УДК 378.147:51

https://doi.org/10.52058/2786-6300-2026-2(44)-1899-1912

Хаць Руслан Васильович кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

Комарницька Леся Іванівна кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0009-0001-0907-1038

Матурін Юрій Петрович кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, https://orcid.org/0000-0002-0544-1329

МАТЕМАТИЧНА ЛОГІКА В АЛГЕБРІ, МАТЕМАТИЧНОМУ АНАЛІЗІ, ДИСКРЕТНІЙ МАТЕМАТИЦІ ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ ЯКОСТІ МАТЕМАТИЧНИХ ДОВЕДЕНЬ

Анотація. У статті розглянуто роль математичної (формальної) логіки як методологічної основи побудови, аналізу та перевірки математичних доведень у курсах алгебри, математичного аналізу й дискретної математики. Обґрунтовано, що суттєва частина типових труднощів здобувачів освіти пов'язана не лише з прогалинами у змісті, а й з некоректним «читанням» логічної форми тверджень: плутаниною необхідних і достатніх умов, неправильним використанням імплікації та еквівалентності, помилками під час побудови заперечень кванторних висловлювань, а також із неявними припущеннями, які не проговорюються в тексті доведення.

Метою дослідження є теоретичне обґрунтування та практична демонстрація ефективності інтеграції формально-логічного апарату (кванторів, логічних зв'язок, правил виведення) у викладання названих дисциплін як інструменту підвищення строгості, коректності та зрозумілості доведень. Реалізацію мети забезпечено через аналіз типових логічних структур математичних тверджень і добір показових прикладів із навчальних тем. На матеріалі алгебри показано, як явне виділення зв'язок «і», «або», «якщо…, то…», «тоді й лише тоді, коли…» та операції заперечення впорядковує доведення, робить прозорими переходи між кроками й зменшує ризик «логічних стрибків» у міркуваннях.

У математичному аналізі акцентовано кванторний характер означень (границя, неперервність, рівномірна збіжність/неперервність) і запропоновано прийоми роботи з кванторними приставками та коректного переходу до заперечення, необхідного для доведень від супротивного й побудови контрприкладів. У дискретній математиці висвітлено логічну семантику правила суми та правила добутку, принципу Діріхле й комбінаторних доведень, де формалізація умов допомагає уникати помилок у підрахунках та інтерпретації результату.

Окрему увагу приділено підготовці майбутніх учителів математики: окреслено способи вбудовування елементів логіки в практичні заняття, систему вправ і критерії оцінювання доведень (формалізація висловлювань, контрапозиція, перевірка ланцюжків висновків, добір контрприкладів, аналіз логічних помилок). Підкреслено зв'язок формальної логіки з сучасними цифровими технологіями та автоматизованими/комп'ютерно підтриманими засобами доведення. Зроблено висновок про значний дидактичний потенціал логіки у формуванні логічного мислення та культури математичного доведення. Практичний результат − рекомендації з навчання доведення: формалізація твердження, фіксація припущень, вибір стратегії та самоперевірка переходів

Ключові слова: математична логіка, дискретна математика, алгебра, математичний аналіз, математичне доведення, методика навчання математики, логічні зв'язки, цифрові технології.

Khats' Ruslan Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0000-0001-9905-5447

Komarnytska Lesia Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0009-0001-0907-1038.

Maturin Yuriy Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, https://orcid.org/0000-0002-0544-1329.

MATHEMATICAL LOGIC IN ALGEBRA, MATHEMATICAL ANALYSIS, AND DISCRETE MATHEMATICS AS A MEANS OF ENHANCING THE QUALITY OF MATHEMATICAL PROOFS

Abstract. The article examines the role of mathematical (formal) logic as a methodological foundation for the construction, analysis, and verification of mathematical proofs in courses in algebra, mathematical analysis, and discrete mathematics. It is argued that a substantial portion of students' typical difficulties is attributable not only to gaps in content knowledge, but also to an incorrect "reading" of the logical form of statements: confusion between necessary and sufficient conditions, improper use of implication and equivalence, errors in forming the negations of quantified statements, and the presence of implicit assumptions that are not articulated in the written proof.

The aim of the study is to provide a theoretical justification and a practical demonstration of the effectiveness of integrating the formal logical apparatus (quantifiers, logical connectives, and rules of inference) into the teaching of the above disciplines as a means of increasing the rigor, correctness, and clarity of proofs. The achievement of this aim is supported through an analysis of typical logical structures occurring in mathematical statements and through the selection of illustrative examples drawn from instructional topics. Using material from algebra, the article shows how explicitly identifying the connectives "and," "or," "if … then …," "if and only if," together with the operation of negation, organizes a proof, makes the transitions between steps transparent, and reduces the risk of "logical leaps" in reasoning.

In mathematical analysis, emphasis is placed on the quantifier structure of definitions (limit, continuity, uniform convergence and uniform continuity), and techniques are proposed for working with quantifier prefixes and for correctly passing to the negation, which is required for proofs by contradiction and for constructing counterexamples. In discrete mathematics, the logical semantics of the rule of sum and the rule of product, the pigeonhole principle, and combinatorial proofs are discussed, where formalizing the conditions helps to avoid errors in counting and in interpreting the result.

Special attention is given to the preparation of future mathematics teachers: the article outlines ways of embedding elements of logic into practical classes, the system of exercises, and criteria for assessing proofs (formalization of statements, contra-positive reasoning, verification of chains of inference, selection of counterexamples, and analysis of logical errors). The connection between formal logic and modern digital technologies, as well as automated and computer-supported proof tools, is emphasized. The paper concludes that logic has substantial didactic potential for developing logical thinking and a culture of mathematical proof. The practical outcome consists of recommendations for teaching proof: formalizing the statement, explicitly recording assumptions, choosing a proof strategy, and systematically self-checking the validity of transitions between steps.

Keywords: mathematical logic, discrete mathematics, algebra, mathematical analysis, mathematical proof, mathematics teaching methodology, logical connectives, digital technologies.

Постановка проблеми. Сучасна парадигма вищої математичної освіти в Україні зазнає суттєвих трансформацій, спрямованих на відхід від репродуктивного засвоєння знань до формування фундаментальної математичної компетентності. Ключовим елементом цієї компетентності є не стільки вміння виконувати алгоритмічні обчислення, скільки здатність до строгого логічного мислення, побудови коректних доведень та критичного аналізу математичних тверджень.

Однак у практиці підготовки фахівців, зокрема майбутніх учителів математики, спостерігається суттєвий розрив між вивченням курсу математичної логіки та його застосуванням при опануванні інших фундаментальних дисциплін − алгебри, математичного аналізу та дискретної математики. Студенти часто сприймають математичну логіку як абстрактну дисципліну, відірвану від «реальної» математики, тоді як доведення теорем в курсах аналізу чи алгебри розглядають як набір завчених текстових конструкцій, а не як послідовність формальних логічних операцій.

Така ситуація призводить до явища формалізму в знаннях: здобувачі освіти можуть відтворити доведення, але не здатні проаналізувати його логічну структуру, виокремити необхідні та достатні умови, коректно побудувати заперечення або знайти помилку в хибному міркуванні. Особливо гостро ця проблема постає при роботі з твердженнями, що містять складні кванторні конструкції (в математичному аналізі).

В умовах діджиталізації освіти та зростання ролі автоматизованих систем перевірки доведень (proof assistants), вимоги до логічної строгості лише зростають. Відтак, виникає нагальна потреба в переосмисленні методики викладання класичних математичних дисциплін через призму формальної логіки, яка має стати не просто окремим предметом, а наскрізним методологічним інструментом верифікації істини. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю розробки дієвих підходів до інтеграції логічного апарату в процес доведення алгебраїчних та аналітичних тверджень з метою підвищення культури математичного мислення майбутніх педагогів.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Проблематика навчання математичного доведення та формування логічної культури є предметом пильної уваги як вітчизняних, так і закордонних науковців. Фундаментальна праця [1] розкриває подвійну природу доведення в освітньому процесі: воно виступає не лише засобом верифікації істини, але й ключовим інструментом пояснення («explanation») та розуміння математичних фактів. Автори наголошують, що без усвідомлення логічної структури доведення втрачає свою пояснювальну функцію, перетворюючись на формальний ритуал.

Деякі аспекти доведень досліджувалися в [2]. Там вказують на те, що значна частина труднощів студентів пов’язана саме з невмінням «розпакувати» логічну структуру тверджень та оперувати формальними означеннями. Цю думку розвинуто у [3], там підкреслюється нерозривний зв’язок між мовою математики та формальною логікою, стверджуючи, що ігнорування логічної семантики при викладанні призводить до неминучих змістових викривлень.

Окремий пласт досліджень стосується впливу новітніх технологій на культуру доведень.

Роботи [4–6] присвячені теж деяким питанням доведення та формальної верифікації математики. Дослідники зазначають, що сучасні цифрові інструменти вимагають від користувача суворої формалізації мислення, що актуалізує потребу в посиленні логічної підготовки фахівців. У [7] розглянуто логіку як невід'ємну частину сучасної математичної практики, що виходить за межі суто теоретичних абстракцій.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Попри значну кількість публікацій, більшість із них фокусується або на загально-філософських аспектах доведення, або на суто технічних питаннях комп'ютерної логіки.

Питання методичної інтеграції апарату математичної логіки безпосередньо у викладання класичних університетських курсів (математичного аналізу, алгебри, дискретної математики) залишається висвітленим недостатньо. Зокрема, потребує деталізації методика використання логічної символіки для пояснення складних понять аналізу (рівномірна неперервність, збіжність) та комбінаторних принципів, що й зумовлює мету цієї статті.

Мета статті полягає в теоретичному обґрунтуванні та практичній демонстрації ефективності інтеграції засобів математичної логіки у процес викладання фундаментальних математичних дисциплін − алгебри, математичного аналізу та дискретної математики.

Дослідження спрямоване на розробку методичних підходів до використання формально-логічного апарату (кванторів, логічних зв'язок, правил виведення) як інструменту підвищення строгості, коректності та зрозумілості математичних доведень.

Для досягнення поставленої мети передбачено розв'язання таких **завдань**:

1. Проаналізувати типові логічні структури, що лежать в основі алгебраїчних тверджень, та продемонструвати роль імплікації і рівносильності у методах доведення.

2. Розкрити специфіку застосування мови предикатів і кванторів при формулюванні складних означень математичного аналізу (границя, неперервність, рівномірна збіжність) та побудові їх заперечень.

3. Показати логічну семантику основних комбінаторних принципів дискретної математики (правила суми та добутку, принцип Діріхле).

4. Висвітлити методичні аспекти підготовки майбутніх учителів математики до використання елементів логіки як засобу перевірки істинності міркувань та запобігання типовим помилкам.

Виклад основного матеріалу.

Вступ.

Сучасна математична освіта дедалі більше орієнтується не лише на засвоєння обчислювальних навичок, а й на розвиток у здобувачів освіти здатності до логічного мислення, аргументованого міркування та коректного доведення математичних тверджень. У цьому контексті формальна логіка набуває особливого значення як інструмент, що забезпечує строгість, послідовність і обґрунтованість математичних доведень, зокрема в алгебрі.

Проблема формування в учнів і студентів умінь будувати та аналізувати доведення розглядається в багатьох дослідженнях. Зокрема, Г. Ганна та М. де Вільєрс виділяють доведення як центральний елемент математичної діяльності, що виконує не лише верифікаційну, а й пояснювальну функцію [1]. А. та Дж. Селдени підкреслюють, що навчання доведенням є складним процесом, який потребує усвідомлення логічної структури тверджень та правильного застосування логічних операцій [2]. За словами Г. Геллмана, мова математики тісно пов'язана з мовою логіки, а розуміння логічних зв'язків – необхідна умова коректного тлумачення та побудови доведень [3].

Алгебраїчні твердження – властивості числових множин, рівнянь, нерівностей, функцій та алгебраїчних структур – за своєю природою вимагають чіткого логічного обґрунтування. Однак у навчальному процесі вони часто подаються у скороченому вигляді, з пропуском окремих логічних кроків, що ускладнює розуміння студентами і сприяє формальному засвоєнню матеріалу без глибокого усвідомлення. В освітніх дослідженнях наголошується на важливості роботи з логічними компонентами тверджень: імплікацією, еквівалентністю, запереченням і кванторами [1, 2]. Саме усвідомлене використання цих елементів дозволяє підвищити якість алгебраїчних доведень, зменшити кількість типових помилок та сформувати стійке логічне мислення.

Особливого значення формальна логіка набуває у підготовці майбутніх учителів математики. Володіння логічними принципами побудови доведень сприяє формуванню здатності чітко аргументувати твердження, аналізувати структуру доведень, виявляти логічні помилки та пояснювати хід міркувань учням. Крім того, сучасний розвиток цифрових технологій і комп'ютерних систем доведення стимулює інтеграцію формальної логіки в освітній процес, зокрема через використання автоматизованих доведень і систем комп'ютерної підтримки математичних міркувань [4–6].

З огляду на зазначене, метою статті є аналіз можливостей використання елементів формальної логіки у доведенні алгебраїчних тверджень, а також висвітлення методичних підходів до їх застосування в навчанні математики. У статті розглянуто типові логічні структури алгебраїчних доведень, наведено приклади їх застосування в алгебрі, окреслено педагогічні переваги інтеграції формальної логіки в освітній процес, проаналізовано формальні принципи доведень, логічні конструкції алгебраїчних тверджень і методичні аспекти їх навчання.

1. Математична логіка як методологічна основа алгебраїчних доведень. Формальна логіка забезпечує строгі правила побудови математичних доведень і визначає допустимі способи виведення нових тверджень із заданих посилок (засновків). В алгебрі логічні структури лежать в основі формулювання означень, теорем і доведень, а також слугують засобом забезпечення внутрішньої узгодженості та несуперечливості математичних міркувань. Застосування логічних принципів дозволяє уникнути двозначностей у трактуванні тверджень і забезпечує прозорість процесу доведення.

У контексті алгебраїчних тверджень особливу роль відіграють логічні зв'язки імплікації, еквівалентності та заперечення. Саме за допомогою імплікації формулюється значна частина теорем у вигляді висловлювань типу «якщо …, то …», які є характерними для алгебри. Логічна еквівалентність використовується для встановлення рівносильності умов, зокрема під час перетворення рівнянь і нерівностей, а операція заперечення лежить в основі непрямих методів доведення. Формальна логіка дає змогу чітко відокремити умови твердження від його висновку, що суттєво підвищує коректність і повноту доведення.

Використання елементів формальної логіки в навчанні алгебри сприяє усвідомленому сприйняттю студентами структури математичних міркувань. Зосередження уваги на логічній формі твердження, а не лише на символічних перетвореннях, допомагає уникати типових помилок, пов'язаних із неявними припущеннями, некоректними узагальненнями або помилковою підміною достатніх умов на необхідні. Такий підхід є особливо важливим у процесі підготовки майбутніх учителів математики, оскільки формує в них здатність не лише правильно доводити твердження, а й пояснювати логіку доведення учням, адаптуючи її до рівня їхнього розуміння.

Крім того, систематичне звернення до логічних основ доведення створює передумови для формування в студентів навичок аналізу та критичного оцінювання математичних аргументів. Це дозволяє розглядати формальну логіку не лише як теоретичну дисципліну, а як дієвий методологічний інструмент, що інтегрується в алгебру та підвищує ефективність як навчальної, так і професійної діяльності майбутнього вчителя.

2. Логічна структура алгебраїчних тверджень і типові методи доведення. Алгебраїчні твердження зазвичай мають чітку логічну структуру, що включає умову та висновок. Формальна логіка дозволяє розглядати такі твердження як імплікативні висловлювання, у яких істинність висновку залежить від виконання заданих умов. Усвідомлення цієї структури є необхідним для коректної побудови доведень і запобігання логічним помилкам.

Типовим прикладом є твердження про подільність чисел, яке формулюється у вигляді умови й наслідку: якщо число a ділиться на число b, то число ac ділиться на число b. Під час доведення важливо чітко зафіксувати, що саме припускається на початку міркувань (число a ділиться на число b), а що необхідно отримати в результаті (число ac ділиться на число b). Формальна логіка в цьому випадку допомагає уникнути підміни напрямку доведення або неявного використання висновку як припущення.

Поширеними методами доведення алгебраїчних тверджень є пряме доведення, доведення від супротивного та доведення рівносильності. Пряме доведення спирається на послідовне застосування відомих тверджень і означень, тоді як доведення від супротивного використовує логічну операцію заперечення та демонструє неможливість протилежного припущення. Доведення рівносильності, у свою чергу, вимагає логічної точності при встановленні двох імплікацій у протилежних напрямках.

3. Використання математичної логіки в доведенні властивостей алгебраїчних об'єктів. Формальна логіка відіграє важливу роль у доведенні властивостей алгебраїчних об'єктів, таких як числа, вирази, рівняння та функції. Логічна чіткість дозволяє систематизувати міркування та зробити процес доведення прозорим і зрозумілим для здобувачів освіти.

Наприклад, під час доведення тверджень про парність суми двох парних чисел або непарність добутку парного і непарного чисел структура доведення ґрунтується на чіткому використанні означень: парне число подається у вигляді $2k$, а непарне у вигляді $2k + 1$. Саме таке формалізоване представлення дозволяє послідовно вивести необхідний висновок. Аналогічно, при доведенні тверджень про існування та кількість розв'язків квадратного рівняння важливо чітко розрізняти умови існування коренів (зокрема знак дискримінанта) та їхні властивості (кількість і вигляд коренів), що запобігає логічним неточностям у міркуваннях здобувачів освіти.

У випадку функціональних залежностей формальна логіка забезпечує коректне формулювання тверджень про монотонність, обмеженість та знак функції на заданому проміжку. Чітке виокремлення умов виконання властивості (наприклад, належності аргументу певному проміжку або виконання нерівності) та самого висновку є необхідною передумовою правильного доведення й сприяє формуванню у здобувачів освіти стійкого уявлення про логічну послідовність математичних міркувань.

4. Застосування засобів математичної логіки при викладі основ математичного аналізу. Курс математичного аналізу традиційно викликає значні труднощі у здобувачів освіти через високий рівень абстракції та складну логічну структуру базових понять. На відміну від алгебри, де значна частина доведень базується на тотожних перетвореннях, в аналізі центральне місце посідають твердження, що містять складні «кванторні приставки». Порядок слідування кванторів («для будь-якого» $\forall$ та «існує» $\exists$) має вирішальне значення і часто визначає зміст математичного факту.

4.1. Логічна структура означень границі та неперервності. Фундаментальну роль формальна логіка відіграє при введенні поняття границі функції за Коші («мовою ε–δ»). Це означення є класичним прикладом твердження зі змінними, що залежать одна від одної. Розглянемо означення границі функції в точці: $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x\ (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$. Методично важливо акцентувати увагу студентів на функціональній залежності δ від ε. Саме розуміння цієї залежності дозволяє відрізнити це означення від поняття **рівномірної неперервності**. Порівняємо логічні структури двох понять.

1. Поточкова неперервність на множині X: δ залежить і від ε, і від точки x_0. $\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(x_0, \varepsilon) > 0\ \forall x \in X\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$

2. Рівномірна неперервність на множині X: δ залежить тільки від ε (єдине для всієї множини). $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall x_1, x_2 \in X\ (|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon)$.

Зміна порядку кванторів (винесення квантора існування $\exists\delta$ перед квантором загальності по точках $\forall x$) кардинально змінює зміст поняття. Використання логічного запису робить цю відмінність наочною.

4.2. Побудова заперечень та контрприклади. Критично важливою навичкою для майбутнього вчителя математики є вміння будувати заперечення до тверджень. Це необхідно для доведення розбіжності послідовностей, відсутності границь або спростування гіпотез. Тут застосовується правило де Моргана для кванторів: при побудові заперечення квантор загальності $\forall$ змінюється на квантор існування $\exists$ і навпаки, а заключне висловлювання заперечується.

Розглянемо заперечення до поняття рівномірної неперервності. Щоб довести, що функція *не є* рівномірно неперервною, студенти повинні побудувати таке твердження: $\exists \varepsilon_0 > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x_1, x_2 \in X : (|x_1 - x_2| < \delta) \land (|f(x_1) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0)$.

Без формально-логічного підходу студенти часто неспроможні коректно сформулювати умову відсутності властивості, підміняючи її простим запереченням висновку без зміни кванторів.

4.3. Необхідні та достатні умови: імплікація та обернені твердження. Багато помилок в математичному аналізі виникають через плутанину між прямою ($A \Rightarrow B$) та оберненою ($B \Rightarrow A$) теоремами, а також між необхідними та достатніми умовами.

Типовий приклад — дослідження числових рядів. Необхідна умова збіжності ряду: $\sum a_n$ збігається $\Rightarrow \lim a_n = 0$ (при $n \to \infty$).

Студенти часто помилково вважають цю умову достатньою. Застосування апарату логіки дозволяє формалізувати це: істинність імплікації $A \Rightarrow B$ не гарантує істинності B ⇒ A. Для спростування оберненого твердження достатньо навести контрприклад (гармонічний ряд), де умова B (границя дорівнює нулю) виконується, а умова A (збіжність) — ні.

Аналогічна логічна ситуація виникає при вивченні екстремумів функції. Умова $f'(x_0) = 0$ є необхідною (для диференційовної функції), але не достатньою (приклад $y = x^3$ в точці 0). Чітке розрізнення логічних статусів цих умов запобігає методичним помилкам.

4.4. Використання методу контрапозиції. Закон контрапозиції $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ є потужним інструментом доведення в аналізі. Часто перевірити невиконання наслідку легше, ніж працювати з прямим твердженням.

Приклад: Відома теорема «Якщо функція диференційовна в точці, то вона неперервна в цій точці».

На практиці часто використовують рівносильне твердження, отримане через контрапозицію:

Функція розривна в точці x_0 ⇒ Функція не диференційовна в x_0

Це дозволяє миттєво робити висновки про недиференційовність без обчислення похідних, спираючись виключно на логічну структуру теореми.

5. Застосування математичної логіки при викладі дискретної математики: комбінаторний аспект. Дискретна математика є природним середовищем для застосування математичної логіки, проте при вивченні комбінаторики студенти часто сприймають формули як набір рецептів, не усвідомлюючи їхнього логічного підґрунтя.

Використання логічної символіки дозволяє систематизувати підхід до розв'язування комбінаторних задач та уникнути типових помилок при виборі методу підрахунку.

5.1. Логічна семантика правил суми та добутку. В основі комбінаторики лежать два фундаментальні правила, які мають пряму відповідність логічним операціям.

- **Правило суми** базується на логічній диз'юнкції («АБО»). Якщо множини об'єктів A та B не перетинаються ($A \cap B = \emptyset$), то вибір об'єкта з множини A **або** з множини B описується формулою: $|A \cup B| = |A| + |B|$. Логічна структура умови задачі: «обрати елемент x, такий що $P(x) \vee Q(x)$».

- **Правило добутку** базується на логічній кон'юнкції («І»). Вибір пари об'єктів, де перший належить A, **і** другий належить B, відповідає декартовому добутку множин: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$. Логічна структура: «обрати пару (a, b), де $a \in A \wedge b \in B$».

Методичний акцент на зв'язку «АБО ↔ Додавання» та «І ↔ Множення» дозволяє студентам формалізувати умову задачі. Замість інтуїтивного вгадування, вони можуть записати умову логічною мовою і автоматично отримати алгоритм обчислення.

5.2. Формула включень-виключень та логічні властивості. При розв'язуванні задач, де множини перетинаються, виникає потреба у формулі включень-виключень. Її розуміння значно полегшується через використання предикатів. Нехай $P_1, P_2, ..., P_n$ − певні властивості об'єктів. Кількість об'єктів, що мають хоча б одну з цих властивостей, відповідає кількості елементів, для яких істинним є висловлювання $P_1 \vee P_2 \vee ... \vee P_n$.

Для двох властивостей формула має вигляд: $N(P_1 \vee P_2) = N(P_1) + N(P_2) - N(P_1 \wedge P_2)$.

Тут логічна кон'юнкція $P_1 \wedge P_2$ чітко вказує на те, що елементи, які мають обидві властивості, були пораховані двічі, тому їх необхідно відняти. Такий підхід робить прозорим перехід до загальної формули для n множин, де чергування знаків «+» та «–» відповідає кількості кон'юнкцій у доданку.

5.3. Логічна структура принципу Діріхле. Принцип Діріхле, який часто формулюють описово («якщо n+1 кроликів сидять у *n* клітках...»), набуває математичної строгості при використанні кванторів. Це дозволяє застосовувати його для доведення неконструктивних теорем існування. Формальний запис: Нехай $f: X \to Y$ − відображення скінченних множин, і $|X| > |Y|$. Тоді: $\exists y \in Y: |f^{-1}(y)| \geq 2$. Це читається як: «Існує такий елемент y з множини значень Y, що його повний прообраз містить щонайменше два елементи». У більш загальному вигляді узагальнений принцип Діріхле стверджує: $\exists y \in Y : |f^{-1}(y)| \geq \lceil |X| / |Y| \rceil$.

Використання такої символіки привчає студентів до строгості формулювань і дозволяє застосовувати принцип не лише для фізичних об'єктів, а й для абстрактних алгебраїчних структур.

5.4. Комбінаторні доведення тотожностей. Окремим класом задач є доведення тотожностей методом подвійного підрахунку (бієктивні доведення). Логічна суть цього методу полягає у встановленні рівносильності двох предикатів або існуванні бієкції між множинами. Наприклад, тотожність $C_n^k = C_n^{n-k}$ (де C_n^k − число сполучень з n по k) логічно обґрунтовується так: Вибір k елементів, які ми *забираємо* (множина A), однозначно визначає n–k елементів, які ми *залишаємо* (множина $B = X \setminus A$). Оскільки операція доповнення множини є бієкцією, кількості способів рівні.

Таким чином, застосування апарату математичної логіки у комбінаториці дозволяє перейти від механічного використання формул до усвідомленого аналізу структури множин та відношень між ними.

6. Методичні аспекти інтеграції математичної логіки в навчання алгебри. Інтеграція елементів математичної логіки в навчальний процес сприяє формуванню в студентів системного бачення алгебраїчного матеріалу. Замість механічного відтворення готових доведень акцент переноситься на аналіз логічної структури тверджень і обґрунтування кожного кроку міркування. Методично така інтеграція реалізується через цілеспрямований добір завдань, роботу з означеннями, використання логічних схем і формулювання тверджень у вигляді імплікацій «якщо – то».

Для формування аналітичних навичок логічного міркування доцільно пропонувати студентам виділяти в твердженні умову та висновок, формулювати його у вигляді логічного висловлювання та аналізувати можливі способи доведення. Зокрема, при розгляді нерівностей з параметрами доцільно аналізувати, які умови на параметри є необхідними та достатніми для виконання нерівності на всій області визначення, а також як змінюється висновок у разі їх послаблення.

Крім того, використання логічного аналізу доведень сприяє розвитку рефлексивних навичок і критичного мислення. Студенти навчаються перевіряти коректність міркувань, виявляти пропущені логічні ланки, оцінювати повноту та обґрунтованість аргументації, а також аналізувати необхідність і достатність висунутих умов.

Таким чином, цілеспрямована інтеграція елементів формальної логіки в процес навчання алгебри не лише підвищує якість засвоєння матеріалу, а й формує у студентів уміння самостійно аналізувати та обґрунтовувати доведення, що є ключовою компетенцією майбутнього вчителя математики.

7. Математична логіка та сучасні цифрові засоби доведення. Сучасний розвиток цифрових технологій відкриває нові можливості для застосування математичної логіки в математичній освіті. Автоматизовані системи доведення та програмні засоби підтримки формальних доведень ґрунтуються на чітко формалізованих логічних правилах і потребують глибокого розуміння структури доведень.

Використання таких засобів дозволяє студентам перевіряти правильність і коректність доведень, експериментувати зі зміною умов та відпрацьовувати логічну послідовність аргументації.

Ознайомлення студентів із принципами роботи таких систем сприяє глибшому усвідомленню ролі математичної логіки в сучасній математиці. Навіть без детального вивчення програмного забезпечення, аналіз логіки автоматизованого доведення допомагає зрозуміти, чому кожен крок міркування має бути чітко обґрунтованим і логічно коректним.

Таким чином, поєднання традиційних методів алгебраїчного доведення з елементами математичної логіки та цифрових технологій сприяє формуванню в студентів цілісного уявлення про сучасну математичну діяльність і її освітній потенціал, а також розвиває навички аналізу, аргументації та критичного мислення.

Висновки. У результаті проведеного дослідження щодо інтеграції засобів математичної логіки у викладання фундаментальних математичних дисциплін зроблено такі висновки:

1. **Теоретико-методологічне значення.** Обґрунтовано, що формальна логіка є не лише автономною математичною дисципліною, а й універсальним інструментарієм верифікації істини в алгебрі, математичному аналізі та дискретній математиці. Ігнорування логічної семантики при викладанні цих предметів призводить до формалізму знань та нездатності студентів самостійно конструювати доведення.

2. **Застосування в алгебрі.** Показано, що усвідомлене використання логічних зв'язок (імплікації, еквівалентності) дозволяє структурувати алгебраїчні доведення, чітко відокремлюючи необхідні умови від достатніх. Продемонстровано ефективність методу контрапозиції для доведення алгебраїчних властивостей, що спрощує логічну структуру виводу.

3. **Роль в математичному аналізі.** Встановлено критичну роль логічної символіки, зокрема кванторів, при формулюванні означень границі та неперервності. Доведено, що формалізація понять «мовою предикатів» дозволяє студентам наочно розрізняти схожі концепції (наприклад, поточкову та рівномірну неперервність) через порядок слідування кванторів, а також коректно будувати заперечення до тверджень про існування границь.

4. **Комбінаторний аспект.** З'ясовано, що типові помилки при розв'язуванні комбінаторних задач часто зумовлені нерозумінням логічної природи правил суми та добутку. Використання мови теорії множин та логічних операцій (диз'юнкції та кон'юнкції) дозволяє формалізувати вибір методу підрахунку та строго обґрунтовувати комбінаторні тотожності.

5. **Дидактичний потенціал.** Визначено, що інтеграція елементів логіки у фахові курси сприяє формуванню у майбутніх учителів математики високої культури доведення. Це набуває особливої актуальності в умовах цифровізації освіти та поширення систем автоматизованого доведення, які вимагають від користувача суворої формалізації мислення.

Перспективи подальших розвідок вбачаємо у розробці системи практичних завдань для наскрізного використання логічної символіки в курсах геометрії та теорії ймовірностей.

Література:

1. Hanna G., de Villiers M. Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study. Springer Dordrecht, 2012. 475 p.
2. Selden A., Selden J. Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? Journal for Research in Mathematics Education, 34 (1), 2003. P. 4-36.
3. Hellman G. Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation. Oxford University Press, 1989. 144 p.
4. Wiedijk F. Formal Proof - Getting Started. Notices of the AMS, 55 (11), 2008. P. 1408-1414.

5. Avigad J., Harrison J. Formally verified mathematics. Commun. ACM 57(4), 014.P.66-75.
6. Avigad J. Mathematical method and proof. Synthese 153 (1), 2006. P. 105-159.
7. Schoenfeld A.H. Mathematical problem solving. New York: Academic Press, 1985. 409 p.
8. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник для студентів математичних спеціальностей педагогічних навчальних закладів. К.: Вища школа, 2006. 512 с.
9. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики: Монографія. Черкаси: «Відлуння-Плюс», 2002. 400 с.
10. Бевз Г.П. Методи навчання математики: навчально-методичний посібник. Київ: Генеза, 2010. 117 с.

References:

1. Hanna, G., & de Villiers, M. (2012). *Proof and Proving in Mathematics Education: The 19th ICMI Study*. Springer Dordrecht.
2. Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of Proofs Considered as Texts: Can Undergraduates Tell Whether an Argument Proves a Theorem? *Journal for Research in Mathematics Education*, 34(1), 4-36.
3. Hellman, G. (1989). *Mathematics without Numbers: Towards a Modal-Structural Interpretation*. Oxford University Press.
4. Wiedijk, F. (2008). Formal Proof - Getting Started. *Notices of the AMS*, 55(11), 1408-1414.
5. Avigad, J., & Harrison, J. (2014). Formally verified mathematics. *Communications of the ACM*, 57(4), 66-75.
6. Avigad, J. (2006). Mathematical method and proof. *Synthese*, 153(1), 105-159.
7. Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
8. Sliepkan, Z. I. (2006). *Metodyka navchannia matematyky: Pidruchnyk dlia studentiv matematychnykh spetsialnostei pedahohichnykh navchalnykh zakladiv* [Methods of teaching mathematics: A textbook for students of mathematical specialties of pedagogical educational institutions]. Kyiv: Vysshcha shkola [in Ukrainian].
9. Tarasenkova, N. A. (2002). *Vykorystannia znakovo-symvolichnykh zasobiv u navchanni matematyky: Monohrafiia* [The use of sign-symbolic tools in teaching mathematics: A monograph]. Cherkasy: Vidlunnia-Plus [in Ukrainian].
10. Bevz, H. P. (2010). *Metody navchannia matematyky: navchalno-metodychnyi posibnyk* [Methods of teaching mathematics: a teaching manual]. Kyiv: Heneza [in Ukrainian].

Дата першого надходження статті до видання: 26.01.2026
Дата прийняття статті до друку після рецензування: 09.02.2026