin \frac{\pi}{k}}$.
16. $a = 1$, $c_k = \frac{k^k \sin \pi k + 2^{k(k-1)/2}}{3^k k!}$.
17. $a = -3$, $c_k = \frac{3 \cos \pi k + (-2)^{k(k-1)/2}}{4^k}$.
18. $a = 1$, $c_k = \frac{3 \sin k + (-2)^{k(k-1)/2}}{3^k}$.
19. $a = 4$, $c_k = \begin{cases} 1 / k^{\ln k}, k = 2m + 1, \\ -1 / 3^k, k = 2n. \end{cases}$
20. $a = -4$, $c_k = \begin{cases} 1 / k^3, k = 2m + 1 \\ -1 / 2^k, k = 2n. \end{cases}$
21. $a = 0$, $c_k = \begin{cases} 1 / 4^k, k = 2m + 1, \\ -(1 + 1/k)^{-k}, k = 2n. \end{cases}$
22. $a = -4$, $c_k = \frac{k^2 \cos \frac{k\pi}{4}}{k^2 + \sqrt{k}}$.
23. $a = 4$, $c_k = \begin{cases} 4^k / (4^k + 3^k), k = 2m + 1, \\ -1 / k^k, k = 2n. \end{cases}$
24. $a = 4$, $c_k = \left(\frac{1 + \cos k}{2 + \cos k} \right)^{2k}$.
25. $a = 3$, $c_k = \begin{cases} 1 / 2^k, k = 2m + 1, \\ -1 / (1 + 1/k)^k, k = 2n. \end{cases}$
26. $a = -3$, $c_k = \frac{k \sin \frac{k\pi}{4}}{k^2 + 1}$.
27. $a = 1$, $c_k = \begin{cases} k / (4k^2 + 1), k = 2m + 1, \\ -1 / 4^k, k = 2n. \end{cases}$
28. $a = -4$, $c_k = \left(\frac{1 + \sin k}{3 + \sin k} \right)^k$.
29. $a = -4$, $c_k = k \frac{\sqrt{3} + (-1)^k}{3^k}$.
30. $a = 3$, $c_k = \frac{k(3 + (-1)^k)^k}{3^k}$.
31. $a = -1$, $c_k = \begin{cases} 1 / k^k, k = 2m + 1 \\ -1 / 2^k, k = 2n. \end{cases}$
32. $a = 1$, $c_k = \begin{cases} 1 / 3^k, k = 2m + 1, \\ -1 / 2^k, k = 2n. \end{cases}$

$$33. a = 1, c_k = \begin{cases} 1/3^k, k = 2m + 1, \\ -(1 + 1/k)^{-k^2}, k = 2n. \end{cases}$$

$$35. a = 0, c_k = \begin{cases} 3^k / (2^k + 3^k), k = 2m + 1, \\ -1/2^k, k = 2n. \end{cases}$$

$$37. a = 0, c_k = \begin{cases} k / (2k + 1), k = 2m + 1, \\ -1/2^k, k = 2n. \end{cases}$$

$$39. a = -1, c_k = 1 / \int_1^k \sqrt{1 + x^3} dx.$$

$$41. a = 1, c_k = (e - (1 + 1/k)^k)^2.$$

$$43. a = -4, c_k = \begin{cases} 1/2^k, k = 2m + 1, \\ -1/(2 + 1/k)^k, k = 2n. \end{cases}$$

$$34. a = -2, c_k = \frac{\ln k!}{k^2}.$$

$$36. a = 0, c_k = \frac{3 + (-2)^k}{3^k}.$$

$$38. a = 0, c_k = \frac{3 + (-1)^k}{3^k}.$$

$$40. a = -1, c_k = \int_0^{1/k} \frac{\sqrt{x}}{1 + x^8} dx.$$

$$42. a = 1, c_k = (e - (1 + 1/k)^k).$$

$$44. a_k = \frac{\ln k!}{k}.$$

11. Розвиніть функцію f в ряд Тейлора в околі точки a

$$1. f(x) = \sin^3 x, a = 0.$$

$$2. f(x) = \cos^3 x, a = 0.$$

$$3. f(x) = \ln(1 + x + x^2 + x^3), a = 0.$$

$$4. f(x) = \ln(1 - 3x), a = 0.$$

$$5. f(x) = (1 + x) \ln(1 + x), a = 0.$$

$$6. f(x) = \cos 3x, a = 0.$$

$$7. f(x) = \frac{x}{1 + x - 2x^2}, a = 0.$$

$$8. f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 5x + 6}, a = 0.$$

$$9. f(x) = x \arcsin x^3, a = 0.$$

$$10. f(x) = x \arcsin x^3, a = 0.$$

$$11. f(x) = 10^x, a = 0.$$

$$12. f(x) = 2^{-x}, a = 0.$$

$$13. f(x) = \operatorname{sh} x, a = 0.$$

$$14. f(x) = \operatorname{ch} x, a = 0.$$

$$15. f(x) = (1 + x)e^{-x}, a = 0.$$

$$16. f(x) = (1 + x) \sin x, a = 0.$$

$$17. f(x) = \frac{x \sin \alpha}{1 - 2x \cos \alpha + x^2}, a = 0.$$

$$18. f(x) = \frac{1}{1 + x + x^2}, a = 0.$$

$$19. f(x) = \ln(10 + x), a = 0.$$

$$20. f(x) = \sqrt{3 - x}, a = -1.$$

$$21. f(x) = \ln(1 + x - 6x^2), a = 0.$$

$$22. f(x) = \ln(1 + 2x - 8x^2), a = 0.$$

23. $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, a = 1.$

24. $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}, a = 1.$

25. $f(x) = \frac{1}{(x+3)(x+1)}, a = 2.$

26. $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+1)}, a = -2.$

27. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 2x - 3}, a = -2.$

28. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}, a = 2.$

29. $f(x) = \frac{1}{(1-x^2)^3}, a = 0.$

30. $f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^3}, a = 0.$

31. $f(x) = \frac{1}{1-2x}, a = 0.$

32. $f(x) = \frac{1}{1+3x}, a = 0.$

33. $f(x) = \ln \frac{1}{1+3x}, a = 0.$

34. $f(x) = \ln(1-3x), a = 0.$

35. $f(x) = \sin 2x, a = 0.$

36. $f(x) = \cos 3x, a = 0.$

37. $f(x) = e^{-x/2}, a = 0.$

38. $f(x) = e^{-2x}, a = 0.$

39. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, a = 0.$

40. $f(x) = \sqrt{1-x^2}, a = 0.$

41. $f(x) = \frac{1}{1-x^2}, a = 0.$

42. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}, a = 0.$

43. $f(x) = \frac{1}{2+x}, a = 0.$

44. $f(x) = \frac{1}{-2+x}, a = 0.$

45. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}, a = 0.$

46. $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+1)}, a = 0.$

47. $f(x) = \sin^2 x, a = 0.$

48. $f(x) = \cos^2 x, a = 0.$

49. $f(x) = \frac{1}{2+x}, a = 1.$

50. $f(x) = \frac{1}{-2+x}, a = -1.$

51. $f(x) = \frac{1}{(x-2)(x+1)}, a = 1.$

52. $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+1)}, a = 2.$

53. $f(x) = \sin x, a = \pi/4.$

54. $f(x) = \cos x, a = -\pi/4.$

55. $f(x) = e^x, a = 2.$

56. $f(x) = e^x, a = -2.$

57. $f(x) = e^x \sin x, a = 0.$

58. $f(x) = e^x \cos x, a = 0.$

59. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}, a = 0.$

60. $f(x) = \frac{1}{(1+x)^5}, a = 0.$

61. $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right), a = 0.$

62. $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, a = 0.$

63. $f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt, a = 0.$

64. $f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, a = 0.$

12. Написати перші три ненульові члени розвинення функції f в ряд Тейлора в околі точки a

1. $f(x) = \operatorname{tg} x, a = 0.$

2. $f(x) = \frac{1}{\cos x}, a = 0.$

3. $f(x) = e^{\sin x}, a = 0.$

4. $f(x) = e^{\cos x}, a = 1.$

5. $f(x) = \frac{1}{\sin x}, a = \pi/2.$

6. $f(x) = x^x, a = 1.$

13. Знайдіть $f^{(n)}(a)$

1. $f(x) = x \sin x, a = \pi, n = 8.$

2. $f(x) = x \cos x, a = \pi, n = 8.$

3. $f(x) = \frac{1}{(x+2)(x-1)}, a = -1, n = 10.$

4. $f(x) = \frac{1}{(x-3)(x-1)}, a = 2, n = 10.$

14. Знайдіть суми степеневих рядів

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 - 1/k) x^k.$

2. $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 9k + 5) x^{k+1}.$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+2} \right) x^k.$

4. $\sum_{k=0}^{\infty} (2k^2 + k + 1) x^{k+2}.$

5. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2(2k-3)(k-1)}$.
6. $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 6k + 5)x^{k+1}$.
7. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{2k+1} x^{2k+2}$.
8. $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - 2k - 2)x^{k+1}$.
9. $\sum_{k=1}^{\infty} (2^k - (-1)^k / k)x^{2k}$.
10. $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - 2k - 1)x^{k+1}$.
11. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1 - (-1)^k)x^{2k}}{2k+1}$.
12. $\sum_{k=0}^{\infty} (2k^2 - 2k - 1)x^{k+1}$.
13. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{2^k(2k+1)}$.
14. $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 4k + 3)x^{k+1}$.
15. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{3^k} x^{2k}$.
16. $\sum_{k=0}^{\infty} (2k^2 - k - 2)x^{k+1}$.
17. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1+3^k}{6^k} x^{2k+1}$.
18. $\sum_{k=0}^{\infty} (3k^2 + 8k + 5)x^{k+2}$.
19. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3^k + 2^k}{6^k} x^{2k}$.
20. $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 5k + 3)x^k$.
21. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (1 - 1/k)x^{2k}$.
22. $\sum_{k=0}^{\infty} (4k^2 + 9k + 5)x^{k+2}$.
23. $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - (-1)^k / k)x^{2k}$.
24. $\sum_{k=0}^{\infty} (2k^2 + 8k + 5)x^k$.
25. $\sum_{k=1}^{\infty} (1 - (-1)^k / k)x^{k-1}$.
26. $\sum_{k=0}^{\infty} (3k^2 + 7k + 5)x^k$.
27. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k-1}}{2k(2k-1)}$.
28. $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + k + 1)x^k$.
29. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+2}}{(2k+1)2(k+1)}$.
30. $\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 - k + 1)x^k$.
31. $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k x^k$.
32. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{k2^k}$.

33.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k (x-1)^k}{k}.$$

34.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{3^k}.$$

35.
$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^{-k} x^{2k}.$$

36.
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 4^{-k} x^{2k}.$$

37.
$$\sum_{k=0}^{\infty} kx^{k-1}.$$

38.
$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}.$$

39.
$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

40.
$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^k.$$

41.
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k}}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

42.
$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{4^{2k-2}}{(2k)!} x^{2k}.$$

43.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k(k+1)}.$$

44.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}.$$

15. Вкажіть таке $\Delta > 0$, що абсолютна похибка наближеної формули не перевищує Δ

1.
$$\ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) \approx \frac{1}{2} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{2}.$$

2.
$$\int_0^1 e^{-t^2} dt \approx \sum_{k=0}^3 \int_0^1 \frac{(-t^2)^k}{k!} dt.$$

3.
$$\int_0^2 \frac{\sin t}{t} dt \approx \sum_{k=0}^4 \int_0^2 (-1)^k \frac{t^{2k}}{(2k+1)!} dt.$$

4.
$$\int_0^{1/2} \ln(1+x) dx \approx \sum_{k=1}^3 \int_0^{1/2} (-1)^{k+1} \frac{t^k}{k} dt.$$

16. Знайдіть первісну функції f у вигляді ряду

1.
$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2}.$$

2.
$$f(x) = \frac{e^x}{x^3}.$$

3.
$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}.$$

4.
$$f(x) = \sqrt{1-x^4}.$$

17. Знайдіть модуль і аргумент комплексного числа z

1. $z = i^5.$

2. $z = i^3.$

3. $z = i^6.$

4. $z = 3i^4.$

5. $z = 1 - i.$

6. $z = 1 + i.$

7. $z = -1 - 2i.$

8. $z = -2 + i.$

9. $z = 2e^{i\pi}$.

10. $z = 2e^{-i\pi}$.

11. $z = 3e^{i\pi/3}$.

12. $z = 4e^{-i\pi/4}$.

13. $z = -5e^{2i}$.

14. $z = -4e^{-3i}$.

15. $z = (1+i)(1-2i)$.

16. $z = (1-i)(1-3i)$.

17. $z = \frac{1+i}{1-2i}$.

18. $z = \frac{1-2i}{1+i}$.

18. Знайдіть границю

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} (k \ln(1 + 2/k) + i^k \sqrt{k})$.

2. $\lim_{k \rightarrow \infty} (k \operatorname{arctg}(2/k) + i^k \sqrt{\ln k})$.

3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{k^2 + 2} + 3i\sqrt{k}}{\sqrt{4k^2 + 1} + ik}$.

4. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{k^6 + 2} + 3ik^2}{\sqrt[5]{k^{10} + 2} + ik}$.

19. Дослідіть на збіжність ряд з комплексними членами

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + i}{k^2 - i}$

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 + 1} + i}{\sqrt[4]{k^4 + 1} - i}$

3. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 + i}{k^4 - 4i}$

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{i + n^2}$

5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k + i3^k}$

6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{ki + 3^{k-4}}$

7. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 + i}{2^k k^{3k}}$

8. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2 + (i)^k}{2^k (2k)!}$

9. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k + i}{k^2 + 1}$

10. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - i}{k + i}$

11. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{3^{\sqrt{k}} + i}$

12. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt[3]{k}} + i}$

13. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^{\ln k} - i}$

14. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\ln k} + i}$

20. Знайдіть радіус і круг збіжності степеневого ряду

1. $\sum_{k=1}^{\infty} (i)^k \frac{\ln k}{k+i} z^{2k}$.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} (i)^k \frac{k+i}{2^k + i} z^k$.

3.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k \frac{k^k + i}{\sqrt{k!}} z^k.$$

4.
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^{\sqrt{k}} - i}{k! + i} z^k.$$

5.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+i} (z+i)^k.$$

6.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-i)^k}{2^k + i}.$$

7.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-2i)^{2k}}{i + (2k)!}.$$

8.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{i + k!}{2^k - i} (z-3i)^k.$$

9.
$$\sum_{k=1}^{\infty} (-2i)^k (1+1/k)^k (z+1+2i)^k$$

10.
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-1-2i)^k}{2k + i2^k}.$$

21. Знайдіть інтеграл

1.
$$\int_0^{\pi} t e^{-it} dt.$$

2.
$$\int_0^{\pi} \cos t e^{-it} dt.$$

3.
$$\int_0^1 t(1-it) dt.$$

4.
$$\int_0^{\pi} \sin t e^{-it} dt.$$

15. Відповіді до вправ і задач розрахункового характеру

- 6.31.** $R=1, (-1;1)$. **6.32.** $R=1, (-1;1)$. **6.33.** $R=\sqrt{2}, (-\sqrt{2};\sqrt{2})$. **6.34.** $R=\sqrt[3]{2}, (-\sqrt[3]{2};\sqrt[3]{2})$. **6.35.** $R=+\infty, (-\infty;+\infty)$. **6.36.** $R=0$. **6.37.** $R=1, (-1;1)$. **6.38.** $R=1, (-1;1)$. **6.39.** $R=0$. **6.41.** $R=+\infty, (-\infty;+\infty)$. **6.42.** $R=0$. **6.43.** $R=e^2, (-e^2;e^2)$. **6.44.** $R=3, (-3;3)$. **6.45.** $R=+\infty, (-\infty;+\infty)$. **6.46.** $R=+\infty, (-\infty;+\infty)$. **6.47.** $R=1/4, (-1/4;1/4)$. **6.48.** $R=1, (-1;1)$. **6.49.** $R=1, (-1;1)$. **6.50.** $R=+\infty, (-\infty;+\infty)$. **6.51.** $R=1, (-1;1)$. **6.52.** $R=+\infty, (-\infty;+\infty)$. **7.31.** $R=1, (-3;5)$. **7.32.** $R=1, (-3;-1)$. **7.34.** $R=\sqrt[3]{3}, (6-\sqrt[3]{3};6+\sqrt[3]{3})$. **7.36.** $R=5/9, (40/9;50/9)$. **7.37.** $R=3/e, (4-3/e;4+3/e)$. **7.38.** $R=3/2, (-11/2;-5/2)$. **7.39.** $R=e^3/9, (2-e^3/9;2+e^3/9)$. **7.40.** $R=3/2, (-9/2;-3/2)$. **7.41.** $R=2, (-3;1)$. **7.43.** $R=3/2, (-9/2;-3/2)$. **7.44.** $R=1, (-3;-1)$. **7.45.** $R=1, (-3;-1)$. **7.47.** $R=\sqrt{3}, (-1-\sqrt{3};-1+\sqrt{2})$. **7.48.** $R=1, (-2;0)$. **7.49.** $R=4/3, (-16/3;-8/3)$. **7.50.** $R=2, (-5;-1)$. **8.31.** $R=1, (0;2)$, в точках $x=0$ і $x=2$ ряд розбігається. **8.32.** $R=1, (-1;1)$, в точках $x=-1$ і $x=1$ ряд розбігається. **8.33.** $R=1, (-2;0)$, в точках $x=-2$ і $x=0$ ряд збігається абсолютно. **8.34.** $R=1, (0;2)$, в точках $x=0$

і $x = 2$ ряд збігається абсолютно. **8.35.** $R = 1, (2; 4)$, в точках $x = 2$ і $x = 4$ ряд збігається абсолютно. **8.36.** $R = 1, (-4; -2)$, в точках $x = -4$ і $x = -2$ ряд збігається абсолютно. **8.37.** $R = 1, (0; 2)$, в точці $x = 0$ ряд збігається умовно, і в точці $x = 2$ ряд розбігається. **8.38.** $R = 1, (-2; 0)$, в точці $x = -2$ ряд збігається умовно, і в точці $x = 0$ ряд розбігається. **8.39.** $R = +\infty, (-\infty; +\infty)$. **8.41.** $R = 1, (-2; 0)$, в точках $x = -2$ і $x = 0$ ряд збігається абсолютно. **8.42.** $R = 1, (-9; -7)$, в точці $x = -9$ ряд збігається умовно, в точці $x = -7$ ряд розбігається. **8.43.** $R = 1, (-3; -1)$, в точках $x = -3$ і $x = -1$ ряд розбігається. **8.44.** $R = 1, (-9; -7)$, в точці $x = -9$ ряд збігається умовно, в точці $x = -7$ ряд розбігається. **8.45.** $R = 1, (-3; -1)$, в точках $x = -3$ і $x = -1$ ряд розбігається. **8.46.** $R = 1, (-11; -9)$, в точці $x = -11$ ряд збігається умовно, в точці $x = -9$ ряд розбігається. **8.47.** $R = 1, (-9; -7)$, в точках $x = -9$ і $x = -7$ ряд розбігається. **8.48.** $R = 1, (4; 6)$, в точці $x = 4$ збігається умовно, в точці $x = 6$ ряд розбігається. **8.49.** $R = 1, (-3; -1)$, в точках $x = -3$ і $x = -1$ ряд збігається абсолютно. **9.31.** $R = 1, (-1; 1)$, в точці $x = 1$ ряд збігається умовно, в точці $x = -1$ ряд розбігається. **9.32.** $R = 1, (-1; 1)$, в точці $x = 1$ ряд збігається умовно, в точці $x = -1$ ряд розбігається. **9.33.** $R = 1, (1; 3)$, в точках $x = 1$ і $x = 3$ ряд збігається абсолютно. **9.34.** $R = 1, (1; 3)$, в точках $x = 1$ і $x = 3$ ряд збігається абсолютно. **9.35.** $R = 1, (-3; -1)$, в точках $x = -3$ і $x = -1$ ряд збігається абсолютно. **9.36.** $R = 1, (-3; -1)$, в точках $x = -3$ і $x = -1$ ряд збігається абсолютно. **9.37.** $R = 1, (0; 2)$, в точці $x = 2$ ряд збігається умовно, в точці $x = 0$ ряд розбігається. **9.39.** $R = 1, (-2; 0)$, в точках $x = -2$ і $x = 0$ ряд збігається умовно. **9.40.** $R = 1, (-2; 0)$, в точках $x = -2$ і $x = 0$ ряд збігається абсолютно. **9.41.** $R = 1, (-1; 1)$, в точках $x = -1$ і $x = 1$ ряд розбігається. **9.42.** $R = 1, (-1; 1)$, в точках $x = -1$ і $x = 1$ ряд збігається абсолютно. **9.43.** $R = 1, (-1; 1)$, в точках $x = -1$ і $x = 1$ ряд збігається умовно. **9.44.** $R = 1, (-1; 1)$, в точках $x = -1$ і $x = 1$ ряд збігається умовно. **9.45.** $R = 1, (1; 3)$, в точках $x = 1$ і $x = 3$ ряд збігається абсолютно. **9.46.** $R = 1, (1; 3)$, в точках $x = 1$ і $x = 3$ ряд розбігається. **9.47.** $R = 1, (2; 4)$, в точках $x = 2$ і $x = 4$ ряд збігається абсолютно. **9.48.** $R = 1, (-1; 1)$, в точках $x = -1$ і $x = 1$ ряд збігається умовно. **9.49.** $R = 1, (3; 5)$, в точках $x = 3$ і $x = 5$ ряд розбігається. **10.31.** $R = 2, (-3; 1)$. **10.32.** $R = 2, (-1; 3)$. **10.33.** $R = e, (1 - e; 1 + e)$. **10.34.** $R = 1, (-3; -1)$.

- 10.35.** $R=1, (-1;1)$. **10.36.** $R=3/2, (-3/2;3/2)$. **10.37.** $R=1, (-1;1)$. **10.38.** $R=3, (-3;3)$. **10.39.** $R=1, (-2;0)$. **10.40.** $R=1, (-2;0)$. **10.41.** $R=1, (0;2)$. **10.42.** $R=1, (0;2)$. **10.43.** $R=2, (-3;1)$. **10.44.** $R=1, (-6;-2)$. **11.31.** $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k x^k, x \in (-1/2;1/2)$.
- 11.32.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k 3^k x^k, x \in (-1/3;1/3)$. **11.33.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{3^{k+1}}{k+1} x^k, x \in (-1/3;1/3]$. **11.34.** $-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^{k+1}}{k+1} x^k, x \in [-1/3;1/3)$. **11.35.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k+1}}{(2k+1)!} x^{2k+1}, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.36.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{3^{2k}}{(2k)!} x^{2k}, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.37.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{2^k k!}, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.38.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{k!} x^k, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.39.** $1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!} x^{2k}, x \in (-1;1)$. **11.40.** $1 - \frac{x^2}{2} - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} x^{2k}, x \in (-1;1)$. **11.41.** $\sum_{k=0}^{\infty} x^{2k}, x \in (-1;1)$. **11.42.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}, x \in (-1;1)$. **11.43.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} x^k, x \in (-2;2)$. **11.44.** $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^{k+1}}, x \in (-2;2)$. **11.45.** $-\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right) x^k, x \in (-1;1)$. **11.46.** $-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k + \frac{1}{3^{k+1}}\right) x^k, x \in (-1;1)$. **11.47.** $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.48.** $1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k-1}}{(2k)!} x^{2k}, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.49.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{3^{k+1}} (x-1)^k, x \in (-2;4)$. **11.50.** $-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^k}{3^{k+1}}, x \in (-4;2)$. **11.51.** $-\frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{2^{k+1}}\right) (x-1)^k, x \in (0;2)$. **11.52.** $-\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left((-1)^k + \frac{1}{3^{k+1}}\right) (x-1)^k, x \in (1;3)$. **11.55.** $e^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k!}, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.56.** $e^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k!}, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.57.** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k/2} \sin \frac{k\pi}{4}}{k!} x^k, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.58.** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k/2} \cos \frac{k\pi}{4}}{k!} x^k, x \in (-\infty;+\infty)$. **11.59.** $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)x^k, x \in (-1;1)$. **11.60.** $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)}{2 \cdot 3 \cdot 4} x^k, x \in (-1;1)$. **11.61.** $x + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k+1)(2k)!!} x^{2k+1}, x \in [-1;1]$. **11.63.**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(2k+1)} x^{2k+1}, \quad x \in (-\infty; +\infty). \quad \mathbf{11.64.} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+1)!} x^{2k+1}, \quad x \in (-\infty; +\infty).$$

$$\mathbf{12.31.} \quad 2x/(1-2x), \quad x \in (-1/2; 1/2). \quad \mathbf{12.32.} \quad -\ln(2+x), \quad x \in (-2; 2]. \quad \mathbf{12.33.}$$

$$-\ln(3-2x), \quad x \in (-1/2; 3/2]. \quad \mathbf{12.34.} \quad 3/(4-x), \quad x \in (-4; 2). \quad \mathbf{12.35.} \quad 3/(3-x^2),$$

$$x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3}). \quad \mathbf{12.36.} \quad 4/(4+x^2), \quad x \in (-2; 2). \quad \mathbf{12.37.} \quad 1/(1-x)^2, \quad x \in (-1; 1). \quad \mathbf{12.38.}$$

$$2/(1-x)^3, \quad x \in (-1; 1). \quad \mathbf{12.39.} \quad x/(1-x)^2, \quad x \in (-1; 1). \quad \mathbf{12.40.} \quad 2x^2/(1-x)^3, \quad x \in (-1; 1).$$

$$\mathbf{12.41.} \quad (1/3)\sin 3x, \quad x \in (-\infty; \infty). \quad \mathbf{12.42.} \quad (1/4)\cos 4x, \quad x \in (-\infty; \infty). \quad \mathbf{12.43.}$$

$$1 + \frac{1-x}{x} \ln(1-x), \quad x \in [-1; 1]. \quad \mathbf{12.44.} \quad \operatorname{arctg} x, \quad x \in [-1; 1].$$

Розділ 12. Ряди Фур'є

Тригонометричні ряди були використані французьким математиком і фізиком Ж. Фур'є при вивченні поширення тепла. Пізніше ряди Фур'є використовувалися при вивченні багатьох інших явищ природи. З часом була побудована розвинута теорія цих рядів, яка своєю чергою дала поштовх до розвитку нових розділів математики.

1. Зауваження про періодичні функції. Функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ називається періодичною, якщо знайдеться таке число $T \neq 0$, що

$$(\forall x \in D(f)) : f(x \pm T) = f(x).$$

При цьому таке число $T \neq 0$ називається періодом функції f , а сама функція f називається T -періодичною. Похідна періодичної функції є періодичною функцією, а первісна не обов'язково є періодичною функцією. Детальніше про це сказано в наступних прикладах.

Приклад 1. Якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є інтегровною на проміжку $[0; T]$,

періодичною і T – її період, то $\int_0^T f(x) dx = \int_a^{a+T} f(x) dx$ для кожного $a \in \mathbb{R}$, бо

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x-T) dx \\ &= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(t) dt = \int_0^T f(x) dx. \end{aligned}$$

Приклад 2. Якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є T -періодичною і диференційовною на \mathbb{R} , то функція f' є T -періодичною, бо

$$f'(x+T) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+T+\Delta x) - f(x+T)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Приклад 3. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є неперервною на \mathbb{R} і T -періодичною, то функція $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ подається у вигляді $F(x) = ax + \tilde{F}(x)$,

де $a \in \mathbb{C}$ і функція $\tilde{F}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є T -періодичною. Справді, $F'(x) = f(x)$ і

$$F'(x+T) = f(x). \quad \text{Тому} \quad F(x+T) - F(T) = \int_0^x f(x)dx. \quad \text{Отже,}$$

$F(x+T) = F(x) + F(T)$. Нехай $\tilde{F}(x) = F(x) - \frac{F(T)x}{T}$. Тоді $\tilde{F}(x) = F(x) - ax$, де $a = F(T)/T$, і

$$\tilde{F}(x+T) = F(x+T) - F(T)(x+T)/T = F(x) + F(T) - ax - F(T) = F(x) - ax = \tilde{F}(x).$$

Отже, \tilde{F} є T -періодичною функцією і $F(x) = ax + \tilde{F}(x)$.

Приклад 4. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною і інтегровою на кожному скінченному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, то функція $F(x) = \int_{-\pi}^x f(x)dx$ є 2π -

періодичною тоді і тільки тоді, коли $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$, бо

$$F(x+2\pi) - F(x) = \int_{-\pi}^{x+2\pi} f(x)dx - \int_{-\pi}^x f(x)dx = \int_x^{x+2\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

2. Тригонометрична система. Тригонометричний ряд. Система

$$\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$$

називається тригонометричною системою або 2π -періодичною тригонометричною системою. Кожна функція цієї системи є 2π -періодичною.

Теорема 1. Для будь-яких $n \in \mathbb{Z}$ і $m \in \mathbb{Z}$ виконується

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \begin{cases} \pi, & n = m \neq 0, \\ 2\pi, & n = m = 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases} \quad (1)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx dx = \begin{cases} \pi, & n = m \neq 0, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx = 0.$$

Доведення. Якщо $n = m \neq 0$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \pi.$$

Якщо $n = m = 0$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \int_{-\pi}^{\pi} dx = 2\pi.$$

Якщо ж $n \neq m$, то, використовуючи формулу

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)),$$

отримуємо

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(n - m)x + \cos(n + m)x) dx = 0.$$

Звідси випливає (1). Аналогічно, використовуючи формули

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)),$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)),$$

отримуємо інші потрібні рівності. ►

Система

$$\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$$

називається комплексною тригонометричною системою або комплексною 2π -періодичною тригонометричною системою. Кожна функція цієї системи є 2π -періодичною і для будь-яких $k \in \mathbb{Z}$ і $m \in \mathbb{Z}$ виконується

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx} e^{-imx} dx = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ 2\pi, & k = m. \end{cases}$$

Тригонометричним рядом або рядом за 2π -періодичною тригонометричною системою називають ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \quad (2)$$

Числа a_k і b_k називаються коефіцієнтами тригонометричного ряду.

Теорема 2. Якщо тригонометричний ряд (2) є рівномірно збіжним на

проміжку $[-\pi; \pi]$ і має суму $f(x)$, то цей ряд збігається рівномірно на \mathbb{R} , функція $f \in 2\pi$ -періодичною і неперервною на \mathbb{R} , і його коефіцієнти знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (3)$$

Доведення. Оскільки члени розглядуваного ряду є 2π -періодичними і неперервними функціями, то розглядуваний ряд збігається також рівномірно на \mathbb{R} і функція $f \in 2\pi$ -періодичною і неперервною на \mathbb{R} . Тому, скориставшись теоремою про почленне інтегрування рядів і теоремою 1, отримуємо

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nxdx \\ &= \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \cos nxdx = a_n, \\ & \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nxdx \\ &= \frac{a_0}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \sin nxdx = b_n, \end{aligned}$$

звідки випливає (3). ►

Ряд

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (4)$$

називається комплексним тригонометричним рядом на $[-\pi; \pi]$ або рядом за комплексною 2π -періодичною тригонометричною системою. Ряд (4) називається збіжним (у звичайному розумінні) на множині E , якщо на цій множині є збіжним кожний з рядів

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{ikx} = \sum_{m=1}^{+\infty} c_{-m} e^{-imx}.$$

Теорема 3. Якщо ряд (4) є рівномірно збіжним на проміжку $[-\pi; \pi]$, то його коефіцієнти c_k знаходяться за формулою

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (5)$$

Доведення. Скориставшись теоремою про почленне інтегрування функціональних рядів, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikx-inx} dx = c_n,$$

звідки випливає (5). ►

Приклад 1. Згідно з ознакою Вейєрштрасса, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k^2}$ збігається рівномірно і абсолютно на \mathbb{R} .

Приклад 2. Оскільки $\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\sin \frac{\varepsilon}{2}}$, то, згідно з

ознакою Діріхле, ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}$ для кожного $\varepsilon \in (0; \pi/2)$ на проміжку $(\varepsilon; \pi - \varepsilon)$

збігається рівномірно. Крім цього, якщо $S_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\sin kx}{k}$, то

$$|S_{2n}(1/n) - S_n(1/n)| = \left| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin k/n}{k} \right| \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\sin 1}{k} \geq \frac{\sin 1}{2}.$$

Тому, згідно з критерієм Коші збіжності ряду, на проміжку $(0; \pi)$ розглядуваний ряд збігається нерівномірно.

Приклад 3. Якщо $a \in (0; 1)$, $\varphi \in \mathbb{R}$ і $q = ae^{i\varphi}$, то $|q| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ і

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k (\cos k\varphi + i \sin k\varphi) = \frac{1 - a \cos \varphi + ia \sin \varphi}{|1 - q|^2}.$$

Тому

$$\sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos kx = \frac{1 - a \cos x}{1 - 2a \cos x + a^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin kx = \frac{a \sin x}{1 - 2a \cos x + a^2},$$

якщо $a \in (0; 1)$ і $x \in \mathbb{R}$.

Приклад 4. Якщо $a \in (0; 1)$, $f(x) = \ln(1 - 2a \cos x + a^2)$, то

$$f'(\varphi) = \frac{2a \sin \varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin k\varphi,$$

$$f(x) - f(0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \int_0^x \sin k\varphi d\varphi = -2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\cos kx - 1}{k},$$

тобто

$$\ln(1 - 2a \cos x + a^2) - \ln(1 - 2a + a^2) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\cos kx - 1}{k} = -2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\cos kx}{k} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{1}{k}.$$

Отже,

$$\ln(1 - 2a \cos x + a^2) = -2 \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{\cos kx}{k}, \quad a \in (0;1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. Тригонометричний ряд Фур'є на проміжку довжини 2π . Теорема Рімана-Лебега. Множину всіх функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, які є інтегровними за Ріманом на скінченному проміжку $[a; b]$ або абсолютно інтегровними в невластному розумінні на $[a; b]$ позначимо через $R_1[a; b]$. Тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ називається ряд (тут ми пишемо символ " \sim ", а не символ "=", оскільки не знаємо, чи сума ряду дорівнює $f(x)$)

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx. \quad (2)$$

Числа $a_k = a_k(f)$ і $b_k = b_k(f)$ називаються коефіцієнтами Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ за тригонометричною системою. Сума $S(x)$ ряду (1) не обов'язково дорівнює $f(x)$ навіть, якщо ряд (1) є збіжним на $[-\pi; \pi]$. Більше того, існують поточково збіжні скрізь на \mathbb{R} тригонометричні ряди, які не є рядами Фур'є жодної функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$, тобто їхні коефіцієнти не можна знайти за формулою (2), в якій f – деяка функція з простору $R_1[-\pi; \pi]$. Якщо ряд (1) є рівномірно збіжним на проміжку $[-\pi; \pi]$ до функції f , то за теоремою 2 попереднього пункту він є рядом Фур'є своєї суми – функції f . Далі з'ясуємо, за яких умов і в якому розумінні $S(x) = f(x)$.

Комплексним тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ або рядом Фур'є за системою $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ називається ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (3)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx. \quad (4)$$

Числа $c_k = c_k(f)$ називаються коефіцієнтами Фур'є функції f на $[-\pi; \pi]$ або коефіцієнтами Фур'є функції f за системою $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$.

Тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[a; a + 2\pi]$ на проміжку

$[a; a + 2\pi]$ називається ряд (1), у якому

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Зокрема, тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[0; 2\pi]$ на проміжку $[0; 2\pi]$ називається ряд (1), у якому

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Комплексним тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[a; a + 2\pi]$ на проміжку $[a; a + 2\pi]$ називається ряд (3), у якому

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Зокрема, комплексним тригонометричним рядом Фур'є функції $f \in R_1[0; 2\pi]$ на проміжку $[0; 2\pi]$ називається ряд (3), у якому

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-ikx} dx.$$

Потрібно добре розуміти відмінність термінів “тригонометричний ряд” і “тригонометричний ряд Фур'є функції f ”.

Теорема 1 (Рімана-Лебега). *Нехай функція $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ є інтегровною за Ріманом на проміжку $[a; b]$. Тоді*

$$\int_a^b f(t) e^{-iyt} dt \rightarrow 0, \quad \mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty.$$

Доведення. Нехай $\tau = \{t_k : k \in \overline{0; n}\}$ таке розбиття проміжку $[a; b]$, що

$$a = t_0 < \dots < t_k < \dots < t_n = b, \quad \Delta t_k = t_{k+1} - t_k, \quad \lambda = \max \{ \Delta t_k : k \in \overline{0; n-1} \},$$

$$m_k = \inf \{ f(t) : t \in [t_k; t_{k+1}] \}, \quad p(t) = m_k \text{ для } t \in [t_k; t_{k+1}), \quad k \in \overline{0; n-1} \text{ і } p(b) = f(b).$$

Тоді для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться $\delta > 0$ таке, що

$$0 \leq \int_a^b f(t) dt - \underline{\sigma} < \varepsilon, \quad \underline{\sigma} := \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta t_k,$$

якщо $\lambda < \delta$. Тому

$$\left| \int_a^b f(t) e^{-iyt} dt - \int_a^b p(t) e^{-iyt} dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - p(t)| dt = \int_a^b (f(t) - p(t)) dt = \int_a^b f(t) dt - \underline{\sigma} < \varepsilon.$$

Але

$$\int_a^b p(t)e^{-iyt} dt = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-iyt} dt = \frac{1}{-iy} \sum_{k=0}^{n-1} m_k (e^{-iyt_{k+1}} - e^{-iyt_k}) \rightarrow 0.$$

Звідси випливає потрібне. ►

Наслідок 1. Якщо $[a; b] \subset \mathbb{R}$ і $f \in R_1[a; b]$, то

$$\int_a^b f(t)e^{-iyt} dt \rightarrow 0, \quad \mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty.$$

Доведення. Справді, нехай, наприклад, інтеграл є невласним у точці b .

Тоді

$$\int_a^b f(t)e^{-iyt} dt = \int_a^{b-\delta} f(t)e^{-iyt} dt + \int_{b-\delta}^b f(t)e^{-iyt} dt.$$

Для заданого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що

$$\left| \int_{b-\delta}^b f(x)e^{-iyx} dx \right| \leq \int_{b-\delta}^b |f(x)| dx < \varepsilon$$

для всіх $y \in \mathbb{R}$. З іншого боку, за теоремою Рімана-Лебега

$$\left| \int_a^{b-\delta} f(x)e^{-iyx} dx \right| < \varepsilon,$$

якщо $|y|$ є достатньо великим. ►

Наслідок 2. Коефіцієнти Фур'є кожної функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ прямують до нуля: $a_k(f) \rightarrow 0$ і $b_k(f) \rightarrow 0$, якщо $\mathbb{N} \ni k \rightarrow \infty$, і $c_k(f) \rightarrow 0$, якщо $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty$.

Приклад 1. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 e^{-iyx} dx \rightarrow 0, \quad \mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty.$

Приклад 2. $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx \rightarrow 0, \quad \mathbb{N} \ni k \rightarrow \infty.$

Приклад 3. $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin kx dx \rightarrow 0, \quad \mathbb{N} \ni k \rightarrow \infty.$

Приклад 4. Якщо $f(x) = x$, то $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$ і

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$$

є тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Приклад 5. Якщо $f(x) = x$, то

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0,$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx} dx = \frac{e^{-ik\pi} + e^{ik\pi}}{-2ik} + \frac{e^{-ik\pi} - e^{ik\pi}}{2\pi k^2} = \frac{\cos k\pi}{-ik} + \frac{\sin k\pi}{i\pi k^2} = \frac{(-1)^{k+1}}{ik}$$

для $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, бо $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, $\cos k\varphi = \frac{e^{ik\varphi} + e^{-ik\varphi}}{2}$ і $\sin k\varphi = \frac{e^{ik\varphi} - e^{-ik\varphi}}{2i}$.

Тому ряд

$$x \sim \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^{k+1}}{ik} e^{ikx}$$

є комплексним тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Приклад 6. Якщо $f \in R_1[-\pi; \pi]$ і f є 2π -періодичною, неперервно диференційовною функцією на проміжку $[-\pi; \pi]$, то інтегруючи частинами, отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx &= \frac{f(\pi) e^{-ik\pi} - f(-\pi) e^{ik\pi}}{-ik} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = \\ &= \frac{2f(\pi) \sin k\pi}{ik} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = o(1/k), \quad \mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Аналогічно, якщо $f \in R_1[-\pi; \pi]$, f є 2π -періодичною функцією і для деякого $m \in \mathbb{Z}$ функція $f^{(m-1)}$ є неперервною на проміжку $[-\pi; \pi]$, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = o(1/k^m), \quad \mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty.$$

Приклад 7. Оскільки $\left| \sum_{k=1}^n \sin kx \right| = \left| \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$ для

$x \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\}$, то згідно з ознакою Діріхле для кожного $x \in \mathbb{R}$ ряд $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin kx}{\ln k}$ є

збіжним. Проте, можна переконатись, що він не є рядом Фур'є жодної функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$.

Приклад 8. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною і неперервно диференційовною функцією на проміжку $[-\pi; \pi]$, то формально продиференційований тригонометричний ряд Фур'є функції f є рядом Фур'є функції f' , бо інтегруючи частинами, отримуємо

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{-i}{2k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-ikx} dx = -\frac{i}{k} c_k(f').$$

Приклад 9. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною, неперервною на проміжку $[-\pi; \pi]$, $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ і $F(x) = \int_{-\pi}^x f(x) dx$, то $c_k(F) = -ic_k(f)/k$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, і $c_k(F) = o(1/k)$, якщо $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty$, бо інтегруванням частинами отримуємо

$$c_k(F) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi ik} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = -ic_k(f)/k.$$

Приклад 10. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є функцією обмеженої варіації на проміжку $[-\pi; \pi]$, то $a_k(f) = O(1/k)$ і $b_k(f) = O(1/k)$, якщо $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty$. Справді, можна вважати, що $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є неспадною на $[-\pi; \pi]$. За другою теоремою про середнє

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{f(-\pi)}{\pi} \int_{-\pi}^c \cos kx dx + \frac{f(-\pi)}{\pi} \int_c^{\pi} \cos kx dx = O(1/k)$$

для деякого $c \in (-\pi; \pi)$. Аналогічно отримуємо, що $b_k(f) = O(1/k)$, $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty$.

4. Формула для n -ої частинної суми тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Теорема 1. Нехай функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ належить до класу $R_1[-\pi; \pi]$ і є 2π -періодичною. Тоді

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad (1)$$

де

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx \quad (2)$$

– n -а частинна сума ряду Фур'є функції f , а

$$D_n(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)} \quad (3)$$

– ядро Діріхле.

Доведення. Маємо

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt + \sum_{k=1}^n \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(x-t) \right) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t-x) dt \\ &= \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+u) D_n(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \end{aligned}$$

бо

$$\begin{aligned} 2 \sin \alpha \cos \beta &= \sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta), \\ 2 \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) \sin \frac{t}{2} \\ &= \sin \frac{t}{2} + \sum_{k=1}^n (\sin(k+1/2)t - \sin(k-1/2)t) = \sin(n+1/2)t \end{aligned}$$

і, крім цього, для 2π -періодичних функцій

$$\int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} F(u) du,$$

та

$$D_n(t+2\pi) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((n+1/2)t + \pi)}{\sin(\pi + t/2)} = D_n(t). \blacktriangleright$$

Зауваження 1.

$$\begin{aligned} c_{-k} e^{-ikx} + c_k e^{ikx} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (e^{ik(t-x)} + e^{-ik(t-x)}) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt \cos kx dt \\ &\quad + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt \sin kx dt = a_k \cos kx + b_k \sin kx, \\ \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + b_k \sin kx. \end{aligned}$$

Враховуючи це, ряд Фур'є в комплексній формі будемо далі називати збіжним в узагальненому розумінні (в розумінні головного значення) у точці x до $S(x)$, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k e^{ikx} = S(x).$$

Якщо такий ряд є збіжним в точці x у звичайному розумінні, то він є збіжний в цій точці в узагальненому розумінні. Обернене твердження, взагалі кажучи, не справедливе. На це вказує приклад розбіжного, але збіжного в узагальненому розумінні, в точці $x = 0$ ряду

$$\sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Зі сказаного вище випливає, що кожна теорема про поточкову збіжність дійсного ряду Фур'є справедлива і для комплексного, якщо його збіжність розуміти в узагальненому сенсі.

5. Формули для середніх арифметичних частинних сум тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Теорема 1. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ належить до класу $R_1[-\pi; \pi]$ і є 2π -періодичною, то

$$\sigma_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt, \quad (1)$$

де

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n}, \quad (2)$$

а

$$F_n(t) = \frac{\sin^2(nt/2)}{2\pi n \sin^2(t/2)}$$

– ядро Фейєра.

Доведення. Скориставшись теоремою 1 попереднього пункту, отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} S_k(x) = \frac{1}{2\pi n} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sin(k+1/2)t}{\sin(t/2)} dt \\ &= \frac{1}{2\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t) dt, \end{aligned}$$

бо

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta),$$

$$2 \sin \frac{t}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(k+1/2)t = \sum_{k=0}^{n-1} (\cos kt - \cos(k+1)t) = 1 - \cos nt = 2 \sin^2 \frac{nt}{2}. \blacktriangleright$$

6. Збіжність середніх арифметичних тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.

Теорема 1 (Фейєра). Для кожної неперервної 2π -періодичної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max \{ |f(x) - \sigma_n(x)| : x \in [-\pi; \pi] \} = 0, \quad (1)$$

тобто послідовність $(\sigma_n(x))$ рівномірно на $[-\pi; \pi]$ збігається до f .

Доведення. Оскільки $S_n(x) \equiv 1$ і $\sigma_n(x) \equiv 1$ для $f \equiv 1$, то за теоремою 1 попереднього пункту

$$\int_{-\pi}^{\pi} F_n(t) dt = 1.$$

Тому для досить малого $\delta > 0$ отримуємо

$$\begin{aligned} \sigma_n(x) - f(x) &= \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) F_n(t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi n} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) (f(x+t) - f(x)) \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} dt := \frac{1}{2\pi n} (I_1 + I_2 + I_3). \end{aligned}$$

Оскільки f є обмеженою функцією, тобто $(\exists c_1)(\forall t \in \mathbb{R}) : |f(t)| \leq c_1$, то

$$|I_1| + |I_3| \leq 2c_1 \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \frac{dt}{\sin^2(t/2)} \leq \frac{4c_1}{\sin^2(\delta/2)} (\pi - \delta).$$

Функція f є рівномірно неперервною на \mathbb{R} . Тому

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(\forall t, |t| < \delta) : |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon.$$

Отже,

$$|I_2| \leq \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2(nt/2)}{\sin^2(t/2)} dt = 2\pi n \varepsilon.$$

Звідси та з попередньої нерівності випливає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*)(\forall x \in [-\pi; \pi]) : |\sigma_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon,$$

і, отже, теорема 1 доведена. ►

Подібно можна довести наступне твердження.

Теорема 2. Для кожної функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sigma_n(x)| dx = 0. \quad (2)$$

Зауваження 1. В термінах властивостей середніх арифметичних частинних сум можна описати всі формальні тригонометричні ряди, які є рядами Фур'є функцій з різних просторів. Зокрема, тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

є рядом Фур'є деякої 2π -періодичної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, неперервної на проміжку $[-\pi; \pi]$ тоді і тільки тоді, коли послідовність $(\sigma_n(x))$ середніх арифметичних його частинних сум збігається рівномірно на проміжку $[-\pi; \pi]$ до f , бо необхідність випливає з теореми Фейєра, а достатність – з рівностей:

$$\begin{aligned} a_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) \cos kx dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{S_0(x) + \dots + S_{n-1}(x)}{n} \cos kx dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} S_m(x) \cos kx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} a_k \pi = a_k, \\ b_k(f) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) \sin kx dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} \int_{-\pi}^{\pi} S_m(x) \sin kx dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi n} \sum_{m=0}^{n-1} b_k \pi = b_k. \end{aligned}$$

Зауваження 2. Теорему 1 можна розглядати як аналог відомої з алгебри та геометрії теореми про розклад вектора f по базисних векторах. У цьому зв'язку, відзначимо, що зі збіжності ряду випливає збіжність середніх арифметичних послідовності його частинних сум, але не навпаки. У цьому легко переконатись на прикладі ряду $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k$.

Зауваження 3. У свій час математики вважали, що кожен функцію можна розвинути в ряд Фур'є. Проте, вже неперервні функції показують, що вони помилялися. Разом із цим з розвитком теорії узагальнених функцій (вона зародилася в 30-их – 40-их роках ХХ ст.) стало ясно, що дійсно кожен менш-більш довільну функцію можна розвинути в ряд Фур'є, якщо належним чином дати означення збіжності ряду. Для неперервних функцій це зроблено в теоремі Фейєра.

7. Наближення функцій поліномами.

Теорема 1 (Вейєрштрасса). Кожну неперервну на проміжку $[-\pi; \pi]$ функцію $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ таку, що $f(-\pi) = f(\pi)$, можна в \sup -нормі як завгодно точно наблизити тригонометричними поліномами, тобто для кожної такої функції f знайдеться така послідовність тригонометричних поліномів

$$Q_n(x) = \frac{a_{0,n}}{2} + \sum_{k=1}^{p_n} a_{k,n} \cos kx + b_{k,n} \sin kx,$$

що

$$\max \{ |f(x) - Q_n(x)| : x \in [-\pi; \pi] \} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Ця теорема є безпосереднім наслідком попередньої теореми Фейєра, бо можна взяти $Q_n = \sigma_n$. ►

Теорема 2 (Вейєрштрасса). Для кожного проміжку $[a; b]$, $-\infty < a < b < +\infty$ і кожної функції $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, неперервної на $[a; b]$, знайдеться така послідовність поліномів

$$P_n(x) = \sum_{k=1}^{v_n} d_{k,n} x^k,$$

що

$$\max \{ |f(x) - P_n(x)| : x \in [a; b] \} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доведення. Нехай спочатку $[a; b] = [0; \pi]$ і

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0; \pi], \\ f(-x), & x \in [-\pi; 0]. \end{cases}$$

Згідно з попередньою теоремою для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий тригонометричний поліном Q_m , що

$$\max \{ |Q_m(x) - \tilde{f}(x)| : x \in [-\pi; \pi] \} < \varepsilon / 2.$$

Функції $\cos kx$ та $\sin kx$ розвиваються на $(-\infty; +\infty)$ в степеневі ряди, які є рівномірно збіжні на $[-\pi; \pi]$. Отже, існує такий поліном P_n , що

$$\max \{ |Q_m(x) - P_n(x)| : x \in [-\pi; \pi] \} < \varepsilon / 2.$$

Тому для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий поліном P_n , що

$$\max \{ |f(x) - P_n(x)| : x \in [0; \pi] \} < \varepsilon.$$

Звідси випливає твердження теореми для $[0; \pi]$. Випадок довільного проміжку $[a; b]$ зводиться до проміжку $[0; \pi]$ шляхом розгляду функції

$$F(x) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right), \text{ неперервної на } [0; \pi], \text{ бо, згідно з доведеним вище,}$$

знайдеться такий поліном $T_n(x)$, що

$$\varepsilon > \max \left\{ \left| f\left(a + \frac{b-a}{\pi}x\right) - T_n(x) \right| : x \in [0; \pi] \right\} = \max \left\{ \left| f(t) - T_n\left(\frac{t-a}{b-a}\pi\right) \right| : t \in [a; b] \right\},$$

і $T_n\left(\frac{t-a}{b-a}\pi\right)$ – також поліном. Звідси випливає потрібне. ►

Наслідок 1. Для кожного проміжку $[a;b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, кожної неперервної на $[a;b]$ функції $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{C}$ і кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий поліном P , що $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a;b]$.

Наслідок 2. Для кожного проміжку $[a;b]$, $-\infty < a < b < +\infty$, кожної неперервної на $[a;b]$ функції $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{C}$ і кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий поліном Q з раціональними коефіцієнтами, що $|f(x) - Q(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a;b]$.

Приклад 1. Для функції $f(x) = 1/(1-x)$ не існує полінома P , для якого $\sup\{|f(x) - P(x)| : x \in [0;1)\} \leq 1$, бо в протилежному випадку $+\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0;1)\} \leq \sup\{|P(x)| : x \in [0;1)\} + 1 < +\infty$. З аналогічних міркувань випливає, що для функції $f(x) = e^x$ не існує полінома P , для якого $\sup\{|f(x) - P(x)| : x \in [0;+\infty)\} \leq 1$. Таким чином, у теоремі 2 та наслідку 1 істотною є вимога замкненості і скінченності проміжку $[a;b]$.

Приклад 2. Для кожного проміжку $(a;b)$, $-\infty \leq a < b \leq +\infty$, і для кожної функції $f:(a;b) \rightarrow \mathbb{C}$, неперервної на $(a;b)$, існує послідовність поліномів (P_n) , яка рівномірно збігається до f на кожному проміжку $[\tilde{a};\tilde{b}] \subset (a;b)$. Справді, нехай $((a_n;b_n))$ – така послідовність проміжків, що $a < \dots < a_n < \dots < a_1 < b_1 < \dots < b_n < \dots < b$, $a_n \rightarrow a$ і $b_n \rightarrow b$. Згідно з теоремою Вейєрштраса, для кожного $n \in \mathbb{N}$ знайдеться такий поліном S_n , що $\max\{|f(x) - S_n(x)| : x \in [a_n;b_n]\} \leq 1/n$. Така послідовність (S_n) є шуканою.

Приклад 3. Для кожного $\varepsilon > 0$, кожного проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$ і кожної функції $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, неперервної на \mathbb{R} і рівної нулеві поза $(a;b)$, існує така нескінченно диференційовна на \mathbb{R} функція $\varphi:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, рівна нулеві поза $(a;b)$, що $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$ для всіх $x \in [a;b]$. Справді, нехай

$$\psi_\varepsilon(x) = \begin{cases} f(x) / \psi(x;a,b), & x \in [a_\varepsilon;b_\varepsilon], \\ f(x) / \psi(a_\varepsilon;a,b), & x \in (-\infty;a_\varepsilon), \\ f(x) / \psi(b_\varepsilon;a,b), & x \in (b_\varepsilon;+\infty), \end{cases}$$

де

$$\psi(x;a,b) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{(x-a)^2} - \frac{1}{(x-b)^2}\right), & x \in (a;b), \\ 0, & x \notin (a;b), \end{cases}$$

i для заданого $\varepsilon > 0$ числа a_ε і b_ε підібрано так, щоб $a < a_\varepsilon < (a+b)/2 < b_\varepsilon < b$ і $|f(x)| < \varepsilon/3$ для всіх $x \in [a; a_\varepsilon] \cup [b_\varepsilon; b]$. Функція ψ_ε є неперервною на $[a; b]$. Тому існує такий поліном P , що $|\psi_\varepsilon(x) - P(x)| < \varepsilon/3$ для всіх $x \in [a; b]$. Тому функція $\varphi(x) = \psi(x; a; b)P(x)$ є шуканою.

8. Поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$. Подальші теореми показують, що тригонометричний ряд Фур'є неперервної функції збігається до неї в середньому квадратичному та середньому арифметичному розуміннях. За деяких додаткових умов ряд Фур'є неперервної функції збігається до неї поточною. Разом з цим, можна побудувати неперервну 2π -періодичну функцію, ряд Фур'є якої розбігається у деяких точках. Далі ці питання досліджуються.

Функція f називається кусково диференційовною на проміжку $[a; b]$, якщо знайдуться точки d_k , $k \in \overline{0; n}$, такі, що $a = d_0 < \dots < d_n = b$, на кожному проміжку $(d_k; d_{k+1})$ функція f є диференційовною і існують скінченні границі

$$f(d_k+) := \lim_{x \rightarrow d_k+} f(x), \quad f'(d_k+) := \lim_{x \rightarrow d_k+} \frac{f(x) - f(d_k+)}{x - d_k}, \quad k \in \overline{0; n-1},$$

$$f(d_k-) := \lim_{x \rightarrow d_k-} f(x), \quad f'(d_k-) := \lim_{x \rightarrow d_k-} \frac{f(x) - f(d_k-)}{x - d_k}, \quad k \in \overline{1; n}.$$

Приклад 1. Функція $f(x) = [x]$ є кусково диференційовною на кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

Приклад 2. Функція $f(x) = |x|$ є кусково диференційовною на кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$.

Теорема 1. Якщо функція $f: [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково диференційовною на проміжку $[-\pi; \pi]$, то її тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad (2)$$

збігається у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є 2π -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

i:

а) $S(x) = f(x)$ у кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$, в якій f є неперервною;

б) $S(x) = (f(x+) + f(x-)) / 2$ у кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$;

в) $S(-\pi) = S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2$.

Теорема 2. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною і кусково диференційовною на $[-\pi; \pi]$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума є 2π -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

i:

а) $S(x) = f(x)$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$, в якій f є неперервною;

б) $S(x) = (f(x+) + f(x-)) / 2$ у кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Ці теореми 1 і 2 є рівносильними. Будемо доводити теорему 2. Згадаємо, що

$$S_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) D_n(t) dt, \quad D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\pi \sin(t/2)}.$$

Якщо $f \equiv 1$, то $S_n \equiv 1$. Тому

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t) dt = 2 \int_0^{\pi} D_n(t) dt = 2 \int_{-\pi}^0 D_n(t) dt.$$

Отже,

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x+) + f(x-)}{2} &= \int_0^{\pi} (f(x+t) - f(x+)) D_n(t) dt + \\ &+ \int_{-\pi}^0 (f(x+t) - f(x-)) D_n(t) dt = I_1 + I_2, \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x+)}{\sin \frac{t}{2}} \left(\cos \frac{t}{2} \sin nt + \sin \frac{t}{2} \cos nt \right) dt, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+t) - f(x-)}{\sin \frac{t}{2}} \left(\cos \frac{t}{2} \sin nt + \sin \frac{t}{2} \cos nt \right) dt. \end{aligned}$$

За теоремою Рімана-Лебега $I_1 + I_2 \rightarrow 0$, якщо $n \rightarrow \infty$ і теорема 2 доведена

(рівність Парсеваля доведемо пізніше). ►

З доведення теореми 2 випливають також наступні чотири теореми.

Теорема 3 (Діні). Якщо функція $f \in \mathbb{R}_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною функцією, у точці $x \in \mathbb{R}$ є неперервною або x є точкою розриву першого роду і

$$\int_0^{\pi} \frac{|f(x+t) - f(x+)|}{t} dt < +\infty, \quad \int_{-\pi}^0 \frac{|f(x+t) - f(x-)|}{t} dt < +\infty,$$

то в точці $x \in \mathbb{R}$ ряд Фур'є функції f є збіжним і його сума дорівнює $(f(x+) + f(x-)) / 2$.

Теорема 4. Якщо функція $f \in \mathbb{R}_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною функцією, в точці $x \in \mathbb{R}$ є неперервною або x є точкою розриву першого роду і f задовольняє в точці x умову Гельдера, тобто

$$(\exists c_1 > 0)(\exists \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t, 0 < t < \delta) : |f(x+t) - f(x+)| \leq c_1 t^\alpha,$$

$$(\exists c_2 > 0)(\exists \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t, -\delta < t < 0) : |f(x+t) - f(x-)| \leq c_2 |t|^\alpha,$$

то в цій точці $x \in \mathbb{R}$ тригонометричний ряд Фур'є функції f є збіжним і має суму $(f(x+) + f(x-)) / 2$.

Теорема 5 (принцип локалізації). Якщо функція $f \in \mathbb{R}_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною, то її тригонометричний ряд Фур'є є збіжним у точці $x \in \mathbb{R}$ до числа $S(x)$ тоді і тільки тоді, коли для всіх досить малих $\delta > 0$ виконується

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\delta} D_n(t) (f(x+t) - f(x-t)) dt = S(x).$$

Теорема 6. Якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною і є функцією обмеженої варіації на $[-\pi; \pi]$, то її тригонометричний ряд Фур'є є збіжним у кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ його сума рівна $(f(x+) + f(x-)) / 2$.

Теореми 1-6 залишаються справедливими (з відповідними змінами у формулюваннях) і для тригонометричних рядів Фур'є на будь-якому проміжку $[a; a + 2\pi]$, а також для комплексних тригонометричних рядів. Обмежимося формулюванням двох теорем.

Теорема 7. Якщо функція $f : [0; 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково диференційовною на проміжку $[0; 2\pi]$, то її тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (3)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx, \quad (4)$$

збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є 2π -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ у кожній точці $x \in (0; 2\pi)$, в якій f є неперервною;
- б) $S(x) = (f(x+) + f(x-)) / 2$ у кожній точці $x \in (0; 2\pi)$;
- в) $S(0) = S(2\pi) = (f(0+) + f(2\pi-)) / 2$.

Теорема 8. Якщо функція $f : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково диференці-йовною на проміжку $[-\pi; \pi]$, то її комплексний тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}, \quad (5)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad (6)$$

збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є 2π -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ у кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$, в якій f є неперервною;
- б) $S(x) = (f(x+) + f(x-)) / 2$ у кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$;
- в) $S(-\pi) = S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2$.

Приклад 3. Якщо 2π -періодична функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ визначена на проміжку $[-\pi; \pi)$ рівністю

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = -\pi, \\ 1, & x \in (-\pi; 0), \\ -2, & x = 0, \\ 0, & x \in (0; \pi), \end{cases}$$

то

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \cos kx dx = \begin{cases} 1, & k = 0, \\ 0, & k \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \sin kx dx = \frac{\cos k\pi - 1}{k\pi} = \frac{(-1)^k - 1}{k\pi},$$

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \sin kx = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{(2m-1)\pi} \sin(2m-1)x$$

і

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k - 1}{k\pi} \sin kx = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-2}{(2m-1)\pi} \sin(2m-1)x$$

– ряд Фур'є функції f за 2π -періодичною тригонометричною системою на проміжку $[-\pi; \pi)$. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in \mathbb{R} \setminus (\{-\pi + 2\pi k : k \in \mathbb{Z}\} \cup \{2\pi k : k \in \mathbb{Z}\})$,

$$\begin{aligned} S(-\pi + 2\pi k) &= S(\pi + 2\pi k) = (f(-\pi + 2\pi k+) + f(\pi + 2\pi k-)) / 2 \\ &= (1 + 0) / 2 = 1/2 \neq f(-\pi + 2\pi k) = f(\pi + 2\pi k) = 2, \quad k \in \mathbb{Z}, \end{aligned}$$

$$S(2\pi k) = (S(2\pi k+) + S(2\pi k-)) / 2 = (1 + 0) / 2 = 1/2 \neq f(2\pi k) = -2, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{((2m-1)\pi)^2}, \quad \frac{1}{2} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{((2m-1)\pi)^2},$$

тобто

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{((2m-1)\pi)^2} = \frac{1}{8}.$$

Приклад 4. Якщо $f(x) = x$, то $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = 0$ і

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \cos kx dx = 0, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$, ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$$

є тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[-\pi; \pi]$. При цьому $S(x) = x$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$,

$$S(-\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (-\pi + \pi) / 2 = 0 \neq -\pi = f(-\pi),$$

$$S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (-\pi + \pi) / 2 = 0 \neq \pi = f(\pi),$$

$S(x) \neq x = f(x)$ в кожній точці $x \notin (-\pi; \pi)$ і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

тобто $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \pi^2 / 6$.

Приклад 5. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [-\pi; 0], \\ 1, & x \in (0; \pi], \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} e^{-ikx} dx = \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ \frac{e^{-ik\pi} - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ \frac{\cos k\pi - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} = \begin{cases} 1/2, & k=0, \\ \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Тому

$$S(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} e^{ikx}$$

і

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} e^{ikx}$$

– ряд Фур'є функції f на проміжку $[-\pi; \pi]$ за комплексною 2π -періодичною тригонометричною системою. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\}$,

$$S(0) = (f(0-) + f(0+)) / 2 = (0 + 1) / 2 = 1/2 \neq 0 = f(0),$$

$$S(-\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (0 + 1) / 2 = 1/2 \neq 0 = f(-\pi),$$

$$S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (0 + 1) / 2 = 1/2 \neq 1 = f(\pi),$$

$S(x) \neq f(x)$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi) \setminus \{0\}$ і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} 1 dx = \frac{1}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^k - 1}{-2ki\pi} \right|^2,$$

тобто

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^k - 1}{-2ki\pi} \right|^2 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

9. Поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-l;l]$. Тригонометричним рядом Фур'є функції f на проміжку $[-l;l]$ називається ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx. \quad (2)$$

Тригонометричним рядом Фур'є функції f на $[-l;l]$ в комплексній формі називається ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{k\pi}{l} x}, \quad (3)$$

де

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i \frac{k\pi}{l} t} dt. \quad (4)$$

Теорема 1. Якщо функція $f \in R_1[-l;l]$ є кусково диференційовною на проміжку $[-l;l]$, то її тригонометричний ряд Фур'є (1) збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є $2l$ -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (-l;l)$, в якій f є неперервною;
- б) $S(x) = (f(x+) + f(x-)) / 2$ в кожній точці $x \in (-l;l)$;
- в) $S(-l) = S(l) = (f(-l+) + f(l-)) / 2$.

Теорема 2. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є $2l$ -періодичною і кусково диференційовною на $f \in R_1[-l;l]$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума є $2l$ -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

- а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, в якій f є неперервною;

б) $S(x) = (f(x+) + f(x-)) / 2$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Ці теореми доводяться на основі відповідних теорем для проміжку $[-\pi; \pi]$ шляхом розгляду функції $F(x) = f(lx / \pi)$. ►

Приклад 1. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-l; 0), \\ 0, & x \in [0; l], \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-ik\pi x/l} dx = \frac{-1}{2l} \int_{-l}^0 e^{-ik\pi x/l} dx = \begin{cases} -1/2, & k=0, \\ \frac{e^{ik\pi} - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} -1/2, & k=0, \\ \frac{\cos k\pi - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \end{cases} = \begin{cases} -1/2, & k=0, \\ \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik}, & k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \end{cases} \end{aligned}$$

Тому

$$S(x) = -\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} e^{ik\pi x/l}$$

і

$$f(x) \sim -\frac{1}{2} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} e^{ik\pi x/l}$$

– ряд Фур'є функції f на проміжку $[-l; l]$ за комплексною $2l$ -періодичною тригонометричною системою. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (-l; l) \setminus \{0\}$,

$$S(0) = (f(0-) + f(0+)) / 2 = (-1 + 0) / 2 = -1/2 \neq 0 = f(0),$$

$$S(-l) = (f(-l+) + f(-l-)) / 2 = (-1 + 0) / 2 = -1/2 \neq -1 = f(-l),$$

$$S(l) = (f(-l+) + f(l-)) / 2 = (-1 + 0) / 2 = -1/2 \neq 0 = f(l),$$

$S(x) \neq f(x)$ в кожній точці $x \notin (-l; l) \setminus \{0\}$, і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^0 dx = \frac{1}{4} + \sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} \right|^2,$$

тобто

$$\sum_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \left| \frac{(-1)^k - 1}{-2\pi ik} \right|^2 = \frac{1}{4}, \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

10. Поточкова збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку

$[\alpha; \beta]$. Тригонометричним рядом Фур'є функції f на проміжку $[\alpha; \beta]$ називається ряд

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{\beta - \alpha} dx, \quad b_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{\beta - \alpha} dx. \quad (2)$$

Тригонометричним рядом Фур'є функції f на $[\alpha; \beta]$ в комплексній формі називається ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x}, \quad (3)$$

де

$$c_k = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{-i \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}} dt. \quad (4)$$

Теорема 1. Якщо функція $f \in R_1[\alpha; \beta]$ є кусково диференційовною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то її тригонометричний ряд Фур'є (1) збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є $\beta - \alpha$ -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (\alpha; \beta)$, в якій f є неперервною;

б) $S(x) = (f(x+) + f(x-)) / 2$ в кожній точці $x \in (\alpha; \beta)$;

в) $S(\alpha) = S(\beta) = (f(\alpha+) + f(\beta-)) / 2$.

Теорема 2. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є $\beta - \alpha$ -періодичною і кусково диференційовною на проміжку $[\alpha; \beta]$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ і його сума $S(x)$ є $\beta - \alpha$ -періодичною функцією, справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)$$

і:

а) $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$, в якій f є неперервною;

б) $S(x) = (f(x+) + f(x-)) / 2$ в кожній точці $x \in \mathbb{R}$.

Доведення. Ця теорема доводиться на основі відповідної теореми для $[-\pi; \pi]$ шляхом розгляду функції $F(x) = f\left(\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{(\beta - \alpha)x}{2\pi}\right)$. ►

11. Ряд Фур'є по косинусах та синусах. Кожну функцію f , визначену на $[0; \pi]$, можна продовжити на $[-\pi; \pi]$ парним чином рівністю $f(x) = f(-x)$, $x \in [-\pi; 0]$. Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 0.$$

Тому за виконання відповідних умов функцію $f \in R_1[0; \pi]$ можна розвинути на $[0; \pi]$ в ряд Фур'є по косинусах:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos kx dx.$$

При цьому рівність Парсеваля приймає вигляд

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Кожну функцію f , визначену на $[0; \pi]$, можна продовжити на $[-\pi; \pi]$ непарним чином рівністю $f(x) = -f(-x)$, $x \in [-\pi; 0]$. Тоді

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

Тому за виконання відповідних умов функцію $f \in R_1[0; \pi]$ можна розвинути на $[0; \pi]$ в ряд Фур'є по синусах:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin kx dx.$$

При цьому рівність Парсеваля приймає вигляд

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

Аналогічно за виконання відповідних умов кожену функцію $f \in R_1[0; \pi]$ можна розвинути на $[0; l]$ в ряд Фур'є по косинусах:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \cos \frac{k\pi}{l} x, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx,$$

та в ряд Фур'є по синусах:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx.$$

При цьому рівність Парсеваля приймає відповідно вигляд

$$\frac{2}{l} \int_0^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2, \quad \frac{2}{l} \int_0^l |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

Приклад 1. Якщо $f(x) = x$, то парним продовженням цієї функції є функція $\tilde{f}(x) = |x|$. При цьому $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi$ і

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos kx dx = -\frac{2}{\pi k} \int_0^{\pi} \sin kx dx = \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому

$$S(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \cos kx = \frac{\pi}{2} - \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4}{\pi(2m+1)^2} \cos(2m+1)x,$$

ряд

$$x \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \cos kx$$

є тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[0; \pi]$ по косинусах. При цьому $S(x) = x$ в кожній точці $x \in (0; \pi)$, $S(0) = 0 = \tilde{f}(0) = f(0)$, бо в точці 0 функція \tilde{f} є неперервною,

$$S(\pi) = (\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(\pi-)) / 2 = (\pi + \pi) / 2 = \pi = f(\pi),$$

$S(x) \neq x = f(x)$ в кожній точці $x \notin [0; \pi]$ і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \right|^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{2((-1)^k - 1)}{\pi k^2} \right|^2 = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2m+1)^4},$$

тобто $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}$.

Приклад 2. Якщо $f(x) = x$, то непарним продовженням цієї функції є ця ж функція і

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin kx dx = -\frac{2}{k} \cos k\pi = (-1)^{k+1} \frac{2}{k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$, ряд

$$x \sim \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{2}{k} \sin kx$$

є тригонометричним рядом Фур'є функції $f(x) = x$ на проміжку $[0; \pi]$. При цьому $S(x) = x$ в кожній точці $x \in (-\pi; \pi)$,

$$S(-\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (-\pi + \pi) / 2 = 0 \neq -\pi = f(-\pi),$$

$$S(\pi) = (f(-\pi+) + f(\pi-)) / 2 = (-\pi + \pi) / 2 = 0 \neq \pi = f(\pi),$$

$S(x) \neq x = f(x)$ в кожній точці $x \notin (-\pi; \pi)$ і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{k^2},$$

тобто $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Приклад 3. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x \in (0; \pi / 4), \\ 0, & x \in (\pi / 4; \pi], \end{cases}$$

то парним продовженням цієї функції на проміжок $[-\pi; \pi]$ є функція

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x \in (-\pi / 4; 0) \cup (0; \pi / 4), \\ 0, & x \in [-\pi; -\pi / 4) \cup (\pi / 4; \pi]. \end{cases}$$

При цьому,

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} 1 dx = \frac{1}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \cos kx dx = \frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$S(x) = \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4} \cos kx$$

i

$$f(x) \sim \frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4} \cos kx$$

– ряд Фур'є функції f за тригонометричною системою на проміжку $[0; \pi]$ по косинусах. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (0; \pi/4) \cup (\pi/4; \pi]$, бо

$$S(0) = (\tilde{f}(0-) + \tilde{f}(0+)) / 2 = (1+1) / 2 = 1 \neq 2 = f(0),$$

$$S(\pi) = (\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(\pi-)) / 2 = (0+0) / 2 = 0 = f(\pi),$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} 1 dx = \frac{1}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4} \right)^2,$$

тобто

$$\frac{1}{8} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \sin \frac{k\pi}{4} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Приклад 4. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 2, & x = 0, \\ 1, & x \in (0; \pi/4), \\ 0, & x \in (\pi/4; \pi], \end{cases}$$

то непарним продовженням цієї функції на проміжок $[-\pi; \pi]$ є функція

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 2, & x \in \{0; -\pi\}, \\ 1, & x \in (0; \pi/4), \\ -1, & x \in (-\pi/4; 0), \\ 0, & x \in (-\pi; -\pi/4) \cup (\pi/4; \pi]. \end{cases}$$

При цьому,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} \sin kx dx = \frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4} \right), \quad k \in \mathbb{N},$$

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4} \right) \sin kx$$

і

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4} \right) \sin kx$$

– ряд Фур'є функції f за тригонометричною системою на проміжку $[0; \pi]$ по синусах. При цьому, $S(x) = f(x)$ в кожній точці $x \in (0; \pi/4) \cup (\pi/4; \pi]$, бо

$$S(0) = (\tilde{f}(0-) + \tilde{f}(0+)) / 2 = (-1+1) / 2 = 0 \neq 2 = f(0),$$

$$S(\pi) = (\tilde{f}(-\pi+) + \tilde{f}(\pi-)) / 2 = (0+0) / 2 = 0 = f(\pi),$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/4} 1 dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4} \right) \right)^2,$$

тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi k} \left(1 - \cos \frac{k\pi}{4} \right) \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

12. Векторні простори. Векторним або лінійним простором називається непорожня множина H , на якій задано операції додавання елементів, тобто оператор $+: H \times H \rightarrow H$, і множення на числа (дійсні або комплексні), тобто оператор $\times: \mathbb{R} \times H \rightarrow H$ так, що виконуються наступні умови:

- а) $x + y = y + x$ для будь-яких x і y із H ;
- б) $x + (y + z) = (x + y) + z$ для будь-яких елементів x , y і z із H ;
- в) існує єдиний елемент $0 \in H$ такий, що $x + 0 = x$ для будь-якого $x \in H$;
- г) для кожного $x \in H$ існує елемент $-x \in H$ такий, що $x + (-x) = 0$;
- д) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ для будь-якого $x \in H$ і чисел α та β ;
- е) $1 \cdot x = x$ для будь-якого $x \in H$;
- є) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$, $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ для будь-яких $x \in H$, $y \in H$ та чисел α і β .

Таким чином, векторний простір – це упорядкована трійка $(H; +; \times)$ множини H , операції додавання, тобто оператора $+: H \times H \rightarrow H$ і операції множення на числа, тобто оператора $\times: \mathbb{C} \times H \rightarrow H$. Якщо множення здійснюється на дійсні числа, то такий простір називається дійсним векторним простором. Якщо множення здійснюється на комплексні числа, то такий простір називається комплексним векторним простором. Векторний простір $(H; +; \times)$ позначають, як правило, через H , тобто тим же символом, що і множину, яка його породила. Елементи векторного простору називають векторами (ними можуть бути числа, функції, матриці, послідовності і т.д.).

Елементи e_i , $i \in \overline{1; m}$, векторного простору H називаються лінійно залежними, якщо існують числа α_i , $i \in \overline{1; m}$, для яких $\sum_{k=1}^m \alpha_k e_k = 0$ і $\sum_{k=1}^m |\alpha_k| > 0$. Елементи e_i , $i \in \overline{1; m}$, векторного простору називаються лінійно незалежними,

якщо з рівності $\sum_{k=1}^m \alpha_k e_k = 0$ випливає, що всі числа α_i дорівнюють нулеві.

Іншими словами можна сказати, що елементи e_i , $i \in \overline{1; m}$, векторного простору називаються лінійно незалежними, якщо вони не є лінійно залежними. Векторний простір називається скінченно вимірним, якщо в ньому існує скінченна кількість таких елементів e_i , $i \in \overline{1; m}$, що кожний елемент $x \in H$ подається у вигляді: $x = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m$, де c_i – деякі числа. Найменша кількість таких елементів e_i називається розмірністю скінченно вимірного простору. Можна сказати і так. Векторний простір називається m -вимірним, якщо в ньому існує m лінійно незалежних векторів, а будь-яка сукупність із $m+1$ його векторів є лінійно залежною. Базисом або базою скінченно вимірного векторного простору називається така сукупність із m його векторів e_i , $i \in \overline{1; m}$, що кожний елемент $x \in H$ єдиним чином подається у вигляді $x = c_1 e_1 + \dots + c_m e_m$. При цьому, числа c_i , $i \in \overline{1; m}$, називаються координатами вектора x в базисі $\{e_i : i \in \overline{1; m}\}$, а вектор $c = (c_1; c_2; \dots; c_m) \in \mathbb{C}^m$ – координатним вектором вектора $x \in H$ в базисі $\{e_i : i \in \overline{1; m}\}$, і цей факт записують так: $x(c_1; c_2; \dots; c_m)$. Таким чином, між елементами m вимірного векторного простору H та елементами векторного простору \mathbb{C}^m існує взаємно однозначна відповідність і тому в багатьох випадках ці простори можна вважати однаковими. В зв'язку з цим, часто пишуть

$$x = (c_1; c_2; \dots; c_m) \text{ або } x = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

замість $x(c_1; c_2; \dots; c_m)$.

Розмірність скінченно вимірного простору дорівнює кількості його базисних векторів.

Векторний простір, який не є скінченно вимірним називається нескінченно вимірним. Більшість просторів, які зустрічаються в математичному аналізі (простори $C[a; b]$, $L_p[a; b]$, l_p і т.д.), є нескінченно вимірними.

Приклад 1. Простір \mathbb{R} , тобто множина всіх дійсних чисел зі звичайними операціями додавання і множення, є дійсним векторним одновимірним

простором. Базис в ньому утворює вектор $e=1$ і для кожного $x \in H$ маємо $x = xe$.

Приклад 2. Простір \mathbb{C} , тобто множина всіх комплексних чисел зі звичайними операціями додавання і множення, є комплексним векторним одновимірним простором. Базис в ньому утворює вектор $e=1$ і для кожного $z \in H$ маємо $z = ze$.

Приклад 3. Простір багаточленів степеня $n \in (n+1)$ -вимірним. При цьому $\{z^i : i \in \overline{0;n}\}$ – його базис.

Приклад 4. Простір $C[a;b]$, тобто множина всіх функцій $f : [a;b] \rightarrow \mathbb{C}$, неперервних на $[a;b]$, зі звичайними операціями додавання і множення на числа (сумою двох функцій f_1 і f_2 називається функція $f = f_1 + f_2$, визначена рівністю $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, добутком числа c і функції f_1 називається функція $f = cf_1$, визначена рівністю $f(x) = cf_1(x)$), є комплексним векторним простором. Цей простір є нескінченно вимірним, оскільки будь-яка скінченна кількість функцій $e_i = x^i$, $i \in \mathbb{Z}$, є лінійно незалежною.

Приклад 5. Простір \mathbb{R}^n , тобто множина всіх упорядкованих наборів $x = (x_1; \dots; x_n)$ з n дійсних чисел x_i зі звичайними операціями додавання і множення на дійсні числа (сумою двох векторів $x = (x_1; \dots; x_n)$ та $y = (y_1; \dots; y_n)$ називається вектор $x + y = (x_1 + y_1; \dots; x_n + y_n)$, добутком числа c і вектора $x = (x_1; \dots; x_n)$ називається вектор $cx = (cx_1; \dots; cx_n)$), є векторним простором. Він є n -вимірним. Базис в ньому утворюють вектори

$$e_1 = (1; 0; \dots; 0), e_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots, e_n = (0; 0; \dots; 0; 1).$$

Цей базис називається стандартним базисом простору \mathbb{R}^n . При цьому, $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$.

Приклад 6. Простір \mathbb{C}^n , тобто множина всіх упорядкованих наборів $z = (z_1; \dots; z_n)$ з n комплексних чисел зі звичайними операціями додавання і множення на комплексні числа (сумою двох векторів $z = (z_1; \dots; z_n)$ та $w = (w_1; \dots; w_n)$ називається вектор $z + w = (z_1 + w_1; \dots; z_n + w_n)$, добутком числа c і вектора $z = (z_1; \dots; z_n)$ називається вектор $cz = (cz_1; \dots; cz_n)$), є векторним простором. Він є n -вимірним. Базис в ньому утворюють вектори

$$e_1 = (1; 0; \dots; 0), e_2 = (0; 1; \dots; 0), \dots, e_n = (0; 0; \dots; 0; 1).$$

Цей базис називається стандартним базисом простору \mathbb{C}^n . При цьому, $z = z_1 e_1 + \dots + z_n e_n$.

Приклад 7. Простір l_2 , тобто множина всіх таких послідовностей $x = (x_k)$ комплексних чисел, що $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty$, зі звичайними операціями додавання та множення послідовності на комплексні числа, є комплексним векторним простором (потрібно врахувати нерівність $(|x_k| + |y_k|)^2 < 2(|x_k|^2 + |y_k|^2)$), завдяки якій сума двох послідовностей $x = (x_k)$ та $y = (y_k)$ з l_2 є послідовністю з l_2 . Цей простір часто позначають через \mathbb{C}_2^∞ , а аналогічний дійсний простір через \mathbb{R}_2^∞ . Можна переконатись, що простір l_2 є нескінченно вимірним

Приклад 8. Простір $R_1[a; b]$, тобто множина всіх таких функцій $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, які є інтегровними за Ріманом на скінченному проміжку $[a; b]$ або функція $|f|$ є інтегровою на $[a; b]$ в невластому розумінні, зі звичайними операціями додавання та множення функції на число є векторним простором. Справді, якщо функція f є інтегровою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то інтегровою за Ріманом на $[a; b]$ є також функція $|f|$. Тому сума двох функцій із простору $R_1[a; b]$ також належить $R_1[a; b]$. Можна переконатись, що простір $R_1[a; b]$ є нескінченно вимірним

Приклад 9. Простір $R_1(\mathbb{R})$, тобто множина всіх таких функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, для яких функція $|f|$ є інтегровою на \mathbb{R} в невластому розумінні зі звичайними операціями додавання та множення функції на число є векторним простором. Можна переконатись, що простір $R_1(\mathbb{R})$ є нескінченно вимірним

Приклад 10. Простір $R_2[a; b]$, тобто множина всіх таких функцій $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, які є інтегровними за Ріманом на скінченному проміжку $[a; b]$ або функція $|f|^2$ є інтегровою на $[a; b]$ в невластому розумінні, зі звичайними операціями додавання та множення функції на число є векторним простором. Справді, якщо функція f є інтегровою за Ріманом на проміжку $[a; b]$, то інтегровою за Ріманом на $[a; b]$ є також функція $|f|^2$. Тому з нерівності $|a + b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$ випливає, що сума двох функцій із простору $R_2[a; b]$ також належить $R_2[a; b]$. Можна переконатись, що простір $R_2[a; b]$ є

нескінченно вимірним

Приклад 11. Простір $R_2(\mathbb{R})$, тобто множина всіх таких функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, для яких функція $|f|^2$ є інтегрованою на \mathbb{R} в невластному розумінні зі звичайними операціями додавання та множення функції на число є комплексним векторним простором. Справді, з нерівності $|ab| \leq (|a|^2 + |b|^2) / 2$ випливає, що сума двох функцій із $R_2(\mathbb{R})$ також належить до $R_2(\mathbb{R})$. Можна переконатись, що простір $R_2(\mathbb{R})$ є нескінченно вимірним

Приклад 12. Простір $H = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, тобто множина всіх ірраціональних чисел із звичайними операціями додавання та множення, не є векторним простором, оскільки $0 \notin H$.

Приклад 13. $m \times n$ -матрицею називається функція $\mathbf{A}: \overline{1; m} \times \overline{1; n} \rightarrow \mathbb{C}$. $m \times n$ -матриця однозначно визначається сукупністю з $m \times n$ чисел $a_{ij} = \mathbf{A}(i; j)$ і цей факт записують у вигляді $\mathbf{A} = (a_{ij})$ або

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Ввівши відомим чином операцію додавання матриць і операцію множення матриць на числа (вони узгоджуються з означеннями відповідних операцій для функцій) переконуємось, що множина всіх матриць є векторним простором. Цей простір є $m \times n$ вимірним. Базис в ньому утворюють $m \times n$ -матриці $\mathbf{A}_{sp} = (a_{sj}(s; p))$, для яких $a_{ij}(i; j) = 1$, а всі інші елементи дорівнюють нулеві.

Зауваження 1. Інколи $m \times n$ матрицю зручно трактувати як функцію $\mathbf{A}: \overline{1; n} \rightarrow \mathbb{C}^m$ і позначати як вектор лінійку $\mathbf{A} = (a_1; \dots; a_{mn})$, а елементи просторів \mathbb{R}^n і \mathbb{C}^n – як матрицю з одним рядком (вектор-лінійку): $\mathbf{c} = (c_1; \dots; c_n)$

або як матрицю з одним стовпцем (вектор-рядок): $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$.

13. Евклідові та передевклідові простори. Нехай H – векторний простір. Кажуть, що на H задано скалярний добуток, якщо кожним двом елементам x і y із H поставлено число $\langle x; y \rangle \in \mathbb{C}$ так, що:

$$a_2) \langle x; x \rangle = 0 \text{ тоді і тільки тоді, коли } x = 0;$$

$$б_2) \langle x; x \rangle \geq 0 \text{ для будь-якого } x \text{ із } H;$$

$$в_2) \langle x; y \rangle = \overline{\langle y; x \rangle} \text{ для будь-яких } x \text{ і } y \text{ із } H;$$

$$г_2) \langle \lambda x; y \rangle = \lambda \langle x; y \rangle \text{ для будь-яких } x \text{ і } y \text{ із } H \text{ і } \lambda \in \mathbb{C};$$

$$д_2) \langle x_1 + x_2; y \rangle = \langle x_1; y \rangle + \langle x_2; y \rangle \text{ для будь-яких } x_1, x_2 \text{ і } y \text{ із } H.$$

Іншими словами, скалярний добуток – це функція $\langle \cdot; \cdot \rangle: H^2 \rightarrow \mathbb{C}$, яка має властивості $a_2)$ - $д_2)$. На одному і тому ж векторному просторі можна задати різні скалярні добутки.

Комплексний векторний простір H , на якому задано скалярний добуток, називається евклідовим простором або комплексним евклідовим простором, або унітарним простором. Точніше кажучи, евклідовий простір – це упорядкована пара $(H; \langle \cdot; \cdot \rangle)$ векторного простору H і заданого на ньому скалярного добутку. Інколи розглядають дійсний скалярний добуток $\langle \cdot; \cdot \rangle: H^2 \rightarrow \mathbb{R}$. При цьому λ вважають дійсним і тоді умова $в_2)$ рівносильна умові $в'_2)$: $\langle x; y \rangle = \langle y; x \rangle$ для будь-яких x і y із H . Дійсний векторний простір H , на якому задано дійсний скалярний добуток, називається дійсним евклідовим простором. Евклідовий простір $(H; \langle \cdot; \cdot \rangle)$ позначають, як правило, через H , тобто тим же символом, що і множину, яка його породила.

Поняття скалярного добутку є узагальненням поняття добутку чисел. Функція $\langle \cdot; \cdot \rangle: H^2 \rightarrow \mathbb{C}$, яка має властивості $б_2)$ - $д_2)$ називається передскалярним добутком (вживаються також терміни “квазіскалярний добуток”, “псевдоскалярний добуток” та інші), а векторний простір, на якому задано передскалярний добуток називається передевклідовим.

Елементи x і y передевклідового простору H називаються ортогональними, якщо $\langle x; y \rangle = 0$.

Теорема 1. Для будь-яких двох елементів x і y передевклідового простору справедлива нерівність Шварца (Коші-Буняковського)

$$|\langle x; y \rangle| \leq \sqrt{\langle x; x \rangle} \sqrt{\langle y; y \rangle}.$$

Доведення. Справді,

$$\langle \lambda x + y; \lambda x + y \rangle = |\lambda|^2 \langle x; x \rangle + \lambda \langle x; y \rangle + \bar{\lambda} \overline{\langle x; y \rangle} + \langle y; y \rangle \geq 0 \quad (1)$$

для довільних $\lambda \in \mathbb{C}$, $x \in H$ та $y \in H$. Якщо $\langle x; x \rangle = 0$ і $\langle y; y \rangle = 0$, то $\lambda \langle x; y \rangle + \bar{\lambda} \overline{\langle x; y \rangle} \geq 0$. Взявши в цій нерівності $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = i$ та $\lambda = -i$, послідовно отримуємо $\operatorname{Re} \langle x; y \rangle \geq 0$, $\operatorname{Re} \langle x; y \rangle \leq 0$, $\operatorname{Im} \langle x; y \rangle \leq 0$ та $\operatorname{Im} \langle x; y \rangle \geq 0$. Таким чином, $\langle x; y \rangle = 0$, якщо $\langle x; x \rangle = 0$ і $\langle y; y \rangle = 0$, тобто нерівність Шварца в цьому випадку доведена. Якщо ж, наприклад, $\langle x; x \rangle \neq 0$, то, взявши в (1) $\lambda = -\overline{\langle x; y \rangle} / \langle x; x \rangle$, одержуємо

$$\left| \frac{\langle x; y \rangle}{\langle x; x \rangle} \right|^2 - \left| \frac{\langle x; y \rangle}{\langle x; x \rangle} \right|^2 - \left| \frac{\langle x; y \rangle}{\langle x; x \rangle} \right|^2 + \langle y; y \rangle \geq 0,$$

звідки знову отримуємо нерівність Шварца. ►

Число $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ називається нормою елемента x в евклідовому просторі H .

Теорема 2. Якщо H – евклідовий простір, то норма $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ має наступні властивості:

а) $\|x\| = 0$ тоді і тільки тоді $x = 0$;

б) $\|x\| \geq 0$ для всіх $x \in H$;

в) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ для кожного $x \in H$ і кожного λ ($\lambda \in \mathbb{R}$, якщо H – дійсний простір і $\lambda \in \mathbb{C}$, якщо H – комплексний векторний простір);

г) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ для всіх $x \in H$ і всіх $y \in H$.

Доведення. Справді, згідно з нерівністю Шварца $|\operatorname{Re} \langle x; y \rangle| \leq |\langle x; y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Тому

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y; x + y \rangle = \langle x; x + y \rangle + \langle y; x + y \rangle = \|x\|^2 + \langle x; y \rangle + \langle y; x \rangle + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 + \langle x; y \rangle + \overline{\langle x; y \rangle} + \|y\|^2 = \|x\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle x; y \rangle + \|y\|^2 \\ &\leq \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

тобто $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, а виконання інших властивостей норми впливає безпосередньо з відповідних властивостей скалярного добутку. ►

Якщо H – передевклідов простір, то число $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ називається переднормою елемента x , а число $d(x; y) = \|x - y\|$ називається відхиленням елемента x від елемента y , або передвідстанню між елементами x та y .

Наслідок 1. Якщо H – передевклідов простір, то переднорма $\|x\| = \sqrt{\langle x; x \rangle}$ має властивості $b_1)$ - $c_1)$.

Приклад 1. Простір \mathbb{R} , тобто множина всіх дійсних чисел з скалярним добутком $\langle x; y \rangle = x \cdot y \in$ дійсним евклідовим простором, в чому переконуємось безпосередньою перевіркою виконання умов $a_2)$ - $d_2)$ (функція $\langle x; y \rangle = 2x \cdot y$ також є скалярним добутком на \mathbb{R}). При цьому, $\|x\| = |x|$ і $d(x; y) = |x - y|$.

Приклад 2. Простір \mathbb{C} , тобто множина всіх комплексних чисел з скалярним добутком $\langle z; w \rangle = z \cdot \bar{w} \in$ комплексним евклідовим простором, в чому переконуємось безпосередньою перевіркою виконання умов $a_2)$ - $d_2)$. При цьому, $\|z\| = |z|$ і $d(z; w) = |z - w|$.

Приклад 3. Простір $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}_2^n$, тобто множина всіх упорядкованих наборів $x = (x_1; \dots; x_n)$ з n дійсних чисел зі звичайними операціями додавання і множення на дійсні числа $(x + y = (x_1 + y_1; \dots; x_n + y_n))$, $\lambda x = (\lambda x_1; \dots; \lambda x_n)$ та скалярним добутком $\langle x; y \rangle = \sum_{k=1}^n x_k y_k \in$ дійсним евклідовим простором, в чому переконуємось безпосередньою перевіркою виконання умов $a_2)$ - $d_2)$. При цьому,

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |x_k|^2} \quad \text{і} \quad d(x; y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Приклад 4. Простір \mathbb{C}^n (часто пишуть \mathbb{C}_2^n замість \mathbb{C}^n), тобто множина всіх упорядкованих наборів $z = (z_1; z_2; \dots; z_n)$ із n комплексних чисел, зі звичайними операціями додавання та множення на комплексні числа $(z + w = (z_1 + w_1; \dots; z_n + w_n))$, $\lambda z = (\lambda z_1; \dots; \lambda z_n)$ та скалярним добутком $\langle z; w \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \bar{w}_k$, є комплексним евклідовим простором, в чому переконуємось

безпосередньою перевіркою виконання умов $a_2)$ - $d_2)$. При цьому, $\|z\| = \sqrt{\sum_{k=1}^n |z_k|^2}$ і

$$d(z; w) = \left(\sum_{k=1}^n |z_k - w_k|^2 \right)^{1/2}.$$

Приклад 5. Простір l_2 , тобто множина всіх таких числових послідовностей $x = (x_k)$, що $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < +\infty$, зі звичайними операціями додавання та множення послідовності на число ($x + y = (x_k + y_k)$, $\lambda x = (\lambda x_k)$) та скалярним добутком $\langle x; y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$, є евклідовим простором. Справді, з нерівності $|ab| \leq (|a|^2 + |b|^2) / 2$ випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ є збіжним в \mathbb{C} , якщо $x \in l_2$ і $y \in l_2$. Тому безпосередньою перевіркою переконуємось, що рівність $\langle x; y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$ задає скалярний добуток на векторному просторі l_2 , тобто l_2

є евклідовим простором. При цьому $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$ і $d(x; y) = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_k|^2 \right)^{1/2}$.

Часто замість l_2 використовують позначення \mathbb{C}_2^{∞} , якщо розглядають комплексні послідовності $x = (x_k)$ і відповідний комплексний евклідів простір, і позначення \mathbb{R}_2^{∞} , якщо розглядають дійсні послідовності $x = (x_k)$ і відповідний дійсний евклідів простір. Зазначимо, що функція $\langle x; y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k} / k$ також є скалярним добутком на векторному просторі l_2 .

Приклад 6. Простір $C_2[a; b]$, тобто множина всіх функцій $x: [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$, неперервних на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, зі звичайними операціями додавання та

множення функції на число та скалярним добутком $\langle x; y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} dt$, є

комплексним евклідовим простором. При цьому, $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ і

$$d(x; y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Приклад 7. Простір $C_2([a;b];\eta dx)$, тобто множина всіх функцій $x:[a;b] \rightarrow \mathbb{C}$, неперервних на $[a;b]$, зі звичайними операціями додавання та множення функції на число та скалярним добутком $\langle x; y \rangle = \int_a^b x(t) \overline{y(t)} \eta(x) dt$, є комплексним евклідовим простором, де $\eta:[a;b] \rightarrow (0; +\infty)$ – деяка функція, неперервна на $[a;b]$. При цьому, $\|x\| = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \eta(x) dt \right)^{1/2}$ і $d(x; y) = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \eta(x) dt \right)^{1/2}$.

Приклад 8. Простір $R_2[a;b]$, тобто множина всіх таких функцій $f:[a;b] \rightarrow \mathbb{C}$, які є інтегровними за Ріманом на проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$ або функція $|f|^2$ є інтегровною на $[a;b]$ в невластному розумінні, зі звичайними операціями додавання та множення функції на число та скалярним добутком $\langle f_1; f_2 \rangle = \int_a^b f_1(t) \overline{f_2(t)} dt$, є комплексним передевклідовим простором і не є

евклідовим, оскільки $\langle x; x \rangle = 0$ і $x \neq 0$, якщо $x(t) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$ Цей простір стає

евклідовим, якщо функції f_1 і f_2 , для яких $\int_a^b |f_1(t) - f_2(t)|^2 dt = 0$ вважати

рівними елементами простору $R_2[a;b]$. При цьому, $\|f\| = \left(\int_a^b |f(t)|^2 dt \right)^{1/2}$ і

$$d(f_1; f_2) = \left(\int_a^b |f_1(t) - f_2(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Приклад 9. Простір $R_2(\mathbb{R})$, тобто множина всіх таких функцій $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, для яких функція $|f|^2$ є інтегровною на \mathbb{R} в невластному розумінні, зі звичайними операціями додавання та множення функції на число та скалярним добутком $\langle f_1; f_2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) \overline{f_2(t)} dt$, є комплексним передевклідовим простором.

Справді, з нерівності $|ab| \leq (|a|^2 + |b|^2) / 2$ випливає, що функція $f_1(t) \overline{f_2(t)}$ є

інтегровною в невластному розумінні на \mathbb{R} , якщо такими є функції $|f_1|^2$ та $|f_2|^2$. Тому безпосередньою перевіркою встановлюємо, що функція $\langle f_1; f_2 \rangle$ володіє всіма властивостями передскалярного добутку. Разом з цим, розглядуваний простір не є евклідовим, оскільки $\langle x; x \rangle = 0$ і $x \neq 0$, якщо $x(t) = \begin{cases} 1, & x = 0, \\ 0, & x \neq 0. \end{cases}$ Цей

простір стає евклідовим, якщо функції f_1 і f_2 , для яких $\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t) - f_2(t)|^2 dt = 0$ вважати рівними елементами простору $R_2(\mathbb{R})$. При цьому,

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \text{ і } d(f_1; f_2) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f_1(t) - f_2(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Приклад 10. У просторі \mathbb{R} скалярний добуток чисел $x=1$ та $y=-2$ знаходиться так: $\langle x; y \rangle = 1 \cdot (-2) = -2$. При цьому, $\|x\| = |1| = 1$ і $d(x; y) = |1 - (-2)| = |3| = 3$.

Приклад 11. У просторі \mathbb{C} скалярний добуток чисел $z=1-i$ та $w=1+i$ знаходиться так: $\langle z; w \rangle = (1-i) \cdot \overline{(1+i)} = (1-i)(1-i) = -2i$. При цьому, $\|z\| = |1-i| = \sqrt{2}$ і $d(z; w) = |1-i - (1+i)| = |-2i| = 2$.

Приклад 12. У просторі \mathbb{R}^3 скалярний добуток векторів $x=(1;0;2)$ та $y=(0;-2;-3)$ знаходиться так: $\langle x; y \rangle = 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) = -6$. При цьому, $\|x\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ і $d(x; y) = \sqrt{(1-0)^2 + (0+2)^2 + (2+3)^2} = \sqrt{30}$.

Приклад 13. У просторі \mathbb{C}^2 скалярний добуток векторів $z=(1-i;1)$ та $w=(1+i;1-i)$ знаходиться так:
 $\langle z; w \rangle = (1-i) \cdot \overline{(1+i)} + 1 \cdot \overline{(1-i)} = (1-i)^2 + 1+i = 1-i$. При цьому,
 $\|z\| = \sqrt{|1-i|^2 + |1|^2} = \sqrt{3}$ і

$$d(z; w) = \sqrt{|(1-i) - (1+i)|^2 + |1 - (1-i)|^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

Приклад 14. У просторі l_2 скалярний добуток векторів $x=(1/2k)$ та $y_k=(1;2;0;0;\dots)$ знаходиться так:

$$\langle x; y \rangle = \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot 1 + \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot 2 + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot 0 + \frac{1}{2 \cdot 4} \cdot 0 + \dots = 1.$$

При цьому, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}} = \frac{\pi}{2\sqrt{6}}$ і

$$\begin{aligned} d(x; y) &= \sqrt{\left(\frac{1}{2 \cdot 1} - 1\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 2} - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4} - 0\right)^2 + \dots} \\ &= \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{49}{16} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{4k^2}} = \sqrt{\frac{48}{16} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2}} = \sqrt{\frac{48}{16} + \frac{\pi^2}{24}}. \end{aligned}$$

Приклад 15. У просторі $C_2[0;1]$ скалярний добуток функцій $f_1(x) = x + 1$ та $f_2(x) = x^3$ знаходиться так:

$$\langle f_1; f_2 \rangle = \int_0^1 (x+1)x^3 dx = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} = \frac{9}{20}.$$

При цьому, $\|f_1\| = \left(\int_0^1 (x+1)^2 dx\right)^{1/2} = \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{7}{3}}$ і

$$\begin{aligned} d(f_1; f_2) &= \left(\int_0^1 |1+x-x^3|^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_0^1 (1+x^2+x^6+2x-2x^4-2x^3) dx\right)^{1/2} \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + 1 - \frac{2}{5} - \frac{1}{2}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{331}{210}}. \end{aligned}$$

14. Збіжність ряду в передевклідовому просторі. Нехай $\{u_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна підмножина передевклідового простору H . Ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} u_m \tag{1}$$

називається збіжним в H , якщо існує такий елемент $S \in H$, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n u_k - S \right\| = 0. \tag{2}$$

При цьому S називається сумою ряду (1) і цей факт записують так:

$$S = \sum_{m=1}^{\infty} u_m. \quad (3)$$

Приклад 1. У просторі $R_2[a;b]$ ряд (1) є збіжним до функції $S \in R_2[a;b]$,

$$\text{якщо } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_a^b \left| \sum_{m=1}^n u_m(x) - S(x) \right|^2 dx \right)^{1/2} = 0.$$

Приклад 2. Якщо ряд (1) є збіжним рівномірно на проміжку $[a;b] \subset \mathbb{R}$ до функції $S \in R_2[a;b]$, то він є збіжним до цієї ж функції і в просторі $R_2[a;b]$, бо

$$\int_a^b \left| \sum_{m=1}^n u_m(x) - S(x) \right|^2 dx \leq \left(\sup \left\{ \left| \sum_{m=1}^n u_m(x) - S(x) \right| : x \in [a;b] \right\} \right)^2 (b-a) \rightarrow 0.$$

Приклад 3. У просторі l_2 ряд $\sum_{k=1}^{\infty} u(k)$, $u(k) := (u_{1,k}; u_{2,k}; \dots; u_{m,k}; \dots)$ є

збіжним до послідовності $a = (a_k) \in l_2$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left| \sum_{m=1}^n u_{m,k} - a_k \right|^2 \right)^{1/2} = 0$. При

цьому,

$$S_n = \left(\sum_{m=1}^n u_{m,k} \right) = \left(\sum_{m=1}^n u_{m,1}; \sum_{m=1}^n u_{m,2}; \dots \right).$$

15. Ортонормована система. Ряд Фур'є за ортонормованою системою.

В курсах алгебри і геометрії доводиться, що якщо H – n -вимірний евклідов простір, $\{e_k : k \in \overline{1;n}\}$ – його ортонормований базис, $c_k := c_k(f) := \langle f; e_k \rangle$ – координати вектора f в цьому базисі, то $f = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \dots + c_n e_n$ і $\|f\|^2 = c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$. Ми розглядатимемо аналог цього твердження для нескінченно вимірних просторів і числа c_k будемо називати не координатами вектора f , а його коефіцієнтами Фур'є. Нехай H – передевклідов простір, $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ – зліченна система елементів простору H . Система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ називається ортонормованою, якщо

$$\langle e_k; e_m \rangle = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Числа $c_k := c_k(f) := \langle f; e_k \rangle$ називаються коефіцієнтами Фур'є елемента $f \in H$ за

ортонормованою системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, а ряд

$$f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k \quad (1)$$

рядом Фур'є елемента f за цією системою. Елемент

$$S_n = \sum_{k=1}^n c_k e_k \quad (2)$$

називають n -им поліномом Фур'є або $d(x; H_0) = \|x - x_0\|$ -ою частинною сумою ряду Фур'є, а елемент

$$Q_n = \sum_{k=1}^n q_k e_k, \quad (3)$$

де q_k – довільні числа (дійсні, якщо H – дійсний простір, комплексні, якщо H – комплексний), називають поліномом порядку n за системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Відхиленням полінома Q_n від елемента f називається число $\|f - Q_n\|$.

Приклад 1. Множина $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ є ортонормованою, якщо

$$\int_a^b e_k(x) \overline{e_m(x)} dx = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Теорема 1. Нехай $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормована система передевклідового простору H . Тоді серед всіх поліномів порядку n найменше відхилення від елемента $f \in H$ має n -ий поліном Фур'є елемента f .

Доведення. Будемо розглядати тільки дійсний передевклідовий простір. Тоді, використовуючи властивості передскалярного добутку і ортонормованість системи $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, маємо

$$\begin{aligned} \|f - Q_n\|^2 &= \left\langle f - \sum_{k=1}^n q_k e_k; f - \sum_{k=1}^n q_k e_k \right\rangle = \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n q_k \langle f; e_k \rangle + \sum_{k=1}^n |q_k|^2 \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{k=1}^n q_k c_k + \sum_{k=1}^n |q_k|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n (c_k^2 - (c_k - q_k)^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Бачимо, що мінімум правої частини (4) досягається при $q_k = c_k$, $k \in \overline{1; n}$ (під

знаком суми стоїть квадратний тричлен як функція q_k). ►

Теорема 2. Якщо $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормована система в передевклідовому просторі H , то для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ і для кожного $f \in H$ виконується

$$\sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \|f\|^2 - \|f - S_n\|^2, \quad (5)$$

і справедлива нерівність Бесселя $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|f\|^2$, тобто

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle f; e_k \rangle|^2 \leq \|f\|^2.$$

Доведення. Справді, (5) випливає із (4), а остання нерівність є наслідком (5). ►

Множина $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ передевклідового простору H називається повною в H , якщо для кожного $\varepsilon > 0$ і кожного $f \in H$ знайдеться такий поліном Q_n виду (3), для якого $\|f - Q_n\| < \varepsilon$. Іншими словами, система $E = \{e_k : k \in \Omega\}$, називається повною в H , якщо для кожного $f \in H$ знайдеться така послідовність (Q_n) поліномів вигляду (3), що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - Q_n\| = 0. \quad (6)$$

Теорема 3. Нехай $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ – ортонормована система передевклідового простору H . Тоді наступні умови є еквівалентними: 1) система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ є повною в H ; 2) ряд Фур'є за цією системою кожного елемента f простору H збігається в H до f ; 3) для кожного $f \in H$ справедлива рівність

$$\text{Парсеваля } \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \|f\|^2.$$

Доведення. Нехай виконується 1). Тоді знайдеться послідовність поліномів (Q_n) , для якої виконується (6). Але $\|f - S_n\| \leq \|f - Q_n\|$. Тому виконується 2). Нехай виконується 2). Тоді $0 \leq \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \|f - S_n\|^2$. Тому виконується 3). Нехай тепер виконується 3). Тоді з рівності

$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 = \|f - S_n\|^2$ отримуємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - S_n\| = \sqrt{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n |c_k|^2 \right)} = \sqrt{\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2} = 0.$$

Отже, послідовність (S_n) збігається в H до f . Але S_n є поліномом за системою $E = \{e_k : k \in \Omega\}$. Тому виконується 1). ►

Зауваження 1. Система елементів $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ передевклідового простору H називається базисом або базою цього простору, якщо кожний елемент $f \in H$ єдиним чином розвивається в збіжний в H ряд

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k.$$

Безпосередньо з означення випливає, що кожний базис є повною системою. Можна довести, що кожна з умов 1)-3) теореми 3 еквівалентна наступній умові: 4) система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ є базисом простору H , а якщо простір H є евклідовим, то і наступній умові: 5) з виконання рівності $\langle x; e_k \rangle = 0$ для всіх $k \in \mathbb{N}$ випливає, що $x = 0$.

Зауваження 2. Система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ називається ортогональною в передевклідовому просторі H , якщо

$$\langle e_k; e_m \rangle = \begin{cases} \delta_m \neq 0, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Числа $c_k = \langle f; e_k \rangle / \|e_k\|^2$ називаються коефіцієнтами Фур'є елемента $f \in H$ за ортогональною системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, а ряд $f \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$ – рядом Фур'є. Якщо система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ є ортогональною в передевклідовому просторі H , то система $\{e_k / \|e_k\| : k \in \mathbb{N}\}$ є ортонормованою в H . Тому вивчення ортогональних систем зводиться до вивчення ортонормованих систем. Зокрема, рівність Парсеваля для ортогональних систем має вигляд $\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \|e_k\|^2 = \|f\|^2$.

Приклад 2. Якщо множина $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ передевклідового простору H є такою, що для кожного вектора $f \in H$ і кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться такий елемент $e \in E$, що $\|f - e\| < \varepsilon$, то множина $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ є повною в просторі H .

Приклад 3. Якщо множина $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ передевклідового простору H є повною в H і $\{d_k : k \in \Omega\}$ – довільна множина чисел, відмінних від нуля, то система $\{d_k e_k : k \in \Omega\}$ також є повною в H .

Приклад 4. Якщо $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ – довільна множина (не обов'язково ортогональна) передевклідового простору H і кожний елемент $f \in H$ розвивається в збіжний в H ряд

$$f = \sum_{k \in \Omega} d_k e_k, \quad d_k \in \mathbb{C},$$

то система $E = \{e_k : k \in \Omega\}$ є повною в H .

Приклад 5. Множина $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ є ортонормованою, якщо

$$\int_a^b e_k(x) \overline{e_m(x)} dx = \begin{cases} 1, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Приклад 6. Коефіцієнти Фур'є за ортонормованою системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ функції $f \in R_2[a; b]$ знаходяться за формулою

$$c_k = \int_a^b f(t) \overline{e_k(t)} dt, \quad \text{а рівність Парсеваля записується у вигляді}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

Приклад 7. Множина $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ є ортогональною, якщо

$$\int_a^b e_k(x) \overline{e_m(x)} dx = \begin{cases} \delta_m \neq 0, & k = m, \\ 0, & k \neq m. \end{cases}$$

Приклад 8. Коефіцієнти Фур'є за ортонормованою системою $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$ простору $R_2[a; b]$ функції $f \in R_2[a; b]$ знаходяться за формулою

$$c_k = \int_a^b f(t) \overline{e_k(t)} dt / \sqrt{\int_a^b |e_k(t)|^2 dt}, \quad \text{а рівність Парсеваля записується у вигляді}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \int_a^b |e_k(t)|^2 dt = \int_a^b |f(t)|^2 dt.$$

Теорема 4. Тригонометрична система

$$\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$$

є повною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.

Доведення. Справді, для кожної функції $f \in R_2[-\pi; \pi]$, знайдеться така послідовність (q_n) неперервних функцій $q_n : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, що $q_n(-\pi) = q_n(\pi) = 0$,

$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_n(t)|^2 dt \rightarrow 0$. З іншого боку, за теоремою Вейерштрасса для кожного

n знайдеться такий тригонометричний поліном

$Q_n(x) = \frac{a_{0,n}}{2} + \sum_{k=1}^{p_n} a_{k,n} \cos kx + b_{k,n} \sin kx$, що $\varepsilon_n := \sup \{|q_n(t) - Q_n(t)| : t \in [-\pi; \pi]\} \rightarrow 0$,

$n \rightarrow \infty$. Тоді $\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t) - Q_n(t)|^2 dt \leq \varepsilon_n^2 \int_{-\pi}^{\pi} dt = \varepsilon_n^2 2\pi \rightarrow 0$. Отже,

$$\|f - Q_n\| \leq \|f - q_n\| + \|q_n - Q_n\| = \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - q_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} + \left(\int_{-\pi}^{\pi} |q_n(t) - Q_n(t)|^2 dt \right)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Наслідок 1. Тригонометрична система

$$\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$$

є повною і ортогональною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$, а система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[-\pi; \pi]$ розвивається в збіжний в $R_2[-\pi; \pi]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx.$$

При цьому коефіцієнти a_k і b_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Доведення. Справді,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\cos kt}{\sqrt{\pi}} dt = \sqrt{\pi} a_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \frac{\sin kt}{\sqrt{\pi}} dt = \sqrt{\pi} b_k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Тому рівність Парсеваля для розглядуваної повної ортонормованої системи записується у вигляді

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{\pi |a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (\pi |a_k|^2 + \pi |b_k|^2). \quad \blacktriangleright$$

Наслідок 2. Система

$$\left\{ 1/2; \cos \frac{\pi t}{l}; \sin \frac{\pi t}{l}; \cos \frac{2\pi t}{l}; \sin \frac{2\pi t}{l}; \dots; \cos \frac{k\pi t}{l}; \sin \frac{k\pi t}{l}; \dots \right\}$$

(вона називається $2l$ -періодичною тригонометричною системою або тригонометричною системою на проміжку, довжини $2l$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[-l;l]$, а система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}; \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{\pi t}{l}; \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{\pi t}{l}; \dots; \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi t}{l}; \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi t}{l}; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[-l;l]$ розвивається в збіжний в $R_2[-l;l]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти a_k і b_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Наслідок 3. Система

$$\left\{ 1/2; \cos \frac{2\pi t}{\beta - \alpha}; \sin \frac{2\pi t}{\beta - \alpha}; \dots; \cos \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}; \sin \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}; \dots \right\}$$

(вона називається $\beta - \alpha$ -періодичною тригонометричною системою або тригонометричною системою на проміжку, довжини $\beta - \alpha$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[\alpha; \beta]$, а система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\beta - \alpha}}; \sqrt{\frac{2}{\beta - \alpha}} \cos \frac{2\pi t}{\beta - \alpha}; \dots; \sqrt{\frac{2}{\beta - \alpha}} \cos \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}; \sqrt{\frac{2}{\beta - \alpha}} \sin \frac{2k\pi t}{\beta - \alpha}; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[\alpha; \beta]$ розвивається в збіжний в $R_2[\alpha; \beta]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x + b_k \sin \frac{2k\pi}{\beta - \alpha} x$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти a_k і b_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \cos \frac{2k\pi x}{\beta - \alpha} dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_k = \frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(x) \sin \frac{2k\pi x}{\beta - \alpha} dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2).$$

Наслідок 4. Система

$$\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$$

(вона називається 2π -періодичною комплексною тригонометричною системою або комплексною тригонометричною системою на проміжку, довжини 2π) є повною і ортогональною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$, а система $\{e^{ikx} / \sqrt{2\pi} : k \in \mathbb{Z}\}$ є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[-\pi; \pi]$ розвивається в збіжний в $R_2[-\pi; \pi]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти c_k знаходяться за формулами

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Наслідок 5. Система

$$\left\{ e^{\frac{k\pi}{l}x} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(вона називається $2l$ -періодичною комплексною тригонометричною системою або комплексною тригонометричною системою на проміжку, довжини $2l$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[-l; l]$, а система $\left\{ e^{\frac{k\pi}{l}x} / \sqrt{2l} : k \in \mathbb{Z} \right\}$ є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[-l; l]$ розвивається в збіжний в $R_2[-l; l]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{\frac{k\pi}{l}x}$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти c_k знаходяться за формулами

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-\frac{k\pi}{l}t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{2l} \int_{-l}^l |f(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Наслідок 6. Система

$$\left\{ e^{i \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} x} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

(вона називається $\beta - \alpha$ -періодичною комплексною тригонометричною системою або комплексною тригонометричною системою на проміжку, довжини $\beta - \alpha$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[\alpha; \beta]$, а система

$$\left\{ e^{i \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} x} / \sqrt{\beta - \alpha} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[\alpha; \beta]$ розвивається в збіжний в $R_2[\alpha; \beta]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{i \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} x}$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти c_k за формулами

$$c_k = \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} f(t) e^{-i \frac{2k\pi}{\beta-\alpha} t} dt, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2.$$

Зокрема, система

$$\left\{ e^{i \frac{2k\pi}{T} x} / \sqrt{T} : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

є ортонормованою в просторі $R_2[0; T]$.

Наслідок 7. Система

$$\{1/2; \cos t; \cos 2t; \dots; \cos nt; \dots\}$$

(вона називається системою косинусів або системою косинусів на проміжку,

довжини π) є повною і ортогональною в просторі $R_2[0;\pi]$, а система

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t; \dots; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nt; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[0;\pi]$ розвивається в збіжний в $R_2[0;\pi]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти a_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos kt dt, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Наслідок 8. Система $\{\sin t; \sin 2t; \dots; \sin nt; \dots\}$ (вона називається системою синусів або системою синусів на проміжку, довжини π) є повною і ортогональною в просторі $R_2[0;\pi]$, а система

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t; \dots; \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nt; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[0;\pi]$ розвивається в збіжний в $R_2[0;\pi]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin kx$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти b_k знаходяться за формулами

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt dt, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

Наслідок 9. Система

$$\left\{ 1/2; \cos \frac{\pi t}{l}; \cos \frac{2\pi t}{l}; \dots; \cos \frac{k\pi t}{l}; \dots \right\}$$

(називається системою косинусів на проміжку $[0;l]$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[0;l]$, а система

$$\left\{ \sqrt{\frac{1}{l}}; \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi t}{l}; \dots; \sqrt{\frac{2}{l}} \cos \frac{\pi t}{l}; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[0;l]$ розвивається в збіжний в $R_2[0;l]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l} x$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти a_k знаходяться за формулами

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N}_0,$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{l} \int_0^l |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2.$$

Наслідок 10. Система

$$\left\{ \sin \frac{\pi t}{l}; \sin \frac{2\pi t}{l}; \dots; \sin \frac{k\pi t}{l}; \dots \right\}$$

(називається системою синусів на проміжку $[0;l]$) є повною і ортогональною в просторі $R_2[0;l]$, а система

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi t}{l}; \dots; \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi t}{l}; \dots \right\}$$

є відповідною ортонормованою системою і кожна функція $f \in R_2[0;l]$ розвивається в збіжний в $R_2[0;l]$ тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi}{l} x$$

за цією системою. При цьому коефіцієнти a_k знаходяться за формулами

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x dx, \quad k \in \mathbb{N},$$

і справедлива рівність Парсеваля

$$\frac{2}{l} \int_0^l |f(x)|^2 dx = \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|^2.$$

Приклад 9. Система $\{P_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, де $P_0(x) = 1$ і $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \cdot \frac{d^n(x^2 - 1)}{dx^n}$, якщо $n \in \mathbb{N}$, називається системою поліномів Лежандра. Поліном P_n є поліномом степеня n зі старшим членом $\frac{1}{2^n n!} (x^{2n})^{(n)}$ і

$$2^n n! \int_{-1}^1 P_n(x) \tau_k(x) dx = (-1)^n \int_{-1}^1 \frac{d^{n-k}(x^2 - 1)^n}{dx^{n-k}} \tau_k^{(k)}(x) dx = 0$$

для кожного полінома τ_k , степеня $k < n$. Крім цього,

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_n(x) dx = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^n dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Тому система поліномів Лежандра є ортогональною в просторі $R_2[-1;1]$. При цьому $\|P_n\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}$. Система $\{\tilde{P}_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$, де $\tilde{P}_n = P_n / \sqrt{\frac{2n+1}{2}}$, є ортонормованою в просторі $R_2[-1;1]$. Вона зветься ортонормованою системою поліномів Лежандра. Поліном Лежандра P_n є розв'язком диференціального рівняння

$$P_n'' - \frac{2x}{1-x^2} P_n' + \frac{n(n+1)}{1-x^2} P_n = 0.$$

16. Рівномірна і абсолютна збіжність тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$. В попередніх пунктах вказані умови поточної збіжності ряду Фур'є та збіжності цього ряду в просторі. Часто важливо знати, чи збігається ряд в іншому розумінні. Наприклад, чи збігається він абсолютно, рівномірно і т.д.

Теорема 1. Якщо функція f' є неперервною, кусково диференційовною на проміжку $[-\pi; \pi]$ і $f(-\pi) = f(\pi)$, то її тригонометричний ряд Фур'є

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx + b_k \sin kx, \quad (1)$$

де

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx, \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx, \quad (2)$$

збігається на проміжку $[-\pi; \pi]$ рівномірно і абсолютно.

Доведення. Справді,

$$a_0(f') = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx = 0,$$

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx = -\frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin kx dx = -\frac{b_k(f')}{k},$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx = -\frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \cos kx dx = \frac{a_k(f')}{k},$$

$$\frac{|b_k(f')|}{k} \leq \frac{1}{2} (|b_k(f')|^2 + 1/k^2), \quad \frac{|a_k(f')|}{k} \leq \frac{1}{2} (|a_k(f')|^2 + 1/k^2),$$

$$|a_k \cos kx + b_k \sin kx| \leq |a_k| + |b_k| \leq \frac{|a_k(f')|}{k} + \frac{|b_k(f')|}{k} \leq \frac{1}{k^2} + \frac{1}{2} (|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k(f')|^2 + |b_k(f')|^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2 dx < +\infty.$$

Тому розглядуваний ряд збігається на проміжку $[-\pi; \pi]$ рівномірно і абсолютно. ►

Теорема 2. Якщо $\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < +\infty$, то тригонометричний ряд Фур'є функції $f \in R_1[-\pi; \pi]$ збігається на \mathbb{R} абсолютно і рівномірно.

Доведення. Справді, ця теорема випливає з теореми Вейерштрасса про рівномірну і абсолютну збіжність функціонального ряду. ►

Теорема 3. Якщо функція $f \in R_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною, неперервною і для кожного $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для всіх $x \in [-\pi; \pi]$ і

$$\int_{-\delta}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|}{|t|} dt < \varepsilon,$$

то на проміжку $[-\pi; \pi]$ ряд Фур'є функції f є збіжним рівномірно.

Доведення. Ця теорема доводиться наступним чином. Із її умов випливає,

що для кожних проміжків $[a; b] \subset \mathbb{R}$ і $[c; d] \subset \mathbb{R}$: $\int_a^b f(x+t)e^{-iyx} dx \rightarrow 0$,
 $\mathbb{R} \ni y \rightarrow \pm\infty$ рівномірно за $t \in [c; d]$. Тому приходимо до потрібного твердження повторюючи доведення теореми про поточкову збіжність тригонометричного ряду Фур'є. ►

Наслідок 1. Якщо функція $f \in R_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною функцією і задовольняє умову Гельдера, тобто

$$(\exists c_1 > 0)(\exists \alpha \in (0; 1])(\forall x_1 \in \mathbb{R})(\forall x_2 \in \mathbb{R}): |f(x_2) - f(x_1)| \leq c_1 |x_2 - x_1|^\alpha,$$

то ряд Фур'є функції f є збіжним на \mathbb{R} рівномірно.

Приклад 1. Якщо ряд тригонометричний ряд Фур'є (1) є збіжним рівномірно на проміжку $[-\pi; \pi]$, то він є рівномірно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$, бо члени ряду (1) є 2π -періодичними функціями.

Приклад 2. Якщо ряд (1) є збіжним рівномірно на проміжку $(-\infty; +\infty)$ до функції $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, то функція S є 2π -періодичною і неперервною на проміжку $(-\infty; +\infty)$, бо члени ряду (1) є неперервними 2π -періодичними функціями.

Приклад 3. Якщо ряд (1) є збіжним рівномірно на проміжку $[-\pi; \pi]$ до функції S , то він є збіжним до цієї ж функції і в просторі $R_2[-\pi; \pi]$, бо функція S є неперервною і

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{m=1}^n u_m(x) - S(x) \right|^2 dx \leq \left(\sup \left\{ \left| \sum_{m=1}^n u_m(x) - S(x) \right| : x \in [-\pi; \pi] \right\} \right)^2 2\pi \rightarrow 0.$$

Приклад 4. Тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x) = \sin^3 x$ збігається до неї на \mathbb{R} рівномірно і абсолютно в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.

Приклад 5. Тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x) = x$ збігається в просторі $R_2[-\pi; \pi]$ до f , є поточно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$, але не збігається рівномірно на проміжку $[-\pi; \pi]$, бо функція f не є 2π -періодичною.

Приклад 6. Тригонометричний ряд Фур'є функції $f(x) = \text{sign}(\sin x)$ збігається в просторі $R_2[-\pi; \pi]$ до f , є поточно збіжним на проміжку $(-\infty; +\infty)$, але не збігається рівномірно на проміжку $[-\pi; \pi]$, бо функція f не є переречною.

17. Критерій лінійної залежності. Скінченна система $\{e_k : k \in \overline{1; m}\}$ називається лінійно незалежною в передевклідовому просторі, якщо з рівності

$\sum_{k=1}^m \lambda_k e_k = 0$ впливає, що всі числа λ_k рівні нулеві. Зліченна система $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$, називається лінійно незалежною в передевклідовому просторі, якщо лінійно незалежною є будь-яка її скінченна підсистема. Матриця

$$\begin{pmatrix} \langle e_1; e_1 \rangle & \langle e_1; e_2 \rangle & \dots & \langle e_1; e_m \rangle \dots \\ \langle e_2; e_1 \rangle & \langle e_2; e_2 \rangle & \dots & \langle e_2; e_m \rangle \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_n; e_1 \rangle & \langle e_n; e_2 \rangle & \dots & \langle e_n; e_m \rangle \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \quad (1)$$

називається матрицею Грамма системи $\{e_k : k \in \mathbb{N}\}$. Визначником Грамма сукупності векторів $\{e_k : k \in \overline{1; m}\}$ передевклідового простору H називається визначник

$$\Delta_m = \begin{vmatrix} \langle e_1; e_1 \rangle & \langle e_1; e_2 \rangle & \dots & \langle e_1; e_m \rangle \\ \langle e_2; e_1 \rangle & \langle e_2; e_2 \rangle & \dots & \langle e_2; e_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle e_m; e_1 \rangle & \langle e_m; e_2 \rangle & \dots & \langle e_m; e_m \rangle \end{vmatrix}.$$

Теорема 1. Для того щоб множина $\{e_k : k \in \overline{1; m}\}$ векторів евклідового простору H була лінійно залежною, необхідно і достатньо, щоб визначник Грамма цієї системи дорівнював нулеві.

Доведення. Необхідність. Нехай ці вектори є лінійно залежними. Тоді один із них є лінійною комбінацією інших. Нехай, наприклад, цим вектором є e_m . Тоді існують числові сталі c_i , для яких $e_m = \sum_{k=1}^{m-1} c_k e_k$ і тому

$\langle e_m; e_i \rangle = \sum_{k=1}^{m-1} c_k \langle e_k; e_i \rangle$, $i \in \overline{1; m}$. Отже, останній рядок визначника Грамма є

лінійною комбінацією інших його рядків. Тому визначник дорівнює нулеві.

Достатність. Нехай визначник Грамма дорівнює нулеві. Тоді система

$\sum_{k=1}^m c_k \langle e_i; e_k \rangle = 0$, $i \in \overline{1; m}$, має ненульовий розв'язок

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix},$$

тобто $\left\langle e_i; \sum_{k=1}^m c_k e_k \right\rangle = 0$, $i \in \overline{1; m}$. Отже, вектор $e = \sum_{k=1}^m c_k e_k$ є ортогональним до кожного з векторів e_i , $i \in \overline{1; m}$. Тому e є ортогональним до кожного вектора із лінійної оболонки векторів e_i , $i \in \overline{1; m}$. Зокрема, $\langle e; e \rangle = 0$. Тому $e = 0$. Але тоді вектори e_i , $i \in \overline{1; m}$, є лінійно залежними і теорема доведена. ►

Зауваження 1. В курсі лінійної алгебри доводиться, що множина із m

векторів $e_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}$ n -вимірного евклідового простору є лінійно незалежною

тоді і тільки тоді, коли $m \leq n$ і ранг матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

дорівнює m . Зокрема, n векторів

$$e_i = \begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \vdots \\ \alpha_{ni} \end{pmatrix}$$

n -вимірного евклідового простору є лінійно незалежними тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Приклад 1. Вектори

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

простору \mathbb{R}^3 є лінійно незалежними в ньому, оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Приклад 2. Кожна ортонормована система евклідового простору є лінійно незалежною. Справді, якщо, наприклад, $\sum_{k=1}^n \lambda_k e_k = 0$, $0 = \left\langle e_i; \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k \right\rangle = \lambda_i$ для кожного $i \in \overline{1;n}$.

18. Процес ортогоналізації Шмідта.

Теорема 1. Для кожної скінченної або зліченної лінійно незалежної системи $\{q_k : k \in \Omega\}$ передевклідового простору існує така ортонормована система $\{e_k : k \in \Omega\}$, що $e_n = \beta_{n1}q_1 + \dots + \beta_{nn}q_n$ і $\beta_{nn} \neq 0$ для всіх $n \in \Omega$, де α_{ij} – деякі числа.

Доведення. Такою є система побудована наступним чином

$$e_1 = f_1 / \|f_1\|, f_1 = q_1, e_2 = f_2 / \|f_2\|, f_2 = q_2 - \langle q_2; e_1 \rangle e_1,$$

$$e_3 = f_3 / \|f_3\|, f_3 = q_3 - \langle q_3; e_1 \rangle e_1 - \langle q_3; e_2 \rangle e_2,$$

.....

$$e_n = f_n / \|f_n\|, f_n = q_n - \langle q_n; e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle q_n; e_{n-1} \rangle e_{n-1},$$

що встановлюється безпосередньою перевіркою. ►

Зауваження 1. Нехай

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \langle q_1; q_1 \rangle & \langle q_1; q_2 \rangle & \dots & \langle q_1; q_n \rangle \\ \langle q_2; q_1 \rangle & \langle q_2; q_2 \rangle & \dots & \langle q_2; q_n \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle q_n; q_1 \rangle & \langle q_n; q_2 \rangle & \dots & \langle q_n; q_n \rangle \end{vmatrix},$$

$$\tilde{e}_n = \begin{vmatrix} \langle q_1; q_1 \rangle & \langle q_1; q_2 \rangle \cdots & \langle q_1; q_{n-1} \rangle & q_1 \\ \langle q_2; q_1 \rangle & \langle q_2; q_2 \rangle \cdots & \langle q_2; q_{n-1} \rangle & q_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle q_n; q_1 \rangle & \langle q_n; q_2 \rangle \cdots & \langle q_n; q_{n-1} \rangle & q_n \end{vmatrix}.$$

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що $\langle \tilde{e}_n; \tilde{e}_n \rangle = \Delta_n \Delta_{n-1}$, $\langle \tilde{e}_n; q_n \rangle = \Delta_n$ і $\langle \tilde{e}_n; q_k \rangle = 0$, якщо $k \in \overline{1; n-1}$. Тому

$$e_n = \tilde{e}_n / \|\tilde{e}_n\| = \tilde{e}_n / \sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}}. \quad (1)$$

Зокрема, якщо $\eta: [a; b] \rightarrow (0; +\infty)$ – деяка функція, $R_2([a; b]; \eta dx)$ – евклідов простір функцій інтегровних на $[a; b]$ зі скалярним добутком

$$\langle f_1; f_2 \rangle = \int_a^b f_1(t) f_2(t) \eta(t) dt, \quad \text{і } q_i = t^i, \quad i \in \mathbb{Z}_+, \quad \text{то відповідна ортонормована}$$

система в просторі $R_2([a; b]; \eta dx)$ складається з функцій

$$e_n(t) = \tilde{e}_n / \sqrt{\Delta_n \Delta_{n-1}} = \frac{\begin{vmatrix} c_{00} & \dots & c_{0n-1} & 1 \\ c_{10} & \dots & c_{1n-1} & t \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n0} & \dots & c_{nn-1} & t^n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} c_{00} & \dots & c_{0n-1} & c_{0n} \\ c_{10} & \dots & c_{1n-1} & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n0} & \dots & c_{nn-1} & c_{nn} \end{vmatrix}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

де

$$c_{ij} = \int_a^b \eta(t) t^{i+j} dt.$$

Приклад 1. Якщо $q_i = t^i$, $i \in \mathbb{Z}_+$, то відповідна ортонормована система $\{\tilde{P}_n : n \in \mathbb{Z}_+\}$ в просторі $R_2[-1; 1]$ називається ортонормованою системою поліномів Лежандра. Вона є ортонормованим базисом цього простору.

19. Інтегральна формула Фур'є. Поняття про перетворення Фур'є. Згідно з теорією рядів Фур'є за виконання відповідних умов функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ подається у вигляді

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f) e^{i\pi kx/l} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) e^{-i\pi kt/l} dt e^{i\pi kx/l}.$$

Перейшовши в останній рівності до границі ($l \rightarrow +\infty$) можна знайти умови, за яких справедливою є формула

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy. \quad (1)$$

Ця формула називається інтегральною формулою Фур'є. Її можна розглядати як тригонометричний ряд Фур'є на $(-\infty; +\infty)$. Нехай

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt. \quad (2)$$

Тоді формулу (1) можна переписати так

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy. \quad (3)$$

Оператор F , який функції f ставить у відповідність функцію \hat{f} за формулою (2) називається оператором Фур'є, а функція \hat{f} – перетворенням Фур'є або образом Фур'є функції f . Формулу (2) можна переписати у вигляді

$$\hat{f} = F(f). \quad (4)$$

Оператор F^{-1} , який функції \hat{f} ставить у відповідність функцію f за формулою (3) називається оберненим оператором Фур'є. Формулу (2) можна переписати у вигляді

$$f = F^{-1}(\hat{f}), \quad (5)$$

а формулу (1) – у вигляді

$$f = F^{-1}(F(f)). \quad (6)$$

Обернене перетворення Фур'є функції f будемо позначати через \check{f} . Зрозуміло, що

$$\check{f}(y) = \hat{f}(-y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iyt} dt.$$

В ряді просторів оператор F^{-1} і справді є оберненим оператором оператора F , що і пояснює його назву та позначення. Формули (2)-(5) справедливі за різних умов і в різних розуміннях. Проте ці питання ми тут не будемо розглядати, але наведемо інші форми запису інтегральної формули Фур'є, які справедливі за виконання певних умов. Оскільки

$$e^{iy(x-t)} = \cos y(x-t) + i \sin y(x-t)$$

і функція $\sin y(x-t)$, як функція змінної y є непарною, то

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt \right) dy. \quad (7)$$

Функція $\cos y(x-t)$, як функція змінної y є парною. Тому

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos y(x-t) dt \right) dy. \quad (8)$$

Але $\cos y(x-t) = \cos yx \cos yt + \sin yx \sin yt$. Тому маємо і наступну формулу

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} (a(y) \cos yx + b(y) \sin yx) dy, \quad (9)$$

де

$$a(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos ytdt, \quad b(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin ytdt.$$

Якщо функція f є парною, то формула (8) приймає вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos yx \left(\int_0^{+\infty} f(t) \cos ytdt \right) dy.$$

Якщо ж функція f є непарною, то формула (8) приймає вигляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin yx \left(\int_0^{+\infty} f(t) \sin ytdt \right) dy.$$

Функції

$$f_c(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \cos yt dt \quad \text{та} \quad f_s(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \sin yt dt$$

називаються відповідно косинус-перетворенням та синус-перетворенням Фур'є функції f .

Теорема 1. Якщо функція $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є кусково диференційовною на кожному скінченному проміжку і належить до класу $R_1(\mathbb{R}) \cap R_2(\mathbb{R})$, то в кожній точці $x \in \mathbb{R}$ справедлива формула

$$\frac{f(x+) + f(x-)}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy$$

і має місце рівність Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(y) \right|^2 dy.$$

Приклад 1. Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \sigma, \\ 0, & |x| > \sigma, \end{cases}$$

то

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-iyt} dt = \frac{e^{iy\sigma} - e^{-iy\sigma}}{iy\sqrt{2\pi}} = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \frac{\sin i\sigma y}{iy}, & y \neq 0, \\ \sigma\sqrt{2/\pi}, & y = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Для кожної функції $f \in R_1(\mathbb{R})$ і кожного $y_0 \in \mathbb{R}$ виконується:

$$\widehat{f(y - y_0)} = \widehat{e^{iy_0 t} f(t)}. \quad \text{Справді,}$$

$$\widehat{f(y - y_0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(y-y_0)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy_0 t} e^{-iyt} dt.$$

Приклад 3. Для кожної функції $f \in R_1(\mathbb{R})$ і кожного $t_0 \in \mathbb{R}$ виконується

$$\widehat{f(t - t_0)} = e^{-it_0 y} \hat{f}. \quad \text{Справді,}$$

$$\widehat{f(t - t_0)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-iyt} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iy(u+t_0)} du = e^{-iyt_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iyu} du.$$

Приклад 4. Якщо $f \in R_1(\mathbb{R})$, то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx \rightarrow 0, \quad \mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty,$$

бо

$$\int_{-n}^n f(x) e^{-iyx} dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

для кожного $y \in \mathbb{R}$ і згідно з теоремою Рімана-Лебега

$$\int_{-n}^n f(x) e^{-iyx} dx \rightarrow 0, \quad \mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty,$$

для кожного $n \in \mathbb{N}$.

Приклад 5. Якщо $f \in R_1(\mathbb{R})$, $f' \in R_1(\mathbb{R})$ і f є неперервно диференційовною функцією на \mathbb{R} , то $f(y) = o(1)$, $\mathbb{R} \ni y \rightarrow \infty$. Справді, нехай (x_n) – така послідовність в \mathbb{R} , що $x_n \rightarrow +\infty$. Тоді

$$f(x_n) = f(0) + \int_0^{x_n} f'(t) dt,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(0) + \int_0^{+\infty} f'(t) dt.$$

Отже, існує $\lim_{y \rightarrow +\infty} f(y) = A$. Оскільки $f \in R_1(\mathbb{R})$, то $A = 0$. Аналогічно,

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} f(y) = 0.$$

Приклад 6. Якщо $f \in R_1(\mathbb{R})$, $f' \in R_1(\mathbb{R})$ і f є неперервно диференційовною функцією на \mathbb{R} , то, інтегруючи частинами, отримуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-iyx} dx = o(1/y) + \frac{1}{iy} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-iyx} dx = o(1/y), \quad \mathbb{R} \ni y \rightarrow \pm\infty.$$

Аналогічно, якщо $f \in R_1(\mathbb{R})$, $f^{(k)} \in L_1(\mathbb{R})$ для кожного $k \in \overline{1; m}$ і $f^{(m-1)}$ є неперервною функцією на \mathbb{R} , то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-iyx} dx = o(1/y^m), \quad \mathbb{R} \ni y \rightarrow \pm\infty.$$

20. Запитання для самоконтролю

1. Сформулюйте означення тригонометричної системи.
2. Сформулюйте означення тригонометричного ряду.
3. Сформулюйте означення тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.
4. Поясніть суть термінів “тригонометричний ряд” і “тригонометричний ряд Фур'є функції f ”.
5. Сформулюйте означення комплексного тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.
6. Запишіть формулу для знаходження частинних сум тригонометричного ряду Фур'є і доведіть її.
7. Запишіть формулу для знаходження середніх арифметичних частинних сум тригонометричного ряду Фур'є і доведіть її.
8. Сформулюйте і доведіть теорему Фейєра.
9. Сформулюйте і доведіть теорему Вейєрштрасса.
10. Сформулюйте і доведіть теорему про поточкову збіжність ряду Фур'є.
11. Запишіть рівність Парсеваля для тригонометричного ряду Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$.
12. Наведіть чотири приклади евклідових просторів.
13. Наведіть приклад передевклідового простору, який не є евклідовим.
14. Запишіть формулу для знаходження скалярного добутку в просторі \mathbb{R} .
15. Запишіть формулу для знаходження норми в просторі \mathbb{R} .
16. Запишіть формулу для знаходження передскалярного добутку в просторі \mathbb{C} .
17. Запишіть формулу для знаходження норми в просторі \mathbb{C} .
18. Запишіть формулу для знаходження скалярного добутку в просторі \mathbb{R}^n .
19. Запишіть формулу для знаходження норми в просторі \mathbb{R}^n .
20. Запишіть формулу для знаходження передскалярного добутку в просторі \mathbb{C}^n .
21. Запишіть формулу для знаходження норми в просторі \mathbb{C}^n .
22. Запишіть формулу для знаходження передскалярного добутку в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
23. Запишіть формулу для знаходження переднорми в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
24. Запишіть формулу для знаходження скалярного добутку в просторі l_2 .
25. Запишіть формулу для знаходження норми в просторі l_2 .
26. Сформулюйте означення збіжного ряду в передевклідовому просторі.

27. Сформулюйте означення збіжного ряду в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
28. Сформулюйте означення ортонормованої системи в передевклідовому просторі.
29. Сформулюйте означення ортогональної системи в передевклідовому просторі.
30. Доведіть, що система $\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$ є ортогональною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
31. Доведіть, що система $\{1/2; \cos t; \cos 2t; \dots; \cos nt; \dots\}$ є ортогональною в просторі $R_2[0; \pi]$.
32. Доведіть, що система $\{1/2; \cos t; \sin t; \cos 2t; \sin 2t; \dots; \cos nt; \sin nt; \dots\}$ є повною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
33. Доведіть, що система $\{1/2; \cos t; \cos 2t; \dots; \cos nt; \dots\}$ є повною в просторі $R_2[0; \pi]$.
34. Наведіть приклади двох ортонормованих систем в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
35. Наведіть приклади двох ортогональних систем в просторі $R_2[0; \pi]$.
36. Сформулюйте означення повної системи.
37. Наведіть приклади двох повних систем в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
38. Запишіть рівність Парсеваля ортонормованої системи.
39. Доведіть теорему про рівносильність виконання рівності Парсеваля і повноти ортонормованої системи.
40. Сформулюйте означення перетворення Фур'є.
41. Сформулюйте означення оберненого перетворення Фур'є.
42. Запишіть інтегральну формулу Фур'є.

21. Вправи і задачі теоретичного характеру

1. Доведіть твердження

- Для кожної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $-x \in D(f)$, якщо $x \in D(f)$, функція $f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ є парною.
- Для кожної функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої точка $-x \in D(f)$, якщо $x \in D(f)$, функція $f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ є непарною.
- Кожну функцію $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для якої $-x \in D(f)$, якщо $x \in D(f)$, можна подати у вигляді суми парної функції і непарної функції: $f = f_1 + f_2$.
- Якщо послідовність (b_k) є додатною і незростаючою і ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx \quad (1)$$

є рівномірно збіжним на \mathbb{R} , то $kb_k \rightarrow 0$.

5. Якщо послідовність (b_k) є додатною і незростаючою і $kb_k \rightarrow 0$, то ряд (1) є рівномірно збіжним на \mathbb{R} .

6. Якщо послідовність (b_k) є додатною і незростаючою і $b_k \rightarrow 0$, то ряд (1) є рівномірно збіжним на кожному проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, $b - a < 2\pi$.

7. Якщо послідовність (b_k) є додатною і незростаючою і $b_k \rightarrow 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k x \sin kx$ є рівномірно збіжним в деякому околі точки 0.

8. Послідовність частинних сум ряду (1) є обмеженою на \mathbb{R} , якщо $b_k = 1/k$.

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \cos kx = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi x}{2} + \frac{x^2}{4}, \quad x \in [0; \pi].$$

10. Якщо $a_k \cos kx + b_k \sin kx \rightarrow 0$ для кожного x з деякого проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, то $|a_k| + |b_k| \rightarrow 0$.

$$11. \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin x}{x} e^{-i2kx} dx \rightarrow 0, \quad \mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty.$$

$$12. \int_{-\pi}^{\pi} \ln x \cos 4kx dx \rightarrow 0, \quad \mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty.$$

13. Якщо функція $f \in R_1[-\pi; \pi]$ є 2π -періодичною функцією і задовольняє умову Гельдера, тобто

$$(\exists c > 0)(\exists \alpha \in (1/2; 1])(\forall x \in \mathbb{R})(\forall \tilde{x} \in \mathbb{R}) : |f(x) - f(\tilde{x})| \leq c|x - \tilde{x}|^{\alpha},$$

то ряд Фур'є функції f є збіжним на \mathbb{R} абсолютно. При цьому сталу $1/2$ не можна замінити меншою.

14. Якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною, неперервною і $c_k(f) = O(1/k)$, $\mathbb{Z} \ni k \rightarrow \infty$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається до неї рівномірно на $[-\pi; \pi]$.

15. Якщо функція $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ є 2π -періодичною, неперервною функцією обмеженої варіації на проміжку $[-\pi; \pi]$, то її тригонометричний ряд Фур'є збігається до неї рівномірно на $[-\pi; \pi]$.

16. Множина всіх послідовностей, збіжних в \mathbb{R} , зі звичайними операціями додавання і множення на числа є векторним простором.

17. Множина всіх функцій $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, неперервних на \mathbb{R} , зі звичайними операціями додавання і множення на числа є векторним простором.
18. Множина всіх функцій $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, інтегровних за Ріманом на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, зі звичайними операціями додавання і множення на числа є векторним простором.
19. Множина всіх функцій $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, які мають похідну на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, зі звичайними операціями додавання і множення на числа є векторним простором.
20. Множина всіх функцій $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$, які мають другу похідну на проміжку $[a; b] \subset \mathbb{R}$, зі звичайними операціями додавання і множення на числа є векторним простором.
21. Система $\left\{ \frac{g(t)}{\sqrt{2\pi}}, \frac{g(t)\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{g(t)\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{g(t)\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{g(t)\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ є повною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$, якщо $g(t) = 1 + |t|$.
22. Система $\left\{ \frac{g(t)}{\sqrt{2\pi}}, \frac{g(t)\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{g(t)\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{g(t)\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{g(t)\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ є повною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$, якщо $g(t) = 2^{-t}$.
23. Система $\left\{ \frac{g(t)}{\sqrt{2\pi}}, \frac{g(t)\cos t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{g(t)\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ є повною в просторі $R_2[0; \pi]$, якщо $g(t) = 1 + t$.
24. Система $\left\{ \frac{g(t)}{\sqrt{2\pi}}, \frac{g(t)\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{g(t)\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ є повною в просторі $R_2[0; \pi]$, якщо $g(t) = 2 - t$.
25. Система $\left\{ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ не є базисом простору $R_2[-\pi; \pi]$.
26. Система $\left\{ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ не є базисом простору $R_2[0; \pi]$.
27. Система $\left\{ \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ є лінійно незалежною в просторі $R_2[0; \pi]$.
28. Система $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \dots \right\}$ є лінійно незалежною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
29. Система $\{t^n : n \in \mathbb{N}_0\}$ є лінійно незалежною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.
30. Якщо $(\lambda_k : k \in \mathbb{N})$ – послідовність різних комплексних чисел, то система

$\{e^{ik} : k \in \mathbb{N}\}$ є лінійно незалежною в просторі $R_2[-\pi; \pi]$.

22. Вправи і задачі розрахункового характеру

1. Подайте функцію f у вигляді суми парної і непарної функцій

1. $f(x) = x - 1$.

2. $f(x) = e^x$.

3. $f(x) = x^2 + 1$.

4. $f(x) = \sin x$.

2. Вкажіть парну функцію f_1 , що є продовженням звуження функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на множину A

1. $f(x) = x$, $A = [0; +\infty)$.

2. $f(x) = x + 1$, $A = [0; +\infty)$.

3. $f(x) = \sin x$, $A = [0; \pi/2]$.

3. Вкажіть непарну функцію f_1 , що є продовженням звуження функції $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на множину A

1. $f(x) = x^2$, $A = [0; +\infty)$.

2. $f(x) = \cos x$, $A = [0; +\infty)$.

3. $f(x) = x + 3$, $A = [0; +\infty)$.

4. $f(x) = \arccos x$, $A = [0; 1]$.

4. Вкажіть T -періодичне продовження звуження функції f на множину A

1. $f(x) = x^2$, $T = 1$, $A = [0; 1]$.

2. $f(x) = \sin x$, $T = \frac{\pi}{2}$, $A = [0; \pi/2]$.

3. $f(x) = e^x$, $T = 2$, $A = [0; 2]$.

5. Переконайтесь, що тригонометричний ряд є рядом Фур'є своєї суми на проміжку Δ

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cos kx}{k^3 + 1}$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.

2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt{k} e^{ikx}}{\sqrt{k^4 + 1}}$, $\Delta = [-\pi; \pi]$.

3. $\sum_{k=4}^{\infty} \frac{ke^k \cos kx}{ke^k \ln k \ln^2 \ln k + 1}, \Delta = [-\pi; \pi].$
4. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \sin kx}{k^2 \ln^2(k+1)}, \Delta = [-\pi; \pi].$
5. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{2^k} \cos kx + \frac{k+1}{k^3 \ln(k+1)} \sin kx, \Delta = [-\pi; \pi].$
6. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln^3 k^4}{k^2} \cos kx + \frac{\ln \ln^5 k}{k \ln^2(k+1)} \sin kx, \Delta = [-\pi; \pi].$

6. Для функції f знайдіть тригонометричний ряд Фур'є на проміжку $[-\pi; \pi]$, запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$

1. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} -\pi, & x \leq 0, \\ \pi, & x > 0. \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \notin [-2; 2], \\ 0, & x \in [-2; 2]. \end{cases}$
4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 2]. \end{cases}$
5. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x, & x > 0. \end{cases}$
6. $f(x) = x.$
7. $f(x) = \pi^2 - x^2.$
8. $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x).$
9. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x).$
10. $f(x) = \arcsin(\sin x).$
11. $f(x) = \arcsin(\cos x).$

7. Знайдіть тригонометричний ряд Фур'є функції f на вказаному проміжку Δ , запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$

1. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \Delta = [0; \pi]$ (по косинусах).

$$2. f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, \Delta = [0; \pi] \text{ (по синусах).}$$

$$3. f(x) = x^2, \Delta = [0; 2\pi].$$

$$4. f(x) = |x|, \Delta = [-l; l].$$

$$5. f(x) = 1, \Delta = [0; l] \text{ (по синусах).}$$

$$6. f(x) = x, \Delta = [0; l] \text{ (по косинусах).}$$

8. Напишіть комплексний тригонометричний ряд Фур'є функції f на вказаному проміжку Δ , запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$

$$1. f(x) = \cos x, \Delta = [-\pi; \pi].$$

$$2. f(x) = \sin x, \Delta = [-l; l].$$

$$3. f(x) = x, \Delta = [0; 2l].$$

$$4. f(x) = \sin x, \Delta = [-\pi; \pi].$$

9. Для функції f знайдіть її ряд Фур'є за системою E на проміжку Δ , запишіть рівність Парсеваля, зобразіть графіки функцій $y = f(x)$ та $y = S(x)$ і з'ясуйте, в яких точках $x \in \mathbb{R}$ сума $S(x)$ цього ряду дорівнює $f(x)$

$$1. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}, f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$2. \Delta = [-\pi/2; \pi/2], E = \{1/2; \cos 2x; \sin 2x; \cos 4x; \sin 4x; \dots\}, f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$3. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{1/2; \cos x; \cos 2x; \dots\}, f(x) = \pi.$$

$$4. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}, f(x) = \begin{cases} -\pi, & x \leq 0, \\ \pi, & x > 0. \end{cases}$$

$$5. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}, f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$$

$$6. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}, f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 2]. \end{cases}$$

$$7. \Delta = [0; 2\pi], E = \{1/2; \cos x; \cos 2x; \dots\}, f(x) = \begin{cases} x, & x > 0, \\ -x, & x \leq 0. \end{cases}$$

$$8. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}, f(x) = x.$$

$$9. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}, f(x) = x^2.$$

$$10. \Delta = [-\pi; \pi], E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}, f(x) = |x|.$$

11. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \pi^2 - x^2$.
12. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \cos ax$, $a \in \mathbb{R}$.
13. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \sin ax$, $a \in \mathbb{R}$.
14. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = |\cos x|$, $a \in \mathbb{R}$.
15. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = |\sin x|$, $a \in \mathbb{R}$.
16. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \cos 2x; \dots\}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.
17. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \arcsin(\sin x)$.
18. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$.
19. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \cos 2x; \dots\}$, $f(x) = \arcsin \cos x$.
20. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.
21. $\Delta = [0; \pi/2]$, $E = \{\sin kt : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = -x(x - \pi/2)$.
22. $\Delta = [0; 2\pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$, $\Delta = [-\pi; \pi]$,
 $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$.
23. $\Delta = [0; 2l]$, $E = \{e^{ikx/l} : k \in \mathbb{Z}\}$, $f(x) = x^2$.
24. $\Delta = [-l; l]$, $E = \left\{1/2; \cos \frac{\pi x}{l}; \sin \frac{\pi x}{l}; \cos \frac{2\pi x}{l}; \sin \frac{2\pi x}{l}; \dots\right\}$, $f(x) = |x|$.
25. $\Delta = [0; 2l]$, $E = \left\{1/2; \cos \frac{\pi x}{l}; \sin \frac{\pi x}{l}; \cos \frac{2\pi x}{l}; \sin \frac{2\pi x}{l}; \dots\right\}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0; 2l], \\ -1, & x \notin [0; 2l]. \end{cases}$
26. $\Delta = [0; l]$, $E = \left\{\sin \frac{k\pi t}{l} : k \in \mathbb{N}\right\}$, $f(x) = 1$.
27. $\Delta = [0; l]$, $E = \left\{\cos \frac{k\pi t}{l} : k \in \mathbb{N}\right\}$, $f(x) = x$.
28. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{e^{ikx} : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = \cos x$.
29. $\Delta = [-l; l]$, $E = \{e^{ikx/l} : k \in \mathbb{Z}\}$, $f(x) = \sin x$.
30. $\Delta = [0; 2l]$, $E = \{e^{ikx/l} : k \in \mathbb{Z}\}$, $f(x) = x$.
31. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = x - [x]$.
32. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = \sin 2x$.
33. $\Delta = [0; \pi/2]$, $E = \{1/2; \cos 2x; \cos 4x; \dots\}$, $f(x) = \sin 2x$.
34. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{e^{ikx} : k \in \mathbb{N}\}$, $f(x) = e^x$.

35. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = e^x$.
36. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = e^{-x}$.
37. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = [\sin x]$.
38. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arcsin[\sin x]$.
39. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = [\cos x]$.
40. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arccos[\cos x]$.
41. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arccos[\sin x]$.
42. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$, $f(x) = [\cos x]$.
43. $\Delta = [-\pi; \pi]$, $E = \{1/2; \cos x; \sin x; \cos 2x; \sin 2x; \dots\}$,
 $f(x) = \arcsin[\cos x]$.

10. Знайдіть скалярний (передскалярний) добуток елементів евклідового (передевклідового) простору H , їхні норми (переднорми) та відхилення між ними

1. $H = \mathbb{R}$, $a = -1$, $b = 2$.
2. $H = \mathbb{R}$, $a = -1 + \sqrt{2}$, $b = 1 - \sqrt{2}$.
3. $H = \mathbb{C}$, $a = -1 - i$, $b = 1 + i$.
4. $H = \mathbb{C}$, $a = e^{i\pi/4}$, $b = e^{-i3\pi/4}$.
5. $H = \mathbb{R}^3$, $a = (-1; \sqrt{2}; 0)$, $b = (-2; \sqrt{2}; \sqrt{3})$.
6. $H = \mathbb{R}^2$, $a = (-1 - \sqrt{2}; \sqrt{3})$, $b = (-2 + 2\sqrt{2}; -\sqrt{3})$.
7. $H = \mathbb{C}^2$, $a = (-1 - i; e^{i\pi})$, $b = (1 + i; e^{-i\pi})$.
8. $H = \mathbb{C}^3$, $a = (-1 - i; i^3; e^{i\pi/3})$, $b = (2 + i; 1; 0)$.
9. $H = l_2$, $x = (1/\sqrt{k(k+1)})$, $y = (1/\sqrt{k(k+1)})$.
10. $H = l_2$, $x = (2^{-k})$, $y = (3^{-k})$.
11. $H = R_2[-\pi; \pi]$, $x = \sin t$, $y = i \cos t$.
12. $H = R_2[-\pi; \pi]$, $x = t$, $y = \cos t$.
13. $H = R_2[0; 1]$, $x = t$, $y = 1 + it$.
14. $H = R_2(\mathbb{R})$, $x = |t|$, $y = e^{-|t|}$.
15. $H = R_2(\mathbb{R})$, $x = \frac{1}{1+t^2}$, $y = i \operatorname{arctg} t$.

11. Не знаходячи коефіцієнтів Фур'є з'ясуйте, чи тригонометричний ряд Фур'є

функції $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ на проміжку $[-\pi; \pi]$ збігається: а) в просторі $R_2[-\pi; \pi]$; б) поточково на \mathbb{R} ; в) рівномірно на \mathbb{R}

1. $f(x) = xe^x + x^3$.
2. $f(x) = \operatorname{sgn} \sin 2x$.
3. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin xe^x)$.
4. $f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ -1, & x \geq 0. \end{cases}$
5. $f(x) = \cos^3 2x + \sin^3 4x$.
6. $f(x) = \cos 3x + \sin^4 5x$.
7. $f(x) = \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{3}$.
8. $f(x) = \cos \sqrt{2}x$.
9. $f(x) = x - [x]$.
10. $f(x) = e^x + x$.
11. $f(x) = \sin 2x$.
12. $f(x) = x + \sin 2x$.
13. $f(x) = x^2$.
14. $f(x) = \begin{cases} -\pi, & x \leq 0, \\ \pi, & x > 0. \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} -x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$
16. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$
17. $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x \leq 0, \\ \sin x, & x > 0. \end{cases}$
18. $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & x \leq 0, \\ \cos 3x, & x > 0. \end{cases}$
19. $f(x) = \cos \sqrt{2}x + \sin \sqrt{2}x$.
20. $f(x) = \cos|x|$.
21. $f(x) = \sin|x|$.
22. $f(x) = \cos^2|x|$.
23. $f(x) = \sin^2|x|$.

24. $f(x) = xe^{-x} + x^2$.

25. $f(x) = [x] \cos x$.

26. $f(x) = x \cos x$.

27. $f(x) = x \sin x$.

28. $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

29. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

30. $f(x) = \operatorname{sgn} \cos 2x$.

31. $f(x) = e^x \sin x$.

32. $f(x) = e^{|x|} \cos x$.

33. $f(x) = [x] \sin x$.

34. $f(x) = \cos^4 x + \sin^3 4x$.

35. $f(x) = \cos 6x + \sin 4x$.

36. $f(x) = \cos \frac{x}{3}$.

37. $f(x) = \sin \frac{x}{4}$.

12. Знайдіть перетворення Фур'є функції f і напишіть інтегральну формулу Фур'є

$$1. f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \in [-2\pi; -\pi), \\ \cos x, & x \in [-\pi; 0], \\ 0, & x \notin [-2\pi; 0]. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| < 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ 2, & x \in (1; 2), \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup (1; 2). \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 3, & x \in (-1; 0], \\ -1, & x \in [1; 2), \\ 0, & x \notin (-1; 0] \cup [1; 2). \end{cases}$$

6. $f(x) = \begin{cases} x, & x \in [-1; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$
7. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ -x, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$
8. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [-1; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$
9. $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-1; 0], \\ -x^2, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-1; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$
10. $f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \in [-2; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$
11. $f(x) = \begin{cases} e^{i2x}, & x \in (-2; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin (-2; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$
12. $f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [-2; -1), \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin [-2; -1) \cup [1; 2]. \end{cases}$
13. $f(x) = \begin{cases} e^{-i2x}, & x \in (-2; 0], \\ -1, & x \in [1; 2], \\ 0, & x \notin (-2; 0] \cup [1; 2]. \end{cases}$
14. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi; 0], \\ -1, & x \in [\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin [-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi]. \end{cases}$
15. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (-\pi; 0], \\ -1, & x \in [\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; 0] \cup [\pi; 2\pi]. \end{cases}$

$$16. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (-\pi; 0], \\ -\sin x, & x \in (\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; 0] \cup (\pi; 2\pi]. \end{cases}$$

$$17. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi; 0), \\ -\cos x, & x \in [\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin [-\pi; 0) \cup [\pi; 2\pi). \end{cases}$$

$$18. f(x) = \begin{cases} \sin^2 x, & x \in (-\pi; 0), \\ 1, & x \in [\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin (-\pi; 0) \cup [\pi; 2\pi). \end{cases}$$

$$19. f(x) = \begin{cases} \cos^2 x, & x \in (-\pi; 0), \\ 1, & x \in (\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi). \end{cases}$$

$$20. f(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\pi; 0), \\ \sin^2 x, & x \in [\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin (-\pi; 0) \cup [\pi; 2\pi). \end{cases}$$

$$21. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\pi; 0), \\ \cos^2 x, & x \in (\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin (-\pi; 0) \cup (\pi; 2\pi). \end{cases}$$

$$22. f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \in [-1; 0], \\ e^{-ix}, & x \in (0; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}$$

$$23. f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [-1; 0), \\ e^{ix}, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [-1; 1]. \end{cases}$$

$$24. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in (-\pi; 0], \\ \sin x, & x \in (0; \pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; \pi]. \end{cases}$$

$$25. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in [-\pi; 0], \\ \cos x, & x \in (0; \pi), \\ 0, & x \notin [-\pi; \pi). \end{cases}$$

$$26. f(x) = \begin{cases} e^{ix}, & x \in (-\pi; 0], \\ \sin x, & x \in (0; \pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; \pi]. \end{cases}$$

$$27. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (-\pi; 0], \\ e^{ix}, & x \in (0; \pi], \\ 0, & x \notin (-\pi; \pi]. \end{cases}$$

$$28. f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \in (0; \pi], \\ e^{-ix}, & x \in (\pi; 2\pi], \\ 0, & x \notin (0; 2\pi]. \end{cases}$$

$$29. f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \in [0; \pi), \\ e^{-ix}, & x \in [\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin [0; 2\pi). \end{cases}$$

$$30. f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [0; \pi), \\ \cos x, & x \in [\pi; 2\pi), \\ 0, & x \notin [0; 2\pi). \end{cases}$$

$$31. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; 2], \\ 0, & x \notin [-2; 2]. \end{cases}$$

$$32. f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

$$33. f(x) = \begin{cases} e^{-ix}, & x \in [-2\pi; -\pi), \\ \cos x, & x \in [-\pi; 0], \\ 0, & x \notin [-2\pi; 0]. \end{cases}$$

$$34. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2\pi; -\pi), \\ -1, & x \in [-\pi; 0], \\ 0, & x \notin [-2\pi; 0]. \end{cases}$$

Додатки. Основні формули

1. Тригонометричні функції

1. Основні тригонометричні тотожності

$$1. \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$2. \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{cosec} \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \operatorname{sec} \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

2. Формули додавання і віднімання тригонометричних функцій

$$1. \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta.$$

$$2. \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

$$3. \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta.$$

$$4. \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

$$5. \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha + \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \alpha - \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \operatorname{ctg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta - 1}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta}, \alpha + \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{ctg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta + 1}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta}, \alpha - \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

3. Формули подвійних і потрійних аргументів

$$1. \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

$$2. \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha.$$

$$3. \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{ctg} \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha.$$

$$6. \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

$$7. \operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{tg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{6}(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{ctg} 3\alpha = \frac{3\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg}^3 \alpha}{1 - 3\operatorname{ctg}^2 \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

4. Формули половинного аргументу

$$1. \sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}.$$

$$2. \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}.$$

$$3. \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}, \alpha \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$5. \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$6. \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos \alpha}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$7. \sin \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \operatorname{tg} \alpha = \frac{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi(2n+1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}, \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

5. Формули перетворення суми або різниці тригонометричних функцій у добуток

$$1. \sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$2. \sin \alpha - \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

$$3. \cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$4. \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

$$5. \cos \alpha + \sin \alpha = \sqrt{2} \cos \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

$$6. \cos \alpha - \sin \alpha = \sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right).$$

$$7. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$8. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), \beta \neq \frac{\pi}{2}(2n-1), n \in \mathbb{Z}.$$

$$9. \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \alpha \neq \pi n, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$10. \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \alpha \neq \pi n, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$11. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$12. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \sin \beta}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}, \beta \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$13. \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = \frac{2}{\sin 2\alpha}, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$14. \operatorname{tg} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha = -2 \operatorname{ctg} 2\alpha, \alpha \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$$

$$15. 1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$16. 1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}.$$

$$17. 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$18. 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right).$$

$$19. 1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$20. 1 - \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \alpha \right)}{\cos \alpha}, \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

$$21. 1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$22. 1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$23. 1 + \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\sin \alpha \sin \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$24. 1 - \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$25. 1 - \operatorname{ctg}^2 \alpha = -\frac{\cos 2\alpha}{\sin^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$26. \operatorname{tg}^2 \alpha - \operatorname{tg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\alpha - \beta)}{\cos^2 \alpha \cos^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$27. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta) \sin(\beta - \alpha)}{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta}, \quad \alpha, \beta \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$28. \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$29. \operatorname{ctg}^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \operatorname{ctg}^2 \alpha \cos^2 \alpha, \quad \alpha \neq \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

6. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму

$$1. \sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)).$$

$$2. \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

$$3. \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)).$$

$$4. \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) + \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) - \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$5. \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\sin(\alpha + \beta - \gamma) - \sin(\beta + \gamma - \alpha) + \sin(\gamma + \alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$6. \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(-\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta + \gamma)).$$

$$7. \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \frac{1}{4}(\cos(\alpha + \beta - \gamma) + \cos(\beta + \gamma - \alpha) + \cos(\gamma + \alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta + \gamma)).$$

7. Формули зниження степеня тригонометричних функцій

$$1. \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha). \quad 2. \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha).$$

$$3. \sin^3 \alpha = \frac{3 \sin \alpha - \sin 3\alpha}{4}.$$

$$4. \cos^3 \alpha = \frac{3 \cos \alpha + \cos 3\alpha}{4}.$$

8. Формули зведення

$$1. \sin(-\alpha) = -\sin \alpha.$$

$$2. \cos(-\alpha) = \cos \alpha.$$

$$3. \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha.$$

$$4. \sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin \alpha.$$

$$5. \sin\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = -\cos \alpha.$$

$$6. \sin(2\pi \pm \alpha) = \pm \sin \alpha.$$

$$7. \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha.$$

$$8. \cos(\pi \pm \alpha) = -\cos \alpha.$$

$$9. \cos\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \pm \sin \alpha.$$

$$10. \cos(2\pi \pm \alpha) = \cos \alpha.$$

$$11. \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha.$$

$$12. \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

$$13. \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$14. \operatorname{tg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha.$$

$$15. \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$16. \operatorname{tg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{tg} \alpha.$$

$$17. \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha.$$

$$18. \operatorname{ctg}(\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$19. \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \operatorname{tg} \alpha.$$

$$20. \operatorname{ctg}(2\pi \pm \alpha) = \pm \operatorname{ctg} \alpha.$$

9. Значення тригонометричних функцій деяких основних кутів

$f(x)$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
$\operatorname{ctg} x$	—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	—	0	—

10. Обернені тригонометричні функції

$$1. \sin(\arcsin x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$2. \arcsin(-x) = -\arcsin x.$$

$$3. \arcsin(\sin x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$4. \sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$5. \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$6. \sin(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$7. \cos(\arccos x) = x, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$8. \arccos(-x) = \pi - \arccos x.$$

$$9. \arccos(\cos x) = x, \quad 0 \leq x \leq \pi.$$

$$10. \cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$11. \cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$12. \cos(\operatorname{arcctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

$$13. \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$14. \operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$

$$15. \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

$$16. \operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$17. \operatorname{tg}(\arcsin x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$18. \operatorname{tg}(\arccos x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 1.$$

$$19. \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$20. \operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x.$$

$$21. \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x, \quad 0 < x < \pi.$$

$$22. \operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$$

$$23. \operatorname{ctg}(\arcsin x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \quad -1 \leq x < 0, \quad 0 < x \leq 1.$$

$$24. \operatorname{ctg}(\arccos x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$25. \arcsin x = \begin{cases} -\arccos \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \arccos \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$26. \arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$27. \arcsin x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \pi, & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$28. \arccos x = \begin{cases} \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & -1 \leq x < 0, \\ \arcsin \sqrt{1-x^2}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$$29. \arccos x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & -1 \leq x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

$$30. \arccos x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$$

$$31. \operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$32. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$33. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \pi, & x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$34. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arcsin \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, & x > 0. \end{cases}$$

$$35. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} -\arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x < 0, \\ \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}, & x \geq 0. \end{cases}$$

$$36. \operatorname{arctg} x = \begin{cases} \pi + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$$

$$37. \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \leq x \leq 1.$$

$$38. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

$$39. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & x > 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x < 0. \end{cases}$$

$$40. \arcsin x + \arcsin y =$$

$$\begin{cases} \arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right), & xy < 0, \quad x^2 + y^2 \leq 1, \\ -\arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) - \pi, & x^2 + y^2 > 1, \quad x < 0, \quad y < 0, \\ -\arcsin \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} \right) + \pi, & x^2 + y^2 > 1, \quad x > 0, \quad y > 0. \end{cases}$$

$$41. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}, & xy < 1, \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} - \pi, & xy > 1, \quad x < 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \pi, & xy > 1, \quad x > 0. \end{cases}$$

$$42. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{1-xy}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$43. \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x-y}{1+xy}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

$$44. \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{xy-1}{x+y}, \quad x > 0, \quad y > 0.$$

2. Гіперболічні функції

1. $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$.
2. $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.
3. $\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.
4. $\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.
5. $e^x = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x$.
6. $e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$.
7. $\operatorname{sech} x = \frac{1}{\operatorname{ch} x}$.
8. $\operatorname{cosech} x = \frac{1}{\operatorname{sh} x}$.
9. $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
10. $\operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x$.
11. $\operatorname{sh}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{2}$.
12. $\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{ch} x + 1}{2}$.
13. $\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sh}^2 x$.
14. $\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y$.
15. $\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y$.
16. $\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \operatorname{th} y}$.
17. $\operatorname{cth}(x \pm y) = \frac{1 \pm \operatorname{cth} x \operatorname{cth} y}{\operatorname{cth} x \pm \operatorname{cth} y}$.
18. $\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$.
19. $\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$.
20. $\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x+y}{2} \operatorname{ch} \frac{x-y}{2}$.
21. $\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x+y}{2} \operatorname{sh} \frac{x-y}{2}$.
22. $\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.
23. $\operatorname{arch}_+ x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.
24. $\operatorname{arch}_- x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$.
25. $\operatorname{arth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$, $x \in (-1; 1)$.
26. $\operatorname{arcth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$, $x \in (1; +\infty)$.

3. Основні границі

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n = e$.
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$, $a \in (0; +\infty)$.
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.
5. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$, $|q| < 1$.
6. $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \infty$, $|q| > 1$.
7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{n!} = 0$, $p \in \mathbb{R}$.
8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$, $a \in (1; +\infty)$.
9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^p}{a^n} = 0$, $p \in \mathbb{R}$, $a \in (1; +\infty)$.
10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = 0$, $a \in (1; +\infty)$.
11. $\lim_{n \rightarrow \infty} n(a^{1/n} - 1) = \ln a$, $a \in (0; +\infty)$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

13. $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e.$

14. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+1/x)^x = e.$

15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}.$

16. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \log_a \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\ln a}.$

17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$

18. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$

19. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

20. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^\alpha - 1}{x - 1} = \alpha, \alpha \in \mathbb{R}.$

21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a, a \in (0; +\infty).$

22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

23. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln^\beta x}{x^\varepsilon} = 0, \beta \in \mathbb{R}, \varepsilon \in (0; +\infty).$

24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1.$

25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\beta}{a^x} = 0, \beta \in \mathbb{R}, a \in (1; +\infty).$

26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1.$

4. Таблиця основних похідних

1. $(c)' = 0.$

2. $(x^\mu)' = \mu x^{\mu-1}, \mu \in \mathbb{R}.$

3. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$

4. $(e^x)' = e^x.$

5. $(a^x)' = a^x \ln a, a > 0.$

6. $(\ln x)' = 1/x.$

7. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, a > 0, a \neq 1.$

8. $(\sin x)' = \cos x.$

9. $(\cos x)' = -\sin x.$

10. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

11. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

12. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

13. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

14. $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$

15. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$

16. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$

17. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$

18. $(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$

19. $(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$

20. $(\operatorname{arsh} x)' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$

21. $(\operatorname{arch}_+ x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

22. $(\operatorname{arch}_- x)' = -\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}.$

23. $(\operatorname{arth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$.

24. $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}, x \neq 0$.

25. $([x])' = 0, x \neq k \in \mathbb{Z}$.

26. $(|x|)' = \operatorname{sgn} x, x \neq 0$.

5. Таблиця основних інтегралів

1. $\int 0 dx = C$.

2. $\int dx = x + C$.

3. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

4. $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$.

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a > 0, a \neq 1$.

6. $\int e^x dx = e^x + C$.

7. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

8. $\int \cos x dx = \sin x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

12. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

13. $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + C$.

14. $\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \ln |\operatorname{tg} x| + C$.

15. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right| + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C$.

17. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln |\cos x| + C$.

18. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln |\sin x| + C$.

19. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$.

20. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$.

21. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

22. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

23. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C, a > 0$.

24. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a \neq 0$.

25. $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C, a \neq 0$.

26. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0$.

27. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, a > 0$.

28. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C, a > 0$.

Література

1. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу/ Под ред. В.А. Садовничего. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.
2. Беккенбах Э., Беллман Р. Неравенства. – М.: Мир., 1965. – 83 с.
3. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Математический анализ в задачах и упражнениях: Учеб. пособие. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1991. – 352 с.
4. Глушков П.М., Шунда Н.М. Диференціальне числення функції однієї змінної. – К.: Вища шк., 1991. – 270 с.
5. Грауэрт Г., Либ И., Фишер В. Дифференциальное и интегральное исчисления. – М.: Мир, – 1971. – 680 с.
6. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. – М.: Мир, 1967. – 234 с.
7. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: У 3-х ч. – К.: Вища шк., 1990. – Ч. 1. – 380 с.; Ч. 2. – 1991. – 365 с.; Ч. 3. – 1992. – 360 с.
8. Дьедонне Ж. Основы современного анализа.–М.: Мир, 1964.–430 с.
9. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Либідь, 1993. – Ч. 1. – 320 с.; Ч. 2. – 299 с.
10. Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Ляшенко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2002. – Ч. 1. – 463 с; Ч. 2. – 2003. – 470 с.
11. Заманский М. Введение в современную алгебру и анализ.– М.: Наука, 1974. –487 с.
12. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Фазис, 1997. – Ч. 1. – 554 с.
13. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Наука, 1981. – Ч. 1. – 543 с.; Ч. 2. – 1984. – 640 с.

14. Зорич В.А. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: МЦНМО, 2001. – Ч. 1. – 664 с.; Ч. 2. – 2002. – 794 с.
15. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Изд-во Моск. ун-та., 1985. – Ч. 1. – 662 с.; Ч. 2. – 1987. – 358 с.
16. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа: В 2-х ч. – М.: Наука, 1982. – Ч. 1. – 616 с.
17. Коровкин П.П. Математический анализ: В 2-х ч. – М.: Просвещение, 1972. – Ч. 1. – 447 с.
18. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа: В 3-х т. – М.: Высш. шк., 1988. – Т. 1. – 712 с.; Т. 2. – 576 с.; Т. 3. – 1989. – 352 с.
19. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 2-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 704 с.; Т. 2. – 671 с.
20. Ландау Э. Основы анализа. – М.: Изд-во иностр. лит., 1947. – 182 с.
21. Ляшко І.І., Ємельянов В.Ф., Боярчук О.К. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1992. – Ч. 1 – 495 с.; Ч. 2. – 1993. – 375 с.
22. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Калайда А.Ф. Математический анализ: В 3-х ч. – К.: Вища шк., 1983. – Ч. 1. – 495 с.
23. Майков Е.В. Математический анализ. Введение. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – 48 с.
24. Никольский С.М. Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Наука, 1983. – Т. 1. – 484 с.; Т. 2. – 448 с.
25. Поля Г., Сега Г. Задачи и теоремы из анализа: В 2-х ч. – М.: Наука, 1978. – Ч. 1. – 391 с; Ч. 2. – 431 с.
26. Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1976. – 320 с.
27. Уваренков И.М., Маллер М.З. Курс математического анализа: В 2-х т. – М.: Просвещение, 1976. – Т. 2. – 479 с.
28. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа: В 2-х ч. – М.: Физматгиз, 1962. – Ч. 1. – 343 с.; 1963. – Ч. 2. – 500 с.
29. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3-х т. – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 616 с; Т. 2. – 800 с; Т. 3. – 656 с.
30. Шварц Л. Анализ: В 2-х т. – М.: Мир, 1972. – Т. 1. – 824 с.; Т. 2. – 528 с.
31. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции одного переменного. Ч. 1-2. – М.: Наука, 1969. – 528 с.
32. Шипачев В.С. Высшая математика. – М.: Высш. шк., 1990. – 479 с.
33. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 1994. – Ч. 1. – 423 с.
34. Шкіль М.І. Математичний аналіз: У 2-х ч. – К.: Вища шк., 2005. – Ч. 1. – 447 с.; Ч. 2. – 510 с.

35. Харди Г.Г., Литтльвуд Дж.Е., Полия Г. Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
36. Чернишов С.Н. Линейные неравенства. – М.: Наука, 1968. – 488 с.
37. Tom M. Apostol. Calculus. – 1961.–Vol. 1. – 666 p; Vol. 2. – 1967.–667 p.
38. Robert G. Bartle. The elements of real analysis. – New York, 1967.– 447 p.
39. Mauch S. Introduction to methods of applied mathematics or advanced methods for scientists and engineers. – 2002. – 1441 p.
40. Stroyan K.D. Mathematical background: foundations of infinitesimal calculus. – Academic Press, Inc., 1997. – 182 p.
41. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М.: Наука, 1985. – 446 с.
42. Виленкин Н.Я., Бохан К.А., Марон И.А., Матвеев И.В., Смолянский М.Л., Цветков А.Т. Задачник по курсу математического анализа: В 2-х ч./ Под ред. Н.Я. Виленкина. – М.: Просвещение, 1971. – Ч. 1. – 343 с; Ч. 2. – 336 с.
43. Виноградова И.А., Олехник С.Н., Садовничий В.А. Задачи и упражнения по математическому анализу: В 2-х ч./ Под общ. ред. В.А. Садовниченко. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. – Ч. 1. – 416 с; Ч. 2. – 1991. – 352 с.
44. Гюнтер Н.М., Кузьмин Р.О. Сборник задач по высшей математике: В 2-х т. – М.: Высш. шк., 1957. – Т. 1. – 224 с.; Т. 2. – 223 с.
45. Давыдов Н.А., Коровкин П.П., Никольский В.Н. Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 255 с.
46. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1997. – 624 с.
47. Дороговцев А.Я. Математический анализ. Сборник задач. – К.: Высш. шк., 1987. – 408 с.
48. Задачи и упражнения по математическому анализу/ Для втузов. Под ред. Б.П. Демидовича. – М.: Наука, 1978. – 480 с.
49. Запорожец Г.И. Руководство к решению задач по математическому анализу. – М.: Высш. шк., 1966. – 464 с.
50. Егорова И.А. Задачник-практикум по математическому анализу: В 3-х ч. – М.: Учпедгиз, 1962. – Ч. 3. – 105 с.
51. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Предел. Непрерывность. Дифференцируемость/ Под ред. Л.Д. Кудрявцева. – М.: Наука, 1984. – 592 с.
52. Кузнецов Л.А. Сборник задач по высшей математике: Типовые расчеты. – М.: Высш. шк., 1983. – 176 с.
53. Лефор Г. Алгебра и анализ. Задачи. – М.: Наука, 1973. – 461 с.

-
54. Ляшко И.И., Боярчук А.К., Гай Я.Г., Головач Г.П. Справочное пособие по высшей математике. Математический анализ: В 3-х т. – М.: Едиториал, 2001. – Т. 1. – 360 с; Т. 2. – 2003. – 224 с.; Т. 3. – 2001. – 224 с
55. Макаров Б.М., Голузина М.Г., Лодкин А.А., Подкорытов А.Н. Избранные задачи по вещественному анализу. – М.: Наука, 1992. – 432 с.
56. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. – М.: Высш. шк., 1964. – 336 с.
57. Погорелов А.И. Контрольные работы по математическому анализу. – М.: Учпедгиз, 1951. – 50 с.
58. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: В 3-х ч./ А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юреть; Под общ. ред. А.П. Рябушко. – Минск: Высш. шк., 1990. – Ч. 1. – 271 с.; Ч. 2. – 1991. – 352 с.

Іменний показчик

1. Абель Н. (Abel N.) 150, 256, 308, 309, 319
2. Адамар 319
3. Архімед 222
4. Арчела 311, 315
5. Бессель Ф. (Bessel F.) 340
6. Буняковський В. Я. (Bunyakovs'kyi V. Ja.) 91
7. Валліс Дж. (Wallis J.) 103
8. Вейерштрасс К. (Weierstrass K.) 306
9. Гаусс К.-Ф. (Gauss K.-F.) 252
10. Гельдер О. (Hölder O.) 401
11. Грамм І. (Gram J. P.) 439
12. Гульдін П. (Guldin P.) 210
13. Дарбу Г. (Darboux G.) 82, 83
14. Декарт Р. (Descartes R.) 224
15. Діні У. (Dini U.) 401
16. Діріхле Л. (Dirichlet L.) 150, 308, 309
17. Ейлер Л. (Euler L.) 34
18. Жордан К. (Jordan C.) 105
19. Кантор Г. (Cantor G.) 84
20. Картан А. (Cartan A.) 80
21. Коші О. (Cauchy A. L.) 91, 95
22. Лебег А. (Lebesgue H. L.) 389
23. Лежандр А. (Legendre A. M.) 436
24. Лейбніц Г. (Leibniz v. G. W.) 99, 253
25. Маклорен К. (Maclaurin C.) 328
26. Мінковський Г. (Minkowski H.) 92, 155
27. Ньютон І. (Newton I.) 99
28. Остроградський М. В. (Ostrogradskii N. V.) 32
29. Парсеваль М. (Parseval M. A.) 399
30. Раабе (Raabe J. L.) 251
31. Ріман Б. (Riemann B.) 87, 263
32. Сімпсон Т. (Simpson T. H.) 214
33. Стільт'ес (Stieltjes) 160
34. Стірлінг Дж. (Stirling J.) 250

-
35. Тейлор Б. (Taylor B.) 327
 36. Фейер Л. (Fejer L.) 394
 37. Фур'є Ж. (Fourier J. B.) 383
 38. Чебишев П. Л. (Chebyshev P. L.) 35
 39. Чезаро (Cesaro) 348
 40. Шварц К. (Schwartz K.) 91
 41. Шмідт В. (Schmidt W.) 441

Предметний показчик

- Абеля тотожність 255
Адитивність інтеграла 90, 142
Аргумент комплексного числа 342
Архімеда спіраль 222
Астроїда 199
- Багаточлен (многочлен, поліном) 29
База 80, 427
Базис скінченно вимірного векторного простору 413
- Векторний (лінійний) простір 412
– евклідовий 417
– нескінченно вимірний 413
– скінченно вимірний 413
– передевклідовий 417
- Геометрична прогресія 241
– нескінченно спадна 240
Гіпоциклоїда 215, 223
Головне значення аргументу комплексного числа 342
Грама визначник 439
Границя інтегральних сум 79
Границя по базі 80
- Диференціал дуги 197
Діріхле ядро 393
Добуток ряду на число 242
– рядів 260
Довжина спрямлюваного шляху 194
- Евольвента кола 222
Ейлера підстановки 34
Елементарний раціональний дріб 30
– правильний 30

- неправильний 30
- Еліпсоїд 206
- Епіциклоїда 215, 223

- Залишок ряду 240
- нескінченного добутку 269
- Збіжність ряду в передевклідовому просторі 423

- Інтеграл в розумінні головного значення 158
- Дарбу 83
- диференціального бінома 35
- зі змінною верхньою межею 98
- невизначений 15
- невластивий (невластивий) 141, 156, 158
- – умовно збіжний 151
- – абсолютно збіжний 151
- – другого ступеня 157
- Рімана (визначений) 78
- – першого роду 105
- Стільт'єса 160
- тригонометричних функцій 36
- Інтегральна формула Фур'є 443
- Інтегрування елементарних раціональних дробів 28
- Інтегрування заміною змінних невизначених інтегралів 20
- визначених інтегралів 101
- Інтегрування ірраціональних функцій 33
- Інтегрування методом внесення під диференціал 21
- Інтегрування раціональних функцій 32
- Інтегральна сума 160
- Інтегрування частинами невизначених інтегралів 24
- визначених інтегралів 101

- Кардіоїда 194, 224
- Коефіцієнти Фур'є за тригонометричною системою 385
- Комплексне число 341
- спряжене 342
- Координати полярні 192
- Криволінійний сектор 193
- Криволінійна трапеція 188
- Критерій Коші збіжності ряду 243, 244

- рівномірної збіжності 306
- Критерій лінійної залежності 438
- Круг збіжності степеневого ряду 346

- Лист Декарта 224
- Лемніската 202
- Лінійність інтеграла 90, 142
- Лінійно залежні (незалежні) елементи векторного простору 412
- Логарифмічна спіраль 199

- Матриця Грамма 439
- Мінковського нерівність 92
- Міра Жордана 105
- Множина аргументів комплексного числа 342
 - вимірна за Жорданом 105
 - лебегової міри нуль 87
 - збіжності функціонального ряду 305
- Модуль комплексного числа 342

- Необхідна умова збіжності ряду 240
- Нескінченний добуток 268
 - збіжний (розбіжний) 268
- Норма елемента в евклідовому просторі 418

- Об'єм тіла обертання 202
- Однорідність інтеграла 89
- Ознака Абеля 150, 256
 - Вейєрштрасса 306
 - Гаусса 252
 - д'Аламбера 249
 - Діріхле 150, 256
 - інтегральна 246
 - Коші 248
 - Лейбніца 253
 - порівняння 245
 - Раабе 251
- Оператор Фур'є 443
- Ортогональна система 427
- Ортонормована система 424
- Ортонормований базис 427

- Остроградського метод 32
- Парсеваля рівність 402, 403, 406
- Переставна властивість абсолютно збіжних рядів 260
- Первісна 15
- Перетворення Фур'є 443
- обернене 443
 - косинус-перетворення 445
 - синус-перетворення 445
- Період функції 383
- Площа криволінійної трапеції 188
- поверхні обертання 200
 - поперечного перерізу 205
- Поверхня обертання 200
- Повна варіація функції 159
- Показникова форма комплексного числа 343
- Поліном Лежандра 436
- Принцип локалізації 401
- Проміжок збіжності степеневого ряду 319
- Простір \mathbb{R} 413
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 416
 - \mathbb{C} 414
 - $C[a; b]$ 414
 - \mathbb{R}^n 414
 - \mathbb{C}^n 414
 - l_2 415, 420
 - $R_1[a; b]$ 415
 - $R_1(\mathbb{R})$ 415
 - $R_2[a; b]$ 415
 - $C_2[a; b]$ 420
 - $R_2(\mathbb{R})$ 416
- Процес ортогоналізації Шмідта 441
- Радіус збіжності степеневого ряду 319
- Розбиття проміжку 78
- діаметр розбиття 78
- Розмірність скінченно вимірного простору 413
- Ряд 239
- гармонійний 246

- додатний 244
- збіжний 239
- – абсолютно 257
- – поточково 305
- – рівномірно 306
- – умовно 262
- знакопочередний 253
- Маклорена 328
- розбіжний 239
- степеневий 318
- Тейлора 327
- Фур'є 383
- – за ортонормованою системою 425
- – комплексний 386
- – по косинусах 408
- – по синусах 408
- – тригонометричний 384
- функціональний 304
- числовий 239

- Середнє значення функції 207
- Система косинусів 433
- синусів 434
- Скалярний добуток 416
- квазіскалярний добуток 417
- Сполучна властивість збіжних рядів 242
- Статичні моменти кривої 210
- пластинки 212
- Сума Дарбу 82
- нескінченно спадної геометричної прогресії 240
- рядів 242
- ряду 239
- – частинна 239
- sup -норма функції 302

- Таблиця основних інтегралів 18
- Теорема Абеля 321, 346
- Вейерштрасса 396, 397
- Діні 401

- Діріхле 308
- Гульдїна 210
- Коші-Адамара 319
- Рїмана 87, 263
- Рїмана-Лебега 389
- про граничний перехїд пїд знаком ряду 312
- про неперервнїсть суми функціонального ряду 310
- про почленне диференціювання функціонального ряду 316
- про почленне інтегрування функціонального ряду 313
- про середнє для визначених інтегралів 95
- Фейєра 395
- Тїло обертання 202
- Трактриса 224
- Тригонометричний полїном 396
- Тригонометрична система 384
 - комплексна 385
 - повна 426
- Тригонометрична форма комплексного числа 343

- Умова Гельдера 401

- Фейєра ядро 394
- Формула Валліса 103
 - Лейбніца-Ньютона 99
 - прямокутників 213
 - Сїмпсона 214
 - Стїрлінга 250
 - Тейлора 251
 - трапецій 214
- Функціональна послїдовнїсть 300
 - поточково збїжна 301
 - рївномїрно збїжна 301
- Функція Бесселя 340
 - Діріхле 81
 - інтегрована за Рїманом 79
 - кусково-диференційовна 399
 - обмеженої варїації 159
 - перїодична 383
 - раціональна 30
 - рїманова схїдчаста 104

– характеристична 87, 104

Центр мас кривої 210

– пластинки 212

Циклоїда 192

Чебишова підстановки 35

Шварца (Коші-Буняковського) нерівність 91

Шлях спрямлюваний 195