

**Дрогобицький державний педагогічний  
університет імені Івана Франка**

**Богдан Винницький, Руслан Хаць**

# **ВИБРАНІ РОЗДІЛИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ, Ч. 1**

Навчальний посібник  
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр»  
галузі знань 0402 «Фізико-математичні науки»,  
спеціальності 8.04020101 «Математика»

**Дрогобич  
2014**

**УДК 575.8 (08)**  
**ББК 22.161.5 р**  
**В 48**

Рекомендовано до друку вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка (протокол № 6 від 24 квітня 2014 р.)

**Рецензенти:**

**Заболоцький Микола Васильович** – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичного моделювання Львівського національного університету імені Івана Франка;

**Галь Юрій Михайлович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

**Відповідальний за випуск:**

**Шаран Володимир Лук'янович** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка.

*Винницький Б.В., Хаць Р.В.*

**В 48** **Вибрані розділи теорії функцій, Ч. 1** : навчальний посібник. – Дрогобич : Видавничий відділ ДДПУ ім. Івана Франка, 2014. – 128 с.

Навчальний посібник написано відповідно до програми навчальної дисципліни „Вибрані розділи теорії функцій” для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр», галузі знань 0402 «Фізико-математичні науки», спеціальності 8.04020101 «Математика», затвердженої вченою радою Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. Він містить лекційний матеріал, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи, поточного та підсумкового контролю.

**УДК 575.8 (08)**  
**ББК 22.161.5 р**

# Зміст

## Зміст

<b>Основні позначення</b>	<b>5</b>
<b>Вступ</b>	<b>8</b>
<b>Розділ 1. Елементарні асимптотичні методи</b>	<b>9</b>
1. Верхня і нижня границі послідовності	9
2. Верхня і нижня границі функції	13
3. Нерівності	14
4. Опуклі функції	15
5. $O$ -символіка. Символи Ландау	17
6. Використання формули Тейлора з додатковим членом у формі Пеано для знаходження границь та асимптотичних формул	21
7. Порядок і тип функції	23
8. Повільно змінні функції	25
9. Уточнений порядок	27
10. Інтегрування асимптотичних формул	27
11. Диференціювання асимптотичних формул	28
12. Оцінка нулів функцій та коренів рівнянь	31
13. Знаходження асимптотики обернених функцій та коренів рівнянь	33
14. Знаходження асимптотики інтегралів зі змінною верхньою межею	35
15. Знаходження асимптотики сум	36
16. Асимптотичні оцінки деяких інтегралів, залежних від параметра	40
17. Перетворення Фур'є	42
18. Запитання для самоконтролю	46
19. Вправи і задачі	47
<b>Розділ 2. Найпростіші властивості цілих функцій</b>	<b>59</b>
1. Максимум модуля цілої функції	59
2. Цілі трансцендентні функції	61
3. Найпростіші властивості максимуму модуля	62
4. Максимальний член	63
5. $\Phi$ -тип функції	64
6. Формули Пуассона і Шварца	65
7. Формули Шварца-Ієнсена, Пуассона-Ієнсена	66
8. Нулі голоморфних функцій	67
9. Формула Неванлінни-Ієнсена	68
10. Оцінки зверху голоморфної функції через модуль її дійсної частини	69
11. Лічильні функції послідовностей	70
12. Нулі цілих функцій	71
13. Числові нескінченні добутки з дійсними членами	73
14. Числові нескінченні добутки з комплексними членами	75

## Зміст

15. Функціональні нескінченні добутки	76
16. Побудова цілої з заданими нулями	78
17. Подання цілої функції у вигляді нескінченного добутку	80
18. Запитання для самоконтролю	81
19. Вправи і задачі	81
<b>Розділ 3. Характеристики зростання цілих функцій</b>	<b>85</b>
1. Порядок і тип	85
2. Принцип Фрагмена-Ліндельофа	88
3. Тригонометрично $\rho$ -опуклі функції	90
4. Індикатор	91
5. Опорна функція множини	92
6. Перетворення Бореля	93
7. Простір $PW_{\sigma}^2$	95
8. Запитання для самоконтролю	95
9. Вправи і задачі	96
<b>Розділ 4. Нескінченні добутки цілих функцій скінченного порядку та суміжні проблеми</b>	<b>98</b>
1. Показник збіжності послідовності	98
2. Канонічний добуток. Зв'язок між родом і показником збіжності послідовності нулів	98
3. Зв'язок між порядком канонічного добутку і показником збіжності його нулів	99
4. Розвинення цілих функцій скінченного порядку в нескінченні добутки	100
5. Асимптотичні властивості цілих функцій	103
6. Простір Гарді	105
7. Інтуїтивні уявлення про узагальнені функції	107
8. Простір $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$	110
9. Простір основних і узагальнених функцій однієї змінної	112
10. Регулярні узагальнені функції однієї змінної	113
11. $\delta$ -функція Дірака та інші сингулярні функції	114
12. Похідна узагальненої функції однієї змінної	116
13. Гармонійні функції	118
14. Субгармонійної функції	119
15. Запитання для самоконтролю	122
16. Вправи і задачі	122
<b>Відповіді</b>	<b>125</b>
<b>Література</b>	<b>127</b>

## Основні позначення

### Основні позначення

1.  $\mathbb{N}$  – множина всіх натуральних чисел.
2.  $\mathbb{Z}$  – множина всіх цілих чисел.
3.  $\mathbb{N}_0$  або  $\mathbb{Z}_+$  – множина всіх цілих невід’ємних чисел.
4.  $\overline{n; m}$  – множина всіх цілих чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $n \leq x \leq m$ .
5.  $\mathbb{Q}$  – множина всіх раціональних чисел.
6.  $\mathbb{R}$  – множина всіх дійсних чисел.
7.  $\overline{\mathbb{R}}$  – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символами “ $-\infty$ ” і “ $+\infty$ ”.
8.  $\overline{\mathbb{R}}_0$  – множина всіх дійсних чисел, яка доповнена символом “ $\infty$ ”.
9.  $\mathbb{C}$  – множина всіх комплексних чисел.
10.  $(a; b)$  – відритий проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $a < x < b$ .
11.  $[a; b]$  – замкнений проміжок, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $a \leq x \leq b$ .
12.  $(a; b]$  – напіввідкритий проміжок з включеним правим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $a < x \leq b$ .
13.  $[a; b)$  – напіввідкритий проміжок з включеним лівим кінцем, тобто множина всіх дійсних чисел  $x$ , які задовольняють нерівність  $a \leq x < b$ .
14.  $D(f)$  – область (множина) визначення функції  $f : H_1 \rightarrow H_2$ .
15.  $E(f)$  – множина значень функції  $f : H_1 \rightarrow H_2$ .
16.  $U(a; \varepsilon)$  –  $\varepsilon$ -окіл точки  $a$ .
17.  $\overset{\circ}{U}(a; \varepsilon)$  – проколений  $\varepsilon$ -окіл точки  $a$ .
18.  $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt$  – перетворення Фур’є функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

## Основні позначення

19.  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy$  – обернене перетворення Фур'є функції

$$\hat{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

20.  $f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-\tau)\varphi(\tau)d\tau$  – згортка функцій  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  і

$$\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}.$$

21.  $M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| \leq r\}$  – максимум модуля цілої функції  $f$ .

22.  $\mu_f(r) = \max\{|f_k| r^k: k \geq 0\}$  – максимальний член цілої функції  $f$ .

23.  $\nu_f(r) = \{k: \mu_f(r) = |f_k| r^k\}$  – центральний індекс цілої функції  $f$ .

24.  $n(t) = \sum_{|\lambda_k| \leq t} 1 = \max\{k: |\lambda_k| \leq t\}$  – лічильна функція послідовності  $(\lambda_k)$ .

25.  $N(r) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \ln r$  – усереднена лічильна функція

послідовності  $(\lambda_k)$ .

26.  $E(w; p) = \begin{cases} 1-w, & p=0, \\ (1-w) \exp\left(\sum_{k=1}^p w^k / k\right), & p \in \mathbb{N}, \end{cases}$  – первинний множник

Вейерштрасса.

27.  $h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}$  – індикатор функції  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , де

$\rho \in (0; +\infty)$  – деяке число.

28.  $\text{conv } D$  – опукла оболонка множини  $D \subset \mathbb{C}$ .

29.  $k_D(\theta) = \sup\{\text{Re}(ze^{-i\theta}): z \in D\}$  – опорна функція множини  $D \subset \mathbb{C}$ .

30.  $\gamma_L(z) = \int_0^{+\infty} e^{i\theta} L(\zeta) e^{-\zeta z} d\zeta$  – перетворення Бореля функції  $L$ .

31.  $PW_\sigma^2$  – множина всіх цілих функцій експоненційного типу  $\leq \sigma \in (0; +\infty)$ , звуження яких на  $\mathbb{R}$  належить до простору  $L_2(\mathbb{R})$ .

## Основні позначення

32.  $H^p(\mathbb{C}_+)$  – клас функцій, голоморфних у півплощині  $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ , для яких  $\|f\| := \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}_+\} < +\infty$ , якщо  $p = +\infty$  і  $\|f\|^p := \sup\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx : x \in (0; +\infty)\right\} < +\infty$ ,  $p \in [1; +\infty)$ .
33.  $S(\mathbb{R})$  – простір швидко спадних функцій.
34.  $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$  – множина всіх функцій  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$ .
35.  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  – множина фінітних нескінченно диференційовних функцій  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .
36.  $(C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$  – простір узагальнених функцій.
37.  $L_{1,loc}(\mathbb{R})$  – простір локально сумовних на  $\mathbb{R}$  функцій.
38.  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  – оператор Лапласа.
39.  $\blacktriangleright$  – кінець доведення.
40.  $:=$  – рівне за означенням.

## Вступ

Вміння здійснювати асимптотичні оцінки лежить в основі успіху математика, який проводить дослідження в будь-якому розділі математики. В посібнику розглянуто найпростіші методи отримання таких оцінок, основні властивості цілих функцій та інших класів функцій. Курс побудовано за модульним принципом, він розрахований для підготовки фахівців освітньо-кваліфікаційного рівня “Магістр”, галузі знань 0402 “Фізико-математичні науки”, напряму підготовки 8.04020101. “Математика”. Він включає лекційний матеріал, завдання для практичних занять, індивідуальні завдання, завдання для самостійної роботи та модульного контролю. Основні теоретичні факти супроводжуються розв’язками великої кількості типових прикладів. Деталі доведень можна знайти в літературі та у наступних частинах посібника.

# Розділ 1

## Розділ 1. Елементарні асимптотичні методи

**1. Верхня і нижня границі послідовності.** Частковою границею послідовності  $(x_n)$  називається таке число  $b \in \overline{\mathbb{R}}$ , для якого існує послідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$  така, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = b$ . Згідно з теоремою Больцано-Вейєрштрасса кожна послідовність  $(x_n)$  дійсних чисел має принаймні одну часткову границю  $b \in \overline{\mathbb{R}}$  і кожна обмежена послідовність дійсних чисел  $(x_n)$  має принаймні одну часткову границю  $b \in \mathbb{R}$ .

Верхньою границею послідовності  $(x_n)$  називається найбільша в  $\overline{\mathbb{R}}$  її часткова границя. Для позначення верхньої границі використовують символи  $a = \overline{\lim} x_n$  і  $a = \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Кожна послідовність  $(x_n)$  дійсних чисел має верхню границю  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  і  $\overline{\lim} x_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} \{x_k : k \geq n\} = \inf \{ \sup \{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N} \}$ . При цьому,  $\overline{\lim} x_n = a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови: 1) існує така підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ , що  $x_{n_k} \rightarrow a$ ; 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n - a < \varepsilon$ . В останньому твердженні умову 1) можна змінити умовою: 1<sub>a</sub>) існує така підпослідовність  $(x_{n_k})$ , що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*) : -\varepsilon < x_{n_k} - a$ .

Нижньою границею послідовності  $(x_n)$  дійсних чисел називається найменша в  $\overline{\mathbb{R}}$  її часткова границя. Для позначення нижньої границі використовують символи  $a = \underline{\lim} x_n$  та  $a = \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n$ . Кожна послідовність  $(x_n)$  має нижню границю  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  і  $\underline{\lim} x_n = \liminf_{n \rightarrow \infty} \{x_k : k \geq n\} = \sup \{ \inf \{x_k : k \geq n\} : n \in \mathbb{N} \}$ . При цьому,  $\underline{\lim} x_n = a \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови: 3)

## Розділ 1

існує така підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ , що  $x_{n_k} \rightarrow a$ ; 4)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : -\varepsilon < x_n - a$ . В останньому твердженні умову 3) можна замінити умовою: 3<sub>a</sub>) існує така підпослідовність  $(x_{n_k})$  послідовності  $(x_n)$ , що  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*) : x_{n_k} - a < \varepsilon$ .

Для того щоб існувала  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ , необхідно і достатньо, щоб

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

**Приклад 1.** Якщо  $x_n = (-1)^n + 1/n$ , то  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  – не існує.

**Приклад 2.** Нехай  $(x_n)$  – послідовність, членами якої всі раціональні числа. Кожне число  $a \in \overline{\mathbb{R}}$  є її частковою границею. Тому  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$  і  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$ .

**Приклад 3.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст. Справді, нехай  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq +\infty$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq +\infty$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c$ . Тоді

$$(\forall a_1 > a)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n < a_1,$$

$$(\forall b_1 > b)(\exists n'' \in \mathbb{N})(\forall n \geq n'') : y_n < b_1.$$

Тому  $x_n + y_n < c_1$  для будь-якого  $c_1 > a + b$  і всіх достатньо великих  $n$ . Отже,  $c \leq a + b$ , що і потрібно було довести. В інших можливих випадках розглядувана нерівність є очевидною.

**Приклад 4.** Якщо  $x_n = (-1)^n$  і  $x_n = (-1)^{n+1}$ , то  $x_n + y_n = 0$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = 1$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0$ . Отже,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) < \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ .

**Приклад 5.** Якщо  $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$ , то

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n < 1 + \varepsilon$ . 3 іншого боку,

## Розділ 1

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2k} + 1 \right) = 1$ . Тому  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k} = 1$ . Отже,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$ . Далі,

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n > -\varepsilon$ . Крім цього,  $x_{2k+1} = -\frac{1}{2k+1}$  і

$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{-1}{2k+1} = 0$ . Тому  $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**Приклад 6.**  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$  для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$

існує. Справді, нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  і  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = c$ . Якщо  $a \neq -\infty$  і  $b \neq -\infty$ , то  $(\forall a_1 < a)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : x_n > a_1$  і існує така підпослідовність  $(y_{n_k})$  послідовності  $(y_n)$ , що

$$(\forall b_1 < b)(\exists k'' \in \mathbb{N})(\forall k \geq k'') : y_{n_k} > b_1.$$

Тому  $x_{n_k} + y_{n_k} > c_1$  для будь-якого  $c_1 < a + b$  і всіх достатньо великих  $k$ .

Отже,  $c \geq a + b$ . В інших можливих випадках остання нерівність є очевидною. Тому, врахувавши попередні приклади, приходимо до потрібної рівності.

**Приклад 7 (теорема Штольца).**

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \quad (1)$$

для будь-яких двох послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$  і

$y_n - y_{n-1} > 0$  для всіх  $n \geq n^*$ . Справді, нехай  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n / y_n = c$  і

$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = d$ . Якщо  $d = +\infty$ , то нерівність  $c \leq d$  є очевидною. Нехай

$d \neq +\infty$ . Тоді  $y_n > 0$  для всіх великих  $n \in \mathbb{N}$  і

$$(\forall d_1 > d)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq n^*) : \frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} < d_1.$$

Тому

$$x_k - x_{k-1} < d_1 (y_k - y_{k-1}), \quad k \geq n^*,$$

$$x_n - x_{n^*-1} = \sum_{k=n^*}^n (x_k - x_{k-1}) < d_1 \sum_{k=n^*}^n (y_k - y_{k-1}) = d_1 (y_n - y_{n^*-1}), \quad n \geq n^*,$$

## Розділ 1

$$\frac{x_n}{y_n} \leq d_1 - d_1 \frac{y_{n^*-1}}{y_n} + \frac{x_{n^*-1}}{y_n}, \quad n \geq n^*,$$

*i*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( d_1 - d_1 \frac{y_{n^*-1}}{y_n} + \frac{x_{n^*-1}}{y_n} \right) = d_1.$$

Отже,  $c \leq d_1$  для довільного  $d_1 > d$ . Тому  $c \leq d$ . Нехай  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = a$

*i*  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = b$  Якщо  $a = -\infty$ , то нерівність  $a \leq b$  є очевидною. Нехай

$a \neq -\infty$ . Тоді  $y_n > 0$  для всіх великих  $n \in \mathbb{N}$  *i*

$$(\forall a_1 < a)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq n^*): \frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k} > a_1.$$

Тому

$$x_k - x_{k-1} > a_1(y_k - y_{k-1}), \quad k \geq n^*,$$

$$x_n - x_{n^*-1} = \sum_{k=n^*}^n (x_k - x_{k-1}) > a_1 \sum_{k=n^*}^n (y_k - y_{k-1}) = a_1(y_n - y_{n^*-1}), \quad n \geq n^*,$$

$$\frac{x_n}{y_n} \geq a_1 - a_1 \frac{y_{n^*-1}}{y_n} + \frac{x_{n^*-1}}{y_n}, \quad n \geq n^*,$$

*i*

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( a_1 - a_1 \frac{y_{n^*-1}}{y_n} + \frac{x_{n^*-1}}{y_n} \right) = a_1.$$

Отже,  $b \geq a_1$  для довільного  $a_1 < a$ . Тому  $a \leq b$ . Подібно доводиться, що (1) виконується, якщо  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$  і  $y_n - y_{n-1} < 0$  для всіх  $n \geq n_0$ .

**Приклад 8.**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n$  для кожної

послідовності  $(u_n)$ , збіжної в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ . Справді, якщо  $x_n = \sum_{k=1}^n u_k$  і  $y_n = n$ , то

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}, \quad \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = u_n \quad \text{і за теоремою Штольца}$$

## Розділ 1

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n.$$

**Приклад 9.** Послідовність  $u_n = (-1)^n$  є розбіжною в  $\overline{\mathbb{R}}_0$ , але

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-1 + 1 + \dots + (-1)^n}{n} = 0.$$

**Приклад 10.** Якщо  $x_n = \sum_{k=1}^n k^3$  і  $y_n = n^4$ , то за теоремою

$$\text{Штольца} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n k^3}{n^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3}{n^4 - (n-1)^4} = \frac{1}{4}.$$

**2. Верхня і нижня границі функції.** Частковою границею функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $a = \infty$ ,  $a = +\infty$ ,  $a = -\infty$ ) називається таке число  $A$  ( $A \in \mathbb{R}$ ,  $A = \infty$ ,  $A = +\infty$ ,  $A = -\infty$ ), для якого знайдеться послідовність  $(x_n)$ ,  $x_n \in \mathbb{R}$ , така, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$  і  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Кожна визначена в деякому проколеному околі точки  $a$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в цій точці принаймні одну часткову границю.

Верхньою границею (пишуть  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A$  або  $\limsup_{x \rightarrow a} f(x) = A$ )

функції  $f$  в точці  $a$  називається найбільша в  $\overline{\mathbb{R}}$  її часткова границя в точці  $a$ . Кожна визначена в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в цій точці верхню границю і

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &= \limsup_{x \rightarrow a} \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} \\ &= \inf \left\{ \sup \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} : x \in \overset{\circ}{U}(a; \delta) \right\} \end{aligned}$$

для деякого  $\delta > 0$ . При цьому, якщо  $a \in \mathbb{R}$ , то  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A \in \mathbb{R}$  тоді і тільки тоді, коли виконуються наступні дві умови: 1) існує така послідовність  $(x_n)$ , що  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і  $f(x_n) \rightarrow A$ ; 2)  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x, 0 < |x - a| < \delta) : f(x) - A < \varepsilon$ . В останньому твердженні умову 1) можна замінити умовою: 1<sub>a</sub>) існує така послідовність  $(x_n)$ , що  $x_n \rightarrow a$ ,  $x_n \neq a$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$  і

## Розділ 1

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n^* \in \mathbb{N})(\forall n \geq n^*) : -\varepsilon < f(x_n) - A.$

Нижньою границею (пишуть  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A$  або  $\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = A$ )

функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  в точці  $a$  називається найменша в  $\overline{\mathbb{R}}$  її часткова границя в точці  $a$ . Кожна визначена в деякому проколеному околі точки  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в цій точці нижню границю і

$$\begin{aligned} \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) &= \liminf_{x \rightarrow a} \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} \\ &= \sup \left\{ \inf \left\{ f(t) : t \in \overset{\circ}{U}(a; x) \right\} : x \in \overset{\circ}{U}(a; \delta) \right\} \end{aligned}$$

для деякого  $\delta > 0$ .

Для того щоб існувала границя  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$  необхідно і

достатньо, щоб  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = \underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = A$ .

**Приклад 1.** Проміжок  $[-1; 1]$  є множиною часткових границь

функції  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$  у точці  $a = 0$ ,  $\overline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 1$ ,  $\underline{\lim}_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = -1$  і

$\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$  не існує.

**3. Нерівності.** При отриманні асимптотичних оцінок використовуються різноманітні нерівності. Відшукування потрібної елементарної нерівності та її обґрунтування потребує винахідливості і є часто основним елементом далеко неелементарного методу.

**Приклад 1.** Оскільки  $a^2 + b^2 \geq 2|a||b|$ , якщо  $a \in \mathbb{R}$  і  $b \in \mathbb{R}$ , то

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2 + b^2), \quad \sqrt{|ab|} \leq \frac{|a|+|b|}{2}, \quad \sqrt{|a|} + \sqrt{|b|} \leq \sqrt{2} \sqrt{|a|+|b|}$$

і  $a^2 - 2ab \cos x + b^2 \geq (1 - \cos x)(a^2 + b^2)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 2.** Якщо  $\varphi(x) = e^x - 1 - x$ , то  $\varphi'(x) = e^x - 1$ ,  $\varphi(0) = 0$  і функція  $\varphi$  має на  $\mathbb{R}$  глобальний строгий мінімум у точці  $x = 0$ . Тому  $\varphi(x) > \varphi(0)$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Отже,  $e^x > 1 + x$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

## Розділ 1

**Приклад 3.** Якщо  $\varphi(x) = \arctg x - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{1+x}$ , то

$\varphi'(x) = \frac{2x}{(1+x)^2(1+x^2)}$ , функція  $\varphi$  є зростаючою на  $[0; +\infty)$  і

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ . Тому  $\varphi(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ , тобто  $\arctg x \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1+x}$ ,  $x \in [0; +\infty)$ .

**Приклад 4.** Оскільки

$$\frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2k(2k-1)} = \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k},$$

то

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right) \leq \frac{1}{2n-1}.$$

**Приклад 5.** Якщо функція  $u: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно диференційовною на  $[a; b]$  і  $u(0) = u(\pi) = 0$ , то  $\int_0^{\pi} u^2(t) dt \leq \int_0^{\pi} u'^2(t) dt$ .

Справді,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{\pi} d(u^2(t) \ctg t) \\ &= \int_0^{\pi} (u'^2(t) - u^2(t) - (u'(t) - u(t) \ctg t)^2) dt \leq \int_0^{\pi} (u'^2(t) - u^2(t)) dt. \end{aligned}$$

**4. Опуклі функції.** Функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  зветься опуклою на проміжку  $[a; b]$ , якщо

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1-\alpha)f(x_2) \quad (1)$$

для будь-яких  $x_1 \in [a; b]$ ,  $x_2 \in [a; b]$  і  $\alpha \in [0; 1]$ . Для того щоб функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  була опуклою на проміжку  $[a; b]$ , необхідно і достатньо, щоб

$$f(x) \leq f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (2)$$

для будь-яких  $x_1, x$  і  $x_2$ ,  $a \leq x_1 < x < x_2 \leq b$ . Нерівність (2) дає можливість геометрично інтерпретувати опуклі функції. Власне, через точки  $(x_1; f(x_1))$  і  $(x_2; f(x_2))$ , де  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , проведемо пряму. Ця

## Розділ 1

пряма задається рівнянням  $y = f(x_1) \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} + f(x_2) \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ . Бачимо, що функція  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $[a; b]$  тоді і тільки тоді, коли для будь-яких  $x_1$  і  $x_2$ ,  $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ , її графік на проміжку  $[x_1; x_2]$  лежить не вище прямої, яка проходить через точки  $(x_1; f(x_1))$  і  $(x_2; f(x_2))$ . Функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  називається опуклою на відкритому проміжку  $(a; b)$ , якщо вона є опуклою на кожному замкненому проміжку  $[a_1; b_1] \subset (a; b)$ . Якщо  $(\forall x \in (a; b)) : f''(x) \geq 0$ , то функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a; b)$ . Безпосередньо з означення випливає, що опукла функція є неперервною, має в кожній точці  $x_0 \in (a; b)$  праву  $f'_+(x_0)$  і ліву  $f'_-(x_0)$  похідні і при цьому  $f'_-(x_0) \leq f'_+(x_0)$ ,  $f'_+(x_0) \leq f'_-(x_3) \leq f'_+(x_3)$ , якщо  $a < x_0 < x_3 < b$ . Більше того, опукла на  $(a; b)$  функція  $f$  є абсолютно неперервною на кожному проміжку  $[a_1; b_1] \subset (a; b)$  і

$$f(x_2) - f(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f'(t) dt, \quad a < x_1 < x_2 < b.$$

Функція  $F$  зветься опуклою відносно логарифма на проміжку  $(0; +\infty)$ , якщо функція  $f(x) = F(e^x)$  є опуклою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ . Опуклі функції мають багато застосувань, зокрема, при доведенні різноманітних нерівностей.

**Приклад 1.** Функція  $f(x) = e^x$  є опуклою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , бо  $f''(x) > 0$  для всіх  $x \in (-\infty; +\infty)$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = x^3$  є опуклою на проміжку  $(0; +\infty)$ .

**Приклад 3.** Якщо  $f(x) = \operatorname{tg} x$ , то  $f'(x) = 1/\cos^2 x$ ,  $f''(x) \neq 0$  і  $f''(x)$  не існує в точках  $x_k = \pi k + \pi/2$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тому отримуємо проміжки,  $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1) + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . На кожному з цих проміжків друга похідна є додатною. Тому проміжки  $(\pi k + \pi/2; \pi(k+1) + \pi/2)$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , є проміжками опуклості.

**Приклад 4.** Якщо функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a; b)$ , то  $f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$  для будь-яких точок  $x_1 \in (a; b)$  і

## Розділ 1

$x_2 \in (a; b)$ . Для отримання цього досить в означенні опуклості взяти  $\alpha = 1/2$ .

**Приклад 5.** Якщо функція  $f : (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$  є опуклою на проміжку  $(a; b)$ , то  $f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n}$  для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$  і будь-яких точок  $x_1 \in (a; b), \dots, x_n \in (a; b)$ . Справді, для  $n=1$  і  $n=2$  твердження є справедливим. Припустимо, що воно є справедливим для  $n=k$ . Тоді

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1}}{k+1}\right) &= f\left(\frac{k}{k+1} \cdot \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k} + \frac{1}{k+1} x_{k+1}\right) \\ &\leq \frac{k}{k+1} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_k}{k}\right) + \frac{1}{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\leq \frac{k}{k+1} \cdot \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_k)}{k} + \frac{1}{k+1} f(x_{k+1}) \\ &\leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{k+1})}{k+1}. \end{aligned}$$

і на основі принципу математичної індукції приходимо до потрібного висновку.

**Приклад 6.** Функція  $f(x) = e^x$  є опуклою на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ .

Тому  $e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2}$  для будь-яких  $x \in \mathbb{R}$  і  $y \in \mathbb{R}$ .

**5. О-символіка.** Символи Ландау. Часто при розгляді як теоретичних, так і прикладних задач потрібно на деякій множині  $E$  або в деякому околі заданої точки  $a$  одну складну функцію  $f$  порівняти з іншою або замінити простішою функцією  $\varphi$  з тим, щоб отримати наочний математичний опис відповідної задачі. При цьому виникає питання про те, які функції слід вважати близькими. Відповідь на нього залежить від розглядуваної задачі.

**Приклад 1.** Для великих  $n \in \mathbb{N}$  функції

$$f(t) = \begin{cases} n, & t \in [0; 1/n^3], \\ t, & t \in [1/n^3; 2], \end{cases}$$

та  $\varphi(t) = t$  є близьким на проміжку  $[0; 2]$  в середньому квадратичному, оскільки

## Розділ 1

$$d(f; \varphi) := \|f - \varphi\| := \left( \int_0^2 |f(t) - \varphi(t)|^2 dt \right)^{1/2} = \left( \int_0^2 (n-t)^2 dt \right)^{1/2} \\ = \frac{(n-1/n^3)^3 - n^3}{-3} \rightarrow 0.$$

Проте їх важко назвати близькими в  $\sup$ -нормі, оскільки

$$d(f; \varphi) := \|f - \varphi\| := \sup \{ |f(t) - \varphi(t)| : t \in [0; 2] \} = n \rightarrow +\infty.$$

Якщо, наприклад,  $f(t)$  – це температура й мова йде про середню температуру за час  $T = 2$ , то можна вважати, що функції  $f$  та  $\varphi$  є близькими. Якщо ж  $f(t)$  – це сила струму в електричному колі і важливо, щоб сила струму не перевищувала певного значення, то ці функції недоцільно вважати близькими.

**Приклад 2.** Припустимо, що певне фізичне явище описується функцією

$$y(t) = \frac{t \sin(t + \sqrt{t})}{1+t^2} \operatorname{arctg} \frac{2 + \sin t}{t} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k}{(k+1)^k}$$

і дослідника цікавить характер цього явища, якщо від його початку минуло досить багато часу. В цьому зв'язку доцільно знайти достатньо просту функцію  $\varphi$ , значення якої для великих  $t$  мало відрізняються від значень функції  $y$ .

Якщо функцію  $f$  в околі точки  $a$  замінюють простішою функцією  $\varphi$ , то  $|f(x) - \varphi(x)|$  і  $|(f(x) - \varphi(x))/f(x)|$  називають відповідно абсолютною і відносною похибками. При розгляді подібних задач використовуються певні символи (символи Ландау).

1<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) = o(1)$ ,  $x \rightarrow a$ ” означає, що  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ .

2<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ ” означає, що  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/\varphi(x) = 0$ , тобто що  $f(x)/\varphi(x) = o(1)$ ,  $x \rightarrow a$ .

3<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) = O(1)$ ,  $x \rightarrow a$ ” означає, що функція  $f$  обмежена в деякому проколеному околі точки  $a$ .

4<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ ” означає, що функція  $f(x)/\varphi(x)$  обмежена в деякім проколенім околі точки  $a$ , тобто якщо  $f(x)/\varphi(x) = O(1)$ ,  $x \rightarrow a$ .

## Розділ 1

5<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) \asymp \varphi(x), x \rightarrow a$ ” означає, що  $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$  і  $\varphi(x) = O(f(x))$ ,  $x \rightarrow a$ .

6<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) = O(1), x \in E$ ” означає, що функція  $f$  є обмеженою на множині  $E$ .

7<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) = O(\varphi(x)), x \in E$ ” означає, що  $f(x)/\varphi(x) = O(1), x \in E$ .

8<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) \asymp \varphi(x), x \in E$ ” означає, що  $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  $x \in E$  і  $\varphi(x) = O(f(x))$ ,  $x \in E$ .

9<sup>0</sup>. Символ “ $f(x) \sim \varphi(x), x \rightarrow a$ ” означає, що  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)/\varphi(x) = 1$ .

Рівності, які містять символи Ландау, називають асимптотичними формулами або асимптотичними рівностями. В таких формулах символ  $o(\varphi(x))$  означає будь-яку функцію  $f$  з розглядуваного класу, для якої  $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ , або деяку таку функцію. Аналогічне можна сказати про інші розглядувані символи. Отож, ці символи потрібно читати зліва на право.

**Приклад 3.**  $\operatorname{tg} x = o(1), x \rightarrow 0$ .

**Приклад 4.**  $\sin x \sim x, x \rightarrow 0$ .

**Приклад 5.**  $\cos x = O(1), x \in \mathbb{R}$ .

**Приклад 6.**  $o(1) + o(1) = o(1), x \rightarrow a$  (сума двох нескінченно малих є нескінченно малою).

**Приклад 7.**  $O(1) \cdot o(1) = o(1), x \rightarrow a$  (добуток обмеженої і нескінченно малої є нескінченно мала).

**Приклад 8.**  $(1 + o(1))(1 + o(1)) = 1 + o(1), x \rightarrow a$ .

**Приклад 9.**  $\frac{1}{1 + o(1)} = 1 + o(1), x \rightarrow a$ .

**Приклад 10.**  $O(x^2) + o(x) = o(x) = o(1), x \rightarrow 0$ .

**Приклад 11.**

$$\begin{aligned}x + O(x^3) + x^2 + o(x^2) &= x + x^2 + o(x^2) \\ &= x + O(x^2) = x + o(x) = x(1 + o(1)), x \rightarrow 0.\end{aligned}$$

**Приклад 12.**  $x^4 + O(x) + x^2 + o(x^2) = x^4 + x^2 + o(x^2)$   
 $= x^4 + O(x^2) = x^4 + o(x^4) = x^4(1 + o(1)), x \rightarrow \infty$ .

## Розділ 1

**Приклад 13.** Якщо  $\lim_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$ , то  $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  
 $x \rightarrow a$ .

**Приклад 14.** Якщо  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$ , то  $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  
 $x \rightarrow a$ .

**Приклад 15.** Якщо  $0 < \lim_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| \leq \overline{\lim}_{x \rightarrow a} |f(x)/\varphi(x)| < +\infty$ , то  
 $f(x) \asymp \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ .

**Зауваження 1.** Інколи розглядані символи вживаються і в трохи загальнішому сенсі.

Якщо функції  $f$  і  $\varphi$  є нескінченно малими в точці  $a$  і  $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ , то кажуть, що нескінченно мала  $f$  є нескінченно малою вищого порядку, ніж нескінченно мала  $\varphi$ . Якщо функції  $f$  і  $\varphi$  є нескінченно малими в точці  $a$  і  $f(x) \asymp \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ , то кажуть, що нескінченно малі  $f$  і  $\varphi$  мають однаковий порядок в точці  $a$ . Якщо функції  $f$  і  $\varphi$  є нескінченно малими в точці  $a$  і  $f(x) \sim \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ , то кажуть, що нескінченно мала  $f$  і  $\varphi$  є еквівалентними..

**Приклад 16.** Нескінченно мала в точці  $a=0$  функція  $f(x) = x^3$  є нескінченно малою вищого порядку, ніж нескінченно мала в цій точці функція  $\varphi(x) = x^2$ , бо  $x^3 = o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

**Приклад 17.** Нескінченно малі в точці  $a=0$  функції  $f(x) = x^3$  і  $\varphi(x) = \sin 2x^3$  мають однаковий порядок.

**Приклад 18.** Нескінченно малі в точці  $a=0$  функції  $f(x) = x^2$  і  $\varphi(x) = \operatorname{tg}^2 x$  є еквівалентними.

**Приклад 19.** Нескінченно малі в точці  $a=0$  функції  
 $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0; +\infty), \\ x, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  і  $\varphi(x) = \begin{cases} x, & x \in (0; +\infty), \\ x^2, & x \in (-\infty; 0), \end{cases}$  є не порівняльними в

тому розумінні, що жодна з них не є нескінченно малою вищого порядку, ніж інша, вони не є еквівалентними і не є нескінченно малими однакового порядку.

## Розділ 1

Якщо функції  $f$  і  $\varphi$  є нескінченно великими в точці  $a$  і  $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ , то кажуть, що нескінченно велика  $\varphi$  є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно велика  $f$ .

**Приклад 20.** Нескінченно велика точці  $a = \infty$  функція  $\varphi(x) = x^3$  є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно велика в цій точці функція  $f(x) = x^2$ , бо  $x^2 = o(x^3)$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

**Приклад 21.** Нескінченно велика в точці  $a = +\infty$  функція  $\varphi(x) = e^x$  є нескінченно великою вищого порядку, ніж нескінченно велика в цій точці функція  $f(x) = x^3$ , бо  $x^3 = o(e^x)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ .

**6. Використання формули Тейлора з додатковим членом у формі Пеано для знаходження границь та асимптотичних формул.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну порядку  $n \in \mathbb{Z}_+$  в точці  $a \in \mathbb{R}$ , то справедлива формула Тейлора з додатковим членом у формі Пеано, яку тепер можна записати у формі

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + o((x-a)^n), \quad x \rightarrow a.$$

Якщо всі  $f^{(k)}(a) \neq 0$ , то в сумі  $\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$  кожний наступний доданок є нескінченно малою вищого порядку в точці  $a$ , ніж попередній. Цю формулу зручно використовувати для знаходження границь та знаходження різноманітних асимптотичних формул.

**Приклад 1.**  $e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + O(x^{n+1})$ ,  $x \rightarrow 0$ , для кожного  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Приклад 2.**  $\sin x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + O(x^{2n+3})$ ,  $x \rightarrow 0$ , для

кожного  $n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Приклад 3.**  $\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + O(x^{n+1})$ ,  $x \rightarrow 0$ .

**Приклад 4.**  $\sin x - \frac{x}{1-x} = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x - x^2 - x^3 + o(x^3)$   
 $= -x^2 - \frac{7x^3}{6} + o(x^3)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

## Розділ 1

**Приклад 5.**  $\ln(1+x) - \sin x + O(x^3) + o(x^2)$

$$\begin{aligned} &= x - \frac{x^2}{2} + o(x^2) - x + o(x^2) + O(x^3) + o(x^2) \\ &= -\frac{x^2}{2} + o(x^2) + O(x^3) = -\frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Приклад 6.**

$$\begin{aligned} \ln(1+x+o(x^2)) &= x + o(x^2) - \frac{1}{2}(x+o(x^2))^2 + o\left((x+o(x^2))^2\right) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Приклад 7.** Якщо

$$f(x) = x + 2x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

$$\varphi(x) = 3x + 4x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

то

$$\begin{aligned} f(\varphi(x)) &= 3x + 4x^2 + o(x^2) + 2(3x + 4x^2 + o(x^2))^2 \\ &+ o\left((3x + 4x^2 + o(x^2))^2\right) = 3x + 22x^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0. \end{aligned}$$

**Приклад 8.** Якщо  $\alpha \in \mathbb{R}$ , то  $(1+x)^\alpha = x^\alpha + \alpha x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1})$ ,  
 $x \rightarrow +\infty$ , бо

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha - x^\alpha &= x^\alpha \left( (1+1/x)^\alpha - 1 \right) \\ &= x^\alpha \left( 1 + \frac{\alpha}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right) = \alpha x^{\alpha-1} + o(x^{\alpha-1}), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

При знаходженні границь за допомогою формули Тейлора слід вдало вибрати  $n$ . Бажано його вибрати як можна меншим (якщо в даній ситуації підходить якесь  $n$ , то підходить і будь-яке, більше за нього, але не навпаки).

**Приклад 9.** Для знаходження границі

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

скористаємось формулою Тейлора

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0,$$

## Розділ 1

взявши  $n = 2$ . Тоді

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2) - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + o(1) \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Якщо взяти  $n = 3$ , то знову отримаємо потрібний результат:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - 1 - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + o(x) \right) = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Якщо ж ми б взяли  $n = 1$ , то в кінці б отримали границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{o(x)}{x^2}$ , яку знайти не можна без додаткової інформації про  $o(x)$  (можна думати, що  $o(x) = |x|^{3/2}$ ,  $o(x) = 5x^2$ ,  $o(x) = 7x^3$  і т.д.). Ця додаткова інформація здобувається шляхом збільшення вибору  $n$  у формулі Тейлора.

### Приклад 10.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{\sqrt{1+2x^2} - \sqrt{1+3x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} + o(x^4) - 1 + \frac{x^2}{2}}{1 + x^2 - 2x^4 + o(x^4) - (1 + x^2 - x^4 + o(x^4))} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4} + o(x^4)}{-x^4 + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{4} + o(1)}{-1 + o(1)} = -\frac{1}{4}. \end{aligned}$$

**7. Порядок і тип функції.** Нехай  $\eta: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  – неспадна функція. Порядком функції  $\eta$  називається число  $\rho = \rho[\eta]$ , визначене формулою  $\rho = \overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \eta(t)}{\ln t}$ . Іншими словами, порядком функції  $\eta$  називається точна нижня межа тих чисел  $\rho_1 \in (0; +\infty]$ , для яких  $(\exists c_1)(\forall t \in [1; +\infty)) : \eta(t) \leq c_1 t^{\rho_1}$ , тобто  $(\exists t_0)(\forall t \in [t_0; +\infty)) : \eta(t) \leq t^{\rho_1}$ . Порядок функції  $\eta$  дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли

## Розділ 1

$(\forall \rho_1 \in (0; +\infty))(\exists t_0 \in (0; +\infty))(\forall t \geq t_0): \eta(t) \leq t^{\rho_1}$ . Порядок функції  $\eta$  дорівнює  $+\infty$  тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність  $(t_k)$ ,  $0 < t_k \uparrow +\infty$ , що

$$(\forall \rho_1 \in (0; +\infty))(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): \eta(t_k) \geq t_k^{\rho_1}.$$

Порядок функції  $\eta$  дорівнює числу  $\rho \in (0; +\infty)$  тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови: 1)  $(\forall \rho_1 > \rho)(\exists t_0 \in (0; +\infty))(\forall t \geq t_0): \eta(t) \leq t^{\rho_1}$ ; 2) існує така послідовність  $(t_k)$ ,  $0 < t_k \uparrow +\infty$ , що

$$(\forall \rho_2 < \rho)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): \eta(t_k) \geq t_k^{\rho_2}.$$

Якщо  $\rho \in (0; +\infty)$  – порядок функції  $\eta$ , то число  $\sigma = \sigma[\eta] = \sigma[\eta; \rho]$ , визначене формулою

$$\sigma = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t)}{t^\rho}, \quad (1)$$

називається типом функції  $\eta$  при порядку  $\rho$ . Тип функції  $\eta$  порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли  $(\forall \sigma_1 \in (0; +\infty))(\exists t_0 \in (0; +\infty))(\forall t \geq t_0): \eta(t) \leq \sigma_1 t^\rho$ .

**Приклад 1.** Нехай  $\rho \in (0; +\infty)$ ,  $\beta \in (0; +\infty)$ ,  $\gamma \in (0; +\infty)$  і  $\eta(t) = \gamma t^\beta + \ln(t+3)$ . Тоді  $\eta(t) = \gamma t^\beta (1 + o(1))$  і  $\ln \eta(t) = \beta(1 + o(1)) \ln t$ , якщо  $t \rightarrow +\infty$ . Тому  $\rho[\eta] = \beta$  і  $\sigma[\eta] = \gamma$ .

**Приклад 2.** Нехай  $\beta \in (0; +\infty)$  і  $\eta(t) = t^\beta \ln(t+3)$ . Тоді  $\ln \eta(t) = \beta(1 + o(1)) \ln t$ , якщо  $t \rightarrow +\infty$ . Тому  $\rho[\eta] = \beta$  і  $\sigma[\eta] = +\infty$ .

**Приклад 3.** Нехай  $\eta(t) = e^{\ln^2 t}$ . Тоді  $\ln \eta(t) = \ln^2 t$ . Тому  $\rho[\eta] = +\infty$  і  $\sigma[\eta] = +\infty$ .

**Приклад 4.** Якщо функція  $\eta: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  є неперервною на  $[0; +\infty)$ , для деякого  $\beta > -\rho$  функція  $t^\beta \eta(t)$  є неспадною на  $[1; +\infty)$  і

$$\int_1^{+\infty} \frac{\eta(t)}{t^{\rho+1}} < +\infty,$$

то  $\eta(t) = o(t^\rho)$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Справді,

## Розділ 1

$$0 \leftarrow \int_x^{+\infty} \frac{\eta(t)}{t^{\rho+1}} dt \geq x^\beta \eta(x) \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^{\rho+\beta+1}} dt \geq \frac{\eta(x)}{(\rho+\beta)x^\rho}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

**Приклад 5.** Якщо функція  $\eta: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  є неспадною на

$[1; +\infty)$  і  $f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt$ , то

$$f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt \leq \eta(x) \ln x, \quad x \in [1; +\infty),$$

$$f(x) = \int_{x/e}^x \frac{\eta(t)}{t} dt \geq \eta(x/e), \quad x \in [1; +\infty).$$

Тому  $\ln f(x) \leq \ln \eta(x) + \ln \ln x$  і  $\rho[f] \leq \rho[\eta]$ . Крім цього,

$$\frac{\ln f(x)}{\ln x} \geq \frac{\ln \eta(x/e)}{\ln(x/e)} \cdot \frac{\ln(x/e)}{\ln x}$$

і  $\rho[f] \geq \rho[\eta]$ . Отже,  $\rho[f] = \rho[\eta]$ . Далі,

$$\frac{f(x)}{x^\rho} \geq \frac{\eta(x/e)}{(x/e)^\rho} e^{-\rho}$$

і  $\sigma[\eta; \rho] e^{-\rho} \leq \sigma[f; \rho]$ . Якщо  $\sigma[\eta; \rho] < +\infty$ , то

$$\frac{\eta(t)}{t^\rho} \leq \sigma_1$$

для кожного  $\sigma_1 > \sigma[\eta; \rho]$  і всіх  $t \geq t_0$ . Отже,

$$f(x) = \int_{t_0}^x \frac{\eta(t)}{t} dt + O(1) \leq \sigma_1 \int_{t_0}^x t^{\rho-1} dt + O(1) = \frac{\sigma_1 x^\rho}{\rho} + O(1), \quad x \geq t_0.$$

Таким чином,  $\sigma[\eta; \rho] e^{-\rho} \leq \sigma[f; \rho] \leq \sigma[\eta; \rho] / \rho$ .

**8. Повільно змінні функції.** Функція  $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  зветься повільно змінною, якщо

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\omega(c_1 t)}{\omega(t)} = 1$$

для кожної додатної сталої  $c_1$ , причому прямування до границі рівномірне за  $c_1$  на кожному проміжку  $[a; b] \in \mathbb{R}$ . Якщо при цьому  $\omega$  є неспадною, то  $\omega$  називається повільно зростаючою функцією.

**Приклад 1.** Функція  $\omega(t) = \ln t$  є повільно змінною, бо

## Розділ 1

$$\frac{\ln c_1 t}{\ln t} = \frac{\ln c_1 + \ln t}{\ln t} \rightarrow 1, \quad t \rightarrow +\infty$$

рівномірно за  $c_1 \in [a; b]$ . Функції  $\omega(t) = \ln^2 t$ ,  $\omega(t) = \ln \ln t$ ,  $\omega(t) = \arctg t$ ,  $\omega(t) = e^{1/t}$  та  $\omega(t) = e^{\ln^\alpha t}$ , де  $\alpha \in [0; 1)$ , також є повільно змінними. Функції  $\omega(t) = t$ ,  $\omega(t) = \sqrt{t}$ ,  $\omega(t) = 1/t^2$ ,  $\omega(t) = e^t$ ,  $\omega(t) = e^{\sqrt{t}}$  та  $\omega(t) = e^{\ln^2 t}$  та не є повільно змінними.

**Приклад 2.** Якщо функція  $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є диференційовною на  $[0; +\infty)$  і

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \omega'(t) / \omega(t) = 0, \quad (1)$$

то  $\omega$  є повільно змінною функцією, бо за теоремою Лагранжа

$$\ln \omega(c_1 t) - \ln \omega(t) = \frac{\xi \omega'(\xi) (c_1 - 1)t}{\omega(\xi)} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty,$$

рівномірно по  $c_1 \in [a; b]$ , де  $\xi$  лежить між  $t$  та  $c_1 t$ .

**Приклад 3.** Якщо функція  $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервно-диференційовною на  $[0; +\infty)$  і виконується (1), то  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln \omega(t)}{\ln t} = 0$ , бо

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \omega(x)}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\ln \omega(0)}{\ln x} + \frac{\int_0^x \frac{\omega'(t)}{\omega(t)} dt}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \frac{\eta'(x)}{\eta(x)} = 0.$$

Можна довести наступне твердження. Клас повільно змінних функцій співпадає з множиною функцій  $\omega$ , які подаються у вигляді

$$\omega(x) = \exp \left\{ \omega_0(x) + \int_{x_0}^x \frac{w_0(t)}{t} dt \right\},$$

де  $x_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\omega_0$  – обмежена вимірна функція,  $w_0$  – неперервна функція,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} w_0(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \omega_0(x) = c \in \mathbb{R}.$$

**Приклад 4.** Додатна вимірна функція  $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є повільно змінною в  $+\infty$  тоді і тільки тоді, коли

## Розділ 1

$(\forall \delta \in (0; 1))(\forall \alpha > 1)(\exists t_0)(\forall t_1 \geq t_0)(\forall t_2 \geq t_1):$

$$\frac{1}{\alpha} \omega(t_1)(t_2/t_1)^{-\delta} \leq \omega(t_2) \leq \alpha \omega(t_1)(t_2/t_1)^\delta.$$

**Приклад 5.** Неспадна додатна функція  $\omega: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є повільно змінною тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall \delta \in (0; 1))(\forall \alpha > 1)(\exists t_0)(\forall t_1 \geq t_0)(\forall t_2 \geq t_1): \omega(t_2) \leq \alpha \omega(t_1)(t_2/t_1)^\delta.$$

**9. Уточнений порядок.** Уточненим або точним порядком називається така неперервно-диференційовна на деякому проміжку  $[x_0; +\infty)$  функція  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow [0; +\infty)$ , для якої

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho(t) = \rho \in [0; +\infty), \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t \rho'(t) \ln t = 0. \quad (2)$$

**Приклад 1.** Стала функція  $\rho(t) \equiv \rho \in [0; +\infty)$  є уточненим порядком.

**Приклад 2.** Функція  $\rho(t) = \rho + 1/\ln(2+t)$  є уточненим порядком.

**Приклад 3.** Якщо функція  $\rho: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є уточненим порядком, то функція  $\omega(t) = t^{\rho(t)-\rho}$  є повільно змінною, бо  $t\omega'(t)/\omega(t) = \rho(t) - \rho + t\rho'(t)\ln t$ .

**Приклад 4.** Якщо  $\rho \in [0; +\infty)$ , функція  $\omega: \mathbb{R} \rightarrow (0; +\infty)$  є неперервно-диференційовною на  $[0; +\infty)$  і  $\lim_{t \rightarrow +\infty} t\omega'(t)/\omega(t) = 0$ , то

функція  $\rho(t) = \frac{\ln(t^\rho \omega(t))}{\ln t}$  є уточненим порядком, бо

$$\rho(t) = \rho + \frac{\ln \omega(t)}{\ln t} \rightarrow \rho, \quad t \rightarrow +\infty, \quad \text{і} \quad t\rho(t)\ln t = \frac{t\omega'(t)}{\omega(t)} + \frac{\ln \omega(t)}{\ln t} \rightarrow 0,$$

$t \rightarrow +\infty$ .

**10. Інтегрування асимптотичних формул.** Асимптотичні рівності можна, як правило, почленно інтегрувати, якщо виконуються природні умови. Обґрунтування можливості почленного інтегрування базується на означеннях символів Ландау.

**Приклад 1.** Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $[0; +\infty)$ ,  $\alpha > -1$  і  $f(t) \sim t^\alpha$ ,  $t \rightarrow +\infty$ , то

$$\int_0^x f(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

## Розділ 1

Справді,  $f(t) \sim t^\alpha$ ,  $t \rightarrow +\infty$ , тоді і тільки тоді, коли  $f(t) = t^\alpha + o(t^\alpha)$ ,  $t \rightarrow +\infty$  (тут символом  $o(t^\alpha)$  позначену деяку функцію  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , для якої

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall t \geq \delta): |o(t^\alpha)| \leq \varepsilon t^\alpha, \text{ то}$$

$$\left| \int_{\delta}^x o(t^\alpha) dt \right| \leq \varepsilon \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \geq \delta.$$

Отож, з рівності

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &= \int_0^{\delta} f(t) dt + \int_{\delta}^x f(t) dt = O(1) + \int_{\delta}^x t^\alpha dt + \int_{\delta}^x o(t^\alpha) dt \\ &= O(1) + \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + \int_{\delta}^x o(t^\alpha) dt, \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

отримуємо, що

$$\int_0^x f(t) dt - \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} = o(x^{\alpha+1}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

що і потрібно було показати.

**Приклад 2.** Якщо функція

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0; 1], \\ t^\alpha, & t > 1, \end{cases}$$

і  $\alpha < -1$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^x f(t) dt &\geq 1, \quad x \geq 1, \\ \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} &= o(1), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отже, розглядуване в попередньому прикладі співвідношення не є справедливим.

**11. Диференціювання асимптотичних формул.** Асимптотичні формули можна почленно диференціювати тільки, як правило, при виконанні певних додаткових умов. Обґрунтування можливості почленного диференціювання є досить складною мало дослідженою проблемою, яка пов'язана з тауберовими теоремами.

**Приклад 1.** Якщо  $f(t) = t + \sin t$ , то  $f(t) \sim t$ ,  $t \rightarrow +\infty$ , і

## Розділ 1

$f'(t) = 1 + \cos t$ . Тому співвідношення  $f'(t) \sim 1$ ,  $t \rightarrow +\infty$ , не виконується. Отже, асимптотичну рівність  $f(t) \sim t$ ,  $t \rightarrow +\infty$ , почленно не можна, взагалі кажучи, диференціювати.

**Приклад 2.** Нехай  $\Delta \in \mathbb{R}$ ,  $\rho \in (0; +\infty)$  і функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  подається у вигляді

$$f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt,$$

де  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – неспадна і невід’ємна функція на  $[1; +\infty)$ . Тоді умови

$$f(t) \sim \Delta t^\rho, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (1)$$

і

$$\eta(t) \sim \rho \Delta t^{\rho-1}, \quad t \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

є еквівалентними. Справді, якщо виконується (2), то

$$f(x) \sim \rho \Delta \int_1^x t^{\rho-1} dt \sim \Delta x^\rho, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Навпаки, нехай виконується (1). Тоді

$$\eta(r) \ln \frac{R}{r} \leq f(R) - f(r) = \int_r^R \frac{\eta(t)}{t} dt \leq \eta(R) \ln \frac{R}{r}, \quad 0 < r < R < +\infty.$$

Взявши  $R = (1 + \delta)r$ , де  $\delta > 0$ , отримуємо

$$\eta(r) \leq \frac{f(R) - f(r)}{\ln(R/r)} = \frac{\Delta r^\rho \left( (1 + \delta)^\rho - 1 \right) + o(r^\rho)}{\ln(1 + \delta)}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Тому

$$\gamma := \lim_{r \rightarrow +\infty} \eta(r) / r^\rho \leq \frac{\Delta \left( (1 + \delta)^\rho - 1 \right)}{\ln(1 + \delta)}.$$

Отже,  $\gamma \leq \rho \Delta$ . Аналогічно, взявши  $r = R(1 - \delta)$ , знаходимо

$$\eta(R) \geq \frac{f(R) - f(r)}{\ln(R/r)} \geq \frac{\Delta R^\rho \left( (1 - \delta)^\rho - 1 \right) + o(R^\rho)}{-\ln(1 - \delta)}, \quad R \rightarrow +\infty.$$

Таким чином,

$$\gamma_1 := \lim_{R \rightarrow +\infty} \eta(R) / R^\rho \geq \frac{\Delta \left( (1 - \delta)^\rho - 1 \right)}{-\ln(1 - \delta)}.$$

Тому

## Розділ 1

$$\gamma_1 := \lim_{R \rightarrow +\infty} \eta(R) / R^\rho \geq \Delta \rho.$$

Отже,  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \eta(r) / r^\rho = \rho \Delta$ , що і потрібно було показати.

**Приклад 3.** Нехай функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  подається у вигляді

$$f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt,$$

де  $\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – невід’ємна і неспадна функція на  $[1; +\infty)$ . Тоді умови

$$\frac{f(t)}{\ln t} \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \tag{1}$$

і

$$\eta(t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow +\infty, \tag{2}$$

є еквівалентними. Справді, якщо виконується (2), то

$$-\varepsilon \ln x < \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt < \varepsilon \ln x$$

для всякого  $\varepsilon > 0$  і всіх  $x \geq x_0(\varepsilon)$ . Тому виконується (1). Навпаки, нехай виконується (1). Припустимо, що (2) не виконується. Тоді  $\eta(t) \geq \varepsilon$  для

всякого  $\varepsilon > 0$  і всіх  $t \geq x_0(\varepsilon)$ . Тому  $f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt \geq O(1) + \varepsilon \ln x$  для всіх достатньо великих  $x$ , а це суперечить (1).

**Приклад 4.** Нехай  $\Delta \in [0; +\infty)$ ,  $\rho \in (0; +\infty)$  і  $f(x) = \int_1^x \frac{\eta(t)}{t} dt$ , де

$\eta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – монотонна функція на  $[1; +\infty)$ . Тоді для того щоб для деякого  $\rho_2 \in (0; \rho)$

$$f(x) = \Delta x^\rho + o(x^{\rho_2}), \quad x \rightarrow +\infty,$$

необхідно й достатньо, щоб для деякого  $\rho_1 \in (0; \rho)$

$$\eta(t) = \rho \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1}), \quad t \rightarrow +\infty.$$

Справді, достатність встановлюється безпосередньою перевіркою. Доведемо необхідність. Оскільки

$$\eta(r) \ln \frac{R}{r} \leq f(R) - f(r) = \int_r^R \frac{\eta(t)}{t} dt \leq \eta(R) \ln \frac{R}{r}, \quad 0 < r < R < +\infty,$$

## Розділ 1

то, взявши  $R = r + r^\alpha$ , де  $1 + \rho_2 - \rho < \alpha < 1$  і  $\max\{\rho_2 - \alpha + 1; \rho + \alpha - 1\} < \rho_1 < \rho$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \eta(r) &\leq \frac{\Delta r^\rho \left( (1 + r^{\alpha-1})^\rho - 1 \right) + o(r^{\rho_2})}{\ln(1 + r^{\alpha-1})} \\ &= \frac{\Delta r^\rho \left( \rho r^{\alpha-1} + O(r^{2(\alpha-1)}) \right) + o(r^{\rho_2})}{r^{\alpha-1} + O(r^{2(\alpha-1)})} = \Delta \rho r^\rho + o(r^{\rho_1}), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Тому  $\eta(r) \leq \rho \Delta r^\rho + o(r^{\rho_1})$ ,  $r \rightarrow +\infty$ . З іншого боку, взявши  $r = R - R^\alpha$ , знаходимо, що

$$\begin{aligned} \eta(R) &\geq \frac{\Delta R^\rho \left( 1 - (1 - R^{\alpha-1})^\rho \right) + o(R^{\rho_2})}{-\ln(1 - R^{\alpha-1})} \\ &= \frac{\Delta \rho R^\rho + O(R^{\rho-1+\alpha}) + o(R^{\rho_2+1-\alpha})}{1 + O(R^{\alpha-1})} = \Delta \rho R^\rho + o(R^{\rho_1}), \quad R \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Отже,  $\eta(R) \leq \rho \Delta R^\rho + o(R^{\rho_1})$ ,  $R \rightarrow +\infty$ , і необхідність доведено.

**Приклад 5.** Якщо  $f \in C^{(1)}[0; +\infty)$  і  $f'(x) + f(x) \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , то  $f(x) \rightarrow 0$  і  $f'(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ . Справді, нехай  $f' + f = \varepsilon$ . Тоді  $\varepsilon(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ , і функція  $f$  є розв'язком рівняння  $f' + f = \varepsilon$ . Розв'язуючи останнє рівняння методом варіації довільних сталих приходимо до висновку, що  $f(x) = ce^{-x} + e^{-x} \int_0^x \varepsilon(t) e^t dt$ . Звідси, скориставшись, наприклад, правилами Лопіталя, отримуємо, що  $f(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ . Тоді  $f'(x) \rightarrow 0$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ .

**12. Оцінка нулів функцій та коренів рівнянь.** При розгляді багатьох проблем потрібно вміти дослідити наявність у функції нулів, їхню кратність та знайти їх з достатньою точністю. Нулем функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  називається таке число  $a \in \mathbb{R}$ , що  $f(a) = 0$ , тобто нуль функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – це корінь рівняння  $f(x) = 0$ . Кажуть,  $m$  раз неперервно диференційовна в точці  $a \in \mathbb{R}$  функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має в цій точці нуль порядку  $m \in \mathbb{N}$ , або нуль кратності  $m \in \mathbb{N}$ , якщо

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0. \quad (1)$$

Нуль порядку  $m = 1$  називається простим нулем.

## Розділ 1

**Теорема 1.** Нехай  $f$  – багаточлен степеня  $n$  і  $m \leq n$ . Тоді еквівалентними є наступні умови: 1) в точці  $a \in \mathbb{R}$  багаточлен  $f$  має нуль порядку  $m$ ; 2)  $f(x) = (x-a)^m g(x)$ , де  $g$  – багаточлен степеня  $n-m$  і  $g(a) \neq 0$ ; 3)  $f(x) = \sum_{k=m}^n A_k (x-a)^k$ , де  $A_m \neq 0$ .

**Приклад 1.** Багаточлен  $f(x) = (x-1)^4(x+3)$  є багаточленом степеня  $n=5$ , має нуль порядку  $m=4$  у точці  $a_1=1$  і має нуль порядку  $m=1$  у точці  $a_2=-3$ .

**Зауваження 1.** Згідно з основною теоремою алгебри кожний поліном степеня  $n$ , має не більше, ніж  $n$  дійсних нулів (має рівно  $n$  комплексних нулів, якщо кожен нуль порядку  $m$  враховувати  $m$  раз).

Якщо функція  $f: [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на  $[a; b]$  і на кінцях проміжку  $[a; b]$  приймає значення протилежних знаків, то за теоремою Больцано-Коші рівняння  $f(x) = 0$  має корінь на  $[a; b]$ . Питання полягає в тому як його знайти з достатньою точністю. Є ряд методів. Перш ніж вибирати певний наближений метод потрібно з'ясувати скільки коренів має рівняння, знайти кратність кожного кореня та проміжки, які містять єдиний корінь.

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = x^3 + x + 1$  є неперервною на  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  і  $f'(x) = 3x^2 + 1$ . Тому вона є зростаючою на  $\mathbb{R}$ . Отже, рівняння  $x^3 + x + 1 = 0$  має єдиний дійсний корінь. Крім цього,  $f''(x) = 6x$  і  $f(0) = 1 \neq 0$ . Тому цей корінь є простим. Оскільки  $f(-1) = -1 < 0$  і  $f(0) = 1 > 0$ , то корінь міститься на проміжку  $(-1; 0)$ .

**Приклад 3.** Знайдемо ті  $a \in \mathbb{R}$ , для яких рівняння  $x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1 = 0$  має дійсні корені, кратності  $m \geq 2$ . Нехай  $f(x) = x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1$ . Тоді  $f'(x) = 3x^2 - 6ax + 3a^2$ . Якщо таке  $a \in \mathbb{R}$  існує, то сумісною є система  $\begin{cases} f(x) = 0, \\ f'(x) = 0, \end{cases}$  тобто система

$$\begin{cases} x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 1 = 0, \\ 3x^2 - 6ax + 3a^2 = 0. \end{cases}$$

## Розділ 1

З другого рівняння випливає, що  $x = a$  і тому  $a^3 - 3aa^2 + 3a^2a - 1 = 0$ . Отже,  $a = 1$ . Тоді  $f(x) = (x-1)^3$ . Отже, рівняння має дійсні корені тільки у випадку  $a = 1$  і тоді воно має єдиний дійсний корінь  $x = 1$ , кратності  $m = 3$ .

**Приклад 4.** Нехай  $f(x) = x^3 - 3ax + 1$ . Ця функція є неперервною на  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  і  $f'(x) = 3x^2 - 3a$ . Отже, рівняння  $x^3 - 3ax + 1 = 0$  має принаймні один дійсний корінь. Якщо  $a \leq 0$ , то функція є зростаючою і тому має єдиний дійсний корінь.

**13. Знаходження асимптотики обернених функцій та коренів рівнянь.** Для знаходження формули  $y = f^{-1}(x)$ , якою задається функція  $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , обернена до функції  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , потрібно з рівняння  $y = f(x)$  знайти  $x = f^{-1}(y)$ , а потім поміняти місцями  $x$  та  $y$ . В результаті прийдемо до потрібної формули. При цьому використовуються відомі тотожності  $f^{-1}(f(x)) = x$ ,  $x \in D(f)$ , та  $f(f^{-1}(y)) = y$ ,  $y \in E(f)$ . Проте, часто рівняння  $y = f(x)$  розв'язати важко. В зв'язку з цим, в багатьох випадках доцільніше знайти асимптотичну формулу. Подібним чином поступають і при розв'язуванні рівнянь  $f(x) = a$ . Якщо таке рівняння має нескінченну кількість коренів, то в багатьох випадках, подавши  $\mathbb{R}$  у вигляді об'єднання зліченної кількості попарно неперетинних проміжків, на кожному з яких функція  $f$  є оборотною, можна знайти асимптотику коренів, які належать розглядуваним проміжкам.

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = 3x + 6$ , то маємо рівняння  $y = 3x + 6$ , з якого знаходимо, що  $x = \frac{1}{3}y - 2$ . Тому  $f^{-1}(x) = \frac{1}{3}x - 2$  і  $y = \frac{1}{3}x - 2$  – шукана формула.

**Приклад 2.** Функція  $f(x) = 2x + \sqrt{x}$  на проміжку  $(0; +\infty)$  є зростаючою і неперервною. Тому має обернену функцію  $f^{-1}$  і  $f^{-1}(y) \rightarrow +\infty$ , якщо  $y \rightarrow +\infty$ . Окрім цього,  $f(f^{-1}(y)) = 2f^{-1}(y) + \sqrt{f^{-1}(y)}$ . Тому  $y = 2(1 + o(1))f^{-1}(y)$ , якщо  $y \rightarrow +\infty$ . Отже,  $f^{-1}(x) = (1 + o(1))x/2$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ .

## Розділ 1

**Приклад 3.** Якщо  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  – дві оборотні функції,  $f(x) = (1 + o(1))\varphi(x)$ ,  $x \rightarrow 0$ , і  $\varphi^{-1}(y) = o(1)$ , якщо  $y \rightarrow 0$ , то  $f^{-1}(y) = \varphi^{-1}((1 + o(1))y)$ ,  $y \rightarrow 0$ . Справді,  $x = \varphi^{-1}(y) \rightarrow 0$ , якщо  $y \rightarrow 0$ . Тому  $f(\varphi^{-1}(y)) = (1 + o(1))\varphi(\varphi^{-1}(y))$ ,  $y \rightarrow 0$ , і тому  $f(\varphi^{-1}(y)) = (1 + o(1))y$ ,  $y \rightarrow 0$ . Зокрема, якщо  $f(x) = (1 + o(1))x$ ,  $x \rightarrow 0$ , то  $f^{-1}(x) = (1 + o(1))x$ ,  $x \rightarrow 0$ .

**Приклад 4.** Якщо функція  $f: (0; 1) \rightarrow \mathbb{R}$  є оборотною і

$$f(x) = ax + bx^2 + o(x^2), \quad x \rightarrow 0,$$

то  $f(x) = (1 + o(1))ax$ , якщо  $a \neq 0$  і  $x \rightarrow +0$ . Тому  $f^{-1}(x) = (1 + o(1))x/a$ ,  $x \rightarrow +0$ . Якщо ж  $a = 0$  і  $b \neq 0$ , то  $f(x) = (1 + o(1))bx^2$  і  $f^{-1}(x) = (1 + o(1))\sqrt{x/b}$ ,  $x \rightarrow +0$ ,

**Приклад 5.** Функція  $f(x) = x + \ln x$  є зростаючою і неперервною на  $(0; +\infty)$ . Тому має обернену функцію. При цьому  $f(x) \rightarrow +\infty$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ ,  $f(x) \rightarrow -\infty$ , якщо  $x \rightarrow 0+$ . Для знаходження оберненої функції маємо рівняння  $y = x + \ln x$ . Його розв'язати не вміємо. Проте,

$$f^{-1}(x) = (1 + o(1))x, \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + o(1), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$f^{-1}(x) = x - \ln x + \frac{\ln x}{x} + o\left(\frac{\ln x}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

До цих асимптотичних формул приходимо наступним чином:

$$y = x + \ln x, \quad y = (1 + o(1))x, \quad x = (1 + o(1))y, \quad y \rightarrow +\infty;$$

$$x = y - \ln x = y - \ln(1 + o(1))y = y - \ln y + o(1), \quad y \rightarrow +\infty;$$

$$x = y - \ln x = y - \ln(y - \ln y + o(1)) = y - \ln(y - \ln y) + \ln\left(1 + \frac{o(1)}{y - \ln y}\right)$$

$$= y - \ln y - \ln\left(1 - \frac{\ln y}{y}\right) + \ln\left(1 + \frac{o(1)}{y - \ln y}\right)$$

$$= y - \ln y + \frac{\ln y}{y} + o\left(\frac{\ln y}{y}\right), \quad y \rightarrow +\infty;$$

....

## Розділ 1

Асимптотичні формули

$$f^{-1}(x) = e^{x+o(1)}, \quad x \rightarrow -\infty,$$

$$f^{-1}(x) = e^x + O(e^{2x}), \quad x \rightarrow -\infty,$$

отримуємо наступним чином:

$$y = x + \ln x, \quad y = \ln x + o(1), \quad x = e^{y+o(1)}, \quad y \rightarrow -\infty;$$

$$x = e^{y-x} = e^{y-e^{y+o(1)}} = e^y e^{-e^{y+o(1)}} = e^y \left(1 + O(e^y)\right) = e^y + O(e^{2y}), \quad y \rightarrow -\infty.$$

Отже, якщо  $x = x(y)$  – розв'язок рівняння  $x + \ln x = y$ , то  $x = y - \ln y + o(1)$ ,  $y \rightarrow +\infty$ , і  $x = e^y + O(e^{2y})$ ,  $y \rightarrow -\infty$ .

**Приклад 6.** Нехай  $x_n$  – корінь рівняння  $\operatorname{tg} x = 1/x$ , який належить проміжку  $(-\pi/2 + \pi n; \pi/2 + \pi n)$ . З геометричних міркувань випливає, що для  $n \geq 2$  на такому проміжку розглядуване рівняння має єдиний корінь  $x_n = \pi n + \Delta_n$ ,  $\Delta_n \in (-\pi/2; \pi/2)$ . Крім цього,  $\operatorname{tg} \Delta_n = \frac{1}{x_n}$ ,

$$\Delta_n = \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n} \quad \text{і} \quad x_n = \pi n + \operatorname{arctg} \frac{1}{x_n}. \quad \text{Таким чином, } x_n = \pi n + o(1), \quad n \rightarrow +\infty.$$

Але  $\operatorname{arctg} x = x + o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ . Тому

$$\begin{aligned} x_n &= \pi n + \frac{1}{\pi n + o(1)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \pi n + \frac{1}{\pi n} \frac{1}{1 + o\left(\frac{1}{\pi n}\right)} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) + o\left(\frac{1}{n^2}\right) = \pi n + \frac{1}{\pi n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**14. Знаходження асимптотики інтегралів зі змінною верхньою межею.** Для знаходження асимптотики інтеграла

$$\int_a^x f(t) dt = (1 + o(1))\eta(x), \quad x \rightarrow a,$$

відшукування функції  $\eta$  можна здійснювати методом проб та помилок із використанням правил Лопітала або інших прийомів.

**Приклад 1.**  $\int_1^x \frac{e^t}{t} dt = (1 + o(1)) \frac{e^x}{x}$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , бо

## Розділ 1

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \frac{e^t}{t} dt}{\frac{e^x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_1^x \frac{e^t}{t} dt \right)'}{\left( \frac{e^x}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}}{\frac{e^x x - e^x}{x^2}} = 1.$$

**Приклад 2.** Для будь-яких  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > -1$  і  $\varepsilon > 0$  виконується

$$\int_{\varepsilon x}^{+\infty} e^{-u} u^\mu du = o(1/x^\alpha), \quad x \rightarrow +\infty,$$

$$\text{бо } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\varepsilon x}^{+\infty} e^{-u} u^\mu du}{\frac{1}{x^\alpha}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left( \int_{\varepsilon x}^{+\infty} e^{-u} u^\mu du \right)'}{\left( \frac{1}{x^\alpha} \right)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\varepsilon e^{-\varepsilon x} (\varepsilon x)^\mu}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = 0.$$

**Приклад 3.** Якщо функція  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є двічі неперервно-диференційовною на  $[0; +\infty)$  і

$$h(x) \rightarrow +\infty, \quad h''(x) = o(h'(x)),$$

якщо  $x \rightarrow +\infty$ , то

$$\int_x^{+\infty} e^{-h(t)} dt = (1 + o(1)) \frac{e^{-h(x)}}{h'(x)}, \quad x \rightarrow +\infty.$$

Справді,  $-0,5h(x) - c_1 \leq \ln h'(x) \leq 0,5h(x) + c_1$  і тому інтеграл

$$\int_0^{+\infty} e^{-h(t)} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-h(t)} dh(t)}{h'(t)}$$

є збіжним і

$$\frac{e^{-h(x)}}{h'(x)} \rightarrow 0,$$

$$\text{якщо } x \rightarrow +\infty. \text{ Тому } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\frac{e^{-h(x)}}{h'(x)}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h'^2(x)}{h'^2(x) + h''(x)} = 1.$$

**15. Знаходження асимптотики сум.** Асимптотику сум

## Розділ 1

$$\sum_{k=1}^n a(k), \quad \sum_{k=n+1}^{\infty} a(k),$$

знаходять шляхом порівняння їх з інтегралами

$$\int_1^n a(t) dt, \quad \int_{n+1}^{+\infty} a(t) dt,$$

запису суми у вигляді інтеграла Стільтьєса, використання теореми Штольца та інших прийомів.

**Приклад 1.** Нехай функція  $a: (0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  є неспадною на

$(0; +\infty)$ . Тоді  $a(k) \leq \int_k^{k+1} a(t) dt \leq a(k+1)$ . Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a(k) &= a(n) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k) \leq a(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} a(t) dt = a(n) + \int_1^n a(t) dt, \\ \sum_{k=1}^n a(k) &= a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k+1) \geq a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} a(t) dt = a(1) + \int_1^n a(t) dt. \end{aligned}$$

Таким чином,  $\sum_{k=1}^n a(k) = \int_1^n a(t) dt + O(1) + O(a(n))$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Якщо ж функція  $a: (0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  є незростаючою на  $(0; +\infty)$ , то

$a(k+1) \leq \int_k^{k+1} a(t) dt \leq a(k)$ . Тому

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a(k) &= a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k+1) \leq a(1) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} a(t) dt = a(1) + \int_1^n a(t) dt, \\ \sum_{k=1}^n a(k) &= a(n) + \sum_{k=1}^{n-1} a(k) \geq a(n) + \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} a(t) dt = a(n) + \int_1^n a(t) dt. \end{aligned}$$

Отже, якщо функція  $a: (0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  є монотонною, то

$$\sum_{k=1}^n a(k) = \int_1^n a(t) dt + O(1) + O(a(n)), \quad n \rightarrow \infty.$$

**Приклад 2.**  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < 1 + \int_1^n \frac{1}{t} dt = 1 + \ln n$ ,  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} > \frac{1}{n} + \int_1^n \frac{1}{t} dt = \frac{1}{n} + \ln n$ .

Таким чином,

## Розділ 1

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \int_1^n \frac{1}{t} dt + O(1) = \ln n + O(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Можна отримати і точніші оцінки. Зокрема, існує границя

$$\gamma_0 := \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right). \quad (1)$$

Більше того,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma_0 = \frac{\theta_n}{n}, \quad \theta < \theta_n < 1, \quad n > 1. \quad (2)$$

Справді,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right) + \sum_{k=1}^n \ln \frac{k+1}{k} - \ln n \\ &= \sum_{k=1}^n \left( \frac{1}{k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right) + \ln \frac{n+1}{n}, \end{aligned}$$

звідки випливає (1). Крім цього,

$$s_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n - \gamma_0 = \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) - \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right).$$

Оскільки

$$\begin{aligned} \frac{1}{2k(2k+1)} &\leq \frac{1}{2k^2} - \frac{1}{3k^3} \leq \frac{1}{k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \leq \frac{1}{2k^2} \leq \frac{1}{2k(2k-1)}, \\ \frac{1}{2n+1} &\leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \ln \left( 1 + \frac{1}{k} \right) \right) \leq \frac{1}{2n-1}, \\ \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(2n-1)} &< \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n} - \frac{1}{2n(2n+1)}, \end{aligned}$$

то

$$\frac{1}{n} - \left( \frac{1}{2n(2n-1)} - \frac{1}{2n+1} \right) < s_n < \frac{1}{n} - \left( \frac{1}{2n(2n+1)} - \frac{1}{2n-1} \right),$$

звідси отримуємо (2). Стала  $\gamma_0 = \ln \sqrt{2\pi} = 0,57\dots$  зветься сталою Ейлера.

**Приклад 3.** Нехай функція  $a : (0; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  є незростаючою

на  $(0; +\infty)$ . Тоді  $a(k+1) \leq \int_k^{k+1} a(t) dt \leq a(k)$ . Тому

## Розділ 1

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a(k) = \sum_{k=n}^{\infty} a(k+1) \leq \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} a(t) dt = \int_n^{+\infty} a(t) dt,$$

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} a(k) = -a(n) + \sum_{k=n}^{\infty} a(k) \geq -a(n) + \sum_{k=n}^{\infty} \int_k^{k+1} a(t) dt = -a(n) + \int_n^{+\infty} a(t) dt.$$

Таким чином,  $\sum_{k=n+1}^{\infty} a(k) = \int_n^{+\infty} a(t) dt + O(a(n))$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Зокрема,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = \int_n^{+\infty} \frac{1}{t^3} dt + O(1/n^3) = \frac{1}{2n^2} + O(1/n^3), \quad n \rightarrow \infty,$$

$$\sum_{k=1}^n e^{\sqrt{k}} = \int_1^n e^{\sqrt{t}} dt + O(e^{\sqrt{n}}) = 2(1+o(1))\sqrt{ne^{\sqrt{n}}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

**Приклад 4.** Нехай  $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha q^k$ ,  $y_n = n^\alpha q^n$ ,  $q > 1$  і  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Тоді

$$y_n \rightarrow +\infty, \quad x_n - x_{n-1} = (n-1)^\alpha q^{n-1},$$

$$\begin{aligned} y_n - y_{n-1} &= n^\alpha q^n - (n-1)^\alpha q^{n-1} \\ &= n^\alpha q^n \left( 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\alpha / q \right) = n^\alpha q^{n-1} (q-1)(1+o(1)) \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

якщо  $n \rightarrow \infty$ . Тому  $\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = \frac{1}{q-1}(1+o(1))$ ,  $n \rightarrow \infty$ , і за теоремою

Штольца  $\frac{x_n}{y_n} = \frac{1}{q-1}(1+o(1))$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Отже,  $\sum_{k=0}^{n-1} k^\alpha q^k = \frac{n^\alpha q^n}{q-1}(1+o(1))$ ,

$n \rightarrow \infty$ .

**Приклад 5.**  $\sum_{k=n}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} = 2(1+o(1))\sqrt{ne^{-\sqrt{n}}}$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Справді, нехай

$$x_n = \sum_{k=n}^{\infty} e^{-\sqrt{k}} \quad \text{і} \quad y_n = \sqrt{ne^{-\sqrt{n}}}. \quad \text{Тоді}$$

$$\begin{aligned} x_n - x_{n-1} &= -e^{-\sqrt{n-1}}, \quad y_n - y_{n-1} = \sqrt{ne^{-\sqrt{n}}} - \sqrt{n-1}e^{-\sqrt{n-1}}, \\ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} &= \frac{-e^{-\sqrt{n-1}}}{\sqrt{ne^{-\sqrt{n}}} - \sqrt{n-1}e^{-\sqrt{n-1}}} = \frac{-1}{\sqrt{n} \left( e^{\sqrt{n-1}-\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{n-1}{n}} \right)} \end{aligned}$$

## Розділ 1

$$\begin{aligned}
 &= \frac{-1}{\sqrt{n} \left( e^{-\frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}}} - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \right)} \\
 &= \frac{-1}{\sqrt{n} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{n-1} + \sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - 1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right)} = 2(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.
 \end{aligned}$$

Тому за теоремою Штольца  $\frac{x_n}{y_n} = 2(1 + o(1)), \quad n \rightarrow \infty.$

**16. Асимптотичні оцінки деяких інтегралів, залежних від параметра.** Асимптотичні оцінки багатьох інтегралів

$$I(x) = \int_a^b \eta(t) e^{-xS(t)} dt \quad (1)$$

та інших можна знайти інтегруванням частинами. У складніших випадках доцільно скористатись методом Лапласа. Основна ідея методу Лапласа полягає в тому, що для заданої функції  $S$ , яка має одну точку  $t_0$  мінімуму на  $[a; b]$ , для великих додатних  $x$  підінтегральна функція має в точці  $t_0$  великий максимум і тому цей інтеграл мало відрізняється від її інтеграла по малому околі  $\Delta_x$  точки  $t_0$ , а останній інтеграл мало відрізняється від  $\eta(t_0) e^{-xS(t_0)} \int_{\Delta_x} dt$ , точніше кажучи від вкладу точки  $t_0$ . Обґрунтування цих

двох моментів складає суть методу Лапласа. Вдалою заміною змінної інтегрування подібним методом можна знаходити асимптотику інших типів інтегралів. При застосуванні цього методу часто використовується

гамма-функція  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  та її властивості:  $\Gamma(1+x) = x\Gamma(x)$ ,

$$\Gamma(1+n) = n!, \quad \Gamma(1/2) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}.$$

**Приклад 1.**  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}, \quad x > 0,$  і  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^\mu dt = \frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}}, \quad x > 0,$

$\mu > -1.$

## Розділ 1

**Приклад 2.** Для будь-яких  $\delta > 0$ ,  $\mu > -1$  і  $\alpha > 0$  виконується

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-tx} t^{\mu} dt = o(1/x^{\alpha}), \quad x \rightarrow +\infty. \quad \text{Справді,}$$

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-tx} t^{\mu} dt = \int_{\delta}^{+\infty} e^{-t} e^{-t(x-1)} t^{\mu} dt \leq e^{-\delta(x-1)} \int_{\delta}^{+\infty} e^{-t} t^{\mu} dt,$$

якщо  $x > 1$ , і  $e^{-\delta x} = o(1/x^{\alpha})$ , якщо  $x \rightarrow +\infty$ .

**Приклад 3.** Для будь-якого  $\varepsilon > 0$  виконується

$$\int_0^{\varepsilon} e^{-tx} dt = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt - \int_{\varepsilon}^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x} + \frac{1}{x} e^{-\varepsilon x} = \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \rightarrow +\infty,$$

**Приклад 4.** Для будь-яких  $\alpha \in \mathbb{R}$  і  $\varepsilon > 0$  виконується

$$\begin{aligned} I(x) &:= \int_0^{\varepsilon} e^{-tx} t dt = -\frac{t}{x} e^{-tx} \Big|_0^{\varepsilon} + \frac{1}{x} \int_0^{\varepsilon} e^{-tx} dt = \frac{1}{x} \left( -\varepsilon e^{-\varepsilon x} + \int_0^{\varepsilon} e^{-tx} dt \right) \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**Приклад 5.** Для будь-яких  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\mu > -1$  і  $\varepsilon > 0$  виконується

$$I(x) := \int_0^{\varepsilon} e^{-tx} t^{\mu} dt = \frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \text{бо}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\delta} e^{-tx} t^{\mu} dt &= \int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{\mu} dt - \int_{\delta}^{+\infty} e^{-tx} t^{\mu} dt = \frac{1}{x^{\mu+1}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{\mu} du - \int_{\delta}^{+\infty} e^{-tx} t^{\mu} dt = \frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}} \\ &+ \int_{\delta}^{+\infty} e^{-tx} t^{\mu} dt = \frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}} + \frac{1}{x^{\mu+1}} \int_{\delta x}^{+\infty} e^{-u} u^{\mu} du = \frac{\Gamma(\mu+1)}{x^{\mu+1}} + o\left(\frac{1}{x^{\mu+1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Нехай функція  $\eta: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  задовольняє умови: 1)

$\varepsilon$  неперервною на проміжку  $[0; +\infty)$ ; 2) існує така стала  $c_1$ , що

$|\eta(t)| \leq c_1 e^{\alpha t}$ , якщо  $t \in [0; +\infty)$ ; 3)  $\eta$  розвивається в рівномірно збіжний

на деякому проміжку  $[0; \varepsilon]$ ,  $\varepsilon > 0$ , ряд  $\eta(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k t^k$ . Тоді для будь-яких

$\alpha > -1$  і  $n \in \mathbb{Z}_+$  виконується

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{\alpha} \eta(t) dt = \sum_{k=0}^n d_k \frac{\Gamma(k + \alpha + 1)}{x^{k + \alpha + 1}} + O\left(\frac{1}{x^{n + \alpha + 1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

## Розділ 1

Справді,  $\int_0^{+\infty} e^{-tx} t^\alpha \eta(t) dt = \int_0^\varepsilon e^{-tx} t^\alpha \eta(t) dt + \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-tx} t^\alpha \eta(t) dt$ . При цьому,

$$\left| \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-tx} t^\alpha \eta(t) dt \right| \leq c_1 \int_\varepsilon^{+\infty} e^{-t(x-2c_1)} t^\alpha e^{-tc_1} dt \leq c_1 e^{-\varepsilon(x-2c_1)} \int_\varepsilon^{+\infty} t^\alpha e^{-tc_1} dt.$$

Тому  $\int_\varepsilon^{+\infty} e^{-tx} t^\alpha \eta(t) dt = O\left(\frac{1}{x^{n+\alpha+1}}\right)$ ,  $x \rightarrow +\infty$ . Окрім цього,

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon e^{-tx} t^\alpha \sum_{k=0}^n d_k t^k dt &= \sum_{k=0}^n d_k \int_0^\varepsilon e^{-tx} t^{\alpha+k} dt = \sum_{k=0}^n d_k \int_0^{+\infty} e^{-tx} t^{\alpha+k} dt + O\left(\frac{1}{x^{n+\alpha+1}}\right) \\ &= \sum_{k=0}^n d_k \frac{\Gamma(k+\alpha+1)}{x^{k+\alpha+1}} + O\left(\frac{1}{x^{n+\alpha+1}}\right), \quad x \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

До того ж,

$$t^\alpha \eta(t) - t^\alpha \sum_{k=0}^n d_k t^k = O(t^{n+1+\alpha}), \quad t \in [0; \varepsilon].$$

Тому

$$\left| \int_0^\varepsilon e^{-tx} t^\alpha \eta(t) dt - \int_0^\varepsilon e^{-tx} t^\alpha \sum_{k=0}^n d_k t^k dt \right| \leq c_2 \int_0^\varepsilon e^{-tx} t^{n+1+\alpha} dt = \frac{c_2}{x^{n+2+\alpha}} \int_0^{\varepsilon x} e^{-u} u^{n+1+\alpha} du.$$

**Приклад 7.**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 x} dt = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{x}}, \quad x > 0.$$

**Приклад 8.** Для будь-якого  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  виконується

$$\int_{-\varepsilon}^\varepsilon e^{-t^2 x} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{x^{1/2}} + o\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right), \quad x \rightarrow +\infty, \text{ бо}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon e^{-t^2 x} dt &= 2 \int_0^\varepsilon e^{-t^2 x} dt = \int_0^{\varepsilon^2} e^{-ux} u^{-1/2} du = \int_0^{+\infty} u^{-1/2} e^{-ux} du - \int_{\varepsilon^2}^{+\infty} u^{-1/2} e^{-ux} du \\ &= \frac{\Gamma(1/2)}{x^{1/2}} - \frac{1}{x^{1/2}} \int_{x\varepsilon^2}^{+\infty} v^{-1/2} e^{-v} dv. \end{aligned}$$

**17. Перетворення Фур'є.** Перетворенням Фур'є функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  називається функція

## Розділ 1

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt. \quad (1)$$

Оператор  $F$ , який функції  $f$  ставить у відповідність функцію  $\hat{f}$  за формулою (1) називається оператором Фур'є. Формулу (1) можна переписати у вигляді  $\hat{f} = F(f)$ . Оберненим перетворенням Фур'є  $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  називається функція

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy. \quad (2)$$

Оператор  $F^{-1}$ , який функції  $\hat{f}$  ставить у відповідність функцію  $f$  за формулою (2) називається оберненим оператором Фур'є. Формулу (2) можна переписати у вигляді  $f = F^{-1}(\hat{f})$ . За певних умов справедлива інтегральна формула Фур'є

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ixy} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \right) dy. \quad (3)$$

Останню формулу можна переписати у вигляді  $f = F^{-1}(F(f))$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq \sigma, \\ 0, & |x| > \sigma, \end{cases}$  то

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-iyt} dt = \frac{e^{iy\sigma} - e^{-iy\sigma}}{iy\sqrt{2\pi}} = \begin{cases} \sqrt{2/\pi} \frac{\sin \sigma y}{y}, & y \neq 0, \\ \sigma\sqrt{2/\pi}, & y = 0. \end{cases}$$

**Приклад 2.** Для кожної функції  $f \in L_1(\mathbb{R})$  і кожного  $y_0 \in \mathbb{R}$  виконується  $\hat{f}(y - y_0) = e^{iy_0 t} \hat{f}(t)$ . Справді,

$$\hat{f}(y - y_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i(y-y_0)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{iy_0 t} e^{-iyt} dt.$$

**Приклад 3.** Для кожної функції  $f \in L_1(\mathbb{R})$  і кожного  $t_0 \in \mathbb{R}$  виконується  $f(t - t_0) = e^{-it_0 y} \hat{f}(t)$ . Справді,

$$f(t - t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t - t_0) e^{-iyt} dt$$

## Розділ 1

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iy(u+t_0)} du = e^{-iyt_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) e^{-iyu} du.$$

**Приклад 4.** Нехай  $f(x) = e^{-\alpha|x|}$ . Тоді

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} e^{-iyt} dt = \sqrt{2/\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|} \cos ytdt = \sqrt{2/\pi} \frac{\alpha}{y^2 + \alpha^2}.$$

**Приклад 5.** Нехай  $f(x) = \frac{1}{x^2 + \alpha^2}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Тоді за теоремою

про лишки  $\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{t^2 + \alpha^2} e^{-iyt} dt = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\alpha|y|}$ .

**Приклад 6.** Нехай  $f(x) = e^{-\alpha x^2}$ ,  $\alpha \in (0; +\infty)$ . Тоді за теоремою Коші

$$\begin{aligned} \hat{f}(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-iyt} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty - iy}^{+\infty + iy} e^{-\alpha \zeta^2} e^{-iy\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/4\alpha} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} e^{-y^2/4\alpha}, \end{aligned}$$

бо  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \xi^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ . Таким чином,  $\hat{f}(y) = \lambda f(y)$ , якщо  $\lambda = 1$  і  $f(x) = e^{-x^2/2}$ .

Згорткою функцій  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  і  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  називають функцію  $f * \varphi$  визначену рівністю  $f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \tau) \varphi(\tau) d\tau$ .

**Приклад 7.** Нехай  $f(x) = x$  і  $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$  Тоді

$$f * \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - \tau) \varphi(\tau) d\tau = \int_{-1}^1 (x - \tau) d\tau = 2x.$$

## Розділ 1

**Приклад 8.** Нехай  $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$   $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$  Тоді

$$f * \varphi(x) = \int_{-1}^1 f(x-\tau) d\tau = - \int_{x+1}^{x-1} f(u) du = \int_{x-1}^{x+1} u du = 2x, \quad x \geq 1,$$

$$f * \varphi(x) = \int_{-1}^1 f(x-\tau) d\tau = - \int_{x+1}^{x-1} f(u) du = \int_{x-1}^{x+1} f(u) du = 0, \quad x \leq -1,$$

$$\begin{aligned} f * \varphi(x) &= \int_{-1}^1 f(x-\tau) d\tau = \int_{x-1}^{x+1} f(u) du = \int_{x-1}^0 f(u) du + \int_0^{x+1} f(u) du \\ &= \int_0^{x+1} u du = \frac{(x+1)^2}{2}, \quad -1 < x < 1. \end{aligned}$$

**Приклад 9.** Нехай  $f(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$   $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$  Тоді

$$f * \varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(x-\tau) d\tau = \int_0^x d\tau = x, \quad x > 0,$$

$$f * \varphi(x) = \int_0^{+\infty} f(x-\tau) d\tau = 0, \quad x \leq 0.$$

Наведені вище формули справедливі за певних умов.

**Теорема 1.** Якщо  $f \in L_1(\mathbb{R})$ , то функція  $\hat{f}$  є неперервною і обмеженою на  $\mathbb{R}$  та  $\hat{f}(y) \rightarrow 0$ , якщо  $y \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Якщо  $f \in L_1(\mathbb{R})$  і  $\varphi \in L_1(\mathbb{R})$ , то  $f * \varphi = \sqrt{2\pi} \hat{f} \hat{\varphi}$ .

**Доведення.** За теоремою Фубіні

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f * \varphi(x) e^{-iyx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x-t) e^{-iyx} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-iyt} dt \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(u) e^{-iyu} du.$$

Звідси випливає потрібне. ►

**Теорема 3.** Якщо функція  $f \in L_1(\mathbb{R})$  є неперервною на  $\mathbb{R}$  і є функцією обмеженої варіації на кожному проміжку  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ , то в кожній точці  $x \in \mathbb{R}$  справедлива формула Фур'є (3), в якій зовнішній інтеграл є інтегралом в розумінні головного значення.

Через  $S(\mathbb{R})$  або  $\mathcal{J}(\mathbb{R})$  позначаємо множину тих функцій  $f$ , які

## Розділ 1

мають на  $\mathbb{R}$  всі похідні і

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+)(\forall p \in \mathbb{Z}_+): \|f\|_{p,n} := \sup \left\{ |x|^p |f^{(n)}(x)| : x \in \mathbb{R} \right\} < +\infty.$$

Простір  $S(\mathbb{R})$  називають простором швидко спадних функцій. Йому належить, наприклад, функція  $f(x) = \exp(-x^2)$ .

**Теорема 4.** *Оператор Фур'є є взаємно однозначним відображенням  $S(\mathbb{R})$  на  $S(\mathbb{R})$ . Для кожної функції  $f \in S(\mathbb{R})$  в кожній*

*точці  $x \in \mathbb{R}$  справедлива двоїста формула  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(y) e^{iyx} dy$ ,*

*інтегральна формула Фур'є (3) та рівність Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy.$$

Якщо  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , то функція  $\varphi_y(t) = f(t)e^{-iyt}$  не обов'язково належить до  $L_1(\mathbb{R})$ . Так буде, наприклад, якщо  $f(t) = 1/(1+|t|)$ . В зв'язку з цим, означення перетворення Фур'є в просторі  $L_2(\mathbb{R})$  вводиться іншим чином. Перетворенням Фур'є функції  $f \in L_2(\mathbb{R})$  або  $L_2$ -перетворенням Фур'є функції  $f \in L_2(\mathbb{R})$  зветься така функція  $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$ , для якої

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \hat{f}(y) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a f(t) e^{-iyt} dt \right|^2 dy = 0.$$

Оберненим перетворенням

Фур'є функції  $\hat{f} \in L_2(\mathbb{R})$  називається така функція  $f \in L_2(\mathbb{R})$ , для якої

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| f(x) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a \hat{f}(y) e^{iyx} dy \right|^2 dx = 0.$$

**Теорема 5 (Планшереля).** *Для кожної функції  $f \in L_2(\mathbb{R})$  існує її  $L_2$ -перетворення Фур'є і при цьому справедлива рівність Парсеваля*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^2 dx.$$

*Якщо  $f \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_2(\mathbb{R})$ , то її  $L_2$ -*

*перетворення Фур'є співпадає з її перетворенням Фур'є як функції  $L_1(\mathbb{R})$ .*

### 18. Запитання для самоконтролю.

1. Поясніть зміст символів:

## Розділ 1

- а) “ $f(x) = o(1)$ ,  $x \rightarrow a$ ”; б) “ $f(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ ”;  
в) “ $f(x) = O(1)$ ,  $x \rightarrow a$ ”; г) “ $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow a$ ”;  
д) “ $f(x) \asymp \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ ”; е) “ $f(x) = O(1)$ ,  $x \in E$ ”;  
є) “ $f(x) = O(\varphi(x))$ ,  $x \in E$ ”; ж) “ $f(x) \sim \varphi(x)$ ,  $x \rightarrow a$ ”.
- Сформулюйте означення: а) верхньої границі послідовності; б) нижньої границі послідовності; в) верхньої границі функції; г) нижньої границі функції.
  - Сформулюйте означення перетворення Фур’є функцій з  $L_1(\mathbb{R})$ .
  - Сформулюйте означення перетворення Фур’є в просторі  $L_2(\mathbb{R})$ .
  - Сформулюйте теорему Планшереля.
  - Сформулюйте означення згортки.

### 19. Вправи і задачі.

#### 1. Знайдіть

- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 2 \left( \cos \frac{\pi n}{2} \right)^{n-1}$ .
- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (1 + (-1)^n n) / n$ .
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \cos^2 \frac{n\pi}{2} \right)$ .
- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( 2 + \cos \frac{n\pi}{4} \right)$ .
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}} \left( 2 + \cos^2 \frac{n\pi}{2} \right)$ .
- $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , якщо  $(x_n)$  – послідовність, членами якої є всі раціональні числа.
- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$ , якщо  $(x_n)$  – послідовність, членами якої є всі раціональні числа.

#### 2. Нехай $(x_n)$ і $(y_n)$ – послідовності дійсних чисел. Доведіть твердження:

- $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n)$  для будь-якої послідовності  $(x_n)$   
 $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$ , якщо права частина має зміст.

## Розділ 1

2.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ , якщо ліва частина має зміст.
  3.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)$ , якщо ліва частина має зміст і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує.
  4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n)}$ , якщо ліва частина має зміст.
  5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$  для будь-яких двох невід'ємних послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст.
  6.  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$  для будь-яких двох невід'ємних послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо права частина має зміст.
  7.  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n}} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$  для будь-якої послідовності  $(x_n)$ .
  8.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n} \leq \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$  для будь-яких двох невід'ємних послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо ліва частина має зміст.
  9.  $\overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n} = \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \cdot \overline{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$  для будь-яких двох невід'ємних послідовностей  $(x_n)$  та  $(y_n)$ , якщо ліва частина має зміст і  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  існує.
3. Знайдіть  $\overline{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}$  і  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  та з'ясуйте, чи існує  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$
1.  $f(x) = x^2 \sin x$ ,  $a = 0$ .
  2.  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ ,  $a = \infty$ .
  3.  $f(x) = x + \sin \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ .
  4.  $f(x) = \frac{\sin \frac{1}{x}}{1+x}$ ,  $a = \infty$ .
  5.  $f(x) = e^{\cos \frac{1}{x^2}}$ ,  $a = 0$ .
  6.  $f(x) = 2^{1/x}$ ,  $a = 0$ .
  7.  $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ ,  $a = 0$ .
  8.  $f(x) = \arctg \frac{1}{x}$ ,  $a = \infty$ .

## Розділ 1

9.  $f(x) = (1 + \cos^2 x)^{\frac{1}{\cos^2 x + 1}}$ ,  $a = \infty$ .    10.  $f(x) = \arctg x$ ,  $a = 0$ .  
11.  $f(x) = \text{sign}(\cos x)$ ,  $a = 0$ .    12.  $f(x) = \text{sign}(\arctg x)$ ,  $a = 0$ .  
13.  $f(x) = \text{arcctg} x$ ,  $a = \infty$ .    14.  $f(x) = \frac{1}{1 + e^{1/x}}$ ,  $a = 0$ .  
15.  $f(x) = \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^x$ ,  $a = \infty$ .    16.  $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2x+1}{2x+2}}$ ,  $a = 0$ .  
17.  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ,  $a = +\infty$ .    18.  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$ ,  $a = 0$ .

### 4. Доведіть нерівності:

- $\alpha \arctg x \leq \arctg(\alpha x) \leq \frac{1}{\alpha} \arctg x$ ,  $\alpha \in (0; 1]$ ,  $x \in [0; +\infty)$ .
- $\frac{1}{\alpha} \arctg x \leq \arctg(\alpha x) \leq \alpha \arctg x$ ,  $\alpha \in [1; +\infty)$ ,  $x \in [0; +\infty)$ .
- $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{1+t} \leq \arctg t \leq \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1+t}$ ,  $t \in [0; +\infty)$ .
- $t - \frac{t^3}{3} \leq \arctg t \leq t$ ,  $t \in [0; +\infty)$ .
- $1 - \frac{4}{\pi} \cos \varphi \leq \frac{2}{\pi} \varphi \sin \varphi \leq 1 - \frac{2}{\pi} \cos \varphi$ ,  $\varphi \in (-\pi/2; \pi/2)$ .
- $1 \leq 2 + \cos \varphi - \sin \varphi \leq 3$ ,  $\varphi \in (-\pi/2; \pi/2)$ .
- $u^2 - 2u \cos \varphi + 1 \geq (1 - u \cos \varphi)^2$ .
- $t^2 - 2tr\tau + r^2 \geq (t^2 + r^2) \min\{1; 1 - \tau\}$ .
- $\ln x < x/e$ ,  $x > 0$ .
- $e^x > ex$ ,  $x > 0$ .
- $e^{2x} > 2x^2$ ,  $x > 0$ .
- $\ln(1-x) > \frac{-x}{1-x}$ ,  $0 < x < 1$ .

### 5. З'ясуйте, чи істинними є висловлення:

- $\arctg x = x - 2x^2 + o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .
- $\sin(x + o(x^2)) = x + o(x^2)$ ,  $x \rightarrow 0$ .

## Розділ 1

3.  $\cos(x+o(x^2))=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  4.  $\sin(x+o(x^2))=x+o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  5.  $\operatorname{tg}(x+o(x^2))=x+o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  6.  $e^{\operatorname{tg}x}=1+x+o(x)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  7.  $e^{\sin x}=1+x-\frac{1}{6}x^2+o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  8.  $(1+x)^5=O(x^5)$ ,  $x\rightarrow\infty$ .
  9.  $\ln x=o(x^\alpha)$ ,  $x\rightarrow+\infty$ ,  $\alpha>0$ .
  10.  $\ln x=o(x^\alpha)$ ,  $x\rightarrow+\infty$ ,  $\alpha\leq 0$ .
  11.  $\ln x=o(x^2)$ ,  $x\rightarrow+\infty$ .
  12.  $\ln x=o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0+$ .
  13.  $xo(x)=o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  14.  $x^3o(1/x)=o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  15.  $x^2+o(x)=O(x^2)$ ,  $x\rightarrow\infty$ .
  16.  $o(O(x))=o(x)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  17.  $o(x^2)+O(x^3)=o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
- 6.** Доведіть, що
1.  $e^x\sim 1+x$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  2.  $e^x+x^3=O(e^x)$ ,  $x\in[0;+\infty)$ .
  3.  $x^2=o(e^x)$ ,  $x\rightarrow+\infty$ .
  4.  $\frac{1}{1+x}=O(1)$ ,  $x\in[0;+\infty)$ .
  5.  $x^2=o(x^3)$ ,  $x\rightarrow+\infty$ .
  6.  $x^3=o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  7.  $x^2+\operatorname{arctg}x=x^2+O(1)$ ,  $x\in\mathbb{R}$ .
  8.  $\ln\left(1+\sin\left(\frac{2x}{e^x}\right)\right)\asymp x$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  9.  $\ln(1+2x)\asymp x$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  10.  $\sqrt{1+x^2}-x=O(1/x)$ ,  $x\rightarrow+\infty$ .
- 7.** Знайдіть числа  $a_j$ , для яких справедливі асимптотичні формули:
1.  $\ln(1+2x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+O(x^4)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  2.  $e^{2x}=a_0+a_1x+a_2x^2+o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .
  3.  $(1+2x)^7=a_0+a_1x+a_2x^2+o(x^2)$ ,  $x\rightarrow 0$ .

## Розділ 1

4.  $\frac{1+x}{1-x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
  5.  $\frac{\sin x}{1-2x} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
  6.  $\sin(\sin x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
  7.  $\ln(1 + \sin x) = a_0 + a_1x + o(x), x \rightarrow 0.$
  8.  $\operatorname{tg} x = a_0 + a_1x + a_2x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$
  9.  $\operatorname{arctg} x = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow +\infty.$
  10.  $\operatorname{arctg} x = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), x \rightarrow -\infty.$
  11.  $\arcsin x = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + o((x-1)^2), x \rightarrow 1-.$
  12.  $\frac{1}{2+x} = a_0 + a_1(1+x) + a_2(1+x)^2 + o((1+x)^2), x \rightarrow -1.$
  13.  $e^{x \sin x} = a_0 + a_1x + o(x), x \rightarrow 0.$
  14.  $\sin(x^2 - 2x + 3) = a_0 + a_1(x-1) + o(x-1), x \rightarrow -1.$
  15.  $\frac{x}{1+x} = a_0 + a_1(x-1) + o(x-1), x \rightarrow 1.$
- 8.** Знайдіть таке число  $c_0$ , що  $f(x) = c_0(x-a)^m + o((x-a)^m), x \rightarrow a$
1.  $f(x) = \sin(\cos x), a = 0.$
  2.  $f(x) = \cos(\sin x), a = 0.$
  3.  $f(x) = \sin(\operatorname{tg}^2 x), a = 0.$
  4.  $f(x) = \operatorname{tg}^2(\sin x), a = 0.$
  5.  $f(x) = \sin(\ln \cos x), a = 0.$
  6.  $f(x) = \cos(\arcsin^2 x), a = 0.$
  7.  $f(x) = \arcsin^2(\operatorname{tg} x), a = 0.$
  8.  $f(x) = \operatorname{tg}^2(\arccos x), a = 0.$
  9.  $f(x) = \arcsin^2(x + x^2 + o(x^2)), a = 0.$
  10.  $f(x) = \operatorname{tg}^2(x + O(x^3)), a = 0.$
- 9.** З'ясуйте, чи  $f(2x) \sim f(x), x \rightarrow +\infty$
1.  $f(x) = \sqrt{x}.$
  2.  $f(x) = x^2.$
  3.  $f(x) = e^{\sqrt{x}}.$
  4.  $f(x) = e^{2x}.$
  5.  $f(x) = \ln x.$
  6.  $f(x) = \ln \ln x.$
  7.  $f(x) = \ln^2 x.$
  8.  $f(x) = \ln^3 x.$



## Розділ 1

7.  $f(x) = x^3 - 3^x$ ,  $\varphi(x) = x - 3$ ,  $a = 3$ .
  8.  $f(x) = x^3 - 3^x$ ,  $\varphi(x) = (x - 3)^2$ ,  $a = 3$ .
  9.  $f(x) = \arcsin 2x - 2\arcsin x$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $a = 0$ .
  10.  $f(x) = x^4 - 4^x$ ,  $\varphi(x) = x - 4$ ,  $a = 4$ .
  11.  $f(x) = \frac{1}{x^2} - \operatorname{tg}^2 \frac{1}{x}$ ,  $\varphi(x) = \frac{1}{x^4}$ ,  $a = +\infty$ .
  12.  $f(x) = \cos 3x - \cos x$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $a = 0$ .
  13.  $f(x) = \sqrt{9 - x} - 3$ ,  $\varphi(x) = x$ ,  $a = 0$ .
  14.  $f(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ ,  $\varphi(x) = x^4$ ,  $a = 0$ .
  15.  $f(x) = \sin 2x^2$ ,  $\varphi(x) = x^2$ ,  $a = 0$ .
  16.  $f(x) = x - \operatorname{tg} x$ ,  $\varphi(x) = x^3$ ,  $a = 0$ .
14. Доведіть, що рівняння мають єдиний дійсний корінь
1.  $x3^x = 1$ .
  2.  $x - \frac{1}{2}\sin x = \pi$ .
  3.  $x^{13} + 7x^3 - 5 = 0$ .
  4.  $3^x + 4^x = 5^x$ .
  5.  $2e^x + x^3 + 18x - 6 = 0$ .
15. Знайдіть таку функцію  $\varphi$ , що для розв'язку  $x = x(y)$  рівняння  $x + e^x = y$  виконується  $x = \varphi(y) + o(1)$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .
16. Знайдіть таку функцію  $\varphi$ , що для розв'язку  $x = x(y)$  рівняння  $x + e^x = y$  виконується  $x = \varphi(y) + o(1)$ ,  $y \rightarrow -\infty$ .
17. Знайдіть таку функцію  $\varphi$ , що для розв'язку  $x = x(y)$  рівняння  $xe^x = y$  виконується  $x = \varphi(y) + o(1)$ ,  $y \rightarrow +\infty$ .
18. Знайдіть таку функцію  $\varphi$ , що для розв'язку  $x = x(y)$  рівняння  $xe^x = y$  виконується  $x = \varphi(y) + o(1)$ ,  $y \rightarrow -\infty$ .
19. Нехай  $x_{2k}$  – корінь рівняння  $\sin \pi x = 1/x$ , який належить проміжкам  $(2k; 1/2 + 2k)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Доведіть, що
- $$x_{2k} = 2k + \frac{1}{2\pi k} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), k \rightarrow +\infty.$$
20. Нехай  $x_{2k+1}$  – корінь рівняння  $\sin \pi x = 1/x$ , який належить проміжкам  $(1/2 + 2k; 2(k+1))$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Доведіть, що

## Розділ 1

$$x_{2k+1} = 2k + 1 - \frac{1}{(2k+1)\pi} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow +\infty.$$

21. Нехай  $(x_n)$ ,  $x_1 < x_2 < \dots$ , – послідовність додатних розв'язків рівняння  $\operatorname{tg} x = x$ . Доведіть, що  $x_n = (2n-1)\pi/2 + O(1/n)$ ,  $n \rightarrow +\infty$ .

22. Знайдіть порядок і тип функції  $\eta$

1.  $\eta(x) = 3x^4 + \ln(1+x)$ .
2.  $\eta(x) = \ln(1 + e^{3x})$ .
3.  $\eta(x) = \ln(x + e^{3x})$ .
4.  $\eta(x) = \ln(x + e^{3x}) + \ln(1+x^2)$ .
5.  $\eta(x) = \sqrt{x} + \ln(x^2 + 2x^3)$ .
6.  $\eta(x) = \ln(x^5 + e^x)$ .
7.  $\eta(x) = \ln(1 + e^{3x^2})$ .
8.  $\eta(x) = x \ln(1 + 1/\sqrt{x})$ .
9.  $\eta(x) = x \ln(1+x^2) \ln(1+1/x^{3/2})$ .
10.  $\eta(x) = x \ln(1 + 1/\ln(1+x))$ .
11.  $\eta(x) = 2x^2 + x \ln(1 + e^x)$ .

23. Обґрунтуйте асимптотичні формули

1.  $\int_1^x e^{t^2} dt \sim \frac{e^{x^2}}{2x}, \quad x \rightarrow +\infty.$
2.  $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt \sim \frac{e^{-x^2}}{2x}, \quad x \rightarrow +\infty.$
3.  $\int_0^x \frac{t^2 \ln t}{1+t} dt = (1+o(1)) \frac{x^3 \ln x}{3}, \quad x \rightarrow 0+.$
4.  $\int_0^{\sin x} \sqrt{\operatorname{tg} t} dt \sim \sqrt{x}, \quad x \rightarrow 0+.$
5.  $\int_0^x \frac{\ln t}{t^3} dt = (1+o(1)) \frac{x^3 \ln x}{3}, \quad x \rightarrow 0+.$

## Розділ 1

$$6. \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t^2} dt = -\frac{\sin x}{x^2} + O\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$7. \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\sin x}{x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$8. \int_1^x e^{t^2} dt = \frac{e^{x^2}}{2x} - \frac{e^{x^2}}{4x^2} + o\left(\frac{e^{x^2}}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$9. \int_1^x \frac{e^t}{t} dt = \frac{e^x}{x} + \frac{e^x}{x^2} + o\left(\frac{e^x}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$10. \int_0^x \sqrt[3]{1+t^3} dt = \frac{x^2}{2} + O(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

**24.** Дослідіть ряд на рівномірну збіжність на множині  $E$

$$1. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + 2x + 3)^k}, \quad E = [4; 5].$$

$$2. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x^2 + x + 3)^k}, \quad E = (-\infty; -4).$$

$$3. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 + x^{\sqrt{k}}}, \quad E = (2; +\infty).$$

$$4. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^2}{k^2 + x^2}, \quad E = (-\infty; +\infty)$$

$$5. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{2k+1}}{5^k}, \quad E = [0; 1].$$

$$6. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 x^{2k+1}}, \quad E = [1; +\infty).$$

$$7. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{(x+1)^{\sqrt{2k+1}}}, \quad E = [1; +\infty).$$

$$8. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(x-k)^{k/2}}, \quad E = (-\infty; 0).$$

$$9. \sum_{k=1}^{\infty} kx e^{-kx}, \quad E = [0; +\infty).$$

$$10. \sum_{k=1}^{\infty} x^k, \quad E = [0; 1).$$

**25.** Доведіть асимптотичні формули (тут функція  $f: [0; +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  є неперервною на проміжку  $[0; +\infty)$  і  $f(x) \sim x^\alpha$ ,  $x \rightarrow +\infty$ )

$$1. \int_0^x f(t) dt \sim \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > -1.$$

$$2. \int_0^x f(t) dt = O(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < -1.$$

$$3. \int_0^x f(t) dt \sim \ln x, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha = -1.$$

## Розділ 1

$$4. \int_x^{+\infty} f(t)dt \sim -\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < -1.$$

- 26.** Доведіть, що якщо функція  $\varphi: [0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$  є неперервно-диференційовною на проміжку  $[0; +\infty)$  і  $x\varphi'(x) = o(\varphi(x))$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , то

$$1. \int_0^x \varphi(t)t^{\alpha-1} dt \sim \frac{1}{\alpha} x^\alpha \varphi(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha > 0.$$

$$2. \int_x^{+\infty} \varphi(t)t^{\alpha-1} dt \sim -\frac{1}{\alpha} x^\alpha \varphi(x), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \alpha < 0.$$

- 27.** Доведіть асимптотичні формули

$$1. \sum_{k=1}^n \frac{\ln k}{k} \sim \frac{1}{2} \ln^2 n, \quad n \rightarrow \infty. \quad 2. \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sim \frac{1}{n}, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$3. \sum_{k=1}^n k \ln k \sim \frac{1}{2} n^2 \ln n, \quad n \rightarrow \infty. \quad 4. \sum_{k=n}^{\infty} \sqrt{k} e^{-\sqrt{k}} \sim 2ne^{-\sqrt{n}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

$$5. \sum_{n^2 \leq x} \ln n = ((1+o(1))x^{1/2} \ln x^{1/2}), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$6. \sum_{k=n}^{\infty} k^2 e^{-k} \sim \frac{en^3 e^{-n}}{e-1}, \quad n \rightarrow \infty.$$

- 28.** Знайдіть числа  $a_j$ , для яких справедливі асимптотичні формули

$$1. \int_0^{+\infty} e^{-tx} (1+t)^{10} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$2. \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sqrt{1+t} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$3. \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sqrt{1+t^2} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$4. \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{1}{1+t} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

$$5. \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

## Розділ 1

$$6. \int_0^{+\infty} e^{-tx} \sin t dt = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right), \quad x \rightarrow +\infty.$$

**29.** Доведіть твердження:

1. Якщо функція  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  має похідну на проміжку  $(-\infty; +\infty)$ , то між двома різними нулями функції  $f$  лежить принаймні один нуль функції  $f'$ .

2. Рівняння  $x^5 + x^4 + x^2 + 10x - 5 = 0$  має єдиний додатний корінь і цей корінь належить проміжку  $(0; 1/2)$ .

3. Рівняння  $x \arcsin x = 0$  має єдиний дійсний корінь  $x = 0$  і цей корінь має кратність  $m = 2$ .

4. Рівняння  $xe^x = 2$  має єдиний дійсний корінь і цей корінь належить проміжку  $(0; 1)$ .

5. Якщо  $a \in (1; +\infty)$ , то рівняння  $a^x = ax$  має два дійсні корені.

6. Рівняння  $a^x = bx$  має два дійсні корені, якщо  $a \in (1; +\infty)$  і  $b > e \ln a$ .

7. Рівняння  $a^x = bx$  не має жодного дійсного кореня, якщо  $e \ln a > b > 0$ .

8. Рівняння  $a^x = bx$  має єдиний дійсний корінь, якщо  $a \in (1; +\infty)$  і  $b > 0$ .

9. Рівняння  $x \ln x = a$  не має дійсних коренів, якщо  $a \in (-\infty; -1/e)$ .

10. Рівняння  $x \ln x = a$  має єдиний дійсний корінь кратності  $m = 2$ , якщо  $a = -1/e$ .

11. Рівняння  $x \ln x = a$  має два простих корені, якщо  $a \in (-1/e; 0)$ .

12. Рівняння  $x \ln x = a$  має єдиний дійсний корінь, якщо  $a \in (0; +\infty)$ .

**30.** Знайдіть перетворення Фур'є функції

$$1. f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-2; 1], \\ 0, & x \notin [-2; 1]. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-2; 1], \\ 0, & x \notin [-2; 1]. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} x, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in [0; 1], \\ 0, & x \notin [0; 1]. \end{cases}$$

5. Знайдіть перетворення Фур'є функції  $f$ , якщо  $f(x) = \varphi(x)$  для  $x \in [-\pi, \pi]$  і  $f(x) = 0$  для  $x \notin [-\pi, \pi]$ , де  $\varphi$  – розв'язок

## Розділ 1

диференціального рівняння  $\varphi'' + \varphi = 0$ , який задовольняє початкові умови  $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$ .

6. Знайдіть перетворення Фур'є функції  $f$ , якщо  $f(x) = \varphi(x)$  для  $x \in [0, 1]$  і  $f(x) = 0$  для  $x \notin [0, 1]$ , де  $\varphi$  – розв'язок диференціального рівняння  $\varphi'' - \varphi = 0$ , який задовольняє умови  $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0$ .

7. Знайдіть перетворення Фур'є функції  $f$ , якщо  $f(x) = \varphi(x)$  для  $x \in [-1, 0]$  і  $f(x) = 0$  для  $x \notin [-1, 0]$ , де  $\varphi$  – розв'язок диференціального рівняння  $\varphi'' - 4\varphi = 0$ , який задовольняє початкові умови  $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$ .

8. Знайдіть перетворення Фур'є функції  $f$ , якщо  $f(x) = \varphi(x)$  для  $x \in [-1, 0]$  і  $f(x) = 0$  для  $x \notin [-1, 0]$ , де  $\varphi$  – розв'язок диференціального рівняння  $\varphi'' - \varphi' = 0$ , який задовольняє початкові умови  $\varphi(0) = 1, \varphi'(0) = 0$ .

**31.** Знайдіть згортку  $f * \varphi$

$$1. f(x) = \begin{cases} -1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$2. f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$3. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$4. f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ \frac{1}{1+x^2}, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

$$5. f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ e^{2x}, & x < 0, \end{cases} \quad \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

## Розділ 2

### Розділ 2. Найпростіші властивості цілих функцій

**1. Максимум модуля цілої функції.** Функція  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  зветься голоморфною в точці  $a$ , якщо вона має похідну в деякому околі точки  $a$ . Функція  $f$  зветься голоморфною на множині  $E$ , якщо вона голоморфна в кожній точці цієї множини. Функція  $f$ , яка є голоморфною в кожній точці  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , зветься цілою. Таким чином, ціла функція – це така функція  $f$ , яка має похідну в кожній точці  $z \in \mathbb{C}$ . Для того щоб функція  $f$  мала похідну в точці  $z = x + iy$ , необхідно і достатньо, щоб функції  $u = \operatorname{Re} f$  і  $v = \operatorname{Im} f$ , як функції двох змінних, були диференційовними в

точці  $(x; y)$  і в цій точці виконувались умови Коші-Рімана:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

Для того щоб функція  $f$  була цілою, необхідно і достатньо, щоб вона розвивалась в степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad (1)$$

збіжний для всіх  $z \in \mathbb{C}$ . Ряд (1) є збіжним для всіх  $z \in \mathbb{C}$  тоді і тільки тоді, коли  $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k|} = 0$ . Тейлорові коефіцієнти  $f_k$  цілої функції  $f$

знаходяться за формулами  $f_k = f^{(k)}(0)/k!$ ,  $f_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(0;R)} \frac{f(t)}{t^{k+1}} dt$ .

З останньої формули випливають нерівності Коші  $(\forall r > 0)(\forall k \geq 0): |f_k| r^k \leq M_f(r)$ , де  $M_f(r) = \max \{|f(z)|: |z| \leq r\}$  – максимум модуля цілої функції  $f$ . Максимум модуля є однією з основних характеристик цілої функції. З принципу максимуму модуля випливає, що  $M_f(r) = \max \{|f(z)|: |z| = r\} = \max \{|f(re^{i\theta})|: \theta \in [0; 2\pi]\}$ . Знайти максимум модуля цілої функції вдається тільки в окремих випадках.

## Розділ 2

**Приклад 1.** Функції  $f(z) = e^z$ ,  $f(z) = \sin z$ ,  $f(z) = \cos z$   
 $f(z) = e^{\sin z}$  та  $f(z) = e^{z^\rho}$ , де  $\rho \in \mathbb{Z}_+$ , є цілими. Функції  $f(z) = \sqrt{z}$ ,  
 $f(z) = \text{Ln } z$  та  $f(z) = e^{z^\rho}$ , де  $\rho \notin \mathbb{Z}_+$ , не є цілими.

**Приклад 2.** Якщо  $f(z) = 1 + z$ , то  $|f(re^{i\theta})| = \sqrt{1 + 2r \cos \theta + r^2}$  і  
 $M_f(r) = 1 + r$ .

**Приклад 3.** Якщо  $f(z) = e^z$ , то  $|f(re^{i\theta})| = |\exp(re^{i\theta})| = |e^{r \cos \theta}|$  і  
 $M_f(r) = e^r$ .

**Приклад 4.** Якщо  $f(z) = e^{\tau z^n}$ , де  $\tau = se^{i\psi} \in \mathbb{C}$  і  $n \in \mathbb{N}$ , то  
 $|f(re^{i\theta})| = |e^{se^{i\psi} r^n e^{in\theta}}| = |e^{sr^n e^{i(n\theta + \psi)}}| = |e^{sr^n (\cos(n\theta + \psi) + i \sin(n\theta + \psi))}|$   
 $= |e^{sr^n \cos(n\theta + \psi)} (\cos(sr^n \sin(n\theta + \psi)) + i \sin(sr^n \sin(n\theta + \psi)))|$   
 $= e^{sr^n \cos(n\theta + \psi)} \left| (\cos(sr^n \sin(n\theta + \psi)) + i \sin(sr^n \sin(n\theta + \psi))) \right| = e^{sr^n \cos(n\theta + \psi)}.$

Тому  $M_f(r) = e^{sr^n}$ .

**Приклад 5.** Якщо  $f(z) = e^z + z$ , то  
 $|f(z)| = |e^z + z| \leq |e^z| + |z| \leq e^r + r$ , якщо  $|z| \leq r$ . Тому  $M_f(r) \leq e^r + r$ . З  
іншого боку,  $|f(r)| = |e^r + r| = e^r + r$ . Тому  $M_f(r) \geq e^r + r$ . Отже,  
 $M_f(r) = e^r + r$ .

**Приклад 6.** Якщо  $f(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$  – поліном степеня  $n$ , то  
 $|f(z)| = |f_n| |z|^n (1 + o(1))$ ,  $z \rightarrow \infty$ , і  $M_f(r) = (1 + o(1)) |f_n| r^n$ ,  $r \rightarrow +\infty$ . Тому  
ступінь полінома можна знайти за формулою  $n = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ M_f(r)}{\ln r}$ .

**Приклад 7.** Якщо  $f$  – ціла функція, то  $M_f(r) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k$ , бо

$$M_f(r) = \max_{\theta \in [0; 2\pi]} \left| \sum_{k=0}^{\infty} f_k r^k e^{ik\theta} \right| \leq \max_{\theta \in [0; 2\pi]} \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k.$$

## Розділ 2

**Приклад 8.** Якщо  $f$  – ціла функція і всі  $f_k \geq 0$ , то

$$M_f(r) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k r^k. \text{ Справді, } M_f(r) \geq |f(r)| = \sum_{k=0}^{\infty} f_k r^k. \text{ З іншого боку,}$$

$$M_f(r) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k = \sum_{k=0}^{\infty} f_k r^k.$$

**Приклад 9.**  $M_f(r) = (e^r - e^{-r})/2$  і  $m_f(r) = |\sin r|$ , якщо

$$f(z) = \sin z \quad \text{і} \quad m_f(r) = \min \{ |f(z)| : |z| = r \}. \quad \text{Справді,}$$

$$|\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}. \quad \text{Якщо} \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \text{то}$$

$$\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x = \operatorname{ch}^2 \sqrt{r^2 - x^2} - \cos^2 x. \text{ Але}$$

$$(\operatorname{ch}^2 \sqrt{r^2 - x^2} - \cos^2 x)'_x = -\frac{x \operatorname{sh} 2\sqrt{r^2 - x^2}}{\sqrt{r^2 - x^2}} + \sin 2x,$$

$$\frac{\operatorname{sh} u}{u} > 1, \quad u \in (0; +\infty), \quad \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in (0; +\infty).$$

Тому  $(\operatorname{ch}^2 \sqrt{r^2 - x^2} - \cos^2 x)'_x \leq 0$  для всіх  $x \in [0; r]$ . Робимо висновок, що

$$m_f(r) = |f(r)| = \sqrt{1 - \cos^2 r} = |\sin r| \quad \text{і} \quad M_f(r) = |f(ir)| = (e^r - e^{-r})/2.$$

**2. Цілі трансцендентні функції.** Кожний поліном є цілою функцією. Ціла функція, яка не є поліномом, зветься цілою трансцендентною функцією. Цілі трансцендентні функції є ніби поліномами нескінченного степеня.

**Теорема 1 (Ліувілля).** Для того щоб ціла функція  $f$  була поліномом, необхідно і достатньо, щоб

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ M_f(r)}{\ln r} < +\infty. \quad (1)$$

**Доведення.** Якщо  $f(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$  – поліном, то

$$\ln^+ M_f(r) = (1 + o(1))n \ln r, \quad r \rightarrow +\infty, \quad \text{і тому (1) виконується. Навпаки,}$$

нехай виконується (1). Тоді існують такі число  $c_1$  і послідовність  $(r_n)$ ,

$$0 < r_n \uparrow +\infty, \quad \text{що} \quad M_f(r_n) \leq c_1 r_n^{c_1}. \text{ Тому з нерівностей Коші для всіх } k \in \mathbb{Z}_+$$

і  $n \in \mathbb{N}$  отримуємо:  $|f_k| \leq c_1 r_n^{k - c_1}$ . Спрямувавши  $n$  до  $+\infty$  одержуємо, що

## Розділ 2

$|f_k| = 0$  для  $k > c_1$ , тобто  $f$  – поліном. ►

**Наслідок 1.** Для того щоб ціла функція  $f$  була цілою трансцендентною функцією, необхідно і достатньо щоб

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ M_f(r)}{\ln r} = +\infty.$$

### 3. Найпростіші властивості максимуму модуля.

**Теорема 1 (Адамара про три круги).** Нехай  $f \neq 0$  – ціла функція. Тоді для будь-яких  $r_1, r$  і  $r_2$ ,  $0 < r_1 < r < r_2$ , виконується

$$\ln M_f(r) \leq \ln M_f(r_1) \frac{\ln r_2 - \ln r}{\ln r_2 - \ln r_1} + \ln M_f(r_2) \frac{\ln r - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1}.$$

**Доведення.** Нехай  $D = \{z : r_1 \leq |z| \leq r_2\}$  і  $g(z) = z^\alpha f(z)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

Тоді  $|g(z)|$  – однозначна функція в  $\bar{D}$ . Тому приймає в  $\bar{D}$  найбільше і найменше значення, яке обов'язково приймається на  $\partial D$ , що впливає з принципу максимуму модуля. Отож,

$$r^\alpha M_f(r) \leq \max \left\{ r_1^\alpha M_f(r_1); r_2^\alpha M_f(r_2) \right\}. \quad (1)$$

Виберемо  $\alpha$  так, щоб  $r_1^\alpha M_f(r_1) = r_2^\alpha M_f(r_2)$ . Тоді з (1) отримуємо потрібну нерівність. ►

**Наслідок 1.** Функція  $\ln M_f(r)$  є опуклою відносно  $\ln r$  на  $(0; +\infty)$ .

**Наслідок 2.** Права похідна  $\beta_f(r) = \frac{d \ln M_f(r)}{d \ln r}$  є неспадною функцією і для кожної цілої функції  $f \neq 0$

$$\ln M_f(r_2) - \ln M_f(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} \beta_f(r) d \ln r, \quad 0 < r_1 < r_2.$$

**Наслідок 3.** Якщо  $f$  – ціла трансцендентна функція, то  $\beta_f(r) \rightarrow +\infty$  при  $r \rightarrow +\infty$ .

**Наслідок 4.** Якщо  $f$  – ціла трансцендентна функція, то існує така функція  $u : (0; +\infty) \rightarrow (0; +\infty)$ , що  $u(r) \rightarrow +\infty$  і  $\exp(u(r))M_f(r) = M_f((1+o(1))r)$ , якщо  $r \rightarrow +\infty$ . Можна взяти, наприклад,  $u(r) = \sqrt{\beta_f(r)}$ , бо

## Розділ 2

$$\begin{aligned} \sqrt{\beta_f(r)} + \ln M_f(r) &= \ln M_f((1+\varepsilon)r) - \int_r^{(1+\varepsilon)r} \beta_f(t) dt + \sqrt{\beta_f(r)} \leq \\ &\leq \ln M_f((1+\varepsilon)r) - \beta_f(r) \ln(1+\varepsilon) + \sqrt{\beta_f(r)} \leq \ln M_f((1+\varepsilon)r) \end{aligned}$$

для будь-якого  $\varepsilon > 0$ , якщо  $r \geq r_0(\varepsilon)$ .

**4. Максимальний член.** Нехай  $f$  – ціла трансцендентна функція з тейлоровими коефіцієнтами  $f_k$ . Функції  $\mu_f(r) = \max\{|f_k|r^k : k \geq 0\}$  та  $\nu_f(r) = \{k : \mu_f(r) = |f_k|r^k\}$  називаються відповідно максимальним членом і центральним індексом цілої функції  $f$ . Оскільки  $f$  – ціла функція, то  $\sqrt[k]{|f_k|} \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , і тому  $|f_k|r^k \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow \infty$ , для кожного  $r > 0$ . Отже,  $\mu_f(r) < +\infty$  і  $\nu_f(r) < +\infty$  для кожного  $r \in [0; +\infty)$ .

**Теорема 1.** Для всіх  $r \geq 0$ ,  $\varepsilon > 0$  і для кожної цілої функції  $f$  виконується

$$\mu_f(r) \leq M_f(r) \leq (1+1/\varepsilon)\mu_f((1+\varepsilon)r).$$

**Доведення.** Справді, ліва частина є наслідком нерівностей Коші  $|f_n|r^n \leq M_f(r)$ , а права випливає з нерівностей

$$M_f(r) \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|r^k \leq \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|(r(1+\varepsilon))^k (1+\varepsilon)^{-k} \leq \mu_f((1+\varepsilon)r)(1+1/\varepsilon). \blacktriangleright$$

**Теорема 2.** Якщо  $\chi_0(f) = 0$ ,  $\chi_n(f) = |f_{n-1}/f_n|$  для  $n \in \mathbb{N}$  і

$$0 < \chi_1(f) \leq \chi_2(f) \leq \dots, \quad (1)$$

то  $\mu_f(r) = |f_m|r^m$ , якщо  $r \in [\chi_m(f); \chi_{m+1}(f)]$  і  $\nu_f(r) = m$ , якщо  $r \in [\chi_m(f); \chi_{m+1}(f))$ .

**Доведення.** Справді,  $f_m = f_0/(\chi_1(f)\dots\chi_m(f))$ . Тому, якщо  $r \in [\chi_m(f); \chi_{m+1}(f)]$ , то

$$\frac{|f_k|r^k}{|f_m|r^m} = \chi_{k+1}(f)\dots\chi_m(f)/r^{m-k} \leq (\chi_m(f)/r)^{m-k} \leq 1, \quad k < m,$$

$$\frac{|f_k|r^k}{|f_m|r^m} = r^{k-m}/\chi_{k+1}(f)\dots\chi_m(f) \leq (r/\chi_{m+1}(f))^{k-m} \leq 1, \quad k > m.$$

Окрім цього,

## Розділ 2

$$\frac{|f_k| r^k}{|f_m| r^m} = r^{k-m} / \chi_{k+1}(f) \cdots \chi_m(f) < (r / \chi_{m+1}(f))^{k-m} \leq 1, \quad k > m,$$

якщо  $r \in [\chi_m(f); \chi_{m+1}(f)]$  і  $k > m$ . ►

**Приклад 1.** Якщо  $f(z) = e^z$ , то  $f_k = 1/k!$  і  $\chi_k = k$ . Тому  $\mu_f(r) = r^m / m!$ , якщо  $r \in [m; m+1]$ . Отже, скориставшись формулою Стірлінга

$$m! = (1 + o(1)) \sqrt{2\pi m} (m/e)^m, \quad m \rightarrow \infty,$$

отримуємо

$$\mu_f(r) = (1 + o(1)) (re/m)^m / \sqrt{2\pi r}, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Функція  $\varphi(t) = (re/t)^t$  на проміжку  $[r-1; r]$  є зростаючою,  $\varphi(r) = e^r$  і

$$\varphi(r-1) = (er/(r-1))^{r-1} = (1 + o(1))e^r, \quad r \rightarrow +\infty.$$

Тому  $\mu_f(r) = (1 + o(1))e^r / \sqrt{2\pi r}$ ,  $r \rightarrow +\infty$ .

**Теорема 3.** Якщо  $f$  – ціла трансцедентна функція, то  $v_f$  є неспадною функцією і

$$\ln \mu_f(r) = \ln \mu_f(r_0) + \int_{r_0}^r \frac{v_f(t)}{t} dt, \quad 0 < r_0 < r. \quad (2)$$

**5.  $\Phi$ -тип функції.** Нехай  $f$  і  $\Phi$  – цілі трансцедентні функції, а  $\Psi_\Phi^{-1}$  – функція, обернена до функції  $\Psi_\Phi(x) = \ln M_\Phi(x)$ .  $\Phi$ -типом цілої функції  $f$  називається число  $q = q_\Phi^f$ , визначене рівністю

$$q = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\Psi_\Phi^{-1}(\ln^+ M_f(r))}{r}. \quad \Phi\text{-тип цілої функції } f \text{ можна також}$$

визначити як точну нижню межу тих  $q_1 \in [0; +\infty]$ , для яких  $(\exists r_0 \in \mathbb{R})(\forall r \geq r_0): M_f(r) \leq M_\Phi(q_1 r)$ . В останньому означенні

максимуми модуля можна замінити максимальними членами, тобто  $\Phi$ -тип цілої функції  $f$  – це точна нижня межа тих  $q_1 \in [0; +\infty]$ , для яких  $(\exists r_0 \in \mathbb{R})(\forall r \geq r_0): \mu_f(r) \leq \mu_\Phi(q_1 r)$ .

**Теорема 1.** Якщо послідовність  $\chi_k(\Phi) = |\Phi_{k-1} / \Phi_k|$  є неспадною, то  $q_\Phi^f = \lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{|f_k / \Phi_k|}$ .

## Розділ 2

**Приклад 1.** Якщо  $\Phi(z) = e^z$ , то  $\Psi_\Phi(x) = x$ ,  $\Psi_\Phi^{-1}(x) = x$ ,

$$q_\Phi^f = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ M_f(r)}{r} \quad \text{і} \quad q_\Phi^f = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{k! f_k} = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{e} \sqrt[k]{|f_k|}.$$

**6. Формули Пуассона і Шварца.** Нехай  $U(a; R) = \{z : |z - a| < R\}$  і  $f$  – функція, голоморфна в  $\overline{U(0; R)}$ ,  $0 < R < +\infty$ .

**Теорема 1.** Нехай  $0 < R < +\infty$  і  $U(a; R) = \{z : |z - a| < R\}$ . Якщо функція  $f$  є голоморфною в замкненому крузі  $\overline{U(0; R)}$ , то для  $z \in U(0; R)$  справедливі формули Пуассона

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta, \quad |z| < R, \quad (1)$$

і Шварца

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + i \operatorname{Im} f(0). \quad (2)$$

**Доведення.** За інтегральною формулою Коші

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(0; R)} \frac{f(t)}{t - z} dt = \begin{cases} f(z), & z \in U(0; R), \\ 0, & z \notin U(0; R). \end{cases}$$

Звідси для  $z = 0$  отримуємо (1). Нехай  $z \in U(0; R)$ ,  $z \neq 0$  і  $z^\bullet = R^2 / \bar{z}$ .

Тоді

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(0; R)} \frac{f(t)}{t - z^\bullet} dt = 0.$$

Тому для  $z \in U(0; R)$  маємо

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial U(0; R)} f(t) \left( \frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - z^\bullet} \right) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta.$$

Таким чином, формула (1) доведена. Якщо  $u = \operatorname{Re} f$  і  $v = \operatorname{Im} f$ , то з (1) отримуємо

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta, \quad |z| < R, \quad (3)$$

## Розділ 2

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta, \quad |z| < R, \quad (4)$$

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) d\theta. \quad (5)$$

Легко переконуємось, що (тут  $z = re^{i\varphi}$ )

$$\operatorname{Re} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} = \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} = \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\varphi - \theta) + r^2}.$$

Розглянемо функцію

$$f_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial U(0;R)} u(t) \frac{t+z}{t-z} |dt|.$$

Ця функція  $f_1$  є голоморфною в  $U(0;R)$  і  $\operatorname{Re} f_1 = u = \operatorname{Re} f$ . Тому  $f = f_1 + \text{const}$ . Справді, якщо  $u_1 = \operatorname{Re} f_1$ , а  $v_1 = \operatorname{Im} f_1$ , то з умов Коші-Рімана знаходимо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u_1}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y},$$

тобто

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_1}{\partial y}.$$

Звідси  $v(x, y) = v_1(x, y) + c_1(x)$ , де  $c_1(x)$  від  $y$  не залежить. Крім цього, з

умов Коші-Рімана отримуємо  $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial u_1}{\partial y} = -\frac{\partial v_1}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial x}$ , і тому

$v(x, y) = v_1(x, y) + c_2(y)$ . Отже,  $c_1(x)$  і  $c_2(y)$  є сталими ( $= c_0$ ). Тому

$v = v_1 + c_0$ ,  $f = f_1 + c_0$  і

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + ic_0.$$

Отже, завдяки (5)

$$u(0) + iv(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) d\theta + c_0 = u(0) + c_0, \quad c_0 = v(0).$$

Звідси та з попередньої рівності випливає (2). ►

### 7. Формули Шварца-Ієнсена, Пуассона-Ієнсена.

## Розділ 2

**Теорема 1.** Якщо функція  $f$  голоморфна в замкненому крузі  $\overline{U(0;R)}$  і не має там нулів, то для  $z \in U(0;R)$  справедливі формули Шварца-Ієнсена

$$\ln f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + ic_0 \quad (1)$$

та Пуассона-Ієнсена

$$\ln |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} d\theta, \quad (2)$$

де  $\ln f(z)$  – будь-яка голоморфна гілка функції  $\text{Ln } f(z)$  в  $\overline{U(0;R)}$  і  $c_0 = \text{Im} \ln f(0)$ .

**Доведення.** Для отримання цих формул досить застосувати формули (1) та (2) попереднього пункту до функції  $\ln f(z)$ . ►

**8. Нулі голоморфних функцій.** Нулем функції  $f$  називається таке число  $a$ , для якого  $f(a) = 0$ , тобто нуль функції – це число, яке є розв'язком рівняння  $f(z) = 0$ . Нехай функція  $f$  є голоморфною в області  $D$ . Нуль  $a \in D$  функції  $f$  називається нулем скінченного порядку  $m \in \mathbb{N}$  або нулем кратності  $m \in \mathbb{N}$ , якщо

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(m-1)}(a) = 0, \quad f^{(m)}(a) \neq 0. \quad (1)$$

Нуль  $a \in D$  називається нулем нескінченного порядку, якщо

$$(\forall n \in \mathbb{Z}_+) : f^{(n)}(a) = 0. \quad (2)$$

Нуль порядку  $m = 1$  називається простим нулем. В курсі комплексного аналізу доводиться, що всі нулі функції  $f \neq 0$ , голоморфної в області  $D$  мають скінченну кратність і обгрутовується справедливість наступного твердження.

**Теорема 1.** Нехай функція  $f$  є голоморфною в області  $D$ . Тоді наступні умови є еквівалентними:

1) в точці  $a \in D \setminus \{\infty\}$  функція  $f$  має нуль порядку  $m \in \mathbb{N}$ ;

2) функція  $f$  подається у вигляді  $f(z) = (z - a)^m g(z)$ , де  $g$  – голоморфна функція в точці  $a$ , причому  $g(a) \neq 0$ ;

3) розвинення функції  $f$  в ряд Тейлора в околі точки  $a$  має

$$\text{вигляд } f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} b_k (z - a)^k.$$

## Розділ 2

Нехай  $Z = \{z_k\}$  – множина нулів функції  $f$ , голоморфної в області  $D$ , а  $m_k$  – порядок (кратність) нуля  $z_k$ . Множина всіх упорядкованих пар  $\{(z_k; m_k)\}$  називається дивізором нулів функції  $f$ , а послідовністю нулів функції  $f$  називається послідовність  $(\lambda_n)$  побудована так:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{m_1} = z_1$ ,  $\lambda_{m_1+1} = \lambda_{m_1+2} = \dots = \lambda_{m_2} = z_2, \dots$ . Кількістю нулів функції  $f$  на множині  $E \subset D$  називається число  $n_{f,E} = \sum_{z_k \in E} m_k$ , тобто  $n_{f,D} = \sum_{\lambda_k \in E} 1$ . Згідно з теоремою єдиності, яка також

доводиться в курсі комплексного аналізу, якщо функція  $f \neq 0$  є голоморфною в області  $D$ , то на кожному компакт з  $D$  вона має скінченну кількість нулів або зовсім їх не має.

**Приклад 1.** Якщо  $f(z) = z^2(z-1)\sin \pi z$ , то множина  $Z = \{0; 1; -1; 2; -2; \dots\}$  є її множиною нулів, а послідовність  $\lambda = (0; 0; 0; 1; 1; -1; 2; -2; 3; -3; \dots)$  є її послідовністю нулів.

### 9. Формула Неванлінни-Ієнсена.

**Теорема 1 (Неванлінни-Ієнсена).** Нехай  $0 < R < +\infty$ , функція  $f \neq 0$  є голоморфною в замкненому крузі  $\overline{U(0;R)}$ , в точці 0 має нуль, кратності  $m$ , і  $(\lambda_n)$  – послідовність її нулів. Тоді для  $z \in U(0;R)$  справедлива формула Неванлінни-Ієнсена

$$\ln|f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln|f(Re^{i\theta})| \operatorname{Re} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \sum_{0 < |\lambda_k| \leq R} \ln \left| \frac{R(z - \lambda_k)}{R^2 - z\lambda_k} \right| + m \ln \frac{|z|}{R}. \quad (1)$$

**Доведення.** Справді, для отримання (1) досить застосувати формулу (7.2) до функції

$$\Psi(z) = \frac{f(z)}{z^m \prod_{0 < |\lambda_k| \leq R} \frac{R(z - \lambda_k)}{R^2 - z\lambda_k}},$$

яка задовольняє всі умови теореми 1 пункту 7, та врахувати, що (знаменник є спряженим до чисельника)

$$\left| \frac{R(Re^{i\theta} - \lambda_k)}{R^2 - Re^{i\theta}\lambda_k} \right| = \left| \frac{Re^{i\theta} - \lambda_k}{Re^{-i\theta} - \lambda_k} \right| = 1,$$

і (дивись (6.4))

## Розділ 2

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} m \ln |z| \operatorname{Re} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta = m \ln |z|. \blacktriangleright$$

**Теорема 2.** Нехай  $0 < R < +\infty$ , функція  $f \neq 0$  є голоморфною в замкненому крузі  $\overline{U(0; R)}$ ,  $f(0) = 1$  і  $(\lambda_n)$  – послідовність її нулів. Тоді справедлива рівність Ієнсена

$$\sum_{0 < |\lambda_k| \leq R} \ln \frac{R}{|\lambda_k|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta. \quad (2)$$

**Доведення.** Для отримання формули (2) досить в формулі Неванлінни-Ієнсена

$$\ln |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| \operatorname{Re} \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + \sum_{0 < |\lambda_k| \leq R} \ln \left| \frac{R(z - \lambda_k)}{R^2 - z\lambda_k} \right|$$

взяти  $z = 0$ .  $\blacktriangleright$

**Теорема 3.** Нехай  $0 < R < +\infty$ , функція  $f \neq 0$  є голоморфною в замкненому крузі  $\overline{U(0; R)}$ , в точці 0 має нуль порядку  $m$  і  $(\lambda_n)$  – послідовність її нулів. Тоді справедлива рівність Ієнсена

$$\sum_{0 < |\lambda_k| \leq R} \ln \frac{R}{|\lambda_k|} + m \ln R = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(Re^{i\theta})| d\theta - \ln \left| \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \right|. \quad (3)$$

**Доведення.** Для отримання формули (3) досить в формулі Неванлінни-Ієнсена  $z$  спрямувати до нуля або застосувати формулу (2) до функції  $F(z) = m! f(z) / f^{(m)}(0)$ .  $\blacktriangleright$

### 10. Оцінки зверху голоморфної функції через модуль її дійсної частини.

**Теорема 1.** Для кожної голоморфної в  $\overline{U(0; R)}$ ,  $0 < R < +\infty$ , функції  $f$  виконується  $M_f(r) \leq |f(0)| + (A_f(R) - \operatorname{Re} f(0)) 2r / (R - r)$ , де  $0 < r < R$  і  $A_f(r) = \max \{ \operatorname{Re} f(z) : |z| = r \}$ .

**Доведення.** З формули Шварца, враховуючи, що

$$u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) d\theta,$$

маємо

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(Re^{i\theta}) \frac{z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + f(0), \quad |z| < R,$$

## Розділ 2

$$0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{z}{Re^{i\theta} - z} d\theta.$$

Тому

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (A_f(R) - u(Re^{i\theta})) \frac{z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + f(0).$$

Оскільки  $A_f(R) - u(Re^{i\theta}) \geq 0$ , то

$$\begin{aligned} |f(z)| &\leq \frac{1}{\pi} \frac{r}{R-r} \int_0^{2\pi} (A_f(R) - u(Re^{i\theta})) d\theta + |f(0)| \\ &= |f(0)| + (A_f(R) - u(0)) 2r / (R-r), \end{aligned}$$

звідки випливає потрібне. ►

**Наслідок 1.** Якщо  $0 < R < +\infty$ , функція  $f$  є голоморфною в  $\overline{U(0;R)}$ ,  $f(0) = 1$  і  $f$  не має нулів в  $\overline{U(0;R)}$ , то

$$\ln |f(z)| \geq -\frac{2r}{R-r} \ln M_f(R), \quad r = |z| < R.$$

**11. Лічильні функції послідовностей.** Нехай  $(\lambda_k)$  – послідовність комплексних чисел, таких, що  $0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ , а  $n(t)$  – кількість членів послідовності  $(\lambda_k)$ , для яких  $|\lambda_k| \leq t$ , тобто  $n(t) = \sum_{|\lambda_k| \leq t} 1 = \max\{k : |\lambda_k| \leq t\}$ . Функція  $n(t)$  зветься лічильною функцією послідовності  $(\lambda_k)$ , а функція

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \ln r$$

зветься Неванліннівською або усередненою лічильною функцією послідовності  $(\lambda_k)$ . Оскільки

$$\sum_{0 < |\lambda_k| \leq r} \ln \frac{r}{|\lambda_k|} = \int_0^r \ln \frac{r}{t} d(n(t) - n(0)) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt,$$

то

$$N(r) = \sum_{0 < |\lambda_k| \leq r} \ln \frac{r}{|\lambda_k|} + n(0) \ln r.$$

Якщо всі  $\lambda_k \neq 0$ , то

## Розділ 2

$$N(r) = \sum_{|\lambda_k| \leq r} \ln \frac{r}{|\lambda_k|} = \ln \frac{r^{n(r)}}{\prod_{|\lambda_k| \leq r} |\lambda_k|} = \max_{k \geq 0} \frac{r^k}{\prod_{n=1}^k |\lambda_n|}.$$

**Приклад 1.** Нехай  $\lambda_k = 2k/3$ . Тоді для заданого  $t \geq \lambda_1$  знайдеться  $m$ , для якого  $\lambda_m \leq t < \lambda_{m+1}$ ,  $n(t) = m = 3\lambda_m/2 \leq 3t/2$  і  $n(t) = m+1-1 = 3\lambda_{m+1}/2 - 1 > 3t/2 - 1$ . Тому  $n(t) = 3t/2 + O(1)$ , якщо  $t \rightarrow +\infty$  і  $N(r) = 3r/2 + O(\ln r)$ , якщо  $r \rightarrow +\infty$ .

**Приклад 2.** Нехай  $\lambda_k = q^{k-1}$ ,  $|q| > 1$ . Тоді  $n(t) = \frac{\log t}{\log |q|} + O(1)$ ,

якщо  $t \rightarrow +\infty$  і  $N(r) = \frac{\ln^2 r}{2 \ln |q|} + \frac{\ln r}{2} + O(1)$ , якщо  $r \rightarrow +\infty$ . Справді,

нехай  $t > 1$ . Тоді знайдеться таке  $m$ , що  $|q|^{m-1} \leq t < |q|^m$ . Тому  $n(t) = m$ ,

$m > \frac{\log t}{\log |q|}$ ,  $m < \frac{\log t}{\log |q|} + 1$  і  $n(t) = \frac{\log t}{\log |q|} + O(1)$ ,  $t \rightarrow +\infty$ . Далі, якщо

$r > 1$ , то знайдеться таке  $m$ , що  $|q|^{m-1} \leq r < |q|^m$ . Отже,  $r = \alpha |q|^{m-1}$ ,  $1 \leq \alpha < |q|$ . Тоді

$$\begin{aligned} N(r) &= \sum_{k=1}^m \ln \frac{r}{|q|^{k-1}} = m \ln r - \ln |q| \sum_{k=0}^{m-1} k = \\ &= m \left( \ln r - \frac{m-1}{2} \ln |q| \right) = \frac{\ln r - \ln \alpha + \ln |q|}{2 \ln |q|} (\ln r + \ln \alpha) = \\ &= \frac{\ln^2 r}{2 \ln |q|} - \frac{\ln^2 \alpha}{2 \ln |q|} + \frac{\ln r}{2} + \frac{\ln |q| \ln \alpha}{2 \ln |q|} = \frac{\ln^2 r}{2 \ln |q|} + \frac{\ln r}{2} + O(1), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

**12. Нулі цілих функцій.** Відомо, що кожний поліном

$f(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$  степеня  $n$  має в  $\mathbb{C}$   $n$  нулів  $\lambda_k$  і подається у вигляді

$$f(z) = f_n \prod_{k=1}^n (z - \lambda_k) = cz^m \prod_{\lambda_k \neq 0} (1 - z/\lambda_k), \quad \text{де } m - \text{кратність нуля } z = 0 \text{ і}$$

$c$  – деяке число. Далі розглянемо аналогічні розвинення для цілих трансцендентних функцій, які можна розглядати як поліноми нескінченного степеня. Ціла трансцендентна функція або зовсім не має

## Розділ 2

нулів, або має скінченну кількість нулів, або має нескінченну кількість нулів. Якщо кількість нулів цілої функції  $f \in \mathcal{H}$  є нескінченною і  $(\lambda_k)$  – послідовність її нулів, то  $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_k = \infty$ . Більше того, справедливе наступне твердження.

**Теорема 1.** *Якщо послідовність  $(\lambda_k)$  є підпослідовністю нулів цілої функції  $f \neq 0$ , то справедлива нерівність Ієнсена*

$$N(r) \leq \ln M_f(r) + c_1, \quad r \in [0; +\infty), \quad (1)$$

де  $c_1$  – стала,  $n(t) = \sum_{|\lambda_k| \leq t} 1$ ,  $N(r) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \ln r$  і

$$M_f(r) = \max \left\{ |f(re^{i\theta})| : \theta \in [0; 2\pi] \right\}.$$

**Доведення.** Справді, згідно з рівністю Ієнсена

$$\sum_{0 < |z_k| \leq r} \ln \frac{r}{|z_k|} + m \ln r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln \left| \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \right|,$$

де  $(z_k)$  – нулі функції і  $m$  – кратність нуля 0. Окрім цього,  $n(0) \leq m$ ,

$$\sum_{0 < |\lambda_k| \leq r} \ln \frac{r}{|\lambda_k|} \leq \sum_{0 < |z_k| \leq r} \ln \frac{r}{|z_k|}.$$

Тому

$$\sum_{0 < |\lambda_k| \leq r} \ln \frac{r}{|\lambda_k|} + n(0) \ln r \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta - \ln \left| \frac{f^{(m)}(0)}{m!} \right|.$$

До того ж,  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \ln M_f(r)$  і

$$\begin{aligned} \sum_{0 < |\lambda_k| \leq r} \ln \frac{r}{|\lambda_k|} + n(0) \ln r &= \int_0^r \ln \frac{r}{t} d(n(t) - n(0)) + n(0) \ln r \\ &= \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \ln r = N(r). \end{aligned}$$

Тому отримуємо потрібний висновок. ►

**Зауваження 1.** *Нерівність (1) вказує на те, що ціла функція не може мати дуже багато нулів. Цілі трансцендентні функції – це, образно кажучи, многочлени нескінченного степеня. Тому слід очікувати, що вони мають нескінченну кількість нулів і розкладаються на множники. До певної міри це так. Згідно з теоремою Пікара для кожної*

## Розділ 2

цілої трансцендентної  $f$  і кожного  $a \in \mathbb{C}$ , за винятком, можливо, одного  $a$  рівняння  $f(z) = a$  має нескінченну кількість нулів. Таке виняткове  $a \in \mathbb{C}$  для деяких цілих функцій і справді існує. Наприклад, для функції  $f(z) = e^z$  таким є  $a = 0$ , оскільки рівняння  $e^z = 0$  не має коренів.

**13. Числові нескінченні добутки з дійсними членами.** Нехай  $(u_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  – деяка послідовність комплексних чисел. Символ

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k \cdot \dots \quad (1)$$

називається добутком членів послідовності  $(u_k)$  або нескінченним числовим добутком зі загальним членом  $u_k$  і позначається

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (2)$$

Цей символ також називається нескінченним добутком. При цьому,

$$p_n = \prod_{k=1}^n u_k = u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_n$$

називається  $n$ -им частинним добутком добутку (1). Якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p \neq 0, \infty, \quad (3)$$

то добуток (1) називається збіжним, а число  $p$  – його значенням і цей факт записують так:

$$p = \prod_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (4)$$

Називають, інколи, нескінченним добутком і послідовність  $(p_n)$  частинних добутків, а також оператор, який ставить у відповідність послідовності  $(u_k)$  границю (3).

**Приклад 1.** Добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} 1 = 1 \cdot 1 \cdot \dots$  є збіжним і  $\prod_{k=1}^{\infty} 1 = 1$ , бо

$$p_n = \prod_{k=1}^n 1 = 1 \cdot 1 \cdot \dots \cdot 1 = 1.$$

**Приклад 2.** Добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} (-1)^k$  є розбіжним, бо

$p_n = \prod_{k=1}^n (-1)^k = (-1)^n$  і границя (3) не існує. Водночас, добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} |(-1)^k|$  є збіжним.

## Розділ 2

**Приклад 3.** Добуток  $\prod_{k=2}^{\infty} (1 - 1/k^2) = \prod_{m=1}^{\infty} (1 - 1/(m+1)^2)$  є збіжним і

$$\prod_{k=2}^{\infty} (1 - 1/k^2) = 1/2, \text{ бо}$$

$$\begin{aligned} \prod_{k=2}^n (1 - 1/k^2) &= \prod_{k=2}^n \frac{k^2 - 1}{k^2} = \prod_{k=2}^n \frac{(k+1)(k-1)}{kk} \\ &= \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdot \frac{5 \cdot 7}{6 \cdot 6} \cdot \frac{6 \cdot 8}{7 \cdot 7} \cdot \dots \cdot \frac{(n-3)(n-1)}{(n-2)(n-2)} \cdot \frac{(n-2)n}{(n-1)(n-1)} \cdot \frac{(n-1)(n+1)}{nn} \\ &= \frac{(n+1)}{2n} \rightarrow \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

**Теорема 1.** Якщо добуток (2) є збіжним, то  $u_n \rightarrow 1$ , якщо  $n \rightarrow \infty$ .

**Доведення.** Це так, бо  $u_n = p_n / p_{n-1}$ . ►

**Приклад 4.** Добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{2k+10}{k^2}$  є розбіжним, бо  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2k+10}{k^2} = 0$ .

**Теорема 2.** Добуток (2), в якому всі  $u_k > 0$ , є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \ln u_k$ .

**Доведення.** Справді, це випливає з рівності  $p_n = \exp\left(\sum_{k=1}^n \ln u_k\right)$ ,

$$\sum_{k=1}^n \ln u_k = \ln p_n. \text{ ►}$$

**Приклад 5.** Добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - 1/k) e^{1/k}$  є збіжним, бо

$$\ln\left((1 - 1/k) e^{1/k}\right) = \frac{1}{k} + \ln(1 - 1/k) = \frac{1}{2k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right), \quad k \rightarrow \infty, \text{ і тому ряд}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left((1 - 1/k) e^{1/k}\right) \text{ є збіжним.}$$

**Зауваження 1.** Якщо один з членів послідовності  $(u_k)$  дорівнює нулеві, то згідно з означенням добуток (1) є розбіжним. В наступному пункті дамо трохи загальніше означення збіжності нескінченного

## Розділ 2

добутку так, що добуток може бути збіжним і якщо скінченна кількість його співмножників дорівнюють нулеві.

### 14. Числові нескінченні добутки з комплексними членами.

Добутком членів послідовності  $(u_k) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  або нескінченним числовим добутком з загальним членом  $u_k$  називають символ

$$u_1 \cdot u_2 \cdot \dots \cdot u_k \cdot \dots, \quad (1)$$

який позначають також так:

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (2)$$

Добуток (1) називають збіжним, якщо для деякого  $n_0$  існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n_0+1}^n u_k = q \neq 0, \infty. \quad (3)$$

При цьому, число  $p = q \prod_{k=n_0}^{n_0} u_k$  називають значенням нескінченного

добутку (2) і цей факт записують у вигляді  $p = \prod_{k=1}^{\infty} u_k$ .

**Теорема 1.** Якщо добуток (2) є збіжним, то  $u_n \rightarrow 1$  при  $n \rightarrow \infty$ .

**Теорема 2.** Добуток (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли є збіжним ряд

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \ln u_k, \quad (3)$$

за деякого  $n_0 \in \mathbb{N}$  та значення  $\ln u_k := \ln |u_k| + i \arg u_k \in \mathbb{C}$ .

Теорему 2 можна сформулювати так: добуток (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд (3), в якому  $\ln u_k := \ln |u_k| + i \arg u_k$  і  $\arg u_k \in [-\pi; \pi)$  для всіх достатньо великих  $k$ .

Добуток (2) називається абсолютно збіжним, якщо збіжним абсолютно є ряд (3). Абсолютно збіжний добуток є збіжним. Водночас, абсолютна збіжність добутку (2) не є рівносильною збіжності добутку

$$\prod_{k=1}^{\infty} |u_k|.$$

**Теорема 3.** Для того щоб добуток (2), в якому  $u_k = 1 + a_k$ , був абсолютно збіжним, необхідно і достатньо, щоб був збіжним ряд

## Розділ 2

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| . \quad (4)$$

Добуток  $r_p = \prod_{k=p+1}^{\infty} u_k$  називається залишком добутку (2). Якщо всі

$u_k \neq 0$ , то добуток (2) є збіжним тоді і тільки тоді, коли збіжним є кожний його залишок і при цьому  $r_p \rightarrow 1, p \rightarrow \infty$ .

**Приклад 1.** Оскільки  $\frac{k^2}{k^2+1} = 1 - \frac{1}{k^2+1}$  і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$  є збіжним,

то добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^2+1}$  є збіжним абсолютно.

**Приклад 2.** Оскільки  $\frac{k^2}{k^2+1} = 1 - \frac{1}{k^2+1}$  і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1}$  є збіжним,

то добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} \left| (-1)^k \frac{k^2}{k^2+1} \right|$  є збіжним, а добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k^2}{k^2+1}$  є

розбіжним, оскільки  $\lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^k \frac{k^2}{k^2+1}$  не існує.

**Приклад 3.** Якщо  $u_1 = 2, u_2 = u_3 = 0$  і  $u_k = \frac{k^2}{k^2+1}$ , якщо  $k \geq 3$ , то

добуток (2) є збіжним і  $\prod_{k=1}^{\infty} u_k = 0$ .

**Приклад 4.** Добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 + \frac{1}{k^2+i} \right)$  є збіжним, бо

$\left| \frac{1}{k^2+i} \right| = \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$  і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k^4+1}}$  є збіжним.

**Приклад 5.** Оскільки  $k^2(e^{1/k} - 1) \rightarrow \infty$ , то добуток

$\prod_{k=1}^{\infty} k^2(e^{1/k} - 1)$  є розбіжним.

**15. Функціональні нескінченні добутки.** Нехай  $(u_k)$  – послідовність функцій, голоморфних в області  $D$ . Тоді добуток

## Розділ 2

$$\prod_{k=1}^{\infty} u_k(z) \quad (1)$$

називається функціональним добутком. Для кожного  $z \in D$  функціональний добуток (1) є числовим. Функціональний добуток (1) називається збіжним (абсолютно збіжним) на множині  $E \subset D$ , якщо для кожного  $z \in E$  є збіжним (абсолютно збіжним) відповідний числовий добуток. Добуток (1) називається рівномірно збіжним на множині  $E \subset D$ , якщо за деякого  $n_0 \in \mathbb{N}$  послідовність

$$\pi_n(z) = \prod_{k=n_0+1}^n u_k(z)$$

рівномірно збігається на  $E$  до функції  $r_{n_0}(z)$ . При цьому

$p(z) = r_{n_0}(z) \prod_{k=1}^{n_0} u_k(z)$  називається значенням добутку (1) і цей факт

записують так:  $p(z) = \prod_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ . Таким чином, поведінка скінченного

числа співмножників  $u_k$  не впливає на характер збіжності добутку.

**Теорема 1.** *Якщо функції  $u_k(z)$  є голоморфними в області  $D \subset \mathbb{C}$ , і за деякого  $n_0 \in \mathbb{N}$  та деякому виборі значень  $\ln u_k(z)$  ряд*

$$\sum_{k=n_0+1}^{\infty} \ln u_k(z) \quad (2)$$

рівномірно збігається на компактній  $E \subset D$ , то добуток (1) на  $E$  збігається рівномірно.

**Наслідок 1.** *Якщо існує такий збіжний додатний числовий ряд*

$\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ , що істинним є хоч би одне з висловлень

$$(\forall z \in E)(\forall k): |\ln u_k(z)| \leq b_k,$$

$$(\forall z \in E)(\forall k): |a_k(z)| \leq b_k,$$

то добуток (1), в якому  $u_k(z) = 1 + a_k(z)$ , на компактній  $E \subset D$  збігається абсолютно і рівномірно.

## Розділ 2

**Приклад 1.** Оскільки ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-\sqrt{k}}$  є збіжним, то добуток

$\prod_{k=1}^{\infty} (1 - ze^{-\sqrt{k}})$  є абсолютно і рівномірно збіжним в кожному крузі  $\overline{U(0; R)}$ ,  $0 < R < +\infty$ .

**Приклад 2.** Оскільки рівномірно за  $z$  в кожному крузі  $\overline{U(0; R)}$ ,

$0 < R < +\infty$ , виконується  $\cos \frac{z}{k} - 1 = (1 + o(1)) \frac{|z|^2}{2k^2}$ ,  $k \rightarrow \infty$ , і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$

є збіжним, то в кожному такому крузі добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} \cos z/k$  є збіжним абсолютно і рівномірно.

**16. Побудова цілої функції з заданими нулями.** Цілу функцію  $f$  з послідовністю нулів  $(\lambda_k)$  природно будувати у вигляді

$f(z) = \prod_k (1 - z/\lambda_k)$ . Однак, останній добуток може бути розбіжним.

Тому слід трохи модифікувати побудову. Функція

$$E(w; p) = \begin{cases} 1 - w, & p = 0, \\ (1 - w) \exp\left(\sum_{k=1}^p w^k / k\right), & p \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

зветься первинним множником Вейерштрасса.

**Теорема 1.** *Справедливі нерівності:*

$$|\ln E(w; p)| \leq 2|w|^{p+1}, \quad |w| \leq 1/2, \quad (1)$$

$$\left| \ln \left| \sum_{k=1}^p w^k / k \right| \right| \leq (2|w|)^p, \quad |w| \geq 1/2, \quad (2)$$

де  $\ln z$  – гілка логарифма в правій півплощині, яка приймає значення 0 в точці  $z=1$ .

**Доведення.** Справді, (1) випливає із нерівностей

$$|\ln E(w; p)| = \left| -\sum_{k=p+1}^{\infty} \frac{w^k}{k} \right| \leq \sum_{k=p+1}^{\infty} |w|^k \leq |w|^{p+1} \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 2|w|^{p+1}, \quad |w| \leq 1/2.$$

Крім цього, враховуючи, що  $\exp(-|z|) \leq |\exp(z)| \leq \exp(|z|)$ , отримуємо

## Розділ 2

$$\left| \ln \left| \exp \left( \sum_{k=1}^p \frac{w^k}{k} \right) \right| \right| \leq \sum_{k=1}^p |w|^k / k \leq |w|^p \sum_{k=1}^p \frac{1}{2^{p-k}} \leq (2|w|)^p, \quad |w| \geq 1/2. \blacktriangleright$$

**Теорема 2.** Нехай  $(\lambda_k)$  – послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що  $0 \leq |\lambda_k| \nearrow +\infty$ , а  $(p_k)$  – послідовність цілих невід’ємних чисел таких, що ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (r/|\lambda_k|)^{p_k+1} \tag{3}$$

збігається для кожного  $r > 0$ . Тоді добуток

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/\lambda_k; p_k) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) e^{\sum_{j=1}^{p_k} \frac{1}{j} \left( \frac{z}{\lambda_k} \right)^j} \tag{4}$$

рівномірно збігається на кожному компактi з  $\mathbb{C}$ , функція  $L$  є цілою і послідовність  $(\lambda_k)$  є її послідовністю нулів.

**Доведення.** Справді, згідно з теоремою 1

$$|\ln E(z/\lambda_k; p_k)| \leq 2(r/|\lambda_k|)^{p_k+1}, \quad |z| \leq r, \quad |\lambda_k| \geq 2r.$$

Тому добуток (4) є рівномірно збіжним в кожному крузі  $\overline{U(0; r)}$ ,  $0 < r < +\infty$ , і, отже, функція  $L$  є цілою.  $\blacktriangleright$

**Наслідок 1.** Для кожної послідовності  $(\lambda_k)$ , яка має єдину граничну точку на нескінченості, існує ціла функція, для якої  $(\lambda_k)$  є послідовністю нулів і, зокрема, такою є функція

$$f(z) = z^m \prod_{\lambda_k \neq 0} \left( 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) e^{\sum_{j=1}^{p_k} \frac{1}{j} \left( \frac{z}{\lambda_k} \right)^j},$$

де  $m$  – кількість членів послідовності  $(\lambda_k)$ , які дорівнюють нулеві і  $(p_k)$  – послідовність цілих невід’ємних чисел таких, що ряд (3) збігається для всіх  $r > 0$ .

**Зауваження 1.** Якщо існує ціла функція  $f$ , для якої  $(\lambda_k)$  є послідовністю нулів, то таких функцій є нескінченно багато. Наприклад, такими є функції  $f_1(z) = e^z f(z)$ ,  $f_2(z) = e^{\sin z} f(z)$  та інші.

## Розділ 2

**Приклад 1.** Нехай  $\lambda_k = k^2$ . Тоді ряд (3) є збіжним, якщо всі

$p_k = 0$  і  $L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/k^2)$  – ціла функція, для якої послідовність

$\lambda_k = k^2$  є послідовністю нулів.

**Приклад 2.** Нехай  $\lambda_k = k$ . Тоді ряд (3) є збіжним, якщо всі

$p_k = 1$  і  $L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/k) e^{z/k}$  – ціла функція, для якої послідовність

$\lambda_k = k$  є послідовністю нулів.

**Приклад 3.** Нехай  $\lambda_k = \sqrt[3]{k}$ . Тоді ряд (3) є збіжним, якщо всі

$p_k = 3$  і  $L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\sqrt[3]{k}) \exp\left(\frac{z}{\sqrt[3]{k}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt[3]{k}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{\sqrt[3]{k}}\right)^3\right)$  – ціла

функція, для якої послідовність  $\lambda_k = \sqrt[3]{k}$  є послідовністю нулів.

**Приклад 4.** Нехай  $(\lambda_k)$  – довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел таких, що  $|\lambda_k| \nearrow +\infty$ . Тоді ряд (3) є збіжним для

кожного  $r > 0$ , якщо  $p_k = k - 1$  і  $L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} E(z/\lambda_k; k - 1)$  – ціла

функція, для якої ця послідовність  $(\lambda_k)$  є послідовністю нулів.

### 17. Подання цілої функції у вигляді нескінченного добутку.

**Теорема 1 (Вейсштрасса).** Кожна ціла функція  $f \neq 0$  подається у вигляді

$$f(z) = z^m e^{g(z)} \prod_{\lambda_k \neq 0} E(z/\lambda_k; p_k) = z^m e^{g(z)} \prod_{\lambda_k \neq 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{p_k} \frac{z^j}{j\lambda_k^j}\right), \quad (1)$$

де  $g$  – ціла функція,  $\lambda_k$  – нулі  $f$ ,  $m$  – кратність нуля  $f$  в точці  $0$ ,  $p_k$  –

цілі невід'ємні числа такі, що ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} (r/|\lambda_k|)^{p_k+1}$  збігається для всіх

$r \geq 0$  (якщо  $f$  має скінченну кількість нулів, то всі  $p_k = 0$ ).

**Доведення.** Справді, згідно з теоремою єдиності, якщо функція  $f \neq 0$  має нескінченну кількість нулів, то множина нулів функції  $f$  має єдину граничну точку на нескінченності. Позначимо добуток, який стоїть в

## Розділ 2

правій частині (1), через  $L(z)$ . Тоді функція  $h(z) = f(z)/z^m L(z)$  є цілою і не має нулів в  $\mathbb{C}$ . Нехай

$$g(z) = \int_0^z \frac{h'(t)}{h(t)} dt$$

Тоді  $h(z) = \exp(g(z))$  і ми приходимо до потрібного висновку. ►

### 18. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення цілої функції.
2. Запишіть означення максимуму модуля цілої функції.
3. Сформулюйте і доведіть теорему Ліувілля.
4. Сформулюйте означення цілої трансцендентної функції.
5. Сформулюйте і доведіть теорему Адамара про три круги.
6. Сформулюйте означення максимального члена цілої функції.
7. Сформулюйте означення  $\Phi$ -типу цілої функції.
8. Запишіть формули Пуассона і Шварца.
9. Запишіть рівність Іенсена.
10. Сформулюйте означення нескінченного добутку, його збіжності і абсолютної збіжності.
11. Сформулюйте теорему про необхідну умову збіжності добутку.
12. Сформулюйте теорему Вейерштрасса про розвинення цілих функцій у нескінченні добутки.

### 19. Вправи і задачі.

1. З'ясуйте, чи функція  $f$  є цілою

- |   |  |
|---|--|
| 1. $f(z) = 2z + 1$ .  | 2. $f(z) = \cos z$ .   |
| 3. $f(z) = z + 1/z$ .   | 4. $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ .                                  |
| 5. $f(z) = z^n, n \in \mathbb{N}$ .                                 | 6. $f(z) = 1/z$ .  |
| 7. $f(z) = \sin z$ .  | 8. $f(z) = e^z$ .  |
| 9. $f(z) = \bar{z}$ .   | 10. $f(z) = \operatorname{tg} z$ .                             |
| 11. $f(z) = \operatorname{Re} z^2$ .                                | 12. $f(z) = (\operatorname{Re} z)^2$ .                         |
| 13. $f(z) = \overline{z^2}$ .                                       | 14. $f(z) =  z $ .   |
| 15. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(1+1/k)^{k^2}} z^{2k}$ . | 16. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(1+k)^k} z^{k-1}$ . |
| 17. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(1+k)!} (z-1)^k$ .       | 18. $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!} z^k$ .          |

## Розділ 2

$$19. \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{i+k}{2i+k} z^k.$$

$$20. \sum_{n=1}^{\infty} 2^k \frac{i+k}{1+k} z^{2k}.$$

$$21. \sum_{k=1}^{\infty} 3^k i^k (z+i)^{3k}.$$

$$22. \sum_{k=0}^{\infty} \ln(1+e^{-k^2})(z+i)^{3k}.$$

$$23. \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{2ik}}{k^3} z^k.$$

$$24. \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{2k-2}}{(2k-1)!} z^{2k-1}.$$

2. Знайдіть максимум модуля функції

$$1. f(z) = 1 + z^2. \quad 2. f(z) = e^{-z^2}. \quad 3. f(z) = e^{-2z^3}. \quad 4. f(z) = 1 - 3z^3.$$

$$5. f(z) = e^{-3z^2} + z^2. \quad 6. f(z) = e^{z^2} + 1 + z. \quad 7. f(z) = e^{-2z^3} - z.$$

$$8. f(z) = e^{2z^4} - 3z^3. \quad 9. f(z) = e^{-z^3} - 2z.$$

3. Доведіть, що (тут  $z = x + iy$ )

$$1. \operatorname{Re} \sin z = \sin x \operatorname{ch} y. \quad 2. \operatorname{Im} \sin z = \cos x \sin y.$$

$$3. \operatorname{Re} \cos z = \cos x \operatorname{ch} y. \quad 4. \operatorname{Im} \cos z = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

$$5. |\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x}. \quad 6. |\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \sin^2 y}.$$

$$7. |\cos z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x}. \quad 8. |\sin z| = \sqrt{\operatorname{ch}^2 x - \cos^2 y}.$$

$$9. \operatorname{sh}(|\operatorname{Im} z|) \leq |\sin z| \leq \operatorname{ch}(|\operatorname{Im} z|).$$

$$10. \operatorname{sh}(|\operatorname{Im} z|) \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch}(|\operatorname{Im} z|).$$

$$11. |\sin r| \leq |\sin z| \leq \operatorname{sh} r, \text{ якщо } |z| = r.$$

$$12. |\cos r| \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch} r, \text{ якщо } |z| = r.$$

$$13. \exp(-|z|) \leq |\exp(z)| \leq \exp(|z|), \quad z \in \mathbb{C}.$$

4. Знайдіть  $\Phi$ -тип цілої функції  $f$

$$1. f(z) = 1 + z, \quad \Phi(z) = 1 + z. \quad 2. f(z) = e^z, \quad \Phi(z) = e^{2z}.$$

$$3. f(z) = e^z, \quad \Phi(z) = 1 + 2z. \quad 4. f(z) = e^z, \quad \Phi(z) = e^{z^2}.$$

$$5. f(z) = e^z, \quad \Phi(z) = \exp(e^z). \quad 6. f(z) = z, \quad \Phi(z) = e^z.$$

$$7. f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / (2k+1)^k, \quad \Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / (k+1)^k.$$

$$8. f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k / (2k+1)^k, \quad \Phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^k z^k / k!.$$

## Розділ 2

9.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^k}{k!} z^k$ ,  $\Phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!}$ .

5. Дослідіть на збіжність нескінченні добутки

1.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n) e^{1/n}$ .

2.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n) e^{-1/n}$ .

3.  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + 1/\sqrt{k}) e^{-1/\sqrt{k}}$ .

4.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/\sqrt{n}) e^{-1/\sqrt{n}}$ .

5.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/\sqrt{n}) e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n}}$ .

6.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/\sqrt{k}) e^{\frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2k}}$ .

7.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/\sqrt{n}) e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2n} - \frac{1}{3n\sqrt{n}}}$ .

8.  $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{1 + 1/n}$ .

9.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - 1/n^2) e^{1/n}$ .

10.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + 1/n) e^{-1/n^2}$ .

11.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i}{n^2 + 2i}$ .

12.  $\prod_{n=2}^{\infty} \frac{e^{-1/n}}{1 - 1/n^2}$ .

13.  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}$ .

14.  $\prod_{k=2}^{\infty} \frac{e^{1/k}}{1 - 1/k^2}$ .

15.  $\prod_{k=1}^{\infty} \cos^2 \frac{1}{k}$ .

16.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{in^3 + 3i}{in^3 + 2}$ .

17.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{k^4 + 2}{k^4 + 1}$ .

18.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{2^k + 2}{2^k + 1}$ .

19.  $\prod_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}$ .

20.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + 2}{n + \sin \frac{1}{n}}$ .

21.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{i + 2^n}{2i + 3^n}$ . 22.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + i/(1 + n^2))$ . 23.  $\prod_{n=1}^{\infty} e^{1/n}$ . 24.  $\prod_{n=1}^{\infty} e^{1/n^2}$ .

25.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + i}{n^2 + 2i}$ . 26.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1 + 1/n}$ . 27.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{1 + 1/n^2}$ . 28.  $\prod_{n=1}^{\infty} \frac{in^3 + 3i}{in^3 + 2}$ .

29.  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)$ . 30.  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{\frac{1}{n}}$ . 31.  $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) e^{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}}$ .

## Розділ 2

6. Дослідіть на абсолютну та рівномірну збіжність функціональні добутки

1.  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z/k \ln^2(k+1))$ .
2.  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{(k+1) \ln(k+1)}\right) e^{-\frac{z}{(k+1) \ln(k+1)}}$ .
3.  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 + z/k \ln^2(k+1)) e^{-\frac{z}{(k+1) \ln^2(k+1)}}$ .
4.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z(\sin 1/n - 1/n))$ .
5.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z(1 - \cos 1/n))$ .
6.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z/2^n)$ .
7.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z(\sin 1/n - 1/n))$ .
8.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - z(1 - \cos 1/n))$ .
9.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z \ln(1 + 1/n^{3/2}))$ .
10.  $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + z e^{-\sqrt{n}})$ .
11.  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{k}}\right) e^{\frac{z}{\sqrt{k}} + \frac{z^2}{2k}}$ .
12.  $\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{(k+1) \ln(k+1)}\right) e^{-\frac{z}{(k+1) \ln(k+1)}}$ .

7. Знайдіть нулі функції  $f$  та їхні порядки

1.  $f(z) = (z^2 - \pi^2) \sin z$ .
2.  $f(z) = z^2 \sin z$ .
3.  $f(z) = (z - \pi)^2 \sin z$ .
4.  $f(z) = \sin z + \sin^2 z$ .
5.  $f(z) = z(e^z - 1)$ .
6.  $f(z) = e^{z^2} - 1$ .
7.  $f(z) = \frac{\sin^3 z}{z^2}$ .
8.  $f(z) = \sin 3z - 3 \sin z$ .
9.  $f(z) = z \operatorname{sh} z$ .
10.  $f(z) = e^{2z} - 3e^z + 2$ .
11.  $f(z) = e^{z-1} - 1$ .
12.  $f(z) = z^3 - z^2 - 8z + 12$ .

8. Побудуйте цілу функцію, для якої послідовність  $(\lambda_k)$  є послідовністю нулів

1.  $\lambda_k = k\sqrt{2}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
2.  $\lambda_k = k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
3.  $\lambda_k = \sqrt{k}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .
4.  $\lambda_k = \sqrt[4]{k}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
5.  $\lambda_k = \ln k$ ,  $k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ .
6.  $\lambda_k = e^{\sqrt{k}}$ .
7.  $\lambda_k = 1 + i\sqrt{k}$ .
8.  $\lambda_k = k^2 + ik^4$ .
9.  $\lambda_k = k^{2/3} + ik^{1/2}$ .
10.  $\lambda_k = k^{1/3} + ik^{1/4}$ .
11.  $(1; 1; 2^2; 2^2; 2^2; 3^2; 3^2; 3^2; \dots; n^2; n^2; n^2; \dots)$ .

9. Нехай  $(\lambda_k)$  – така послідовність точок круга  $U(0;1)$ , що

$\sum_k (1 - |\lambda_k|) < +\infty$ . Довести, що добуток Бляшке

$$B(z) = \prod_k \frac{\lambda_k - z}{1 - \bar{\lambda}_k z} \frac{\bar{\lambda}_k}{\lambda_k}$$

рівномірно і абсолютно збігається на кожному компактi з  $U(0;1)$  і  $|B(z)| \leq 1$ .

### Розділ 3. Характеристики зростання цілих функцій

#### 1. Порядок і тип. Порядком цілої функції

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \quad (1)$$

називається число  $\rho = \rho_f = \rho[f]$ , яке визначається так:

$$\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ \ln^+ M_f(r)}{\ln r}, \quad \ln^+ a := \begin{cases} \ln a, & a \geq 1, \\ 0, & 0 \leq a < 1. \end{cases}$$

Іншими словами, порядком цілої функції  $f$  називається точна нижня межа тих чисел  $\rho_1 \in [0; +\infty]$ , для яких  $(\exists c_1)(\forall z \in \mathbb{C}): |f(z)| \leq c_1 \exp(|z|^{\rho_1})$  тобто для яких  $(\exists r_0 \in [0; +\infty])(\forall z, |z| \geq r_0): |f(z)| \leq \exp(|z|^{\rho_1})$ . Порядок функції  $f$  дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли  $(\forall \rho_1 \in (0; +\infty)(\exists r_0 \in [0; +\infty])(\forall z, |z| \geq r_0): |f(z)| \leq \exp(|z|^{\rho_1})$ . Порядок функції  $f$  дорівнює  $+\infty$  тоді і тільки тоді, коли  $(\forall \rho_1 \in (0; +\infty)(\exists z \in \mathbb{C}): |f(z)| \geq \exp(|z|^{\rho_1})$ . Порядок функції  $f$  дорівнює числу  $\rho \in (0; +\infty)$  тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови: 1)  $(\forall \rho_1 > \rho)(\exists r_0 \in [0; +\infty])(\forall z, |z| \geq r_0): |f(z)| \leq \exp(|z|^{\rho_1})$ ; 2) існує така послідовність  $(z_k)$ ,  $z_k \rightarrow \infty$ , що

$$(\forall \rho_2 < \rho)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): |f(z_k)| \geq \exp(|z_k|^{\rho_2}).$$

Якщо  $\rho \in (0; +\infty)$  – порядок цілої функції  $f$ , то число  $\sigma = \sigma[f] = \sigma[f; \rho]$ , визначене формулою

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln^+ M_f(r)}{r^\rho}, \quad (2)$$

називається типом функції  $f$ .

### Розділ 3

Тип функції  $f$  порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли

$$(\forall \sigma_1 \in (0; +\infty))(\exists r_0 \in [0; +\infty))(\forall z, |z| \geq r_0): |f(z)| \leq \sigma_1 \exp(|z|^\rho).$$

Тип функції  $f$  порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  дорівнює  $+\infty$  тоді і тільки тоді, коли існує така послідовність  $(z_k)$ ,  $z_k \rightarrow \infty$ , що  $(\forall \sigma_2 \in (0; +\infty))(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): |f(z_k)| \geq \sigma_2 \exp(|z_k|^\rho)$ . Тип функції  $f$  дорівнює числу  $\sigma \in (0; +\infty)$  тоді і тільки тоді, коли виконуються дві умови:

$$1) (\forall \sigma_1 > \sigma)(\exists r_0 \in [0; +\infty))(\forall z, |z| \geq r_0): |f(z)| \leq \sigma_1 \exp(|z|^\rho);$$

$$2) \text{ існує така послідовність } (z_k), z_k \rightarrow \infty, \text{ що } (\forall \sigma_2 < \sigma)(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k \geq k_0): |f(z_k)| \geq \sigma_2 \exp(|z_k|^\rho).$$

Якщо  $\sigma = 0$ ,  $0 < \sigma < +\infty$ ,  $\sigma = +\infty$ , то  $f$  називається відповідно цілою функцією мінімального, нормального і максимального типу.

**Зауваження 1.** Інколи доцільно розглядати тип

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln^+ M_f(r)}{r^{\rho_1}}$$

функції  $f$  відносно довільного числа  $\rho_1 \in (0; +\infty)$ , яке не обов'язково дорівнює її порядку. Тоді кажуть, що тип функції  $f$  дорівнює  $\sigma$  відносно формального порядку  $\rho_1$ . Як правило розглядають формальний порядок, який не є меншим за порядок.

**Зауваження 2.** Якщо функція  $f$  не є сталою, то

$$\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} \quad \text{і} \quad \sigma = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho}.$$

**Приклад 1.** Якщо  $f(z) = e^z$ , то

$$|f(re^{i\theta})| = |e^{re^{i\theta}}| = |e^{r \cos \theta + ir \sin \theta}| = e^{r \cos \theta} |\cos(r \sin \theta) + i \sin(r \sin \theta)| = e^{r \cos \theta},$$

$$M_f(r) = e^r \quad \text{і} \quad \rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} = 1.$$

**Приклад 2.** Якщо  $f(z) = e^{\tau z^n}$ , де  $\tau = se^{i\psi} \in \mathbb{C}$  і  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$|f(re^{i\theta})| = |e^{se^{i\psi} r^n e^{in\theta}}| = |e^{sr^n e^{i(n\theta + \psi)}}| = |e^{sr^n (\cos(n\theta + \psi) + i \sin(n\theta + \psi))}|$$

### Розділ 3

$$= \left| e^{sr^n \cos(n\theta + \psi)} \left( \cos(sr^n \sin(n\theta + \psi)) + i \sin(sr^n \sin(n\theta + \psi)) \right) \right|$$

$$= e^{sr^n \cos(n\theta + \psi)} \left| \left( \cos(sr^n \sin(n\theta + \psi)) + i \sin(sr^n \sin(n\theta + \psi)) \right) \right| = e^{sr^n \cos(n\theta + \psi)},$$

$$M_f(r) = e^{sr^n} \quad i \quad \rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln e^{sr^n}}{\ln r} = n.$$

**Приклад 3.** Якщо

$$f(z) = \sum_{k=0}^n f_k z^k$$

– поліном (багаточлен) степеня  $n$ , то

$$|f(z)| = |f_n| |z|^n (1 + o(1)), \quad z \rightarrow \infty,$$

$$M_f(r) = (1 + o(1)) |f_n| r^n, \quad r \rightarrow +\infty, \quad i \quad \rho = 0.$$

**Приклад 4.** Якщо  $f(z) = \exp(e^z)$ , то  $M_f(r) = e^{e^r}$  і  $\rho = +\infty$ .

**Теорема 1.** Порядок  $\rho$  цілої трансцендентної функції  $f$  можна знайти за формулою  $\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln \mu_f(r)}{\ln r}$ .

**Доведення.** Справді, з нерівностей  $\mu_f(r) \leq M_f(r) \leq (1 + 1/\varepsilon) \mu_f((1 + \varepsilon)r)$ , де  $\varepsilon > 0$  і  $r \geq 0$ , послідовно отримуємо  $\ln \mu_f(r) \leq \ln M_f(r) \leq (1 + o(1)) \ln \mu_f((1 + \varepsilon)r)$ ,  $r \rightarrow +\infty$ , і

$$\frac{\ln \ln \mu_f(r)}{\ln r} \leq \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r}$$

$$\leq \frac{(1 + o(1)) \ln \ln \mu_f((1 + \varepsilon)r)}{\ln((1 + \varepsilon)r)} \cdot \frac{\ln((1 + \varepsilon)r)}{\ln r}, \quad r \rightarrow +\infty. \blacktriangleright$$

**Теорема 2.** Тип  $\sigma$  цілої трансцендентної функції  $f$  порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  можна знайти за формулою  $\sigma = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{r^\rho}$ .

**Теорема 3.** Порядок  $\rho$  і тип  $\sigma$  цілої трансцендентної функції  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k$  можна знайти за формулами (у першій формулі вважається, що  $|1/0| = +\infty$  і  $\ln(+\infty) = +\infty$ )

### Розділ 3

$$\rho = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{k \ln k}{\ln |1/f_k|}, \quad \sigma = \overline{\lim}_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{e\rho} |f_k|^{\rho/k}.$$

**Приклад 5.** Якщо  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(\tau k + 1)^{k/s}}$ , де  $\tau \in (0; +\infty)$  і  $s \in (0; +\infty)$ , то

$$f_k = \frac{1}{(\tau k + 1)^{k/s}} = \frac{1 + o(1)}{(\tau k)^{k/s} e^{1/(\tau s)}}, \quad k \rightarrow \infty,$$

$\rho = s$  і  $\sigma = 1/(\tau s)$ .

**Приклад 6.** Якщо  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(n+1)^{n/s}}$ , де  $s \in (0; +\infty)$ , то

$$f_k = \begin{cases} \frac{1}{(n+1)^{n/s}}, & k = 2n, \\ 0, & k = 2n+1, \end{cases}$$

$$f_{2n} = \frac{1}{(n+1)^{n/s}} = \frac{1 + o(1)}{n^{n/s} e^{1/s}}, \quad n \rightarrow \infty,$$

$\rho = 2s$  і  $\sigma = 1/(es)$ .

**Приклад 7.** Якщо  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^{k/\ln(2+k)}}$ , то  $\rho = +\infty$ .

**Приклад 8.** Якщо  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^{k \ln k}}$ , то  $\rho = 0$ .

**Приклад 9.** Якщо  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{((k+1) \ln(2+k))^{k/s}}$ , де  $s \in (0; +\infty)$ ,

то  $\rho = s$  і  $\sigma = 0$ .

**Приклад 10.** Якщо  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{((k+1) / \ln(2+k))^{k/s}}$ , де

$s \in (0; +\infty)$ , то  $\rho = s$  і  $\sigma = +\infty$ .

**2. Принцип Фрагмена-Ліндельофа.** Цей принцип є аналогом принципу максимуму для необмежених областей.

**Теорема 1.** Нехай функція  $f$  голоморфною в півплощині  $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$  та неперервною в  $\overline{\mathbb{C}_+}$  і

### Розділ 3

$(\exists(r_k), 0 < r_k \uparrow +\infty)(\exists \rho < 1)(\exists c_2)(\forall \varphi \in (-\pi/2; \pi/2))(\forall k):$

$$|f(r_k e^{i\varphi})| \leq c_2 \exp(r_k^\rho).$$

Тоді, якщо  $\sup\{|f(z)| : z \in \partial \mathbb{C}_+\} \leq c_1$ , то  $\sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}_+\} \leq c_1$ .

**Доведення.** Нехай  $\rho < \rho_1 < 1$ ,  $0 < \varepsilon < 1$  і  $F(z) = f(z) \exp(-\varepsilon z^{\rho_1})$ . Розглянемо деяку голоморфну гілку цієї функції в  $\mathbb{C}_+$  (її також позначаємо через  $F$ ). Тоді  $\sup\{|F(z)| : z \in \partial \mathbb{C}_+\} \leq c_1$ ,

$$\sup\{|F(r_k e^{i\varphi})| : \varphi \in (-\pi/2; \pi/2)\} \leq c_2 \exp(r_k^\rho - \varepsilon r_k^{\rho_1} \cos(\pi \rho_1 / 2)) \rightarrow 0, k \rightarrow +\infty,$$

і за принципом максимуму застосованого до півкрусів  $U_+(0; r_k) = \{z : |z| < r_k, \operatorname{Re} z > 0\}$  та великих  $k$  отримуємо, що

$$\sup\{|F(z)| : z \in \mathbb{C}_+\} \leq c_1. \quad \text{Отже, } |f(z)| \leq c_1 \left| \exp(-\varepsilon z^{\rho_1}) \right|, z \in \mathbb{C}_+, \quad \text{і}$$

спрямувавши  $\varepsilon$  до нуля приходимо до потрібного висновку. ►

**Наслідок 1.** Нехай  $1/2 \leq \alpha < +\infty$ , функція  $f$  є голоморфною в куті  $\mathbb{C}(-\pi/2\alpha; \pi/2\alpha) = \{z : |\arg z| < \pi/2\alpha\}$ , неперервною в його замиканні і

$(\exists(r_k), 0 < r_k \uparrow +\infty)(\exists \rho < \alpha)(\exists c_2)(\forall \varphi, |\varphi| < \pi/2\alpha)(\forall k):$

$$|f(r_k e^{i\varphi})| \leq c_2 \exp(r_k^\rho).$$

Тоді, якщо  $\sup\{|f(z)| : z \in \partial \mathbb{C}(-\pi/2\alpha; \pi/2\alpha)\} \leq c_1$ , то

$$\sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}(-\pi/2; \pi/2)\} \leq c_1.$$

**Доведення.** Для отримання цього наслідку потрібно розглянути голоморфну гілку в  $\mathbb{C}_+$  функції  $F(z) = f(z^{1/\alpha})$  і застосувати до неї теорему 1.

**Наслідок 2.** Якщо ціла функція порядку меншого за 1 є обмеженою на дійсній осі, то ця функція є сталою.

**Наслідок 3.** Якщо ціла функція порядку меншого за  $1/2$  є обмеженою на дійсній додатній півосі, то ця функція є сталою.

**Наслідок 4.** Якщо ціла функція порядку меншого за  $\rho$ , є обмеженою на сторонах кута з розхилом меншим за  $\pi/\rho$ , то вона є обмеженою в цьому куті.

**Приклад 1.** Ціла функція  $f(z) = e^z$  має порядок  $\rho = 1$  і є обмеженою на уявній осі.

### Розділ 3

**Приклад 2.** Ціла функція  $f(z) = \cos \sqrt{z}$  має порядок  $\rho = 1/2$  і є обмеженою на дійсній додатній півосі.

**3. Тригонометрично  $\rho$ -опуклі функції.** Нехай  $0 < \rho < +\infty$ . Функція  $h: [\alpha; \beta] \rightarrow [-\infty; +\infty)$  називається тригонометрично  $\rho$ -опуклою на проміжку  $[\alpha; \beta]$ , якщо для будь-яких  $\theta$ ,  $\theta_1$  і  $\theta_2$ ,  $\alpha \leq \theta_1 < \theta < \theta_2 \leq \beta$ ,  $\theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$ , виконується

$$h(\theta) \leq h(\theta_1) \frac{\sin \rho(\theta_2 - \theta)}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)} + h(\theta_2) \frac{\sin \rho(\theta - \theta_1)}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)}. \quad (1)$$

Функція  $h: (\alpha; \beta) \rightarrow [-\infty; +\infty)$  називається тригонометрично  $\rho$ -опуклою на  $(\alpha; \beta)$ , якщо вона є тригонометрично  $\rho$ -опуклою на кожному проміжку  $[a; d] \subset (\alpha; \beta)$ .

**Теорема 1.** Якщо функція  $h \neq -\infty$  є тригонометричною  $\rho$ -опуклою на  $[\alpha; \beta]$ , то вона задовольняє умову Ліпшиця:  $(\exists c_1)(\forall (t; \tau) \in [\alpha; \beta] \times [\alpha; \beta]): |h(t) - h(\tau)| \leq c_1 |t - \tau|$ .

**Теорема 2.** Якщо функція  $h \neq -\infty$  є тригонометрично  $\rho$ -опуклою на  $(\alpha; \beta)$ , то вона має в кожній точці проміжку  $\varphi \in (\alpha; \beta)$  праву та ліву похідні і при цьому: а)  $h'_+(\varphi) = h'_+(\varphi + 0)$ ; б)  $h'_-(\varphi) = h'_-(\varphi - 0)$ ; в)  $h'_-(\varphi) \leq h'_+(\varphi)$ .

Для того щоб двічі неперервно диференційовна  $2\pi$ -періодична функція  $h$  була тригонометрично  $\rho$ -опуклою, необхідно і достатньо, щоб  $h''(\theta) + \rho^2 h(\theta) \geq 0$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 3.** Для того щоб  $2\pi$ -періодична функція  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  була тригонометрично  $\rho$ -опуклою на  $[0; 2\pi]$ , необхідно і достатньо, щоб вона подавалась у вигляді

$$h(\theta) = \frac{1}{2\rho \sin \pi\rho} \int_0^{2\pi} \cos \rho(|\theta - t| - \pi) ds(t), \quad \theta \in [0; 2\pi],$$

якщо  $\rho$  – неціле число, і у вигляді

$$h(\theta) = \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\theta-2\pi}^{\theta} (\theta - t) \sin \rho(t - \theta) ds(t) + c_\rho e^{i\rho\theta} + \overline{c_\rho} e^{-i\rho\theta}, \quad \theta \in [0; 2\pi],$$

якщо  $\rho$  – ціле, де  $c_\rho$  – стала, а  $s$  – неспадна і неперервна зліва на  $[0; 2\pi]$  функція, яка у випадку цілого  $\rho$  задовольняє додаткову умову

### Розділ 3

$$\int_0^{2\pi} e^{i\rho x} ds(x) = 0.$$

**Приклад 1.** Функція  $h(\theta) = \cos \theta$  є тригонометрично 1-опуклою на  $(-\infty; +\infty)$ , бо  $h''(\theta) + \rho^2 h(\theta) = -\cos \theta + \cos \theta = 0$ .

**4. Індикатор.** Індикатором функції  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  називається функція  $h(\theta) = h_f(\theta) = h(\theta; f) = h_\rho(\theta; f)$ , яка визначається так

$$h(\theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho}, \quad (1)$$

де  $\rho \in (0; +\infty)$  – деяке число. Якщо  $f$  – ціла функція, то за  $\rho$  беруть, як правило, її порядок, а інколи і формальний порядок.

**Теорема 1.** Нехай  $f$  – ціла функція скінченного типу при порядку  $\rho$ . Тоді для всіх  $\theta_1, \theta_2$  і  $\theta$  із  $[0; 2\pi]$  таких, що  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ ,  $\theta_2 - \theta_1 < \pi/\rho$ , виконується основне співвідношення для індикатора

$$h(\theta) \leq H(\theta; \theta_1; h(\theta_1); \theta_2; h(\theta_2)), \quad (2)$$

де

$$H(\theta; \theta_1; h_1; \theta_2; h_2) = \frac{h_1 \sin \rho \theta_2 - h_2 \sin \rho \theta_1}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)} \cos \rho \theta + \frac{h_2 \cos \rho \theta_1 - h_1 \cos \rho \theta_2}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)} \sin \rho \theta.$$

**Доведення.** Розглянемо довільну голоморфну в куті  $\mathbb{C}(0; 2\pi) = \{z: 0 < \arg z < 2\pi\}$  гілку функції  $\omega(z) = \exp((a - bi)z^\rho)$ . Тоді  $h(\theta; \omega) = a \cos \rho \theta + b \sin \rho \theta$ . Підберемо  $a$  і  $b$  так, щоб  $h(\theta_1; \omega) = h_1$  і  $h(\theta_2; \omega) = h_2$ , де  $h_1 = h(\theta_1; f) + \delta$ ,  $h_2 = h(\theta_2; f) + \delta$  і  $\delta > 0$ . Для цього розв'язуємо систему

$$\begin{cases} a \cos \rho \theta_1 + b \sin \rho \theta_1 = h_1, \\ a \cos \rho \theta_2 + b \sin \rho \theta_2 = h_2. \end{cases}$$

Знаходимо, що

$$a = \frac{h_1 \sin \rho \theta_2 - h_2 \sin \rho \theta_1}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)}, \quad b = \frac{h_2 \cos \rho \theta_1 - h_1 \cos \rho \theta_2}{\sin \rho(\theta_2 - \theta_1)}.$$

Таким чином, для таких сталих  $a$  і  $b$  маємо  $h(\theta; \omega) = H(\theta, \theta_1, h_1, \theta_2, h_2)$ .

Нехай  $\psi(z) = f(z) \exp(-(a - bi)z^\rho)$ . Тоді

$$h(\theta; \psi) = h(\theta; f) - h(\theta; \omega), \quad h(\theta_1; \psi) = h(\theta_2; \psi) = -\delta.$$

### Розділ 3

Тому за принципом Фрагмена-Ліндельофа функція  $\psi$  обмежена в кути  $\mathbb{C}(\theta_1; \theta_2)$ . Отже,  $h(\theta; \psi) \leq 0$ ,  $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$ . Звідси завдяки довільності  $\delta > 0$  впливає твердження теореми. ►

**Наслідок 1.** Індикатор цілої функції скінченного типу при порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  є функцією неперервною,  $2\pi$ -періодичною і тригонометрично  $\rho$ -опуклою на  $\mathbb{R}$ .

З означення індикатора впливає, що для цілої функції скінченного типу при порядку  $\rho$  виконується

$$(\forall \theta \in [0; 2\pi])(\forall \varepsilon > 0)(\exists c_1)(\forall r \geq 0): |f(re^{i\theta})| \leq c_1 \exp((h(\theta) + \varepsilon)r^\rho).$$

Разом з цим, справедлива наступна теорема С. Бернштейна.

**Теорема 2.** Якщо  $f$  – ціла функція скінченного типу при порядку  $\rho$ , то

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists c_1)(\forall \theta \in [0; 2\pi])(\forall r \geq 0): |f(re^{i\theta})| \leq c_1 \exp((h(\theta) + \varepsilon)r^\rho).$$

**Наслідок 2.** Якщо  $f$  – ціла функція типу  $\sigma_f$  при порядку  $\rho$ , то  $\max\{h(\theta) : \theta \in [0; 2\pi]\} = \sigma_f$ .

**Наслідок 3.** Для будь якої цілої функції скінченного типу  $\sigma$  при порядку  $\rho$  виконується  $-\sigma \leq h(\theta) \leq \sigma$ ,  $\theta \in [0; 2\pi]$ .

**Приклад 1.** Якщо  $f(z) = e^z$ , то  $|f(re^{i\theta})| = e^{r \cos \theta}$ ,  $M_f(r) = e^r$ ,

$$\rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} = 1 \text{ і } h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^\rho} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{r \cos \theta}}{r} = \cos \theta.$$

**Приклад 2.** Якщо  $f(z) = e^{\tau z^n}$ , де  $\tau = se^{i\psi} \in \mathbb{C}$  і  $n \in \mathbb{N}$ , то

$$|f(re^{i\theta})| = e^{sr^n \cos(n\theta + \psi)}, \quad M_f(r) = e^{sr^n}, \quad \rho = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln \ln M_f(r)}{\ln r} = n \text{ і}$$

$$h_f(\theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\theta})|}{r^n} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^{sr^n \cos(n\theta + \psi)}}{r^n} = s \cos(n\theta + \psi).$$

**Приклад 3.** Якщо  $f(z) = \sin z$ , то  $\rho = 1$  і  $h_f(\theta) = |\sin \theta|$ .

**Приклад 4.** Якщо  $f(z) = \cos z$ , то  $\rho = 1$  і  $h_f(\theta) = |\sin \theta|$ .

**5. Опорна функція множини.** Множина  $D$  називається опуклою, якщо разом із будь-якими своїми двома точками вона містить і відрізок, який їх з'єднує. Опуклою оболонкою множини  $D \subset \mathbb{C}$  називається множина  $\text{conv } D$ , яка є перетином всіх замкнених опуклих множин, які

### Розділ 3

містять  $D$ . Можна також сказати, що опукла оболонка множини  $D$  – це найменша опукла замкнена множина, яка містить  $D$ . Вона є перетином всіх півплощин, які містять  $D$ . Якщо множина  $D$  є опуклою і замкнутою, то  $\text{conv } D = D$ .

Опорною функцією множини  $D \in \mathbb{C}$  називається функція

$$k_D(\theta) = \sup\{\text{Re}(ze^{-i\theta}) : z \in D\}. \quad (1)$$

Пряму  $x \cos \theta + y \sin \theta = k_D(\theta)$  називають опорною прямою множини  $D$ . Для кожного  $\theta \in [0; 2\pi]$  множина  $D$  лежить в півплощині  $\{z : x \cos \theta + y \sin \theta \leq k_D(\theta)\}$ .

**Приклад 1.** Якщо  $D = \{a = |a|e^{i\psi}\}$ , то  $\text{conv } D = D$  і  $k_D(\theta) = |a| \cos(\psi - \theta)$ .

**Приклад 2.** Якщо  $\sigma > 0$  і  $D = \{z : -\sigma \leq \text{Re } z \leq \sigma, \text{Im } z = 0\}$ , то  $\text{conv } D = D$  і  $k_D(\theta) = \max\{x \cos \theta : x \in [-\sigma; \sigma]\} = \sigma |\cos \theta|$ .

**Приклад 3.** Якщо  $\sigma > 0$  і  $D = \{-\sigma; \sigma\}$ , то  $\text{conv } D = \{z : -\sigma \leq \text{Re } z \leq \sigma, \text{Im } z = 0\}$  і

$$k_D(\theta) = \max\{x \cos \theta : x \in \{-\sigma; \sigma\}\} = \sigma |\cos \theta|.$$

**Приклад 4.** Якщо  $\sigma > 0$  і  $D = \{-\sigma; \sigma; i\sigma; -i\sigma\}$ , то

$$\text{conv } D = \{z : \text{Im } z \leq \sigma - \text{Re } z\} \cap \{z : \text{Im } z \leq \sigma + \text{Re } z\}$$

$$\cap \{z : \text{Im } z \geq -\sigma - \text{Re } z\} \cap \{z : \text{Im } z \geq -\sigma + \text{Re } z\}$$

і

$$k_D(\theta) = \max\{x \cos \theta + y \sin \theta : z = x + iy \in \{-\sigma; \sigma; i\sigma; -i\sigma\}\}$$

$$= \begin{cases} \sigma \cos \theta, & \theta \in [-\pi/4; \pi/4], \\ \sigma \sin \theta, & \theta \in [\pi/4; 3\pi/4], \\ -\sigma \cos \theta, & \theta \in [3\pi/4; 5\pi/4], \\ -\sigma \sin \theta, & \theta \in [5\pi/4; 7\pi/4], \end{cases} = \begin{cases} \sigma \cos \theta, & \theta \in [0; \pi/4], \\ \sigma \sin \theta, & \theta \in [\pi/4; 3\pi/4], \\ -\sigma \cos \theta, & \theta \in [3\pi/4; 5\pi/4], \\ -\sigma \sin \theta, & \theta \in [5\pi/4; 7\pi/4], \\ \sigma \cos \theta, & \theta \in [7\pi/4; 2\pi]. \end{cases}$$

**6. Перетворення Бореля.** Ціла функція  $L$  зветься функцією експоненційного типу  $\leq \sigma$ , якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \tilde{n}_\varepsilon)(\forall z \in \mathbb{C}) : |L(z)| \leq \tilde{n}_\varepsilon \exp((\sigma + \varepsilon)|z|). \quad (1)$$

Для кожної цілої функції експоненційного типу  $\leq \sigma$  виконується

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln M_L(r)}{r} = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{e} |L_n|^{1/n} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |n! L_n|^{1/n} \leq \sigma. \quad (2)$$

### Розділ 3

Тому порядок цілої функції експоненційного типу не перевищує 1, якщо в цьому означенні умову (1) можна замінити вимогою (2). Функцію

$$\gamma_L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k! L_k}{z^{k+1}}$$

називають асоційовною за Борелем з функцією  $L$ . Якщо  $L$  задовольняє умову (1), то останній ряд збігається, якщо  $|z| > \sigma$ , і  $\gamma_L \in$  голоморфною функцією в області  $\{z : |z| > \sigma\}$ . Опукла оболонка  $G_L$  множини скінченних особливих точок функції  $\gamma_L$ , називається спряженою діаграмою функції  $L$ .

Нехай

$$h_L(\theta) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |L(re^{i\theta})|}{r},$$

– індикатор функції  $L$  відносно формального порядку  $\rho = 1$ .

**Теорема 1.** Якщо  $L$  – ціла функція експоненційного типу  $\leq \sigma$ , то для всіх  $\theta \in [0; 2\pi]$  виконується  $h_L(\theta) \leq k_G(-\theta)$  і

$$L(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \gamma(t) e^{tz} dt, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (3)$$

де  $\Gamma$  – замкнена спрямлювана жорданова крива така, що  $G_L \subset \text{Int } \Gamma$ .

**Теорема 2.** Нехай  $L$  – ціла функція експоненційного типу. Тоді для кожного  $\theta \in [0; 2\pi]$  функція  $\gamma$  є голоморфною в півплощині  $\tilde{N}_\theta = \{z : \text{Re}(ze^{i\theta}) > h_L(\theta)\}$  і в цій півплощині

$$\gamma_L(z) = \int_0^{+\infty e^{i\theta}} L(\zeta) e^{-\zeta z} d\zeta. \quad (4)$$

Функція  $\gamma_L$ , яка визначена формулою (4), називається перетворенням Бореля функції  $L$ . Теорему 2 можна сформулювати так: функція, асоційована за Борелем з цілою функцією  $L$  експоненційного типу  $\leq \sigma$ , спадає з перетворенням Бореля останньої.

**Теорема 3 (Пойа).** Для кожної цілої функції експоненційного типу справедлива рівність:  $h_L(\theta) = k_{G_L}(-\theta)$ ,  $\theta \in [0; 2\pi]$ .

Якщо  $L$  – ціла функція експоненційного типу, то множина  $G_L^\bullet$ , для якої  $k_{G_L^\bullet}(\theta) = h(\theta)$  називається індикаторною діаграмою функції  $L$ . Спряжену індикаторну діаграму кожної цілої функції експоненційного

### Розділ 3

типу отримують з її індикаторної діаграми за допомогою симетрії відносно дійсної осі.

**Приклад 1.** Якщо  $a = |a|e^{i\psi}$  і  $L(z) = e^{az}$ , то

$$\gamma_L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^{k+1}} = \frac{1}{z-a}, \quad G_L = \{a\}, \quad G_L^* = \{\bar{a}\}, \quad h_L(\theta) = |a|\cos(\psi + \theta),$$

$$k_{G_L}(\theta) = |a|\cos(\psi - \theta) \quad \text{і} \quad k_{G_L^*}(\theta) = |a|\cos(\psi + \theta) = h_L(\theta).$$

**Приклад 2.** Якщо  $a > 0$  і  $L(z) = \operatorname{ch} \sigma z$ , то

$$\gamma_L(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a^k}{2z^{k+1}} + \frac{(-a)^k}{2z^{k+1}} \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{a^k}{2z^{k+1}} + \frac{(-a)^k}{2z^{k+1}} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z-a} + \frac{1}{z+a} \right),$$

$$G_L = [-a; a] = G_L^* \quad \text{і} \quad k_{G_L}(\theta) = a|\cos \theta| = k_{G_L^*}(\theta) = h(\theta).$$

**Приклад 3.** Якщо  $\lambda_k \in \mathbb{C}$  і  $L(z) = \sum_{k=1}^n e^{\lambda_k z}$ , то  $\gamma_L(z) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{z - \lambda_k}$ .

**7. Простір  $PW_{\sigma}^2$ .** Множину всіх цілих функцій експоненційного типу  $\leq \sigma \in (0; +\infty)$ , звування яких на  $\mathbb{R}$  належить до простору  $L_2(\mathbb{R})$ , позначимо через  $PW_{\sigma}^2$ .

**Теорема 1 (Пелі-Вінера).** Клас  $PW_{\sigma}^2$  складається з цілих функцій

$$G, \quad \text{які подаються у вигляді} \quad G(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{itz} q(t) dt, \quad \text{де} \quad q \in L_2(-\sigma; \sigma).$$

При цьому,  $\|g\|_{L_2(-\sigma; \sigma)} = \|G\|_{L_2(\mathbb{R})}$ .

**Приклад 1.** Функція  $G(z) = \frac{\sin \pi z}{z}$  належить до  $PW_{\pi}^2$ .

### 8. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення порядку цілої функції.
2. Сформулюйте означення типу цілої функції.
3. Сформулюйте і доведіть теорему про зв'язок порядку і типу цілої функції з її тейлоровими коефіцієнтами.
4. Сформулюйте принцип Фрагмена-Ліндельофа для півплощини.
5. Сформулюйте означення тригонометрично  $\rho$ -опуклої функції.
6. Сформулюйте означення індикатора цілої функції.
7. Сформулюйте означення цілої функції експоненціального типу  $\leq \sigma$ .
8. Сформулюйте означення функції асоційованої за Борелем.

## Розділ 3

9. Сформулюйте означення індикаторної діаграми цілої функції.

10. Сформулюйте теорему Поїа.

### 9. Вправи і задачі.

1. Знайдіть порядок і тип цілої функції  $f$

1.  $f(z) = 1 + z^2$ . 2.  $f(z) = e^{-z^2}$ . 3.  $f(z) = e^{-2z^3}$ . 4.  $f(z) = 1 - 3z^3$ .

5.  $f(z) = e^{-3z^2} + z^2$ . 6.  $f(z) = e^{z^2} + 1 + z$ . 7.  $f(z) = e^{-2z^3} - z$ .

8.  $f(z) = e^{2z^4} - 3z^3$ . 9.  $f(z) = e^{-z^3} - 2z$ . 10.  $f(z) = \sin z$ .

11.  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n / n^{2n}$ . 12.  $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^{2n} / n^n$ . 13.  $f(z) = e^z + e^{iz}$ .

14.  $f(z) = \operatorname{sh} z$ . 15.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)^{2k \ln k}}$ .

16.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{\left((k+1)^2 \ln(2+k)\right)^{k/3}} z^k$ . 17.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{(k!)^3} z^k$ .

18.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{\left((k+1)^2 \ln(2+k)\right)^{k/3}} z^{3k}$ . 19.  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^k}{(k!)^3} z^{2k}$ .

2. Знайдіть індикатор функції  $f$

1.  $f(z) = e^{-(1-i)z}$ . 2.  $f(z) = e^{(1+i)z}$ . 3.  $f(z) = e^{3z^2}$ . 4.  $f(z) = \sin z$ .

5.  $f(z) = \cos z$ . 6.  $f(z) = e^{2iz^3}$ . 7.  $f(z) = e^{iz^3}$ . 8.  $f(z) = e^{(1+i)z^4}$ .

9.  $f(z) = e^{-2iz^3}$ . 10.  $f(z) = e^{iz^4}$ . 11.  $f(z) = e^{(1+i)z^4}$ . 12.  $f(z) = e^{(1-i)z^5}$ .

3. Нехай  $f$  і  $g$  – цілі функції. Доведіть наступні твердження:

1)  $\rho[fg] \leq \rho[f]\rho[g]$ . На прикладі функцій  $f(z) = \exp(-z^2)$  і  $g(z) = \exp(z^2)$  переконатись, що в цій нерівності можлива строга нерівність;

2)  $\rho[f+g] \leq \rho[f] + \rho[g]$ . На прикладі функцій  $f(z) = 1 - \exp(z)$  і  $g(z) = \exp(z)$  переконатись, що в цій нерівності можлива строга нерівність;

3)  $\rho[f/g] \leq \rho[f] + \rho[g]$ , якщо  $f/g$  – ціла функція. На прикладі функцій  $f(z) = \exp(z)$  і  $g(z) = \exp(z)$  переконатись, що в цій нерівності можлива строга нерівність.

### Розділ 3

4. Доведіть, що якщо  $D = \{a\}$ , то

$$k_D(\theta) = \operatorname{Re} a \cos \theta - \operatorname{Im} a \sin \theta = |a| \cos(\theta / \varphi), \quad \varphi = \arg a.$$

5. Доведіть, що якщо  $D = \{z : |z| \leq \sigma\}$ , то  $k_D(\theta) = \sigma$ .

6. Доведіть, що якщо  $D = [-i\sigma; i\sigma]$ , то  $k_D(\theta) = \sigma |\sin \theta|$ .

7. Доведіть, що якщо  $f(z) = \sin z$ , то  $\rho_f = \sigma_f = 1$  і  $h_f(\varphi) = |\sin \varphi|$ .

8. Доведіть, що якщо  $f(z) = e^{iz}$ , то  $\sigma_f = \rho_f = 1$  і  $h_f(\varphi) = |\sin \varphi|$ .

9. Знайдіть перетворення Бореля функції  $L$

1.  $L(z) = e^{-2iz}$ .                      2.  $L(z) = e^{-iz} - e^z$ .                      3.  $L(z) = \operatorname{ch} z$ .

4.  $L(z) = \operatorname{sh} z$ .                      5.  $L(z) = e^{-iz} - e^z + e^{-z} + e^{iz}$ .                      6.  $L(z) = z + e^{-2z}$ .

7.  $L(z) = \frac{\sin \sqrt{z}}{\sqrt{z}}$ .                      8.  $L(z) = e^{-iz} - iz$ .                      9.  $L(z) = \frac{\sin z}{z}$ .

10.  $L(z) = \cos \sqrt{z}$ .                      11.  $L(z) = z - 2z^2$ .

## Розділ 4. Нескінченні добутки цілих функцій скінченного порядку та суміжні проблеми

**1. Показник збіжності послідовності.** Нехай  $(\lambda_k)$  – послідовність комплексних чисел таких, що  $0 < |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq \dots$ . Показником збіжності послідовності  $(\lambda_k)$  називається точна нижня межа  $\tau$  тих  $\tau_1$ , для яких є збіжним ряд

$$\sum_{|\lambda_k| > 0} 1/|\lambda_k|^{\tau_1}. \quad (1)$$

Якщо  $\tau < +\infty$ , то для кожного  $\tau_1 > \tau$  ряд (1) є збіжним, а для  $\tau_1 = \tau$  ряд (1) може бути збіжним, а може бути і розбіжним.

**Теорема 1.** Для будь-якої послідовності  $(\lambda_k)$  показник збіжності  $\tau$  можна знайти за формулою:  $\tau = \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \ln k / \ln |\lambda_k|$ .

Нехай  $n(t)$  – кількість членів послідовності  $(\lambda_k)$ , для яких  $|\lambda_k| \leq t$ , тобто  $n(t) = \sum_{|\lambda_k| \leq t} 1 = \max\{k : |\lambda_k| \leq t\}$ . Нехай, далі,

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t} dt + n(0) \ln r. \text{ Для будь-якої послідовності } (\lambda_k)$$

$$\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln k}{\ln |\lambda_k|} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln n(r)}{\ln r} = \overline{\lim}_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln N(r)}{\ln r}.$$

**Приклад 1.** Якщо  $\lambda_k = k$ , то  $\tau = 1$  і для  $\tau_1 = \tau$  ряд (1) є розбіжним.

**Приклад 2.** Якщо ж  $\lambda_k = (k+1) \ln^2(k+1)$ , то  $\tau = 1$  і для  $\tau_1 = \tau$  ряд (1) є збіжним.

**Приклад 3.** Нехай  $\rho \in (0; +\infty)$ ,  $\lambda_k = k^{1/\rho}$ . Тоді  $\tau = \rho$ .

**2. Канонічний добуток. Зв'язок між родом і показником збіжності послідовності нулів.** Нехай послідовність  $(\lambda_k)$  має скінченний

## Розділ 4

показник збіжності і  $p$  – найменше ціле число таке, що

$$\sum_{|\lambda_k|>0} 1/|\lambda_k|^{p+1} < +\infty, \text{ а } E(z/\lambda_k; p) = \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j\lambda_k^j}\right). \text{ Тоді добуток}$$

$$L(z) = \prod_{|\lambda_k|>0} E(z/\lambda_k; p) = \prod_{|\lambda_k|>0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j\lambda_k^j}\right)$$

називається канонічним добутком. Він є рівномірно збіжним на кожному компактї з  $\mathbb{C}$ , функція  $L$  є цілою і для неї послідовність  $(\lambda_k)$  є послідовністю нулів. При цьому число  $p$  називається родом послідовності  $(\lambda_k)$  або родом канонічного добутку.

**Теорема 1.** Для кожної послідовності  $(\lambda_k)$  виконується  $p \leq \tau \leq p+1$ . Якщо  $\tau$  не є цілим числом, то  $p = [\tau]$ .

**Приклад 1.** Якщо  $\lambda_n = n$ , то  $p = \tau = 1$  і  $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n)e^{z/n}$  – відповідний канонічний добуток.

**Приклад 2.** Якщо  $\lambda_n = (n+1)\ln^2(n+1)$ , то  $\tau = 1$ ,  $p = 0$  і  $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/((n+1)\ln^2(n+1)))$  – відповідний канонічний добуток.

**Приклад 3.** Якщо  $\lambda_n = n^{2/7}$ , то  $\tau = 7/2$ ,  $p = 3$  і  $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n^{2/7}) \exp\left(\frac{z}{n^{2/7}} + \frac{z^2}{2n^{4/7}} + \frac{z^3}{3n^{6/7}}\right)$  – відповідний канонічний добуток.

**3. Зв'язок між порядком канонічного добутку і показником збіжності його нулів.**

**Теорема 1.** Порядок канонічного добутку дорівнює показнику збіжності послідовності  $(\lambda_k)$ :  $\rho_L = \tau$ .

**Доведення.** Із нерівності Іенсена  $N(r) \leq \ln M_L(r)$  випливає, що  $\tau \leq \rho_L$ . Для доведення протилежної нерівності візьмемо таке число  $\tau_1$ ,  $\tau \leq \tau_1 \leq p+1$ , що

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1/|\lambda_k|^{\tau_1} < +\infty.$$

Тоді, враховуючи, що  $p < \tau_1 \leq p+1$ , отримуємо

## Розділ 4

$$|E(z/\lambda_k; p)| \leq \exp\left(2|z/\lambda_k|^{p+1}\right) \leq \exp\left(2|z/\lambda_k|^{\tau_1}\right), \quad |z/\lambda_k| \leq 1/2,$$

$$|E(z/\lambda_k; p)| \leq \exp\left(\ln|1+z/\lambda_k| + (2|z|/|\lambda_k|)^p\right)$$

$$\leq c_0 (2|z|/|\lambda_k|)^p \leq c_1 |z/\lambda_k|^{\tau_1}, \quad |z/\lambda_k| \geq 1/2.$$

і приходимо до нерівності  $\rho_L \leq \tau$ . ►

**Приклад 1.** Якщо  $\lambda_n = \sqrt{n}$ , то  $\tau = 2$  і тому порядок канонічного

добутку  $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - z/\sqrt{n}\right) \exp\left(\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^2\right)$  дорівнює двом.

### 4. Розвинення цілих функцій скінченного порядку в нескінченні добутки.

**Теорема 1 (Адамара).** Кожна ціла функція  $f \neq 0$  порядку  $\rho < +\infty$  подається у вигляді

$$f(z) = z^m e^{Q(z)} \prod_{|\lambda_k| > 0} \left(1 - \frac{z}{\lambda_k}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^p \frac{z^j}{j\lambda_k^j}\right), \quad (1)$$

де  $(\lambda_k)$  – послідовність нулів функції  $f$ ,  $m$  – кратність її нуля в точці

$0$ ,  $Q(z) = \sum_{i=0}^{\nu} Q_i z^i$  – поліном степеня  $\nu \leq \rho$ ,  $p$  – найменше ціле число,

для якого є збіжним ряд  $\sum_{|\lambda_k| > 0} |1/\lambda_k|^{p+1}$ .

**Теорема 2 (Бореля).** Порядок  $\rho$  цілої функції  $f$ , що має зображення (1), знаходиться так:  $\rho = \max\{\nu; \tau\}$ .

**Наслідок 1.** Порядок цілої функції нецілого порядку дорівнює показнику збіжності послідовності її нулів.

**Приклад 1.** Справедливими є рівності:

$$\sin z = z \prod_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 - z/(k\pi)) e^{-z/k\pi} = z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - (z/k\pi)^2),$$

$$\cos z = \prod_{k=-\infty}^{+\infty} (1 - z/(\pi/2 + \pi k)) e^{z/(\pi/2 + \pi k)} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - z/(\pi/2 + \pi k)^2),$$

і при цьому останні добутки збігаються рівномірно на кожному компактні з  $\mathbb{C}$ .

## Розділ 4

Родом цілої функції  $f$  порядку  $\rho \in [0; +\infty)$  називається число  $q = \max\{p; \nu\}$ , де  $p$  – рід послідовності  $(\lambda_n)$ , а  $\nu$  – степінь полінома  $Q$  в зображенні (1).

**Теорема 3 (Пуанкаре).** Для кожної цілої функції  $f$  порядку  $\rho \in [0; +\infty)$  виконується  $q \leq \rho \leq q+1$ . Якщо  $\rho$  не є цілим числом, то  $q = p = [\rho]$ .

**Приклад 2.**  $q = 3$ , якщо  $f(z) = z^4 e^{2z+z^3} \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z/n) e^{z/n}$ .

**Приклад 3.**  $q = 2$ , якщо

$$f(z) = z^4 e^{2z} \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{n}}\right) \exp\left(\frac{z}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right)^2\right).$$

**Теорема 4.** Для того щоб ціла функція  $f$  нецілого порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  мала скінченний тип, необхідно і достатньо, щоб послідовність  $(\lambda_n)$  мала скінченну верхню щільність:

$$\tau_0 := \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} k / |\lambda_k|^{\rho} < +\infty. \quad (2)$$

**Доведення.** Необхідна частина випливає з нерівності Ієнсена. Для доведення достатності позначимо канонічний добуток з (1) через  $L(z)$ . Тоді

$$\begin{aligned} \ln|L(z)| &\leq \sum_{|\lambda_k| \leq 2|z|} \ln(1 + |z|/|\lambda_k|) + \sum_{|\lambda_k| \leq 2|z|} 2|z|^{\rho} / |\lambda_k|^{\rho} + \sum_{|\lambda_k| > 2|z|} 2^{\rho} |z / \lambda_k|^{\rho+1} \\ &\leq \sum_{|\lambda_k| \leq 2|z|} \ln \frac{2|z|}{|\lambda_k|} + \sum_{|\lambda_k| \leq 2|z|} \ln \left( \frac{1}{2} + \frac{|\lambda_k|}{2|z|} \right) + \sum_{|\lambda_k| \leq 2|z|} 2|z|^{\rho} / |\lambda_k|^{\rho} + \sum_{|\lambda_k| > 2|z|} 2^{\rho} |z / \lambda_k|^{\rho+1} \\ &\quad + 2|z|^{\rho} \int_{\lambda_1}^{2|z|} \frac{dn(t)}{t^{\rho}} + 2^{\rho} |z|^{\rho+1} \int_{2|z|}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^{\rho+1}} = N(2r) + n(2|z|) \ln 3/2 \\ &\quad + 2|z|^{\rho} \int_{\lambda_1}^{2|z|} \frac{dn(t)}{t^{\rho}} + 2^{\rho} |z|^{\rho+1} \int_{2|z|}^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^{\rho+1}} = O(r^{\rho}), \quad r \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Залишилось зауважити, що перші два співмножники в (1) мають порядок менший за  $\rho$ . ►

**Наслідок 1.** Тип цілої функції нецілого порядку дорівнює типу канонічного добутку.

## Розділ 4

**Теорема 5 (Ліндельофа).** Для того щоб ціла функція  $f$  цілого порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  була функцією скінченного типу  $\sigma$ , необхідно і достатньо, щоб виконувалось (2) і

$$\delta = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \left| Q_\rho + \frac{1}{\rho} \sum_{0 < |\lambda_k| \leq r} \frac{1}{\lambda_k^\rho} \right| < +\infty. \quad (3)$$

При цьому, у випадку  $p = \rho$  тип функції дорівнює нулеві тоді і тільки тоді, коли  $\delta = \tau_0 = 0$ . Якщо ж  $p = \rho - 1$ , то тип функції  $f$  дорівнює коефіцієнтові  $Q_\rho$  полінома  $Q$  в зображенні (1).

**Приклад 4.** Функція  $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/k) e^{z/k}$  є цілою, для неї  $\lambda_k = k$ ,  $\rho = \tau = 1$  і  $\sum_{0 < |\lambda_k| \leq R} 1/\lambda_k \rightarrow +\infty$ , якщо  $R \rightarrow +\infty$ . Тому тип  $\sigma = +\infty$ .

**Приклад 5.** Нехай  $\lambda_k = \begin{cases} -n, & k = 2n - 1, \\ n, & k = 2n. \end{cases}$  Тоді функція

$$f(z) = \prod_{n=-\infty, n \neq 0}^{\infty} (1 - z/n) e^{z/n} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_k) e^{z/\lambda_k}$$

є цілою, для неї  $\rho = \tau = 1$ ,  $p = 1$ ,  $\tau_0 = 2$  і  $\sum_{0 < |\lambda_k| \leq R} 1/\lambda_k = 0$ . Тому  $f$  – функція скінченного типу  $\sigma$ . Оскільки  $f(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}$ , то насправді  $\sigma = \pi$ .

**Приклад 6.** Функція  $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{k}} \right) \exp \left( \frac{z}{\sqrt{k}} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\sqrt{k}} \right)^2 \right)$  є

цілою, для неї  $\lambda_k = \sqrt{k}$ ,  $\rho = \tau = 2$ ,  $\tau_0 = 1$  і  $\sum_{0 < |\lambda_k| \leq R} 1/\lambda_k^\rho \rightarrow +\infty$ , якщо  $R \rightarrow +\infty$ . Тому  $\sigma = +\infty$ .

**Приклад 7.** Нехай  $\lambda_{2n-1} = \sqrt{n}$  і  $\lambda_{2n} = i\sqrt{n}$ . Тоді функція

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) \exp \left( \frac{z}{\lambda_k} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\lambda_k} \right)^2 \right) \text{ є цілою, для неї } \rho = \tau = 2, \quad p = 2,$$

## Розділ 4

$\tau_0 = 2$  і  $\sum_{0 < |\lambda_n| \leq R} 1/\lambda_n^\rho = 0$ . Тому  $\sigma \in (0; +\infty)$ .

**Приклад 8.** Якщо  $\lambda_{3k-2} = \sqrt{k}$ ,  $\lambda_{3k-1} = \sqrt{k}e^{i2\pi/3}$  і  $\lambda_{3k} = \sqrt{k}e^{i4\pi/3}$ ,

то функція  $f(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left( 1 - \frac{z}{\lambda_n} \right) \exp \left( \frac{z}{\lambda_n} + \frac{1}{2} \left( \frac{z}{\lambda_n} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{z}{\lambda_n} \right)^3 \right)$  є цілою, для

неї  $\rho = \tau = 2$ ,  $p = 3$ ,  $\tau_0 = 3$  і  $\sum_{0 < |\lambda_n| \leq R} 1/\lambda_n^\rho = 0$ , бо

$1 + e^{-i4\pi/3} + e^{-i8\pi/3} = 0$ . Тому  $\sigma \in (0; +\infty)$ .

**Приклад 9.** Функція  $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z / (k \ln^2(2+k)))$  є цілою, для

неї  $\lambda_k = k \ln^2(2+k)$ ,  $\rho = \tau = 1$ ,  $p = \rho - 1 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$  і  $Q_\rho = 0$ . Тому  $\sigma = 0$ .

**Приклад 10.** Функція  $f(z) = e^{3z^2} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z / (k \ln^2(2+k)))$  є цілою,

для неї  $\lambda_k = k \ln^2(2+k)$ ,  $\tau = 1$ ,  $\nu = 2$ ,  $\rho = \max\{1; 2\} = 2$ ,  $p = \rho - 1 = 0$ ,  $\tau_0 = 0$  і  $Q_\rho = 3$ . Тому  $\sigma = 3$ .

### 5. Асимптотичні властивості цілих функцій.

**Теорема 1.** Нехай  $\tau \in [0; +\infty)$ ,  $\rho \in (0; +\infty)$  – неціле число,  $p = [\rho]$  і  $(\lambda_n)$  – така послідовність додатних чисел, що

$n(t) = \tau t^\rho + o(t^\rho)$ , якщо  $t \rightarrow +\infty$ . Тоді функція  $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/\lambda_n; p)$  є

цілою і  $\ln |L(re^{i\varphi})| = \frac{\pi \tau r^\rho}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^\rho)$  для кожного  $\varphi \in (0; 2\pi)$ ,

якщо  $r \rightarrow +\infty$ .

**Доведення.** Справді,

$$\begin{aligned} \ln |L(z)| &= \operatorname{Re} \int_0^{+\infty} \ln E(z/t; p) dn(t) = -\operatorname{Re} \left( z^{\rho+1} \int_0^{+\infty} n(t) \frac{dt}{t^{\rho+1}(t-z)} \right) \\ &= -\operatorname{Re} \left( z^{\rho+1} \int_0^{\infty} \frac{dt}{t^{\rho+1-\rho}(t-z)} \right) + o(r^\rho) = \operatorname{Re} \left( \frac{\pi \tau}{\sin \pi \rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho \right) + o(r^\rho) \end{aligned}$$

## Розділ 4

$$= \frac{\pi\tau}{\sin \pi\rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty,$$

бо

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{t-z} dt = -\pi \frac{e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} z^{\alpha-1}, \quad z \notin [0; +\infty), \quad 0 < \alpha < 1. \quad \blacktriangleright$$

**Зауваження 1.** Докладніше взаємозв'язок між асимптотичними властивостями цілої функції і властивостями послідовності її нулів встановлюється в теорії цілих функцій цілком регулярного зростання. Ціла функція  $f$  порядку  $\rho \in (0; +\infty)$  з індикатором  $h_f$  зветься цілою функцією цілком регулярного зростання, якщо існує така множина  $E \subset [0; +\infty)$  нульової відносної міри, тобто  $E_0$ -множина, що рівномірно за  $\varphi \in [0; 2\pi]$  виконується

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = r^\rho h_f(\varphi) + o(r^\rho), \quad E_0 \ni r \rightarrow +\infty.$$

При цьому множина  $E \subset [0; +\infty)$  зветься множиною нульової відносної міри, якщо  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\mu(E \cap [0; r])}{r} = 0$ , де  $\mu$  – лінійна міра Лебега на  $\mathbb{R}$ . Для цілих функцій порядку меншого за одиницю згадані взаємозв'язки встановлюють досить просто. Наведемо один простий факт.

**Теорема 2.** Нехай послідовність  $(\lambda_k)$  комплексних чисел задовольняє умову

$$(\exists \rho < 1)(\forall \alpha > 1)(\exists t_0)(\forall t_1 \geq t_0)(t_2 \geq t_1): \frac{n(t_2)}{t_2^\rho} \leq \alpha \frac{n(t_1)}{t_1^\rho}, \quad (1)$$

$$L(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\lambda_k) \quad \text{і} \quad R = (\pi\rho/\sin \pi\rho)^{1/\rho}. \quad \text{Тоді}$$

$$\ln M_L(r) \leq N((1+o(1))Rr), \quad r \rightarrow \infty.$$

**Доведення.** Нехай  $\gamma > R$ . Тоді

$$\ln M_L(r) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \ln \left( 1 + \frac{r}{|\lambda_n|} \right) = N(\gamma r) - \int_0^\gamma \frac{n(t)dt}{t+r} + \int_{\gamma r}^{\infty} \frac{rn(t)dt}{t(t+r)}.$$

Завдяки (1)

$$\int_{\gamma r}^{\infty} \frac{rn(t)}{t+r} dt \leq \alpha \frac{n(\gamma r)}{(\gamma r)^\rho} \int_{\gamma r}^{+\infty} \frac{rt^{\rho-1}}{t+r} dt + c_q, \quad r \geq r_0,$$

## Розділ 4

$$\int_0^{\gamma r} \frac{n(t)}{t+r} dt \geq \frac{1}{2} \frac{n(\gamma r)}{(\gamma r)^\rho} \int_0^{\gamma r} \frac{t^\rho}{t+r} dt + c_2, \quad r \geq r_0.$$

Тому, враховуючи, що  $\int_0^\infty \frac{t^{\rho-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \pi \rho}$ , отримуємо

$$\begin{aligned} \ln M_L(r) &\leq N(\gamma r) + \alpha \frac{n(\gamma r)}{\gamma^\rho} \left( \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho-1} dt}{1+t} - \int_0^\gamma \frac{t^{\rho-1}(1+t) - t^\rho}{1+t} dt - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\gamma \frac{t^\rho dt}{1+t} \right) + c_4 \\ &= N(\gamma r) + c_4 + \frac{\alpha n(\gamma r)}{\rho \gamma^\rho} \left( R^\rho - \gamma^\rho + \rho \left( 1 - \frac{1}{\alpha^2} \right) \int_0^\gamma \frac{t^\rho dt}{1+t} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Для заданого  $\gamma > R$  число  $\alpha > 1$  можна вибрати настільки близьким до 1, щоб вираз, який стоїть в останніх дужках, був від'ємним. Тому отримуємо потрібний висновок. ►

**Приклад 1.** Умова (1) рівносильна умові

$$(\exists \rho < 1)(\forall \alpha > 1)(\exists n_0)(\forall k \geq n_0)(\forall n \geq k) : |\lambda_k / \lambda_n| \leq (\alpha k / n)^{1/\rho}. \quad (3)$$

**Приклад 2.** Умова (3) виконується, якщо існує границя

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n / |\lambda_n|^\rho = \tau \in (0; \infty) \text{ або якщо } (\exists \Delta < 1)(\forall n) : |\lambda_n / \lambda_{n+1}| \leq \Delta.$$

**Наслідок 1.** Якщо

$$(\forall \rho > 0)(\forall \alpha > 1)(\exists k_0)(\forall k \geq k_0)(\forall n \geq k) : |\lambda_k / \lambda_n| \leq (\alpha k / n)^{1/\rho}, \quad (4)$$

то  $\ln M_L(r) = N((1 + o(1))r)$ ,  $r \rightarrow +\infty$ .

**Приклад 3.** Умова (4) виконується, якщо виконується (3), а також, якщо  $|\lambda_n| = \varphi(n)(1 + o(1))$ ,  $n \rightarrow \infty$ , де  $\varphi$  – зростаюча додатна і неперервно диференційовна на  $[0; +\infty)$  функція, для якої  $x \varphi'(x) / \varphi(x) \rightarrow +\infty$ ,  $x \rightarrow +\infty$ , бо

$$\begin{aligned} |\lambda_k / \lambda_n| &= (1 + o(1)) \exp(\ln \varphi(\lambda_k) - \ln \varphi(\lambda_n)) \\ &= (1 + o(1)) \exp \left( - \int_k^n t \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt \right) \leq (1 + o(1)) (k/n)^{1/\rho} \end{aligned}$$

для кожного  $\rho > 0$ , якщо  $k \rightarrow +\infty$  і  $n \geq k$ .

**6. Простір Гарді.** Вище ми говорили про розклад цілих функцій на множники. Аналогічні проблеми можна розглядати для інших класів голоморфних функцій. Нехай  $1 \leq \rho \leq +\infty$  і  $H^\rho(\mathbb{C}_+)$  – клас функцій,

## Розділ 4

голоморфних у півплощині  $\mathbb{C}_+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ , для яких  $\|f\| := \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}_+\} < +\infty$ , якщо  $p = +\infty$ , і

$$\|f\|^p := \sup\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)|^p dx : x \in (0; +\infty)\right\} < +\infty,$$

якщо  $p \in [1; +\infty)$ .

**Теорема 1.** Кожна функція  $f \in H_p(\mathbb{C}_+)$ ,  $f \neq 0$ ,  $1 \leq p \leq +\infty$ , подається у вигляді

$$f(z) = e^{ia_0+a_1z} \prod_{|\lambda_n| \leq 1} \frac{z - \lambda_n}{z + \lambda_n} \prod_{|\lambda_n| > 1} \frac{1 - z/\lambda_n}{1 + z/\lambda_n} \times \\ \times \exp\left\{\frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz+i)}{(1+t^2)(t+iz)} \ln|f_0(t)| dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(tz+i)}{(1+t^2)(t+iz)} dh(t)\right\}, \quad (1)$$

де  $a_0$  і  $a_1$  – дійсні сталі,  $a_1 \leq 0$ ,  $h$  – незростаюча на  $(-\infty; +\infty)$  функція  $h$ , похідна якої дорівнює нулеві майже скрізь,  $(\lambda_n)$  – послідовність нулів функції  $f$ , і  $f_0 \in L_p(\mathbb{R})$  – деяка функція такі, що

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} \lambda_n}{1+|\lambda_n|^2} < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\ln|f_0(t)||}{1+t^2} dt < +\infty, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} |dh(t)| < +\infty. \quad (2)$$

Навпаки, якщо сталі  $a_0$  і  $a_1$ , функції  $f_0$  і  $h$  та послідовність  $(\lambda_n)$ ,  $\lambda_n \in \mathbb{C}_+$ , задовольняють згадані вище умови, то функція  $f$ , визначена формулою (1) належить до  $H_p(\mathbb{C}_+)$ .

**Приклад 1.** Функція  $f(z) = e^{-z}$  належить до  $H_\infty(\mathbb{C}_+)$ , бо  $|f(z)| = |e^{-z}| \leq 1$ , якщо  $z \in \mathbb{C}_+$ .

**Приклад 2.** Функція  $f(z) = \frac{1}{(1+z)^2}$  належить до  $H_1(\mathbb{C}_+)$ , бо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+iy)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x)^2 + y^2} dy \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} dy = \pi, \quad \text{якщо } x > 0.$$

**Теорема 2 (Пелі-Вінера).** Клас  $H^2(\mathbb{C}_+)$  співпадає з множиною функцій  $f$ , голоморфних в  $\mathbb{C}_+$ , які подаються у вигляді

## Розділ 4

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{tz} q(t) dt, \quad q \in L_2(-\infty; 0).$$

**7. Інтуїтивні уявлення про узагальнені функції.** При вивченні фізичних процесів Дірак використав функцію  $\delta$ , яка має властивості: 1)

$$\delta(x) \geq 0 \text{ для всіх } x \in \mathbb{R}; \quad 2) \quad \delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases}; \quad 3) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1. \text{ При}$$

цьому Дірак приходив до висновків, які узгоджують з експериментом. Однак, серед інтегровних функцій немає таких, які задовольняють умови 1)–3). Тому таку функцію  $\delta$  слід розглядати як функцію в іншому розумінні. Це можна зробити подібно до одного з методів введення ірраціональних чисел. Власне, дві фундаментальні в  $\mathbb{Q}$  послідовності  $(u_n)$  і  $(v_n)$  раціональних чисел назовемо еквівалентними, якщо  $u_n - v_n \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ . Це відношення є відношенням еквівалентності і ділить всі фундаментальні в  $\mathbb{Q}$  послідовності на попарно неперетинні класи. Кожний такий клас назовемо дійсним числом. Цей клас  $u$ , тобто дійсне число  $u$ , однозначно визначається одним з своїх елементів, тобто однією з послідовностей  $(u_n)$ , і цей факт записують так:  $u = (u_n)$ . Сумою двох дійсних чисел  $u = (u_n)$  та  $v = (v_n)$  назовемо той клас еквівалентності  $u + v$ , який містить послідовність  $(u_n + v_n)$ . Виходячи з цього означення можна встановити всі відомі властивості множини дійсних чисел. Кожному раціональному числу  $u$  відповідає той клас, який містить послідовність  $(u; u; \dots)$ . Числа, які не є раціональними, зветься ірраціональними або узагальненими елементами множини раціональних чисел. Зокрема, таким є число  $\sqrt{2}$ , яке задається послідовністю десяткових наближень  $\sqrt{2}$  з недостатчею:  $\sqrt{2} = (1, 4; 1, 41, \dots)$ . Отож, якщо ми знаємо тільки раціональні числа, то число  $\sqrt{2}$  є узагальненим елементом множини  $\mathbb{Q}$  і узагальненим розв'язком рівняння  $u^2 = 2$ .

Теорію узагальнених функцій, як і теорію дійсних чисел, можна будувати різними способами. Спочатку зупинимось на підході, запропонованому Р. Сікорським і Я. Мікусінським. Послідовність  $(f_k)$  неперервних на  $\mathbb{R}$  функцій  $f_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  зветься MS-фундаментальною, якщо існують така послідовність  $(F_k)$  функцій  $F_k: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  і ціле число  $n \geq 0$ , що: 1)  $F_k^{(n)}(x) = f_k(x)$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$  і  $x \in \mathbb{R}$ ; 2) послідовність  $(F_k)$  рівномірно збігається на кожному компактi з  $\mathbb{R}$ . Дві MS-

## Розділ 4

фундаментальні послідовності  $(f_k)$  і  $(g_k)$  назвемо еквівалентними, якщо існують ціле число  $n \geq 0$  та послідовності  $(F_k)$  і  $(\Phi_k)$  такі, що: 2)  $F_k^{(n)}(x) = f_k(x)$ ,  $\Phi_k^{(n)}(x) = g_k(x)$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$  і  $x \in \mathbb{R}$ ; 3) послідовність  $(F_k - \Phi_k)$  збігається до 0 рівномірно на кожному компактi з  $\mathbb{R}$ . Це відношення ділить всі MS-фундаментальні послідовності на попарно неперетинні класи. Кожний такий клас  $f$  називається узагальненою функцією. Узагальнена функція  $f$  однозначно визначається будь-якою послідовністю  $(f_k)$ , яка входить у відповідний клас, і цей факт записують так:  $f = (f_k)$ . Кожна неперервна функція  $f \in$  узагальненою функцією, бо можна взяти  $f_k = f$ ,  $n = 0$  і  $F_k = f_k$ .

Згідно з теоремою Вейерштрасса для кожної неперервної на  $\mathbb{R}$  функції  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  існує послідовність поліномів, яка рівномірно на кожному компактi з  $\mathbb{R}$  збігається до  $f$ . Отже, для кожної MS-фундаментальної послідовності  $(f_k)$  існує їй еквівалентна послідовність  $(g_k)$  нескінченно диференційовних функцій. Тому далі, говорячи про узагальнену функцію  $f = (f_k)$ , вважаємо, що  $(f_k)$  – послідовність нескінченно диференційовних функцій. Якщо послідовність  $(f_k)$  є MS-фундаментальною, то для кожного  $n \in \mathbb{Z}$  послідовність  $(f_k^{(n)})$ , також є MS-фундаментальною послідовністю. При цьому функція  $f^{(n)} = (f_k^{(n)})$  називається  $n$ -ою похідною функції  $f$ . Таким чином, кожна узагальнена функція має похідні всіх порядків.

Добуток двох довільних узагальнених функцій не можна, природним чином визначити в просторі узагальнених функцій. Ця проблема ще недостатньо досліджена. На практиці узагальнені функції множать, надаючи в кожному конкретному випадку добутку певного змісту. Добуток узагальненої функції і достатньо гладкої можна визначити коректно в просторі узагальнених функцій.

Нехай  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  – множина всіх нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$  функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  таких, що  $\varphi(x) = 0$  для всіх  $x$ , які не належать деякому скінченному проміжку  $[a; b]$ . Інтегралом добутку узагальненої функції  $f = (f_k)$  і неперервної функції  $\varphi$  називається границя

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx := \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\varphi(x)dx. \quad (1)$$

## Розділ 4

Не для кожної неперервної функції  $\varphi$  границя (1) існує. Проте, якщо  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , то границя (1) існує, бо при відповідному  $n$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_k(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} F_k(x)\varphi^{(n)}(x)dx,$$

а послідовність  $(F_k)$  рівномірно збігається на компактах. Найбільш важливою узагальненою функцією є  $\delta$ -функція Дірака. Так називають узагальнену функцію  $\delta = (\delta_k)$ , що визначається MS-фундаментальною послідовністю, яка має властивості: а)  $\delta_k(x) \geq 0$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$  і  $x \in \mathbb{R}$ ; б) існує послідовність  $(\varepsilon_k)$ ,  $0 < \varepsilon_k \rightarrow 0$ , така, що  $\delta_k(x) = 0$  для всіх  $x \notin [-\varepsilon_k; \varepsilon_k]$ ; в) всі  $\delta_k$  є нескінченно диференційовними функціями на

$\mathbb{R}$ ; г)  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_k(x)dx = 1$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Послідовність, яка має властивості а)–г),

називається  $\delta$ -послідовністю. Прикладом  $\delta$ -послідовності може служити послідовність  $\delta_k(x) = k\omega_1(kx)$ , де  $\omega_1(x) = c_1 \exp(-1/(1-x^2))$ , якщо  $|x| < 1$  і  $\omega_1(x) = 0$ , якщо  $|x| \geq 1$  і стала  $c_1$  підібрана так, щоб

$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_k(x)dx = 1$ . Із умов а)–г) випливає, що  $\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k(x) = 0$ ,  $x \neq 0$ , і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \delta_k(0) = +\infty.$$

**Теорема 1.** Якщо  $\delta = (\delta_n)$  є  $\delta$ -послідовністю, то для кожної неперервної на  $\mathbb{R}$  функції  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  виконується

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_k(x)\varphi(x)dx = \varphi(0),$$

тобто  $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0)$ .

**Доведення.** За теоремою про середнє

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_k(x)\varphi(x)dx &= \int_{-\varepsilon_k}^{\varepsilon_k} \delta_k(x)\varphi(x)dx \\ &= \varphi(\theta_k) \int_{-\varepsilon_k}^{\varepsilon_k} \delta_k(x)dx \rightarrow \varphi(0), \quad k \rightarrow \infty, \quad -\varepsilon_k < \theta_k < \varepsilon_k. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

## Розділ 4

Теорема 1 дає можливість надати певний сенс рівностям

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\varphi(x)dx = \varphi(0), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)dx = 1,$$

і уявляти  $\delta$ -функцію як послідовність  $(\delta_k(x))$  неперервних функцій з певними властивостями:  $\delta(x) \approx \delta_k(x)$  для великих  $k$ . Наведена вище трактовка узагальнених функцій є зручною при розгляді ряду проблем. Разом з цим, в багатьох випадках зручнішою є трактовка узагальнених функцій, яка запропонована Л. Шварцом і С. Соболевым.

**8. Простір  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ .** Нехай  $C^{(\infty)}(\mathbb{R})$  – множина всіх функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , нескінченно диференційовних на  $\mathbb{R}$ , а  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  – множина фінітних нескінченно диференційовних функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , тобто тих функцій  $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , які приймають нульові значення поза деяким проміжком  $[a; b] \subset \mathbb{R}$  (цей проміжок залежить від  $\varphi$ ). Прикладом функції  $\varphi$  із  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  може служити функція (її називають шапочкою)

$$\omega_1(x) = \begin{cases} c_1 \exp(-1/(1-x^2)), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

де  $c_1 > 0$  – стала. Далі вважаємо, що ця стала підібрана так, що

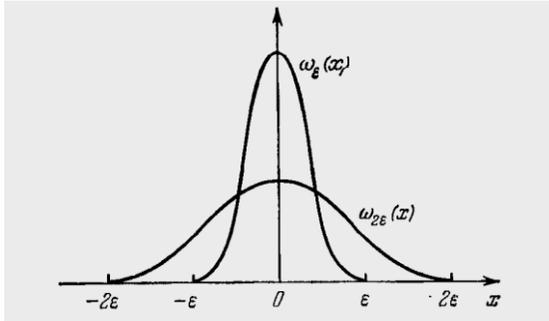
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(x)dx = 1. \text{ Нехай } \omega_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \omega_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad \varepsilon > 0. \text{ Тоді:}$$

$$1) \omega_\varepsilon \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}), \quad 2) \omega_\varepsilon(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$3) \omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} \frac{c_1}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right), & |x| < \varepsilon, \\ 0, & |x| \geq \varepsilon, \end{cases} \quad 4) \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_\varepsilon(x)dx = 1,$$

$$5) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \omega_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ +\infty, & x = 0, \end{cases} \quad 6) \varepsilon |\omega_\varepsilon(x)| \leq c_1, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon \in (0; +\infty).$$

## Розділ 4



Функція  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  називається фінітною, якщо існує такий проміжок  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ , що  $\varphi(x) = 0$  для всіх  $x \notin [a; b]$ . Отже,  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  – це множина всіх фінітних нескінченно диференційовних функцій  $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

Послідовність  $(\varphi_k)$  називається збіжною в  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  до 0, якщо існує такий проміжок  $[a; b] \in \mathbb{R}$ , що: а)  $(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a; b]): \varphi_k(x) = 0$ ; б) для кожного  $n \in \mathbb{Z}_+$  послідовність  $(\varphi_k^{(n)})$  рівномірно збігається на  $[a; b]$  до нуля, тобто  $(\forall n \in \mathbb{Z}_+)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*)(\forall x \in [a; b]): |\varphi_k^{(n)}(x)| < \varepsilon$ . Кажуть, що послідовність  $(\varphi_k)$  збігається в  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  до функції  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , якщо послідовність  $(\varphi_k - \varphi)$  збігається в  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  до нуля. Отже,  $\varphi_k \rightarrow \varphi$  в  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , якщо існує такий проміжок  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ , що: б)  $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a; b]): \varphi(x) = 0$  і  $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \in \mathbb{R} \setminus [a; b]): \varphi_k(x) = 0$ ; в) для кожного  $n \in \mathbb{Z}_+$  послідовність  $(\varphi_k^{(n)})$  рівномірно збігається на  $[a; b]$  до  $\varphi^{(n)}$ , тобто

$$(\forall [a; b] \subset \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z}_+)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^* \in \mathbb{N})(\forall k \geq k^*)(\forall x \in [a; b]):$$

$$|\varphi_k^{(n)}(x) - \varphi^{(n)}(x)| < \varepsilon.$$

**Приклад 1.** Функція  $\omega_\varepsilon$  є фінітною.

**Приклад 2.** Якщо  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  і  $\alpha \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , то  $\alpha\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , тобто простір  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  є інваріантним відносно оператора множення на нескінченно диференційовну функцію.

## Розділ 4

**Приклад 3.** Функція  $\varphi(t) = \omega_1(t) \sin t$  належить до  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ .

**Приклад 4** Послідовність  $\varphi_k(x) = \omega_1(x) + \omega_1(x)/k$  збігається в  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  до  $\omega_1(x)$ .

### 9. Простір основних і узагальнених функцій однієї змінної.

Лінійним функціоналом на  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  називається така функція  $f: C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$ , що для будь-яких  $c_1 \in \mathbb{C}$ ,  $c_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\varphi_1 \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  і  $\varphi_2 \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  виконується  $f(c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2) = c_1 f(\varphi_1) + c_2 f(\varphi_2)$ .

Функціонал  $f$  зветься неперервним на  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , якщо для будь-якої збіжної в  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  послідовності  $(\varphi_k)$  виконується  $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\varphi_k) = f\left(\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_k\right)$ .

Для того щоб лінійний функціонал  $f: C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{C}$  був неперервним, необхідно і достатньо, щоб для кожного компакта  $K \subset \mathbb{R}$  існували такі  $c_1 \in (0; +\infty)$  і  $\nu \in \mathbb{Z}_+$ , що  $|f(\varphi)| \leq c_1 \sum_{i \leq \nu} \sup \{ |\varphi^{(i)}(x)| : x \in K \}$  для всіх  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , які дорівнюють нулеві поза  $K$ .

Простір  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  називають простором основних функцій і його часто позначають через  $D$ . Елементи простору  $D$  називають також пробними функціями. Узагальненою функцією на  $\mathbb{R}$  або розподілом на  $\mathbb{R}$  називають кожний лінійний неперервний функціонал на  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ . Сукупність всіх узагальнених функцій називається простором узагальнених функцій і позначають через  $D'$  або  $(C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$ . Значення функції  $f \in D'$  на елементі  $\varphi \in D$  ми інколи позначаємо через  $(f; \varphi)$  або  $\langle f; \varphi \rangle$ . Отже,  $f(\varphi) = (f; \varphi) = \langle f; \varphi \rangle$ . Узагальнену функцію часто позначають через  $f(x)$ , де  $x \in \mathbb{R}$ . Проте, говорити про значення узагальненої функції  $f$  в точці  $x \in \mathbb{R}$ , взагалі кажучи, не можна. Тому для узагальнених функцій  $f(x)$  – це тільки символ для її позначення.

**Приклад 1.** Функціонал  $f(\varphi) = \varphi(0)$  є лінійним і неперервним, тобто є узагальненою функцією.

**Приклад 2.** Функціонал  $f(\varphi) = \varphi(0) + 2\varphi''(0)$  є лінійним і неперервним, тобто є узагальненою функцією.

**Приклад 3.** Функціонал  $f(\varphi) = \varphi^2(0)$  не є лінійним і, отже, не є узагальненою функцією.

## Розділ 4

**Приклад 4.** Функціонал  $f(\varphi) = \varphi(0) + 1$  не є лінійним і, отже, не є узагальненою функцією.

**Приклад 5.** Функціонал  $f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)dx$  є лінійним і, отже, є узагальненою функцією. Інтегруючи частинами переконуємося, що його подати також у вигляді

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \varphi'(x) dx / 2! = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 \varphi''(x) dx / 3! \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{3} x \varphi(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{6} x^2 \varphi'(x) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{18} x^3 \varphi''(x) dx = \dots \end{aligned}$$

**Приклад 6.** Функціонал  $(f; \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_s(x) \varphi^{(s)}(x) dx$  є узагальненою функцією для кожної функції  $f_s \in C(\mathbb{R})$ .

**Приклад 7.** Кожна функція  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  обмеженої варіації на кожному проміжку  $[a; b] \subset \mathbb{R}$  рівністю  $f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dF(t)$  задає узагальнену функцію.

**Приклад 8.** Функціонал  $f(\varphi) = \varphi^{(k)}(0)$  є узагальненою функцією.

Узагальнена функція  $f \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$  зветься додатною, якщо  $f(\varphi) \geq 0$  для всіх таких функцій  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , що  $\varphi(x) \geq 0$  для всіх  $x \in \mathbb{R}$ . Для кожної додатної узагальненої функції  $f \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$  існує така неперервна зліва і неспадна на  $\mathbb{R}$  функція  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , що  $f(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dF(t)$  для всіх  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , тобто кожна додатна узагальнена функція є мірою.

**Приклад 9.** Функціонал  $f(\varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x+i\varepsilon} \varphi(x) dx$  є узагальненою функцією, яку позначають через  $\frac{1}{x+i0}$ .

**10. Регулярні узагальнені функції однієї змінної.** Функцію  $\tilde{f}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  називають локально сумовною або локально інтегровною на

## Розділ 4

$\mathbb{R}$  і пишуть  $\tilde{f} \in L_{1,loc}(\mathbb{R})$ , якщо вона є інтегрованою на кожному скінченному проміжку  $[a;b] \subset \mathbb{R}$ . Кожна локально сумовна на  $\mathbb{R}$  функція  $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  породжує лінійний неперервний функціонал на  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  (його також позначаємо через  $\tilde{f}$ ) за формулою

$$(f; \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(x)\varphi(x)dx. \quad (1)$$

Таким чином, кожна локально сумовна на  $\mathbb{R}$  функція  $\tilde{f}$  є узагальненою функцією. Внаслідок цього, значення функціоналу  $f \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$  на елементі  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  позначають також символом  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ . Таким

чином,  $f(\varphi) = (f; \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx$ . Зокрема, кожна стала  $c \in \mathbb{R}$  задає сталу узагальнену функцію (її також позначають через  $c$ ) і при цьому

$$(c; \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} c\varphi(x)dx.$$

Узагальнена функція  $f$  зветься регулярною, якщо вона породжується деякою локально сумовною на  $\mathbb{R}$  функцією  $\tilde{f}$  за формулою (1). Узагальнена функція  $f$  зветься сингулярною, якщо вона не є регулярною.

**Приклад 1.** Рівність  $(f; \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^x \varphi(x)dx$  задає узагальнену функцію.

**Приклад 2.** Якщо  $f \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$  і  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , то інтегруючи частинами отримуємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f'(x)\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi'(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f''(x)\varphi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi''(x)dx, \dots,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^k \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi^{(k)}(x)dx.$$

**11.  $\delta$ -функція Дірака та інші сингулярні функції.** Функціонал  $\delta$ , який визначається рівністю  $(\delta; \varphi) = \varphi(0)$ , зветься  $\delta$ -функцією Дірака.

## Розділ 4

Такий функціонал є лінійним і неперервним, але не породжується жодною локально сумовною функцією. Таким чином,  $\delta$ -функція є сингулярною узагальненою функцією. Функція  $\delta_{x_0}$ , визначена рівністю  $(\delta_{x_0}; \varphi) = \varphi(x_0)$ , називається  $\delta$ -функцією зосередженою в точці  $x_0$ . Її

позначають також через  $\delta(x - x_0)$ . Отже,  $(\delta; \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) \varphi(x) dx = \varphi(0)$ ,

$$(\delta_{x_0}; \varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \varphi(x) dx = \varphi(x_0).$$

Функція  $\frac{1}{x}$  не є локально сумовною на  $\mathbb{R}$ . Проте, вона породжує

лінійний неперервний функціонал  $f$  на  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  рівністю

$$(f; \varphi) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx. \quad (1)$$

Цю узагальнену функцію позначають через  $\wp \frac{1}{x}$ . Слід мати на увазі, що якщо  $\varphi(x) = 0$  для  $x \notin [a; b]$ , то

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} \varphi(x) dx &= \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + v.p. \int_a^b \frac{\varphi(0)}{x} dx \\ &= \int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + v.p. \int_a^b \frac{\varphi(0)}{x} dx, \\ v.p. \int_a^b \frac{\varphi(0)}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_a^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^b \right) \frac{\varphi(0)}{x} dx = \varphi(0) \ln |b/a|, \end{aligned}$$

а інтеграл  $\int_a^b \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$  існує як інтеграл Рімана. Функція  $\frac{1}{x^2}$  не є локально сумовною на  $\mathbb{R}$ . Проте вона також породжує узагальнену функцію  $\wp_1 \frac{1}{x^2}$  за формулою

$$\left( \wp_1 \frac{1}{x^2}; \varphi \right) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^2} dx.$$

Добуток двох узагальнених функцій не можна природним чином визначити. Добутком узагальненої функції  $f \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$  і функції

## Розділ 4

$q \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$  називається така узагальнена функція  $F = qf$ , що  $(\forall \varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})) : F(\varphi) = f(q\varphi)$ .

**Приклад 1.** Якщо  $q \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$  і  $q(0) = 0$ , то  $q\delta = 0$ , бо  $(q\delta; \varphi) = (\delta; q\varphi) = q(0)\varphi(0) = 0 = (0; \varphi)$ .

**Приклад 2.** Якщо  $q \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$  і  $q(0) = 1$ , то  $q\delta = \delta$ , бо  $(q\delta; \varphi) = (\delta; q\varphi) = q(0)\varphi(0) = \varphi(0) = (\delta; \varphi)$ .

**Приклад 3.**  $x\delta \frac{1}{x} = 1$ , бо

$$\left(x\delta \frac{1}{x}; \varphi\right) = \left(\delta \frac{1}{x}; \varphi x\right) = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\varphi(x)}{x} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = (1; \varphi).$$

**12. Похідна узагальненої функції однієї змінної.** Похідною узагальненої функції  $f \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$  називають таку узагальнену функцію  $f' \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$ , що

$$(\forall \varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})) : (f'; \varphi) = -(f; \varphi'). \quad (1)$$

За означенням  $f^{(0)} = f$ . Якщо  $k \in \mathbb{N}$ , то  $k$ -ою похідною узагальненої функції  $f \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$  називається така узагальнена функція  $f^{(k)} \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$ , що  $(\forall \varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})) : (f^{(k)}; \varphi) = -(f^{(k-1)}; \varphi')$ .

Кожна узагальнена функція має похідні всіх порядків і при цьому  $k$ -ою похідною узагальненої функції  $f \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$  є така узагальнена функція  $f^{(k)} \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$ , що  $(\forall \varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})) : (f^{(k)}; \varphi) = (-1)^{(k)}(f; \varphi^{(k)})$ .

**Зауваження 1.** Означення похідної узагальненої функції рівністю (1) основане на тому, що якщо функція  $f$  є неперервно диференційовною

на  $\mathbb{R}$  і  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , то  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\varphi'(t)dt = -\int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)\varphi(t)dt$ .

**Приклад 1.** Якщо  $\eta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0, \end{cases}$  то

$$(\eta'; \varphi) = -(\eta; \varphi') = \int_0^{+\infty} \eta(t)\varphi'(t)dt = \int_0^{+\infty} \varphi'(t)dt = \varphi(0).$$

Отже,  $\eta' = \delta$ .

**Приклад 2.**  $(\delta'; \varphi) = -(\delta; \varphi') = -\varphi'(0)$ . Отже, похідною  $\delta$ -функції

## Розділ 4

є така узагальнена функція  $\delta'$ , яка функції  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  ставить у відповідність число  $-\varphi'(0)$ .

**Приклад 3.**  $(\delta'(x-x_0); \varphi) = -(\delta(x-x_0); \varphi') = -\varphi'(x_0)$ . Отже, похідною функції  $\delta(x-x_0)$  є така узагальнена функція  $\delta'(x-x_0)$ , яка функції  $\varphi \in C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$  ставить у відповідність число  $\varphi'(x_0)$ .

**Приклад 4.**  $(\delta^{(k)}; \varphi) = (-1)^k (\delta; \varphi^{(k)}) = (-1)^k \varphi^{(k)}(0)$ .

**Приклад 5.** Якщо  $f(x) = \sin x$ , то

$$\begin{aligned} (\sin' x; \varphi) &= -(\sin x; \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi'(x) dx \\ &= -\left( \sin x \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot \varphi(x) dx \right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot \varphi(x) dx = (\cos x; \varphi), \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Таким чином,  $\sin' = \cos$  в розумінні узагальнених функцій. Аналогічно,

$$\begin{aligned} (\cos' x; \varphi) &= -(\cos x; \varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \cos x \cdot \varphi'(x) dx \\ &= -\left( \cos x \varphi(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi(x) dx \right) \\ &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \sin x \cdot \varphi(x) dx = (-\sin x; \varphi), \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Таким чином,  $\cos' = -\sin$  в розумінні узагальнених функцій.

**Приклад 6.**

$$\begin{aligned} \left( (\ln|x|)' ; \varphi \right) &= -\left( (\ln|x|); \varphi' \right) = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x) \ln|x| dx \\ &= -\int_0^{+\infty} \varphi'(x) \ln x dx - \int_{-\infty}^0 \varphi'(x) \ln(-x) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx + \int_{-\infty}^0 \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \left( \wp \frac{1}{x}; \varphi \right), \quad \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

**Приклад 7.** Оскільки

## Розділ 4

$$\left( \left( \wp \frac{1}{x} \right)' ; \wp \right) = - \left( \left( \wp \frac{1}{x} \right) ; \wp' \right) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\wp'(x) - \wp'(0)}{x} dx = -v.p \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\wp(x) - \wp(0)}{x^2} dx,$$

$$\text{то } \left( \wp \frac{1}{x} \right)' = - \wp_1 \frac{1}{x^2}.$$

**Зауваження 2.** Розглядаючи вище узагальнені функції ми брали як основний простір  $D = C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ , тобто розглядали узагальнені функції з класу  $(C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$ . Проте за простір  $D$  можна брати і інші простори:  $C^\infty(\mathbb{R})$ ,  $S(\mathbb{R})$ ,  $C_0^{(k)}(\mathbb{R})$ , різні простори голоморфних функцій та інші.

**13. Гармонійні функції.** Функція  $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  називається гармонійною в області  $D$ , якщо вона має в  $D$  неперервні частинні похідні другого порядку і

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x; y) \in D, \quad (1)$$

в кожній точці  $(x; y) \in D$ . Значення  $u(x; y)$  гармонійної функції  $u$  в точці  $(x; y)$  ми позначаємо також через  $u(z)$  і вважаємо, що  $z = x + iy$ . Це ж стосується субгармонійних функцій, про які йтиметься в наступному пункті.

Оператор  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  зветься оператором Лапласа. Отже,

гармонійні функції – це функції, які є розв'язками рівняння Лапласа  $\Delta u = 0$ . Якщо функція  $f$  є голоморфною в області  $D$ , то функція  $u = \operatorname{Re} f$  є гармонійною в  $D$ . Для того щоб неперервна в області  $D$  функція  $u$  була гармонійною в  $D$ , необхідно і достатньо, щоб

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(z + \rho e^{i\theta}) d\theta \quad \text{всіх } z \in D \text{ і } \rho, \quad 0 < \rho < \inf \{ |\zeta - z| : \zeta \in \partial D \}.$$

Окрім цього,  $u(z) = \frac{1}{\pi \rho^2} \iint_{|\zeta - z| \leq \rho} u(\zeta) d\xi d\eta$ , де  $\zeta = \xi + i\eta$ , для кожної гармонійної функції  $u$ .

**Приклад 1.** Функція  $u(z) = e^x \cos y$  є гармонійною в  $\mathbb{R}^2$ , бо

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = e^x \cos y \quad \text{і} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^x \cos y.$$

## Розділ 4

**14. Субгармонійні функції.** Функція  $w: D \rightarrow [-\infty; +\infty)$  зветься напівнеперервною зверху на множині  $D$ , якщо  $(\forall z \in D): \lim_{D \ni \zeta \rightarrow z} w(\zeta) \leq w(z)$ . Функція  $w: \mathbb{C} \rightarrow [-\infty; +\infty)$  зветься субгармонійною в області  $D \subset \mathbb{C}$ , якщо вона є напівнеперервною зверху в  $D$  і для кожного  $z \in D$  знайдеться таке  $r_0$ , що для кожного  $\rho \in (0; r_0)$  виконується

$$w(z) \leq \frac{1}{2\pi\rho} \int_{\partial U(z; \rho)} w(\zeta) |d\xi|, \quad (1)$$

тобто  $w(z) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} w(z + \rho e^{i\theta}) d\theta$ . Інтеграл (1) є або збіжним або розбіжним до  $-\infty$ . Нерівність (1) в цьому означенні можна замінити

нерівністю  $w(z) \leq \frac{1}{\pi\rho^2} \iint_{U(z; \rho)} w(\zeta) d\xi d\eta$ , де  $\zeta = \xi + i\eta$ , тобто нерівністю

$$w(z) \leq \frac{1}{\pi\rho^2} \int_0^\rho \int_0^{2\pi} w(z + \tau e^{i\theta}) \tau d\tau d\theta.$$

Нехай  $C_0^\infty(D)$  – множина всіх функцій  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ , нескінченно диференційовних в області  $D$ , значення яких дорівнюють нулеві поза деяким компактом  $E \subset D$ ,  $C_{0+}^\infty(D)$  – множина невід’ємних функцій  $\varphi \in C_0^\infty(D)$ . Для того щоб функція  $w: \mathbb{C} \rightarrow [-\infty; +\infty)$ ,  $w \not\equiv -\infty$ , була субгармонійною в області  $D \subset \mathbb{C}$ , необхідно і достатньо, щоб вона була локально сумовною в  $D$  і

$$(\forall \varphi \in C_{0+}^\infty(D)): \iint_D w(z) \Delta\varphi(z) dx dy \geq 0. \quad (2)$$

Якщо  $w$  має неперервні частинні похідні другого порядку в  $D$ , то умова (2) рівносильна умові

$$(\forall z = x + iy \in D): \Delta w(z) \geq 0. \quad (3)$$

Це випливає з формули Гріна

$$\iint_D w(z) \Delta\varphi(z) dx dy = \iint_D \Delta w(z) \varphi(z) dx dy. \quad (4)$$

Отож, функція  $w$  є субгармонійною в області  $D$ , якщо  $\Delta w$  є додатною узагальненою функцією. Тому існує єдина міра  $\mu$  (додатна) така, що

## Розділ 4

$$(\forall \varphi \in C_0^\infty(D)) : \iint_D w(z) \Delta \varphi(z) dx dy = 2\pi \int_D \varphi d\mu. \quad (5)$$

Ця міра  $\mu$  зветься мірою Рісса функції  $w$ . Можна сказати, що  $\mu = \frac{1}{2\pi} \Delta w$  в розумінні узагальнених функцій. Міра Рісса, трактована як функція множин, є визначеною на всіх борелевих підмножинах  $E \subset D$  і є скінченною на кожному компактi з  $D$ .

**Приклад 1.** Якщо функція  $w$  є гармонійною в області  $D$ , то вона є субгармонійною в  $D$ .

**Приклад 2.** Функція  $w = e^x + y^2$  є субгармонійною в  $\mathbb{R}^2$ , бо  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = e^x$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2$  і  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = e^x + 2 \geq 0$ .

**Приклад 3.** Якщо функція  $w \neq -\infty$  є субгармонійною в області  $D$ , а функція  $\eta: [-\infty; +\infty) \rightarrow [0; +\infty)$  – зростаюча і опукла на деякому проміжку, що містить множину значень функції  $w$ , то функція  $\omega(z) = \eta(w(z))$  є субгармонійною в області  $D$ .

**Приклад 4.** Якщо  $w$  – субгармонійна в області  $D$ , то функція  $w^+$  також субгармонійна в  $D$ . Справді,  $w^+(z) = \max\{w(z); 0\}$ , а максимум двох субгармонійних функцій є функція субгармонійна.

**Приклад 5.** Якщо функція  $f$  є голоморфною в області  $D$ , то функції  $w(z) = \ln|f(z)|$ ,  $w(z) = \ln^+|f(z)|$  та  $|f(z)|^\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , є субгармонійними в  $D$ .

**Приклад 6.** Якщо функція  $u$  є гармонійною в області  $D$  і  $\alpha \geq 1$ , то функція  $|U(z)|^\alpha$  є субгармонійною в  $D$ .

**Приклад 7.** Функція  $w(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$  є субгармонійною в  $\mathbb{C}$ , бо функція  $f(z) = z$  є цілою і  $w(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \ln|z| = \ln|f(z)|$ . При цьому,  $\mu = \delta$  – її міра Рісса, бо згідно з формулою Гріна

$$\iint_{\mathbb{C}} \ln|z| \Delta \varphi(z) dx dy = \iint_{\mathbb{C}} \varphi(z) \Delta \ln|z| dx dy = \left( \iint_{|z| \leq \varepsilon} + \iint_{|z| > \varepsilon} \right) \varphi(z) \Delta \ln|z| dx dy$$

## Розділ 4

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\varepsilon e^{i\theta}) d\theta + o(1) = 2\pi\varphi(0) + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0+.$$

**Приклад 8.** Функція  $w(z) = |z|^\rho$ ,  $0 < \rho < +\infty$ , є субгармонійною в  $\mathbb{C}$  і

$$\mu(D) = \frac{\rho(\rho+1)}{\pi} \iint_{(D)} |z|^{\rho-2} dx dy,$$

– її міра Рісса. Справді, якщо  $\rho \geq 2$ , то  $w$  двічі неперервно диференційована в  $\mathbb{C}$  і

$$\Delta w = 2\rho(\rho+1) |z|^{\rho-2}.$$

Звідси випливає потрібне. В загальному випадку скористаємось формулою Гріна. Згідно з нею для всіх  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{C}} |z|^\rho \Delta \varphi(z) dx dy &= \iint_{\mathbb{C}} \varphi(z) \Delta |z|^\rho dx dy = \left( \iint_{|z| \leq \varepsilon} + \iint_{|z| \geq \varepsilon} \right) |z|^\rho \Delta \varphi(z) dx dy \\ &= 2\rho(\rho+1) \iint_{\mathbb{C}} |z|^{\rho-2} \varphi(z) dx dy + o(1), \quad \varepsilon \rightarrow 0+. \end{aligned}$$

**Приклад 9.** Якщо  $\rho \in (0; +\infty)$ , а функція  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  є тригонометрично  $\rho$ -опуклою і  $2\pi$ -періодичною, то функція  $w(z) = r^\rho h(\theta)$ ,  $z = re^{i\theta}$ , є субгармонійною в  $\mathbb{C}$ . Зокрема, субгармонійною в  $\mathbb{C}$  є функція  $w(z) = r^\rho \cos \rho\theta$ .

**Приклад 10.** Якщо  $f$  – ціла функція, то функція  $w(z) = \ln |f(z)|$  – субгармонійна в  $\mathbb{C}$  і  $\mu(D) = \sum_{\lambda_n \in D} 1$  – її міра Рісса.

**Теорема 1.** Якщо  $\mu$  – додатна міра в області  $D$ , яка визначена на всіх борелевих множинах з  $D$  і є скінченною на кожному компактні з  $D$ , то функція  $P(z) = \iint_{\bar{G}} \ln |z - \zeta| d\mu$  є субгармонійною в кожній обмеженій області  $G$  такій, що  $\bar{G} \subset D$  і її міра Рісса в  $G$  співпадає з зваженням  $\mu$  на  $G$ .

**Теорема 2.** Нехай функція  $w \neq -\infty$  є субгармонійною в області  $D$  і  $\mu$  – її міра Рісса в  $D$ . Тоді в кожній обмеженій області  $G$  такій, що

## Розділ 4

$\bar{G} \subset D$ , справедливе зображення  $w(z) = P(z) + v(z)$ , де  $v$  – гармонійна функція в  $G$  і  $P(z) = \iint_G \ln|z - \zeta| d\mu$ .

**Приклад 11.** Функція  $w(z) = \ln|\sin z|$  є субгармонійною в  $\mathbb{C}$ ,

$$\mu(D) = \sum_{k \in D} 1 \quad - \text{ її міра Рісса, } P(z) = \int_{|\zeta| \leq 6,5} \ln|z - \zeta| d\mu = \sum_{k \in -6;6} \ln|z - k| \quad \text{і}$$

$$v(z) = \ln|\sin z| - P(z) = \ln \left| z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - (z/k\pi)^2) \right| - \sum_{k \in -6;6} \ln|z - k| = \ln \left| \prod_{k=7}^{\infty} (1 - (z/k\pi)^2) \right|.$$

### 15. Запитання для самоконтролю.

1. Сформулюйте означення показника збіжності послідовності.
2. Сформулюйте теорему Адамара.
3. Сформулюйте теорему Бореля.
4. Сформулюйте означення роду цілої функції.
5. Сформулюйте теорему Ліндельофа.
6. Сформулюйте означення простору  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ .
7. Сформулюйте означення лінійного неперервного функціонала на просторі  $C_0^{(\infty)}(\mathbb{R})$ .
8. Сформулюйте означення узагальненої функції.
9. Сформулюйте означення простору  $(C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$ .
10. Сформулюйте означення похідної узагальненої функції.

### 16. Вправи і задачі.

1. Знайдіть показник збіжності та рід послідовності

- |                               |                                     |                                       |
|-------------------------------|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\lambda_k = k^2$ .        | 2. $\lambda_k = k^2 \ln^4(1+k)$ .   | 3. $\lambda_k = e^k$ .                |
| 4. $\lambda_k = \ln^4(1+k)$ . | 5. $\lambda_k = k + \sqrt{k}$ .     | 6. $\lambda_k = e^{\sqrt{k}} + k^4$ . |
| 7. $\lambda_k = e^k + k^4$ .  | 8. $\lambda_k = 2^k + \ln^4(1+k)$ . | 9. $\lambda_k = k^3 + k \ln^4(1+k)$ . |

2. Знайдіть порядок функції  $f$  і з'ясуйте, чи вона має скінченний тип

- |  |   |
|--|---|
| 1. $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/k^3)$ .           | 2. $f(z) = e^z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/k^2)$ .            |
| 3. $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - (2z/k)^2)$ .        | 4. $f(z) = e^z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/(k \ln^2(1+k)))$ . |
| 5. $f(z) = e^z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/k) e^{z/k}$ . | 6. $f(z) = e^{2z} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/k^3)$ .         |

## Розділ 4

$$7. f(z) = e^{1+z+2z^2} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/k^2). \quad 8. f(z) = e^{1+10z+2z^4} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - z/e^{\sqrt{k}}\right).$$

$$9. f(z) = e^z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\sqrt{k}) e^{z/\sqrt{k} + 0.5(z/\sqrt{k})^2}. \quad 10. f(z) = e^z \prod_{k=1}^{\infty} (1 - zk^3/2^k).$$

$$11. f(z) = e^{1+10z+2z^4} \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - ze^{\sqrt[3]{k}}/2^k\right).$$

$$12. f(z) = e^{2z^3} \prod_{k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} (1 - 2z/k) e^{2z/k}.$$

$$13. f(z) = e^{z+3z^2} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z/\sqrt{k} \ln(1+z)) e^{z/\sqrt{k} \ln(1+k) + 0.5(z/\sqrt{k} \ln(1+k))^2}.$$

$$14. f(z) = e^z \prod_{k \in \mathbb{N}} E(z/\lambda_k; 2), \quad \lambda_{4k} = k^{1/2}, \quad \lambda_{4k+1} = ik^{1/2}, \quad \lambda_{4k+2} = -k^{1/2}, \\ \lambda_{4k+3} = -ik^{1/2}.$$

**3.** Довести, що якщо  $(\lambda_k)$  – послідовність комплексних чисел із  $\mathbb{C}_+$  таких, що  $|\lambda_k| \leq 1$ ,  $\sum_k \operatorname{Re} \lambda_k < +\infty$ , то добуток Бляшке

$B(z) = \prod_k (z - \lambda_k)/(z + \bar{\lambda}_k)$  рівномірно і абсолютно збігається на кожному

компакті із  $\mathbb{C}_+$  і  $|B(z)| \leq 1$ . Якщо ж  $(\lambda_k)$  – послідовність комплексних чисел із  $\mathbb{C}_+$  таких, що  $|\lambda_k| > 1$ ,  $\sum_k \operatorname{Re} \lambda_k / |\lambda_k|^2 < +\infty$ , то такими ж

властивостями володіє і добуток Бляшке  $B(z) = \prod_k (1 - z/\lambda_k)/(1 + z/\bar{\lambda}_k)$ .

**4.** З'ясуйте, чи написана рівність задає узагальнену функцію  $f \in (C_0^{(\infty)}(\mathbb{R}))'$

$$1. (f; \varphi) = 2\varphi'(1). \quad 2. (f; \varphi) = 2\varphi'(1) + \varphi(0). \quad 3. (f; \varphi) = \varphi(1) + 1.$$

$$4. (f; \varphi) = \varphi^2(0). \quad 5. (f; \varphi) = e^{\varphi(0)}. \quad 6. (f; \varphi) = \int_0^1 (\varphi(x) + 1) dx.$$

$$7. (f; \varphi) = \int_0^1 \varphi(x+1) dx. \quad 8. (f; \varphi) = \int_0^1 \varphi(x^2) dx. \quad 9. (f; \varphi) = \int_0^1 \varphi^2(x) dx.$$

$$10. (f; \varphi) = \int_0^1 \varphi(e^x) dx. \quad 11. (f; \varphi) = \int_0^1 e^{\varphi(x)} dx.$$

**5.** Виходячи з означення узагальненої похідної, доведіть формули

## Розділ 4

1.  $(x^2)' = 2x$ .    2.  $(e^x)' = e^x$ .    3.  $(\sin x)' = \cos x$ .    4.  $(\cos x)' = -\sin x$ .

5.  $(x^3)' = 3x^2$ .    6.  $(\sin 2x)' = 2\cos 2x$ .    7.  $(\cos 2x)' = -2\sin 2x$ .

8.  $(x^4)' = 4x^3$ .    9.  $(e^{2x})' = 2e^{2x}$ .    10.  $(e^{4x})' = 4e^{4x}$ .    11.  $(e^{5x})' = 5e^{5x}$ .

**6.** Знайдіть похідну вказаної узагальненої функції

1.  $f(x) = \delta(x)\sin 2x$ .    2.  $f(x) = \delta'(x)\cos^2 x$ .    3.  $f(x) = \delta(x)e^{-x}$ .

4.  $f(x) = \delta(x)e^{x^2}$ .    5.  $f(x) = \delta(x)e^{x^2}$ .    6.  $(f; \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx$ .

7.  $(f; \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) \sin x dx$ .    8.  $(f; \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) \cos x dx$ .

9.  $(f; \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) \cos x^2 dx$ .    10.  $(f; \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) e^{-x^2} dx$ .

**7.** З'ясуйте, чи функція  $u$  є гармонійною

1.  $u = x^2 - y^2$ .    2.  $u = x^2 + y^2$ .

3.  $u = x^4 y + xy^4$ .    4.  $u = x^4 + xy^2$ .

5.  $u = e^x \cos y$ .    6.  $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .

7.  $u = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)$ .    8.  $u = e^x \sin y$ .

9.  $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ .    10.  $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ .

**8.** З'ясуйте, чи функція  $w$  є субгармонійною

1.  $w = e^x + e^{2y}$ .    2.  $w = 3x^4 + 4y^6$ .

3.  $w = (x^2 + y^2)^{3/2}$ .    4.  $w = x^4 + 2x^2 y^2 + y^4$ .

5.  $w = x^2 + y^2 + e^x \cos y$ .    6.  $w = x^4 + 2x^2 y^2 + y^4 + y^4 e^{2x}$ .

7.  $w = \ln(x^2 + y^2) + e^{2x}$ .    8.  $w = x^2 + y^2 + x^2 e^y$ .

9.  $w = e^x \cos y + x^4$ .    10.  $w = e^x \sin y + y^6$ .

## Відповіді

## Відповіді

**Розділ 1. 1.1.** 2. **1.2.** 0. **1.3.** 3. **1.4.** 1. **1.5.** 6. **1.6.**  $+\infty$ . **1.7.**  $-\infty$ . **3.1.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . **3.2.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . **3.3.**  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ ,  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$  не існує. **3.6.**  $\overline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ,  $\underline{\lim}_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ . **3.17.**  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ . **5.1.** так. **5.2.** так. **5.3–5.9.** так. **5.10.** ні. **5.11.** ні. **5.12.** ні. **5.11–5.17.** так. **7.1.**  $a_0 = 0$ ,  $a_1 = 2$ . **7.2.**  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 2$ . **7.14.**  $a_0 = \sin 2$ ,  $a_1 = -4 \cos 2$ . **7.15.**  $a_0 = 1/2$ ,  $a_1 = 1/4$ . **8.1.**  $c_0 = 1$ ,  $m = 0$ . **8.9.**  $c_0 = 1$ ,  $m = 2$ . **8.10.**  $c_0 = 1$ ,  $m = 2$ . **9.1.** ні. **9.2.** ні. **9.3.** ні. **9.4.** ні. **9.5–9.10.** так. **10.1.** ні. **10.2.** ні. **10.3–10.6.** так. **11.1–11.3.** так. **11.4.** ні. **11.5–11.12.** так. **12.1–12.4.** ні. **12.5.** так. **12.6.** так. **13.2.**  $\varphi$  є нескінченно малою вищого порядку, ніж  $f$ . **13.14.**  $\varphi$  і  $f$  є нескінченно малими однакового порядку. **13.15.**  $\varphi$  і  $f$  є нескінченно малими однакового порядку. **13.16.**  $\varphi$  і  $f$  є нескінченно малими однакового порядку. **22.1.**  $\rho = 4$ ,  $\sigma = 3$ . **22.2.**  $\rho = 0$ , тип не визначається. **22.5.**  $\rho = 1/2$ ,  $\sigma = 1$ . **22.7.**  $\rho = 2$ ,  $\sigma = 3$ . **24.1.** є рівномірно збіжним. **24.4.** не є рівномірно збіжним. **24.9.** є рівномірно збіжним. **24.10.** не є рівномірно збіжним. **28.1.**  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 10$ . **28.2.**  $a_0 = 1$ ,  $a_1 = 1/2$ . **30.1.**

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{e^{-iy} - e^{2iy}}{iy\sqrt{2\pi}}, \quad y \neq 0, \\ 3\sqrt{2/\pi}, \quad y = 0. \end{array} \right. \quad \mathbf{31.1.} \quad \left\{ \begin{array}{l} 0, x \leq 0, \\ -x, x > 0. \end{array} \right.$$

**Розділ 2. 1.1.** є. **1.2.** є. **1.3.** не є. **1.4.** не є. **1.5.** є. **1.6.** не є. **1.7.** є. **1.8.** є. **1.9–1.14.** не є. **1.15.** є. **1.16.** не є. **1.17.** є. **1.18–1.24.** не є. **2.1.**  $1+r^2$ . **2.2.**  $e^{r^2}$ . **2.4.**  $1+3r^3$ . **2.9.**  $e^{r^3} + 2r$ . **4.1.** 1. **4.2.**  $1/2$ . **4.3.**  $+\infty$ . **4.4.** 0. **4.5.** 0. **4.6.** 0. **4.7.**  $1/2$ . **4.8.**  $1/4e$ . **4.9.**  $+\infty$ . **5.1.** збіжний. **5.3.** збіжний. **5.4.** розбіжний. **5.9.** розбіжний. **5.11.** збіжний. **5.15.** збіжний. **5.29.** розбіжний. **5.30.** збіжний. **5.31.** збіжний. **6.1.** є рівномірно і абсолютно збіжним на кожному компактi з  $\mathbb{C}$ . **6.2.** є рівномірно і абсолютно збіжним на кожному компактi з  $\mathbb{C}$ . **6.3.** є рівномірно і абсолютно збіжним на

## Відповіді

кожному компактi з  $\mathbb{C}$ . **6.4.** не є рівномiрно i абсолютно збiжним на кожному компактi з  $\mathbb{C}$ . **6.5.** не є рівномiрно i абсолютно збiжним на кожному компактi з  $\mathbb{C}$ . **6.6.** є рівномiрно i абсолютно збiжним на кожному компактi з  $\mathbb{C}$ . **6.11.** не є рівномiрно i абсолютно збiжним на кожному компактi з  $\mathbb{C}$ . **7.1.**  $\pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , нулi  $\pm\pi$  мають кратнiсть 2, всi

iншi нулi є простими. **8.1.**  $f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z / \lambda_k)$ . **8.2.**

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - z / \lambda_k) e^{z/\lambda_k}. \quad \mathbf{8.5.} \quad f(z) = \prod_{\lambda_k \neq 0} \left( 1 - \frac{z}{\lambda_k} \right) \exp \left( \sum_{j=1}^k \frac{z^j}{j \lambda_k^j} \right). \quad \mathbf{8.11.}$$

$$f(z) = \prod_{\lambda_k \neq 0} (1 - z / k^2)^3.$$

**Роздiл 3.** **1.1.**  $\rho=0$ . **1.2.**  $\rho=2$ ,  $\sigma=1$ . **1.3.**  $\rho=3$ ,  $\sigma=2$ . **1.4.**  $\rho=0$ . **1.5.**  $\rho=2$ ,  $\sigma=3$ . **1.6.**  $\rho=2$ ,  $\sigma=1$ . **1.7.**  $\rho=3$ ,  $\sigma=2$ . **1.8.**  $\rho=2$ ,  $\sigma=3$ . **1.9.**  $\rho=3$ ,  $\sigma=1$ . **1.10.**  $\rho=1$ ,  $\sigma=1$ . **1.12.**  $\rho=1/2$ ,  $\sigma=2/e$ . **1.12.**  $\rho=2$ ,  $\sigma=1/e$ . **1.13.**  $\rho=1$ ,  $\sigma=1$ . **1.14.**  $\rho=1$ ,  $\sigma=1$ . **1.15.**  $\rho=0$ . **1.16.**  $\rho=3/2$ ,  $\sigma=0$ . **1.17.**  $\rho=1/3$ ,  $\sigma=3\sqrt[3]{2}$ . **1.18.**  $\rho=9/2$ ,  $\sigma=0$ . **1.19.**  $\rho=2/3$ ,  $\sigma=3\sqrt[3]{16}$ . **2.1.**  $\sqrt{2} \cos(\theta + 3\pi/4)$ . **2.2.**  $\sqrt{2} \cos(\theta + \pi/4)$ . **2.3.**  $3 \cos(2\theta)$ . **2.4.**  $|\sin \theta|$ . **2.5.**  $|\sin \theta|$ . **2.11.**  $\sqrt{2} \cos(4\theta + \pi/4)$ . **2.12.**  $\sqrt{2} \cos(5\theta + 3\pi/4)$ .

**9.3.**  $\sum_{k=0}^{\infty} 1/z^{2k+1}$ .

**Роздiл 4.** **1.1.**  $\tau=1/2$ . **1.2.**  $\tau=1/2$ . **1.3.**  $\tau=0$ . **1.4.**  $\tau=+\infty$ . **1.5.**  $\tau=1$ . **1.6.**  $\tau=0$ . **1.7.**  $\tau=0$ . **1.8.**  $\tau=0$ . **1.9.**  $\tau=0$ . **2.1.**  $\rho=1/3$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.2.**  $\rho=1$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.3.**  $\rho=1/2$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.4.**  $\rho=1$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.5.**  $\rho=1$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.6.**  $\rho=2$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.7.**  $\rho=2$ ,  $\sigma = +\infty$ . **2.8.**  $\rho=4$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.9.**  $\rho=1$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.10.**  $\rho=1$ ,  $\sigma = +\infty$ . **2.11.**  $\rho=4$ ,  $\sigma < +\infty$ . **2.12.**  $\rho=3$ ,  $\sigma < +\infty$ . **6.1.**  $f(x) = \delta'(x) \sin 2x + \delta(x) \sin 4x$ . **7.1.** є. **7.2.** не є. **7.8.** є. **8.1.** є. **8.2.** є. **8.10.** є.

## Література

## Література

1. *Бицадзе А.В.* Основы теории аналитических функций комплексного переменного / *А.В. Бицадзе* – М.: Наука, 1972. – 263 с.
2. *Боярчук А.К.* Функции комплексного переменного: теория и практика. Справочное пособие по высшей математике: В 4-х т. / *А.К. Боярчук*. – М.: Едиториал, 2001. – Т. 4. – 352 с.
3. *Винницький Б.В., Хаць Р.В., Шепарович І.Б.* Основы одновимірного комплексного аналізу: Навчально-методичний посібник / *Б.В. Винницький, Р.В. Хаць, І.Б. Шепарович* – Дрогобич: Швидкодрук, 2012. – 273 с.
4. *Волковыский Л.И., Луц Г.Л., Арамович И.Г.* Сборник задач по теории функций комплексного переменного / *Л.И. Волковыский, Г.Л. Луц, И.Г. Арамович* – М.: Физматлит, 2004. – 312 с.
5. *Гольдберг А.А., Шеремета М.М., Заблоцький М.В., Скасків О.Б.* Комплексний аналіз / *А.А. Гольдберг, М.М. Шеремета, М.В. Заблоцький, О.Б. Скасків* – Львів: Афіша, 2002. – 203 с.
6. *Гольдберг А.А., Островский И.В.* Распределение значений мероморфных функций / *А.А. Гольдберг, И.В. Островский* – М.: Наука, 1970. – 592 с.
7. *Евграфов М.А.* Аналитические функции / *М.А. Евграфов* – М.: Наука, 1968. – 471 с.
8. *Евграфов М.А.* Асимптотические оценки и целые функции / *М.А. Евграфов* – М.: Наука, 1968. – 320 с.
9. *Евграфов М.А., Бежанов К.А. и др.* Сборник задач по теории аналитических функций / *М.А. Евграфов, К.А. Бежанов и др.* – М.: Наука, 1972. – 415 с.
10. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного / *М.А. Лаврентьев, Б.В. Шабат* – М.: Наука, 1973. – 471 с.
11. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / *Б.Я. Левин* – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
12. *Леонтьев А.Ф.* Ряды экспонент / *А.Ф. Леонтьев* – М.: Наука, 1976. – 536 с.
13. *Леонтьев А.Ф.* Целые функции. Ряды экспонент / *А.Ф. Леонтьев* – М.: Наука, 1983. – 176 с.

## Література

14. *Маркушевич А.И.* Теория аналитических функций: В 2-х т. / *А.И. Маркушевич* – М.: Наука, 1968. – Т. 1. – 321 с.; Т. 2. – 628 с.
15. *Привалов И.И.* Введение в теорию функций комплексного переменного / *И.И. Привалов* – М.: Наука, 1966. – 444 с.
16. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В 2-х т. / *Г Полиа., Г. Сеге* – М.: Наука, 1978. – Т. 1. – 392 с; Т. 2. – 432 с.
17. *Свешников А.Г., Тихонов А.Н.* Теория функций комплексного переменного / *А.Г. Свешников, А.Н. Тихонов* – М.: Наука, 1974. – 320 с.
18. *Стоилов С.* Теория функций комплексного переменного. В 2-х т. / *С. Стоилов* – М.: Иностранная литература, 1962. – Т. 1. – 364 с; Т. 2. – 416 с.
19. *Титчмарш Е.* Теория функций / *Е. Титчмарш* – М-Л.: ГИТТЛ, 1951. – 508 с.
20. *Шабат Б.В.* Введение в комплексный анализ / *Б.В. Шабат* – М.: Наука, 1969. – 576 с.
21. *Шварц Л.* Анализ / *Л. Шварц* – М.: Наука, 1972. – Т. 2. – 380 с.

**Навчальне видання**

**Богдан Винницький, Руслан Хаць**

# **ВИБРАНІ РОЗДІЛИ ТЕОРІЇ ФУНКЦІЙ, Ч. 1**

Навчальний посібник  
для студентів освітньо-кваліфікаційного рівня «Магістр»  
галузі знань 0402 «Фізико-математичні науки»,  
спеціальності 8.04020101 «Математика»

**Видавничий відділ**  
**Дрогобицького державного педагогічного університету**  
**імені Івана Франка**

**Головний редактор**  
*Ірина Невмержицька*

**Технічний редактор**  
*Світлана Беуко*

Здано до набору 06.05.2014 р. Підписано до друку 14.05.2014 р. Формат 60x84/16. Папір офсетний. Гарнітура Times. Наклад 300 прим. Ум. друк. арк. 8,12. Зам. 87.

Видавничий відділ Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка. (Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до державного реєстру видавців, виготівників та розповсюджувачів видавничої продукції ДК № 2155 від 12.04.2005 р.). 82100, Дрогобич, вул. Івана Франка, 24, к. 42, тел. 2-23-78.