

УДК 517.5

Р. В. ХАЦЬ

АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА КАНОНІЧНИХ ДОБУТКІВ З НУЛЯМИ НА ПРОМЕНИ

R. V. Khats'. *Asymptotic behavior of canonical products with zeros on a ray*, Mat. Stud. **33** (2010), 215–219.

We obtain new uniform asymptotic estimates for the logarithms of canonical products with zeros on a positive ray under the condition of regular growth of a zero-counting function.

Р. В. Хаць. *Асимптотическое поведение канонических произведений с нулями на луче* // Мат. Студії. – 2010. – Т.33, №2. – С.215–219.

Получены новые равномерные асимптотические оценки для логарифмов канонических произведений с нулями на положительном луче при условии регулярного роста считающей функции последовательности их нулей.

Нехай $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ – послідовність додатних чисел таких, що $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$, p – найменше ціле невід'ємне число, для якого ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-p-1}$ є збіжним, і канонічний добуток Вейерштрасса роду p

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_n}, p\right), \quad (1)$$

де $E(w, p) = (1-w) \exp(w + w^2/2 + \dots + w^p/p)$ для $p \in \mathbb{N}$ і $E(w, 0) = (1-w)$ – первинний множник Вейерштрасса. Надалі вважаємо функцію

$$\log L(z) = \int_0^z \frac{L'(\zeta)}{L(\zeta)} d\zeta, \quad L(0) = 1,$$

визначеною в $\mathbb{C} \setminus [\lambda_1, +\infty)$. Відомо [1, с. 81], що якщо $\rho \in (0, +\infty)$ – неціле число і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho), \quad t \rightarrow +\infty, \quad \Delta \in [0, +\infty), \quad (2)$$

то для канонічного добутку (1) роду p , $p = [\rho] < \rho < p + 1$ ($[x]$ – ціла частина числа $x > 0$), асимптотичне співвідношення

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + \frac{o(r^\rho)}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3)$$

виконується рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$.

2000 *Mathematics Subject Classification*: 30D15.

Keywords: asymptotic behavior, canonical product, zero, ray

doi:10.30970/ms.33.2.215-219

© Р. В. Хаць, 2010

Крім цього, (див. [1, с. 89, 91], [2, с. 88], [3, с. 94]) для кожного $\delta > 0$ рівномірно за $\varphi \in [\delta, 2\pi - \delta]$ співвідношення

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (4)$$

виконується тоді і тільки тоді, коли виконується (2). До того ж, ([3, с. 98])

$$\log |L(re^{i\varphi})| \leq \frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \quad (5)$$

Якщо, умова (2) виконується з цілим $\rho \in (0, +\infty)$, то для канонічного добутку (1) справджується ([2, с. 91], [3, с. 106–109])

$$\log L(re^{i\varphi}) = \Lambda(re^{i\varphi}) + o(r^\rho), \quad r \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

рівномірно за $\varphi \in [\delta, 2\pi - \delta]$, $\delta > 0$, де

$$\Lambda(re^{i\varphi}) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} e^{i\rho\varphi} r^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} - \Delta \left(\frac{1}{\rho} - i(\varphi - \pi) \right) e^{i\rho\varphi} r^\rho, & p = \rho, \\ 0, & p = \rho - 1. \end{cases} \quad (7)$$

Зауважимо, що аналогічні асимптотичні формули для цілих функцій нульового і скінченного ненульового порядків з від'ємними нулями отримано в [4, 5].

В багатьох працях (див., наприклад, [6–11]) вивчались тонші, ніж (3)–(6) асимптотики цілої функції (1). Так з результатів статті [6] випливає, зокрема, що асимптотична формула

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)} r^\rho + o(r^{\rho_1}), \quad r \rightarrow +\infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad (8)$$

де $\rho_1 \in (0, \rho)$, є справедливою зовні деякої виняткової C_0 -множини (означення див. [1, с. 86], [2, с. 120]). У [8] (див. також [7]) знайдено необхідні і достатні умови на нулі цілої функції (1) нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$, за яких для деякого $\rho_2 \in (0, \rho)$

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta r^\rho}{\sin \pi\rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^{\rho_2}), \quad U \not\ni re^{i\varphi} \rightarrow \infty, \quad (9)$$

при цьому виняткову множину $U \subset \mathbb{C}$ можна покрити об'єднанням кругів зі скінченною сумою радіусів. В [9] для канонічного добутку (1) цілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ отримано достатні умови на нулі, за яких для деякого $\rho_3 \in (0, \rho)$ існує в \mathbb{C} виняткова множина U , яка міститься в об'єднанні кругів зі скінченною сумою радіусів така, що

$$\log |L(re^{i\varphi})| = \tilde{\Lambda}(re^{i\varphi}) + o(r^{\rho_3}), \quad U \not\ni re^{i\varphi} \rightarrow \infty, \quad (10)$$

де $\tilde{\Lambda}(re^{i\varphi}) = \operatorname{Re} \Lambda(re^{i\varphi}) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\rho} r^\rho \cos \rho\varphi \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} - \Delta r^\rho \left(\frac{1}{\rho} \cos \rho\varphi + (\varphi - \pi) \sin \rho\varphi \right), & p = \rho, \\ 0, & p = \rho - 1. \end{cases} \quad (11)$$

Крім цього, в [10] встановлено критерій на нулі канонічного добутку (1) нульового роду, за якого на деяких колах $\{z: |z| = r_k\}$ рівномірно за $\varphi \in [0, 2\pi]$ виконується

$$\log |L(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi \Delta r_k^\rho}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + O(1), \quad r_k \rightarrow +\infty.$$

Проте питання про знаходження достатніх умов на асимптотичну поведінку нулів канонічного добутку (1), за яких співвідношення (8)–(10) виконуються рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$ залишається відкритим.

Метою статті є доведення наступних тверджень, які пов'язані з дослідженням асимптотичних властивостей цілих функцій покращеного регулярного зростання [11] і, зокрема, доповнюють результати, отримані в [8–10].

Теорема 1. Нехай $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in (0, +\infty)$ — неціле число, $p = [\rho] < \rho_1 < \rho < p + 1$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову

$$q(t) \stackrel{\text{def}}{=} n(t) - \Delta t^\rho = o(t^{\rho_1}), \quad t \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Тоді для канонічного добутку (1) рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} e^{i\rho(\varphi - \pi)} r^\rho + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (13)$$

Теорема 2. Нехай $\Delta \in [0, +\infty)$, $\rho \in \mathbb{N}$, $\rho_1 \in (\rho - 1, \rho)$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (12). Тоді для канонічного добутку (1) рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$

$$\log L(re^{i\varphi}) = \Lambda(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (14)$$

де функція $\Lambda(re^{i\varphi})$ визначена формулою (7).

Через c_1, c_2, c_3, \dots будемо позначати деякі додатні сталі.

Доведення теореми 1. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$. Маємо ([1, с. 81], [2, с. 89], [3, с. 92])

$$\log L(re^{i\varphi}) = -z^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{n(t)}{t^{p+1}(t-z)} dt.$$

Оцінимо модуль виразу

$$S = \log L(re^{i\varphi}) + r^{p+1} e^{i(p+1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{\Delta t^\rho dt}{t^{p+1}(t - re^{i\varphi})} = -z^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{n(t) - \Delta t^\rho}{t^{p+1}(t-z)} dt. \quad (15)$$

Враховуючи (12), отримуємо ($|q(t)| \leq c_1 t^{\rho_1}$, $t \in [0, +\infty)$)

$$|S| \leq r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{|n(t) - \Delta t^\rho|}{t^{p+1}|t - re^{i\varphi}|} dt \leq c_1 r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\rho_1 - p - 1}}{|t - re^{i\varphi}|} dt = J(r, \varphi). \quad (16)$$

Покладемо $t = ur$. Тоді, використовуючи нерівність $u^2 - 2u \cos \varphi + 1 \geq (u^2 + 1) \min\{1 - \cos \varphi, 1\}$, одержимо

$$J(r, \varphi) = c_1 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1 - p - 1}}{|u - e^{i\varphi}|} du = c_1 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1 - p - 1}}{\sqrt{u^2 - 2u \cos \varphi + 1}} du \leq$$

$$\leq c_1 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-p-1}}{\sqrt{(u^2+1) \min\{1-\cos\varphi, 1\}}} du \leq \frac{c_2 r^{\rho_1}}{\sin(\varphi/2)}. \quad (17)$$

До того ж, ([1, с. 82], [3, с. 94])

$$\Delta r^{p+1} e^{i(p+1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{t^\rho dt}{t^{p+1}(t-re^{i\varphi})} = \Delta r^\rho e^{i(p+1)\varphi} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho-p-1} du}{u-e^{i\varphi}} = -\frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi \rho} e^{i\rho(\varphi-\pi)}.$$

Звідси і з (15)–(17) випливає (13). Теорему 1 доведено. \square

Наслідок 1. За умов теореми 1, маємо

$$\begin{aligned} \log |L(re^{i\varphi})| &= \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi \rho} \cos \rho(\varphi - \pi) + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \\ \arg L(re^{i\varphi}) &= \frac{\pi \Delta r^\rho}{\sin \pi \rho} \sin \rho(\varphi - \pi) + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$.

Зауваження 1. З теореми 1, як наслідок, випливає лема 1 з [8].

Доведення теореми 2. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0, 2\pi)$ і $p = \rho$. Маємо ([2, с. 92], [3, с. 106])

$$\log L(re^{i\varphi}) = \frac{z^\rho}{\rho} \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} - z^\rho \int_0^r \frac{n(t) dt}{t^\rho(t-z)} - \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} n(r) - z^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{n(t) dt}{t^{\rho+1}(t-z)}.$$

Враховуючи (12), подібно як при доведенні теореми 1, отримуємо

$$\begin{aligned} \left| \log L(re^{i\varphi}) - \frac{1}{\rho} e^{i\rho\varphi} r^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} + \frac{\Delta}{\rho} e^{i\rho\varphi} r^\rho + \Delta e^{i\rho\varphi} r^\rho \int_0^r \frac{dt}{t-z} + \Delta e^{i(\rho+1)\varphi} r^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t(t-z)} \right| &\leq \\ &\leq c_3 r^{\rho_1} + c_4 r^\rho \int_0^r \frac{t^{\rho_1-\rho}}{|t-re^{i\varphi}|} dt + c_4 r^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{t^{\rho_1-\rho-1}}{|t-re^{i\varphi}|} dt \leq c_3 r^{\rho_1} + c_4 r^{\rho_1} \times \\ &\times \int_0^1 \frac{u^{\rho_1-\rho} du}{\sqrt{(u^2+1) \min\{1-\cos\varphi, 1\}}} + c_4 r^{\rho_1} \int_1^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-\rho-1} du}{\sqrt{(u^2+1) \min\{1-\cos\varphi, 1\}}} \leq \frac{c_5 r^{\rho_1}}{\sin(\varphi/2)}. \end{aligned} \quad (18)$$

Позаяк ([2, с. 93], [9])

$$\Delta e^{i\rho\varphi} r^\rho \int_0^r \frac{dt}{t-z} + \Delta e^{i(\rho+1)\varphi} r^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{dt}{t(t-z)} = -\Delta i(\varphi - \pi) e^{i\rho\varphi} r^\rho,$$

то з (18) отримуємо (14). Нехай тепер $p = \rho - 1$. Тоді ([2, с. 94], [3, с. 109])

$$\log L(re^{i\varphi}) = -\frac{z^\rho}{\rho} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} - z^\rho \int_0^r \frac{n(t) dt}{t^\rho(t-z)} - \frac{z^\rho}{\rho r^\rho} n(r) - z^{\rho+1} \int_r^{+\infty} \frac{n(t) dt}{t^{\rho+1}(t-z)}.$$

Оскільки в даному випадку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-\rho} \in$ збіжним і [9] $n(t) = o(t^{\rho_1})$ ($t \rightarrow +\infty$), то при $r \rightarrow +\infty$

$$-\frac{z^\rho}{\rho} \sum_{\lambda_n > r} \lambda_n^{-\rho} = -\frac{z^\rho}{\rho} \int_r^{+\infty} \frac{dn(t)}{t^\rho} = \frac{z^\rho}{\rho} \frac{n(r)}{r^\rho} - z^\rho \int_r^{+\infty} o(t^{\rho_1-\rho-1}) dt = o(r^{\rho_1}) = \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}.$$

Тому, як і вище, виконується (14). Теорему 2 доведено. \square

Наслідок 2. За умов теореми 2, рівномірно за $\varphi \in (0, 2\pi)$ виконується

$$\begin{aligned}\log |L(re^{i\varphi})| &= \tilde{\Lambda}(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty, \\ \arg L(re^{i\varphi}) &= \hat{\Lambda}(re^{i\varphi}) + \frac{o(r^{\rho_1})}{\sin(\varphi/2)}, \quad r \rightarrow +\infty,\end{aligned}$$

де функція $\tilde{\Lambda}(re^{i\varphi})$ визначена формулою (11), а $\hat{\Lambda}(re^{i\varphi}) = \operatorname{Im} \Lambda(re^{i\varphi}) =$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\rho} r^\rho \sin \rho\varphi \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} - \Delta r^\rho \left(\frac{1}{\rho} \sin \rho\varphi - (\varphi - \pi) \cos \rho\varphi \right), & p = \rho, \\ 0, & p = \rho - 1. \end{cases}$$

Зауваження 2. З теореми 2, як наслідок, випливає лема 1 з [9].

ЛІТЕРАТУРА

1. Levin B. Ya. Lectures on entire functions. Transl. Math. Monographs, Vol. 150. Amer. Math. Soc., Providence RI, 1996. – 248 p.
2. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
4. Заблоцький М. В. Теорема типу Валірона та Валірона-Титчмарша для цілих функцій нульового порядку // Укр. мат. журн. – 1996. – Т. 48, № 3. – С. 315–325.
5. Борова О. І., Заблоцький М. В. Многочленна асимптотика цілих функцій скінченного порядку // Укр. мат. журн. – 2003. – Т. 55, № 6. – С. 723–732.
6. Агранович П. З., Логвиненко В. Н. Аналог теоремы Валірона-Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, № 5. – С. 3–19.
7. Khabibullin V. N. Asymptotic behavior of the difference of subharmonic functions // Матем. студії. – 2004. – Т. 21, № 1. – С. 47–63.
8. Винницький Б. В., Хаць Р. В. Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку // Матем. студії. – 2004. – Т. 21, № 2. – С. 140–150.
9. Хаць Р. В. Про асимптотичне поводження канонічного добутку цілого порядку // Матем. студії. – 2004. – Т. 22, № 1. – С. 105–110.
10. Vynnyts'kyi V. V., Khats' R. V. On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one // Матем. студії. – 2003. – Т. 19, № 1. – С. 97–105.
11. Хаць Р. В. Цілі функції покращеного регулярного зростання: Дис. . . . канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2006. – 125 с.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики
khats@ukr.net

Надійшло 06.04.2009