Український математичний вісник
Том 20 **(2023)**, № 1, 60 – 72
https://doi.org/10.37069/1810-3200-2023-20-1-3

Критерій покращеного регулярного зростання цілої функції в термінах асимптотичної поведінки її логарифмічної похідної в $L^q[0;2\pi]$-метриці

Руслан В. Хаць

(Представлена В. І. Рязановим)

Анотація. Нехай f – ціла функція, $f(0)=1$, $F(z)=zf'(z)/f(z)$ і $\Gamma_m=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\{z:\arg z=\psi_j\}$, $0\le\psi_1<\psi_2<\ldots<\psi_m<2\pi$. Ціла функція f називається функцією покращеного регулярного зростання, якщо для деяких $\rho\in(0;+\infty)$, $\rho_2\in(0;\rho)$ і 2π-періодичної ρ-тригонометрично опуклої функції $h(\varphi)\not\equiv-\infty$ існує множина $U\subset\mathbb{C}$, яка міститься в об'єднанні кругів із скінченною сумою радіусів така, що

$$\log|f(z)|=|z|^\rho h(\varphi)+o(|z|^{\rho_2}),\quad U\not\ni z=re^{i\varphi}\to\infty.$$

В роботі доведено, що ціла функція f порядку $\rho\in(0;+\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m є функцією покращеного регулярного зростання тоді і тільки тоді, коли для деякого $\rho_2\in(0;\rho)$ і кожного $q\in[1;+\infty)$ виконується

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{F(re^{i\varphi})}{r^\rho}-\rho\widetilde{h}(\varphi)\right|^q d\varphi\right\}^{1/q}=o(r^{\rho_2-\rho}),\quad r\to+\infty,$$

де $\widetilde{h}(\varphi)=h(\varphi)-ih'(\varphi)/\rho$ і $h(\varphi)$ – індикатор функції f.

2010 MSC. 30D15, 30D20, 30D30.

Ключові слова та фрази. Ціла функція покращеного регулярного зростання, логарифмічна похідна, коефіцієнти Фур'є, скінченна система променів, теорема Гаусдорфа–Юнга.

1. Вступ

Нехай f – ціла функція, $f(0)=1$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність її нулів, $N(r):=N(r,0;f)=\int_0^r t^{-1}n(t)\,dt$, $r>0$, $n(r):=n(r,0;f)=$

Стаття надійшла в редакцію 17.09.2022

$\sum_{|\lambda_n|\le r} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n), $F(z) := zf'(z)/f(z)$ – логарифмічна похідна функції f, $\Gamma_m := \bigcup_{j=1}^{m} \{z : \arg z = \psi_j\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$, – скінченна система променів і $n(r, \psi_j; f) := \sum_{|\lambda_n|\le r,\, \arg\lambda_n = \psi_j} 1$ – кількість нулів f, що лежать на промені $\{z : \arg z = \psi_j\}$.

Відомо, що згідно з теоремою Адамара-Бореля [1, с. 38], ціла функція f, $f(0) = 1$, порядку $\rho \in (0; +\infty)$ має вигляд

$$f(z) = e^{Q(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_n}, p\right), \tag{1.1}$$

де $\lambda_n \ne 0$ – нулі функції $f(z)$, $Q(z) := \sum_{k=1}^{\nu} Q_k z^k$ – поліном степеня $\nu \le \rho$, $p \le \rho$ – найменше ціле невід'ємне число, для якого $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^{-p-1} < +\infty$ і $E(w, p) = (1 - w)\exp(w + w^2/2 + \cdots + w^p/p)$ – первинний множник Вейєрштрасса роду p.

Однією з центральних задач теорії цілих функцій є вивчення зв'язку між регулярністю зростання функції та розподілом її нулів. Дослідження цієї задачі привели Б. Левіна та А. Пфлюгера [1] (див. також [2, 3]) до створення в кінці 30-их років минулого століття теорії цілих функцій цілком регулярного зростання. Функції, які є об'єктами вивчення в цій теорії, характеризуються регулярною поведінкою не лише свого модуля, а й аргумента. Важливим є отримання різних критеріїв належності цілих функцій до класу цілком регулярного зростання. Існує багато критеріїв цілком регулярного зростання цілих функцій додатного порядку (див. [1–3]). Зокрема, В. Азарін [4] отримав критерій цієї регулярності в термінах коефіцієнтів Фур'є, а А. Кондратюк [5, с. 78] – в термінах p-норми простору $L^p[0; 2\pi]$ логарифма модуля цілої функції.

Важливу роль у розвитку теорії цілих функцій цілком регулярного зростання відіграв метод рядів Фур'є, систематичне застосовування якого розпочалось в роботах Л. Рубела та Б. Тейлора (див. [6]). Зокрема, А. Кондратюк [5, 7] і Я. Васильків [8, 9], використовуючи цей метод, дали опис цілком регулярного зростання логарифма модуля та аргументу цілих і мероморфних функцій додатного порядку в $L^p[0; 2\pi]$-метриці. Для цілих функцій нульового порядку повільного зростання аналогічні результати отримано в роботах М. Заболоцького та інших [10–12].

У роботах [13, 14] було введено поняття цілої функції покращеного регулярного зростання і знайдено критерії для цієї регулярності в термінах розподілу нулів за умови, коли останні розміщені на скінченній системі променів.

Ціла функція f називається функцією *покращеного регулярного зростання* [13, 14], якщо для деяких $\rho \in (0; +\infty)$, $\rho_2 \in (0; \rho)$ і 2π-періодичної ρ-тригонометрично опуклої функції $h(\varphi) \not\equiv -\infty$ існує множина $U \subset \mathbb{C}$, яка міститься в об'єднанні кругів із скінченною сумою радіусів така, що

$$\log |f(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + o(|z|^{\rho_2}), \quad U \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty.$$

Зауважимо, що функція $h(\varphi) = h_f(\varphi) = \limsup\limits_{r \to +\infty} r^{-\rho} \log |f(re^{i\varphi})|$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, називається *індикатором* цілої функції f порядку $\rho \in (0; +\infty)$ (див. [1, с. 72], [2, с. 10]). Основною властивістю індикатора є ρ-тригонометрична опуклість. Функція $h : [\alpha; \beta] \to [-\infty; +\infty)$ називається *ρ-тригонометрично опуклою* на проміжку $[\alpha; \beta]$, якщо для будь-яких φ_1 і φ_2, $\alpha \le \varphi_1 < \varphi_2 \le \beta$, $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi/\rho$, $\rho > 0$, виконується (див. [1, с. 74], [2, с. 10])

$$h(\varphi) \le \frac{h(\varphi_1) \sin \rho(\varphi_2 - \varphi) + h(\varphi_2) \sin \rho(\varphi - \varphi_1)}{\sin \rho(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \varphi_1 \le \varphi \le \varphi_2.$$

Різноманітні властивості індикатора і ρ-тригонометрично опуклих функцій висвітлені в [1, с. 72–85]. Зокрема, індикатор є неперервною 2π-періодичною ρ-тригонометрично опуклою функцією. Функція $h(\varphi)$ скрізь має праву похідну, яка неперервна за винятком щонайбільше зліченної множини (див. [1, с. 76–78, 199], [5, с. 93–94, 110], [9, с. 138]). Якщо ціла функція f є функцією покращеного регулярного зростання, то [13] вона має порядок ρ і індикатор $h(\varphi)$.

Існує багато критеріїв покращеного регулярного зростання цілих функцій додатного порядку (див. [13–31]). Зокрема, у статтях [21, 22] встановлено критерії покращеного регулярного зростання цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів в термінах коефіцієнтів Фур'є їх логарифму модуля та логарифмічної похідної. В роботах [23–25] описано асимптотичну поведінку функцій $\log |f|$, $\log f$ та $\operatorname{Im} F$ у $L^q[0; 2\pi]$-метриці, де f – ціла функція покращеного регулярного зростання з нулями на скінченній системі променів. У статтях [26, 27] одержано критерії покращеного регулярного зростання цілих функцій додатного порядку з нулями на скінченній системі променів в термінах їх усереднення. У працях [28–31] досліджено асимптотичну поведінку цілих функцій покращеного регулярного зростання в загальному випадку (з довільним розподілом нулів). Справджується наступне твердження.

Теорема 1.1 (див. [25]). *Ціла функція f порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m є функцією покращеного ре-*

гулярного зростання тоді і тільки тоді, коли для деякого $\rho_4 \in (0;\rho)$

$$N(r) = \frac{\Delta}{\rho} r^{\rho} + o(r^{\rho_4}), \quad r \to +\infty, \quad \Delta := \sum_{j=1}^{m} \Delta_j, \quad \Delta_j \in [0;+\infty),$$

і для деякого $\rho_2 \in (0;\rho)$ *і кожного* $q \in [1;+\infty)$ *виконується*

$$\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{\operatorname{Im} F(re^{i\varphi})}{r^{\rho}} + h'(\varphi) \right|^q d\varphi \right\}^{1/q} = o(r^{\rho_2 - \rho}), \quad r \to +\infty.$$

При цьому

$$h(\varphi) = \sum_{j=1}^{m} h_j(\varphi), \quad \rho \in (0;+\infty) \setminus \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

де $h_j(\varphi)$ *–* 2π*-періодична функція, визначена на проміжку* $[\psi_j;\psi_j + 2\pi)$ *рівністю*

$$h_j(\varphi) = \frac{\pi \Delta_j}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \psi_j - \pi), \quad \Delta_j \in [0;+\infty).$$

У випадку $\rho \in \mathbb{N}$

$$h(\varphi) = \begin{cases} \tau_f \cos(\rho\varphi + \theta_f) + \sum_{j=1}^{m} h_j(\varphi), & \rho = p, \\ Q_\rho \cos \rho\varphi, & \rho = p+1, \end{cases} \tag{1.3}$$

де Q_ρ *– коефіцієнт при* z^ρ *полінома* $Q(z)$ *у зображенні* (1.1), $\delta_f \in \mathbb{C}$ *таке, що* $\sum_{|\lambda_n| \le r} \lambda_n^{-\rho} = \delta_f + o(r^{\rho_3 - \rho})$, $r \to +\infty$, *для деякого* $\rho_3 \in (0;\rho)$, $\tau_f = |\delta_f/\rho + Q_\rho|$, $\theta_f = \arg(\delta_f/\rho + Q_\rho)$ *і* $h_j(\varphi)$ *–* 2π*-періодична функція, визначена на проміжку* $[\psi_j;\psi_j + 2\pi)$ *рівністю*

$$h_j(\varphi) = \Delta_j(\pi - \varphi + \psi_j) \sin \rho(\varphi - \psi_j) - \frac{\Delta_j}{\rho} \cos \rho(\varphi - \psi_j).$$

Проте питання зв’язку між покращеним регулярним зростанням цілої функції f та регулярним поводженням в $L^q[0;2\pi]$-метриці її логарифмічної похідної F залишилось не дослідженим. Актуальним є знаходження нових критеріїв покращеного регулярного зростання цілих функцій.

Метою цієї статті є встановлення критерію покращеного регулярного зростання цілої функції f додатного порядку з нулями на скінченній системі променів в термінах асимптотичної поведінки при $r \to +\infty$ її логарифмічної похідної $F(re^{i\varphi})$, $\varphi \in [0;2\pi]$, в метриці просторів $L^q[0;2\pi]$, $q \in [1;+\infty)$ (див. теорему 3.1).

2. Допоміжні твердження

Нехай f – ціла функція з $f(0)=1$, $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ – послідовність її нулів і $\Omega := \{|\lambda_n| : n \in \mathbb{N}\}$. Позначимо для $k \in \mathbb{Z}$ і $r > 0$

$$n_k(r,f) := \sum_{|\lambda_n|\le r} e^{-ik\arg\lambda_n}, \quad \arg\lambda_n \in [0;2\pi), \quad n_0(r,f) = n(r).$$

Коефіцієнти Фур'є функції $F(re^{i\varphi})$ визначаються за формулою [7,32]

$$c_k(r,F) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}F(re^{i\varphi})\,d\varphi, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad r>0, \quad r\notin\Omega.$$

Для доведення основного результату нам потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 2.1. *Нехай f – ціла функція порядку $\rho \in (0;+\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m. Якщо для деякого $\rho_1 \in (0;\rho)$ і кожного $j \in \{1,\dots,m\}$*

$$n(t,\psi_j;f) = \Delta_j t^\rho + o(t^{\rho_1}), \quad t\to+\infty, \quad \Delta_j \in [0;+\infty), \tag{2.1}$$

і, крім того, у випадку $\rho\in\mathbb{N}$, для деяких $\rho_3 \in (0;\rho)$ і $\delta_f \in \mathbb{C}$ виконується

$$\sum_{|\lambda_n|\le r} \lambda_n^{-\rho} = \delta_f + o(r^{\rho_3-\rho}), \quad r\to+\infty, \tag{2.2}$$

то для деякого $\rho_2 \in (0;\rho)$ рівномірно за $k\in\mathbb{Z}$

$$c_k(r,F) = d_k r^\rho + \frac{o(r^{\rho_2})}{|k|+1}, \quad r\to+\infty, \quad r\notin\Omega, \tag{2.3}$$

де

$$d_k = \frac{\rho}{\rho-k}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j}, \quad \rho\in(0;+\infty)\setminus\mathbb{N}, \tag{2.4}$$

і

$$d_k = \begin{cases} \dfrac{\rho}{\rho-k}\displaystyle\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j}, & k\ne\rho=p,\\ \rho\tau_f e^{i\theta_f}, & k=\rho=p,\\ 0, & k\ne\rho=p+1,\\ \rho Q_\rho, & k=\rho=p+1,\end{cases} \tag{2.5}$$

з $\rho\in\mathbb{N}$, $\tau_f = |\delta_f/\rho + Q_\rho|$ та $\theta_f = \arg(\delta_f/\rho + Q_\rho)$.

Доведення. Нехай спочатку $\rho \in (0; +\infty)$ – неціле число і $p = [\rho] < \rho < p+1$. Тоді ціла функція f, $f(0) = 1$, подається у вигляді (1.1), де $Q(z) = \sum_{k=1}^{\nu} Q_k z^k$ – поліном степеня $\nu < \rho$. Маємо (див. [7, 8, 32])

$$c_k(r,F) = \begin{cases} k\alpha_k r^k + \sum\limits_{|\lambda_n| \le r} \left(\dfrac{r}{\lambda_n}\right)^k, & k \ge 1, \\ n_0(r,f), & k = 0, \\ \sum\limits_{|\lambda_n| \le r} \left(\dfrac{r}{\lambda_n}\right)^k, & k \le -1, \end{cases} \tag{2.6}$$

де $r > 0$, $r \notin \Omega$ і α_k знаходяться із розвинення $\log f(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k z^k$, $\log f(0) = 0$, в околі точки $z = 0$, причому (див. [18]) $\alpha_k = Q_k$, якщо $1 \le k \le p < \rho$ і $\alpha_k = Q_k - \dfrac{1}{k} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-k}$, якщо $k \ge p+1 > \rho$. З огляду на це, інтегруючи частинами, для $1 \le k \le p < \rho_1 < \rho$ отримуємо (вважаємо [18], що $Q_k = 0$, коли $k > \nu$)

$$\begin{aligned} c_k(r,F) = kQ_k r^k + \sum_{|\lambda_n| \le r} \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^k &= kQ_k r^k + r^k \int_0^r \frac{dn_k(t,f)}{t^k}\, dt \\ &= kQ_k r^k + n_k(r,f) + kr^k \int_0^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}\, dt, \end{aligned} \tag{2.7}$$

а для $k \ge p+1 > \rho$

$$c_k(r,F) = n_k(r,f) - kr^k \int_r^{+\infty} \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}\, dt, \tag{2.8}$$

і

$$c_k(r,F) = n_k(r,f) + kr^k \int_0^r \frac{n_k(t,f)}{t^{k+1}}\, dt, \quad k \le -1, \tag{2.9}$$

$$c_0(r,F) = n_0(r,f), \tag{2.10}$$

де $r > 0$ і $r \notin \Omega$. Нехай виконується (2.1). Тоді для $k \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} n_k(r,f) &= \sum_{j=1}^{m} e^{-ik\psi_j} n(r,\psi_j;f) \\ &= b_k r^\rho + o(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty, \quad b_k := \sum_{j=1}^{m} \Delta_j e^{-ik\psi_j}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$n_0(r,f) = b_0 r^\rho + o(r^{\rho_1}), \quad r \to +\infty. \tag{2.12}$$

Далі, використовуючи (2.11), з (2.7) для $1 \le k \le p < \rho_1 < \rho$ і $r \notin \Omega$, отримуємо

$$\begin{aligned} c_k(r,F) &= kQ_k r^k + b_k r^\rho + o(r^{\rho_1}) + kr^k \int_0^r \left(b_k t^{\rho-k-1} + o(t^{\rho_1-k-1})\right) dt \\ &= d_k r^\rho + \frac{o(r^{\rho_1})}{|k|+1}, \quad r \to +\infty, \quad d_k := \frac{\rho b_k}{\rho - k}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Подібно, з співвідношень (2.8)–(2.12), для $k \ge p+1 > \rho$, $k \le -1$ і $k = 0$, також одержимо (2.13). Таким чином, з (2.13) випливає, що співвідношення (2.3) виконується рівномірно за $k \in \mathbb{Z}$ з $\rho_2 = \rho_1 < \rho$ і d_k, визначеними формулою (2.4).

Нехай тепер $\rho \in \mathbb{N}$. Тоді ціла функція f, $f(0) = 1$, подається у вигляді (1.1), де $Q(z)$ – поліном степеня $\nu \le \rho$ і $p \le \rho$ – найменше ціле невід'ємне число, для якого $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^{-p-1} < +\infty$, $p = \rho$ або $p = \rho - 1$. Якщо $p = \rho$, то формула (2.7) виконується для $1 \le k < p$, а (2.8) для $k \ge p+1$. Тому, аналогічно, як і у випадку нецілого $\rho \in (0; +\infty)$, рівномірно відносно $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\rho\}$ при $r \to +\infty$, $r \notin \Omega$, виконується співвідношення (2.3), де d_k визначені формулою (2.5). Розглянемо випадок $k = p = \rho$. З огляду на (2.6), маємо

$$c_\rho(r,F) = \rho Q_\rho r^\rho + \sum_{|\lambda_n| \le r} \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^\rho, \quad r \notin \Omega. \tag{2.14}$$

Врахувавши (2.2), з (2.14) для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ при $\Omega \not\ni r \to +\infty$ одержимо

$$\begin{aligned} c_\rho(r,F) &= (\rho Q_\rho + \delta_f) r^\rho + o(r^{\rho_3}) \\ &= \rho \tau_f e^{i\theta_f} r^\rho + o(r^{\rho_3}) = d_\rho r^\rho + o(r^{\rho_2}). \end{aligned} \tag{2.15}$$

Отже, для $k = p = \rho$ також виконується співвідношення (2.3) з d_k, визначеними формулою (2.5). Тепер розглянемо випадок $\rho = p + 1$. У цьому випадку, формула (2.7) є правильною для $1 \le k \le p$, а (2.8) для $k > p+1$, і з (2.6) для $k = p + 1 = \rho$ і $r \notin \Omega$, маємо

$$\begin{aligned} c_\rho(r,F) &= \rho \left(Q_\rho - \frac{1}{\rho} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\rho}\right) r^\rho + \sum_{|\lambda_n| \le r} \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^\rho \\ &= \rho Q_\rho r^\rho - \sum_{|\lambda_n| > r} \left(\frac{r}{\lambda_n}\right)^\rho. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Оскільки в цьому випадку $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n|^{-p-1} < +\infty$, то співвідношення (2.1) виконується з $\Delta_j = 0$ і для всіх $k \in \mathbb{Z}$ маємо $n_k(r,f) = o(r^{\rho_1})$,

$r \to +\infty$. Тому, як і у випадку $p = \rho$, рівномірно відносно $k \in \mathbb{Z} \setminus \{\rho\}$ при $r \to +\infty$, $r \notin \Omega$, виконується співвідношення (2.3), де d_k визначені формулою (2.5). Якщо $k = p + 1 = \rho$, то з (2.16) отримуємо

$$\begin{aligned} c_\rho(r, F) &= \rho Q_\rho r^\rho + n_\rho(r, f) - \rho r^\rho \int_r^{+\infty} \frac{n_\rho(t, f)}{t^{\rho+1}}\, dt \\ &= \rho Q_\rho r^\rho + o(r^{\rho_1}) = d_\rho r^\rho + o(r^{\rho_1}), \quad \Omega \not\ni r \to +\infty. \end{aligned}$$

Отже, для $k = \rho = p+1$ виконується співвідношення (2.3) з d_k, визначеними формулою (2.5). Таким чином, для цілої функції f порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m рівномірно за $k \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення (2.3) з d_k, визначеними формулами (2.4) і (2.5). Лему 2.1 доведено. □

Лема 2.2 (див. [13, 14]). *Для того щоб ціла функція f порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m була функцією покращеного регулярного зростання з індикатором $h(\varphi)$, визначеним формулами* (1.2) *і* (1.3)*, необхідно й достатньо, щоб для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$ і кожного $j \in \{1, \dots, m\}$ виконувалось співвідношення* (2.1) *і, крім цього, у випадку $\rho \in \mathbb{N}$, для деяких $\rho_3 \in (0; \rho)$ і $\delta_f \in \mathbb{C}$ виконувалась рівність* (2.2).

З лем 2.1 і 2.2 випливає наступне твердження.

Наслідок 2.1. *Нехай ціла функція f порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m є функцією покращеного регулярного зростання з індикатором $h(\varphi)$, визначеним формулами* (1.2) *і* (1.3)*. Тоді для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ рівномірно за $k \in \mathbb{Z}$ виконується співвідношення* (2.3) *з d_k, визначеними формулами* (2.4) *і* (2.5).

Лема 2.3 (див. [22]). *Для того щоб ціла функція f порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m була функцією покращеного регулярного зростання, необхідно й достатньо, щоб для деяких $\rho_5 \in (0; \rho)$, $k_0 \in \mathbb{Z}$ і кожного $k \in \{k_0, k_0 + 1, \dots, k_0 + m - 1\}$ виконувалось*

$$c_k(r, F) = d_k r^\rho + o(r^{\rho_5}), \quad r \to +\infty, \quad r \notin \Omega,$$

де d_k визначені формулами (2.4) *і* (2.5).

3. Основний результат

Нашою метою є доведення наступного твердження.

Теорема 3.1. *Для того щоб ціла функція f порядку $\rho \in (0;+\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m була функцією покращеного регулярного зростання, необхідно й достатньо, щоб для деякого $\rho_2 \in (0;\rho)$ і кожного $q \in [1;+\infty)$ виконувалось*

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{F(re^{i\varphi})}{r^\rho}-\rho\widetilde{h}(\varphi)\right|^q d\varphi\right\}^{1/q}=o(r^{\rho_2-\rho}),\quad r\to+\infty. \tag{3.1}$$

При цьому $\widetilde{h}(\varphi)=h(\varphi)-ih'(\varphi)/\rho$ і функція $h(\varphi)$, визначена формулами (1.2) *і* (1.3).

Доведення. Необхідність. Нехай f – ціла функція покращеного регулярного зростання порядку $\rho \in (0;+\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m і $h(\varphi)$ – її індикатор, визначений формулами (1.2) і (1.3). Маємо

$$\begin{aligned}\widetilde{d}_k &:= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\widetilde{h}(\varphi)\,d\varphi\\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^m \frac{\pi\Delta_j}{\sin\pi\rho}e^{-i\rho(\psi_j+\pi)}\int_{\psi_j}^{\psi_j+2\pi} e^{i(\rho-k)\varphi}\,d\varphi\\ &= \frac{1}{\rho-k}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j},\quad k\in\mathbb{Z},\quad \rho\in(0;+\infty)\setminus\mathbb{N},\end{aligned}$$

і для $\rho=p\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\widetilde{d}_k &= \frac{\tau_f e^{i\theta_f}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\rho-k)\varphi}\,d\varphi\\ &\quad -\frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-i\rho\psi_j}\int_{\psi_j}^{\psi_j+2\pi}(\pi-\varphi+\psi_j)e^{i(\rho-k)\varphi}\,d\varphi\\ &\quad -\frac{1}{4\pi\rho}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-i\rho\psi_j}\int_{\psi_j}^{\psi_j+2\pi} e^{i(\rho-k)\varphi}\,d\varphi\\ &\quad -\frac{1}{4\pi\rho}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{i\rho\psi_j}\int_{\psi_j}^{\psi_j+2\pi} e^{-i(\rho+k)\varphi}\,d\varphi\\ &= \frac{1}{\rho-k}\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-ik\psi_j},\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{\rho\}.\end{aligned}$$

Аналогічно, враховуючи тотожність $\sum_{j=1}^m \Delta_j e^{-i\rho\psi_j}=0$, $\rho=p\in\mathbb{N}$ (див. [1, с. 84], [25,27]), для $k=\rho=p$ отримуємо

$$\widetilde{d}_\rho = \tau_f e^{i\theta_f} - \frac{i}{2\pi}\sum_{j=1}^{m}\Delta_j e^{-i\rho\psi_j}\int_{\psi_j}^{\psi_j+2\pi}(\pi-\varphi+\psi_j)\,d\varphi$$
$$-\frac{1}{4\pi\rho}\sum_{j=1}^{m}\Delta_j\int_{\psi_j}^{\psi_j+2\pi}(e^{-i\rho\psi_j}+e^{i\rho\psi_j}e^{-2i\rho\varphi})\,d\varphi$$
$$=\tau_f e^{i\theta_f}-\frac{1}{2\rho}\sum_{j=1}^{m}\Delta_j e^{-i\rho\psi_j}=\tau_f e^{i\theta_f}.$$

До того ж, у випадку $p+1=\rho\in\mathbb{N}$,

$$\widetilde{d}_k=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Q_\rho e^{i(\rho-k)\varphi}\,d\varphi=0,\quad k\in\mathbb{Z}\setminus\{\rho\},$$

і

$$\widetilde{d}_\rho=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(Q_\rho\cos\rho\varphi+iQ_\rho\sin\rho\varphi)e^{-i\rho\varphi}\,d\varphi=Q_\rho,\quad k=\rho=p+1.$$

З огляду на це, $|\widetilde{d}_k|\le\Delta/|\rho-k|$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{\rho\}$, де $\Delta=\sum_{j=1}^m\Delta_j$, $\Delta_j\in[0;+\infty)$ і $\rho\in(0;+\infty)$. Тому за теоремою Фішера–Рісса (див. [5, с. 5]) існує функція $\widetilde{h}(\varphi)\in L^2[0;2\pi]$ така, що $\widetilde{h}(\varphi):=\sum_{k\in\mathbb{Z}}\widetilde{d}_k e^{ik\varphi}$. Окрім того, за наслідком 2.1 для цілої функції f покращеного регулярного зростання порядку $\rho\in(0;+\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m для деякого $\rho_2\in(0;\rho)$ рівномірно за $k\in\mathbb{Z}$ виконується співвідношення (2.3) з d_k, визначеними формулами (2.4) і (2.5). З (2.3) випливає, що

$$\left|\frac{c_k(r,F)}{r^\rho}-d_k\right|\le\frac{C}{|k|+1},\quad d_k:=\rho\widetilde{d}_k,\quad k\in\mathbb{Z},\tag{3.2}$$

для деякого $C>0$ і всіх $\Omega\not\ni r\ge r_0>0$. З огляду на це, послідовність $(r^{-\rho}c_k(r,F)-d_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ належить до простору $l_{\widetilde{q}}$ для всіх $\widetilde{q}>1$ і $r\ge r_0$. Тоді, застосувавши теорему Гаусдорфа-Юнг (див. [5, с. 5], [24, 25]), для $q\ge2$, $q^{-1}+\widetilde{q}^{-1}=1$, одержимо

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{F(re^{i\varphi})}{r^\rho}-\rho\widetilde{h}(\varphi)\right|^q d\varphi\right\}^{1/q}\le\left\{\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left|\frac{c_k(r,F)}{r^\rho}-d_k\right|^{\widetilde{q}}\right\}^{1/\widetilde{q}}.$$

Отриманий ряд в правій частині останньої нерівності, завдяки (3.2) є рівномірно збіжним на $[r_0;+\infty)$. Виконавши у цьому ряді граничний перехід при $r\to+\infty$, з урахуванням наслідку 2.1 отримуємо (3.1) для $q\ge2$. Звідси та з нерівності Гельдера встановлюємо співвідношення (3.1) і для $1\le q<2$.

Достатність. Нехай

$$\widetilde{d}_k := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\varphi}\widetilde{h}(\varphi)\,d\varphi, \quad \widetilde{d}_k = \frac{d_k}{\rho}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

і для деякого $\rho_2 \in (0;\rho)$ та кожного $q \in [1;+\infty)$ виконується співвідношення (3.1) з $\widetilde{h}(\varphi) = h(\varphi) - ih'(\varphi)/\rho$, причому функція $h(\varphi)$, визначена формулами (1.2) і (1.3). Тоді деякого $\rho_2 \in (0;\rho)$ і кожного $k \in \mathbb{Z}$

$$\left|\frac{c_k(r,F)}{r^\rho} - d_k\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{F(re^{i\varphi})}{r^\rho} - \rho\widetilde{h}(\varphi)\right| d\varphi$$
$$\le \left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{F(re^{i\varphi})}{r^\rho} - \rho\widetilde{h}(\varphi)\right|^q d\varphi\right\}^{1/q} = o(r^{\rho_2-\rho}), \quad r \to +\infty.$$

Звідси випливає, що для деякого $\rho_2 \in (0;\rho)$ і кожного $k \in \mathbb{Z}$ виконується

$$c_k(r,F) = d_k r^\rho + o(r^{\rho_2}), \quad r \to +\infty,$$

де d_k визначені формулами (2.4) і (2.5). Отже, згідно з лемою 2.3, ціла функція f порядку $\rho \in (0;+\infty)$ з нулями на скінченній системі променів Γ_m є функцією покращеного регулярного зростання. Таким чином, теорему 3.1 доведено. □

Подяка

Автор висловлює щиру подяку Рецензенту за корисні і змістовні зауваження, які посприяли покращенню тексту статті.

Література

[1] Левин, Б.Я. (1956). *Распределение корней целых функций*, М., Гостехиздат.

[2] Гольдберг, А.А., Левин, Б.Я., Островский, И.В. (1991). Целые и мероморфные функции. *Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. направления, 85*, М., ВИНИТИ, 5–186.

[3] Гольдберг, А.А. (1994). Б.Я. Левин – создатель теории целых функций вполне регулярного роста. *Матем. физика, анализ, геометрия, 1*(2), 186–192.

[4] Азарин, В.С. (1977). О регулярности роста коэффициентов Фурье логарифма модуля целой функции. *Теория функций, функц. анализ и их прилож., 27*, 9–21.

[5] Кондратюк, А.А. (1988). *Ряды Фурье и мероморфные функции*, Львов, Вища школа.

[6] Rubel, L.A. (1996). *Entire and meromorphic functions*, New York, Springer.

[7] Калинець, Р.З., Кондратюк, А.А. (1998). Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої фунції в $L^p[0;2\pi]$-метриці. *Укр. мат. журн., 50*(7), 889–896.

[8] Васильків, Я.В. (1999). Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0;2\pi]$-метриці. Ч. 1. *Мат. студ., 12*(1), 37–58.

[9] Васильків, Я.В. (1999). Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0;2\pi]$-метриці. Ч. 2. *Мат. студ., 12*(2), 135–144.

[10] Боднар, О.В., Заболоцький, М.В. (2010). Критерії регулярності зростання логарифма модуля та аргументу цілої функції. *Укр. мат. журн., 62*(7), 885–893.

[11] Mostova, M.R., Zabolotskyj, M.V. (2015). Convergence in $L^p[0;2\pi]$-metric of logarithmic derivative and angular v-density for zeros of entire function of slowly growth. *Carpathian Math. Publ., 7*(2), 209–214.

[12] Заболоцкий, Н.В., Костюк, О.В. (2016). Регулярный рост различных характеристик целых функций нулевого порядка. *Матем. заметки, 100*(3), 363–374.

[13] Винницький, Б.В., Хаць, Р.В. (2005). Про регулярність зростання цілої функції нецілого порядку з нулями на скінченній системі променів. *Мат. студ., 24*(1), 31–38.

[14] Khats', R.V. (2006). On entire functions of improved regular growth of integer order with zeros on a finite system of rays. *Mat. Stud., 26*(1), 17–24.

[15] Vynnyts'kyi, B.V. (2003). On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one. *Mat. Stud., 19*(1), 97–105.

[16] Винницький, Б.В., Хаць, Р.В. (2004). Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку. *Мат. студ., 21*(2), 140–150.

[17] Хаць, Р.В. (2004). Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку. *Мат. студ., 22*(1), 105–110.

[18] Хаць, Р.В. (2005). Про коефіцієнти Фур'є одного класу цілих функцій. *Мат. студ., 23*(1), 99–102.

[19] Хаць, Р.В. (2010). Асимптотична поведінка канонічних добутків з нулями на промені. *Мат. студ., 33*(2), 215–219.

[20] Хаць, Р.В. (2022). Асимптотична поведінка спеціального канонічного добутку. *Науковий вісник Ужгородського університету. Серія «Математика і інформатика», 40*(1), 82–93.

[21] Хаць, Р.В. (2011). Регулярність зростання коефіцієнтів Фур'є цілих функцій покращеного регулярного зростання. *Укр. мат. журн., 63*(12), 1717–1723.

[22] Khats', R.V. (2019). Regular growth of Fourier coefficients of the logarithmic derivative of entire functions of improved regular growth. *Bukovinian Math. J., 7*(1), 114–120.

[23] Khats', R.V. (2013). Asymptotic behavior of entire functions of improved regular growth in the metric of $L^p[0;2\pi]$. *Carpathian Math. Publ., 5*(2), 341–344.

[24] Хаць, Р.В. (2020). Асимптотична поведінка логарифмів цілих функцій покращеного регулярного зростання в $L^q[0;2\pi]$-метриці. *Укр. мат. журн., 72*(4), 557–564.

[25] Khats', R.V. (2021). Asymptotic behavior of the logarithmic derivative of entire function of improved regular growth in the metric of $L^q[0;2\pi]$. *Bukovinian Math. J., 9*(1), 49–55.

[26] Khats', R.V. (2011). Averaging of entire functions of improved regular growth with zeros on a finite system of rays. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky., 718*(718), 10–14.

[27] Khats', R.V. (2020). Sufficient conditions for the improved regular growth of entire functions in terms of their averaging. *Carpathian Math. Publ., 12*(1), 46–54.

[28] Гірник, М.О. (2009). Субгармонічні функції покращеного регулярного зростання. *Доп. НАН України, 4*, 13–18.

[29] Chyzhykov, I.E. (2017). Pfluger-type theorem for functions of refined regular growth. *Mat. Stud., 47*(2), 169–178.

[30] Vynnyts'kyi, B.V., Khats', R.V. (2011). On asymptotic properties of entire functions, similar to the entire functions of completely regular growth. *Visn. Nats. Univ. L'viv. Politekh., Fiz.-Mat. Nauky., 718*(718), 5–9.

[31] Khats', R.V. (2013). Asymptotic behavior of averaging of entire functions of improved regular growth. *Carpathian Math. Publ., 5*(1), 129–133.

[32] Townsend, D. (1987). Comparisons between $T(r, f)$ and total variations of $\arg f(re^{i\theta})$ and $\log|f(re^{i\theta})|$. *J. Math. Anal. Appl., 128*(2), 347–361.

Відомості про авторів

Руслан Васильович Хаць

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Дрогобич, Україна
E-Mail: `khats@ukr.net`