УДК 517.5

Б. В. Винницький, Р. В. Хаць

ПРО РЕГУЛЯРНІСТЬ ЗРОСТАННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ НЕЦІЛОГО ПОРЯДКУ З НУЛЯМИ НА СКІНЧЕННІЙ СИСТЕМІ ПРОМЕНІВ

B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats'. *On growth regularity of an entire function of nonentire order with zeros on a finite system of rays*, Matematychni Studii, **24** (2005) 31–38.

We introduce a concept of an entire function of refined regular growth of nonintegral order. We found a criterion for this regularity in the sense of zero distribution when the zeroes are located on a finite system of rays.

Б. В. Винницкий, Р. В. Хаць. *О регулярности роста целой функции нецелого порядка с нулями на конечной системе лучей* // Математичні Студії. – 2005. – Т.24, №1. – С.31–38.

Введено понятие целой функции улучшенного регулярного роста нецелого порядка и найден критерий такого роста в терминах распределения нулей в случае, когда последние расположены на конечной системе лучей.

Як добре відомо [1, с. 38], ціла функція $f \not\equiv 0$ нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ подається у вигляді

$$f(z) = z^{\lambda} e^{Q(z)} L(z), \tag{1}$$

де λ_n — відмінні від нуля нулі функції f, λ — кратність нуля f в 0, $Q(z)$ — поліном степеня меншого за ρ, p — найменше ціле невід'ємне число таке, що $\sum_n 1/|\lambda_n|^{p+1} < +\infty$, $L(z) = \prod_n E\left(\frac{z}{\lambda_n}; p\right)$ — канонічний добуток роду p, $p = [\rho] < \rho < p+1$, і

$$E(u;p) = (1-u)\exp\left(\sum_{\nu=1}^{p} u^{\nu}/\nu\right).$$

В теорії цілих функцій цілком регулярного зростання Левіна-Пфлюгера [1, 2] встановлюються, зокрема, необхідні і достатні умови на нулі цілої функції f порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з індикатором h, за яких співвідношення

$$\ln|f(z)| = |z|^{\rho} h(\varphi) + o(|z|^{\rho}) \quad (z \to \infty, \quad \varphi = \arg z \in [0, 2\pi))$$

виконується зовні деякої виняткової множини кругів нульової лінійної щільності (C_0-множини). У випадку нецілого порядку, необхідною і достатньою умовою є існування [1, с. 119] для майже всіх $\alpha \in \mathbb{R}$ і майже всіх $\beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, кутової щільності

$$\Delta(\alpha, \beta) = \lim_{r \to +\infty} \frac{n(r, \alpha, \beta)}{r^{\rho}},$$

2000 *Mathematics Subject Classification:* 30D15.
Keywords: growth regularity, entire function, finite system of rays
doi:10.30970/ms.24.1.31-38

де $n(r,\alpha,\beta)$ — кількість нулів функції f в секторі $\{z : |z| \le r, \alpha < \arg z \le \beta\}$. У випадку, коли нулі функції f розташовані на скінченній кількості променів $\arg z = \psi_j$, $j \in \{1,\dots,m\}$, остання умова рівносильна до умови ([1, с. 129]):

$$n_j(r) = \Delta_j r^\rho + o(r^\rho) \quad (r \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0,+\infty), \quad j \in \{1,\dots,m\}),$$

де $n_j(r)$ — кількість нулів з круга $\{z : |z| \le r\}$, які належать променю $\arg z = \psi_j$.

Цілу функцію f назвемо функцією покращеного регулярного зростання (п.р.зр.), якщо при деяких $\rho \in (0,+\infty)$ і 2π-періодичній ρ-тригонометрично опуклій функції $h(\varphi) \not\equiv -\infty$ для деякого $\rho_2 \in (0,\rho)$ існує в $\mathbb{C}$ виняткова множина U кругів із скінченною сумою S радіусів, що

$$\ln|f(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + o(|z|^{\rho_2}) \quad (U \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty). \tag{2}$$

Відзначимо, що такого вигляду асимптотики зовні деяких виняткових множин вивчались в багатьох працях (див., наприклад, [3–9]). Проте, питання про знаходження необхідних і достатніх умов на нулі цілої функції f, за яких зовні деякої виняткової множини кругів із скінченною сумою радіусів виконується співвідношення (2) залишається відкритим.

Метою даної статті є доведення наступного твердження, яке у випадку, коли нулі функції розміщені на одному промені, доведене в [4].

Теорема 1. *Нехай нулі цілої функції f нецілого порядку $\rho \in (0,+\infty)$ лежать на скінченній системі променів $\arg z = \psi_j$, $j \in \{1,\dots,m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$, і при деякому $\rho_1 \in (0,\rho)$ та кожному $j \in \{1,\dots,m\}$*

$$n_j(t) = \Delta_j t^\rho + o(t^{\rho_1}) \quad (t \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0,+\infty)). \tag{3}$$

Тоді для деякого $\rho_2 \in (0,\rho)$ існує в $\mathbb{C}$ така виняткова множина U кругів із скінченною сумою S радіусів, що виконується (2), де

$$h(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} h_i(\varphi), \tag{4}$$

і $h_i(\varphi)$ — 2π-періодична функція, визначена на проміжку $[\psi_i, \psi_i + 2\pi)$ рівністю

$$h_i(\varphi) = \frac{\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho}\cos\rho(\varphi - \psi_i - \pi). \tag{5}$$

Навпаки, якщо нулі цілої функції f нецілого порядку $\rho \in (0,+\infty)$ лежать на вказаній вище скінченній системі променів і для деякого $\rho_2 \in (0,\rho)$ існує в $\mathbb{C}$ така виняткова множина U кругів із скінченною сумою S радіусів, що виконується (2) з $h(\varphi)$, визначеною формулою (4), то при деякому $\rho_1 \in (0,\rho)$ та кожному $j \in \{1,\dots,m\}$ виконується (3).

Нехай $U(a;r) = \{z : |z-a| < r\}$. Через c_1, c_2, c_3, … позначаємо деякі додатні сталі. Для доведення теореми 1 потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $0 < \rho_2 < \rho < +\infty$ і ціла функція f є функцією п.р.зр. Тоді існує така послідовність (r_k), що*

$$0 < r_k \uparrow +\infty, \quad r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_2}) \quad (k \to +\infty), \tag{6}$$

і рівномірно за $\varphi \in [0,2\pi]$ виконується

$$\ln|f(r_k e^{i\varphi})| = r_k^\rho h(\varphi) + o(r_k^{\rho_2}) \quad (k \to +\infty). \tag{7}$$

Доведення. Нехай $R_k = k^{1/\delta}$, $\rho - \rho_2 < \delta < 1$ (можемо вважати, що $\rho - \rho_2 < 1$). Тоді $R_{k+1} - R_k = \frac{1}{\delta}(1+o(1))R_k^{1-\delta} \longrightarrow +\infty$ при $k \to +\infty$. Тому $R_{k+1} - R_k > 2S$ при великих k. Внаслідок цього, існує послідовність (r_k) така, що $R_k < r_k < R_{k+1}$ і кола $\partial U(0; r_k) = \{z : |z| = r_k\}$ з множиною U виняткових кругів не перетинаються. Отже, при $\bigcup_k \partial U(0; r_k) \ni z \to \infty$ виконується (7). Крім цього,

$$r_{k+1}^{\rho} - r_k^{\rho} \leq R_{k+2}^{\rho} - R_k^{\rho} = \frac{2\rho}{\delta}(1 + o(1))R_k^{\rho-\delta} = o(r_k^{\rho_2}) \quad (k \to +\infty).$$

Лему 1 доведено. □

Лема 2. *Якщо ціла функція f нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ задовольняє умови другої частини теореми 1, то для деякого $\rho_2 \in (0, \rho)$ в кожному куті $\mathbb{C}[\varphi_j; \widetilde{\varphi_j}] = \{z : \varphi_j \leq \arg z \leq \widetilde{\varphi_j}\}$, $0 \leq \psi_j < \varphi_j < \widetilde{\varphi_j} < \psi_{j+1} < 2\pi$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $\psi_{m+1} := \psi_1 + 2\pi$, справедлива асимптотична оцінка*

$$\ln |f(z)| \geq |z|^{\rho} h(\varphi) + o(|z|^{\rho_2}) \quad (z \to \infty). \tag{8}$$

Доведення. Нехай

$$\psi_{j+1} - \psi_j \leq \min\{2\pi, \pi/\rho\}. \tag{9}$$

Сума S радіусів виняткових кругів множини U, які знаходяться в області $G_k = \{z : |z| > r_k\} \cap \{z : \psi_j < \arg z < \psi_{j+1}\}$ прямує до 0, коли $k \to +\infty$, де (r_k) — послідовність з леми 1. Тому можна провести два промені $\arg z = \varphi_j$ і $\arg z = \widetilde{\varphi_j}$, $\psi_j < \varphi_j < \widetilde{\varphi_j} < \psi_{j+1}$, які виняткові круги в розглядуваній області не будуть перетинати, причому при великих k числа φ_j і $\widetilde{\varphi_j}$ можна вибрати довільно близько до ψ_j і ψ_{j+1} відповідно. Отже, при деякій сталій c_1 на колах $\partial U(0; r_k)$, і на променях $\arg z = \varphi_j$ і $\arg z = \widetilde{\varphi_j}$ справедлива асимптотична оцінка

$$|f(z)| \geq (1/c_1) \exp(|z|^{\rho} h(\varphi) - c_1 |z|^{\rho_2}) \quad (z \to \infty).$$

Далі, розглянемо функцію

$$F(z) = V(z)/f(z), \quad V(z) = \exp\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\pi \Delta_j}{\sin \pi\rho} \left(ze^{-i(\pi+\psi_j)}\right)_o^{\rho} - c_2 \left(ze^{-i\psi}\right)_o^{\rho_2}\right),$$

де c_2 — достатньо велика стала, $\left(ze^{-i(\pi+\psi_j)}\right)_o^{\rho} = |z|^{\rho}(\cos \rho(\varphi - \psi_j - \pi) + i \sin \rho(\varphi - \psi_j - \pi))$ — однозначна вітка функції $\left(ze^{-i(\pi+\psi_j)}\right)^{\rho}$ в куті $\{z : \psi_j < \arg z = \varphi < \psi_j + 2\pi\}$, а $\left(ze^{-i\psi}\right)_o^{\rho_2} = |z|^{\rho_2}(\cos \rho_2(\varphi - \psi) + i \sin \rho_2(\varphi - \psi))$ — однозначна вітка відповідної багатозначної функції в цьому ж куті, причому $\psi = (\psi_{j+1} + \psi_j)/2$. Тому взявши достатньо велику сталу c_2 переконуємось, що функція F є обмеженою незалежною від k сталою c_1 на межі області $D_k = \{z : r_k < |z| < r_{k+1}\} \cap \{z : \varphi_j < \arg z < \widetilde{\varphi_j}\}$. Звідси, застосовуючи принцип максимума до кожної області D_k, $k \in \mathbb{N}$, приходимо до висновку, що функція F є обмеженою в кожному куті $\mathbb{C}[\varphi_j; \widetilde{\varphi_j}]$, $j \in \{1, \ldots, m\}$ деякою сталою c_3. Отже, в таких кутах справедлива асимптотична оцінка

$$|f(z)| \geq (1/c_3) \exp(|z|^{\rho} h(\varphi) - c_2 |z|^{\rho_2}) \quad (z \to \infty).$$

Звідси отримуємо (8). Якщо ж умова (9) не виконується, то кут $\{z : \psi_j < \arg z < \psi_{j+1}\}$ розіб'ємо променями на ν рівних кутів так, щоб в кожному з них виконувалось (9). Тоді, проводячи наведені вище міркування до кожного такого кута, приходимо до потрібного твердження. Лему 2 доведено. □

Лема 3. *Нехай $\rho \in (0, +\infty)$. Якщо ціла функція f є функцією п.р.зр., то для деякого $\rho_3 \in (0, \rho)$ справедлива асимптотична оцінка*

$$\ln |f(z)| \le |z|^\rho h(\varphi) + o(|z|^{\rho_3}) \quad (z = re^{i\varphi} \to \infty). \tag{10}$$

Доведення. Оскільки сума S радіусів виняткових кругів множини U є скінченною, то при $|z| \ge r_0$ існує коло $\partial U(z;\tau) = \{w : |w - z| = \tau\}$ радіуса τ, $\tau \le |z|^\gamma$, $0 < \gamma < 1$, яке виняткові круги не перетинає. Через $\widetilde{w} = |\widetilde{w}|e^{i\widetilde{\theta}}$ позначимо точку кола $\partial U(z;\tau)$, в якій $|f(w)|$ приймає найбільше значення на цьому колі. Тоді, застосовуючи принцип максимума модуля до круга $U(z;\tau)$, при деякому $\rho_2 \in (0, \rho)$ і $z \to \infty$ отримуємо

$$\ln |f(z)| \le \ln \max_{w \in \partial U(z,\tau)} \{|f(w)|\} = \ln |f(\widetilde{w})| = |\widetilde{w}|^\rho h(\widetilde{\theta}) + o(|\widetilde{w}|^{\rho_2}) \le$$

$$\le (|z| + |z|^\gamma)^\rho h(\widetilde{\theta}) + o((|z| + |z|^\gamma)^{\rho_2}) = |z|^\rho (1 + |z|^{\gamma-1})^\rho h(\widetilde{\theta}) + o(|z|^{\rho_2}(1 + |z|^{\gamma-1})^{\rho_2}) =$$

$$= |z|^\rho (1 + \rho(1 + o(1))|z|^{\gamma-1}) h(\widetilde{\theta}) + o(|z|^{\rho_2}) = |z|^\rho h(\widetilde{\theta}) + o(|z|^{\rho_3}) =$$

$$= |z|^\rho h(\varphi) + |z|^\rho (h(\widetilde{\theta}) - h(\varphi)) + o(|z|^{\rho_3}) \quad (\rho_3 < \rho). \tag{11}$$

Оскільки [2, с. 94] функція $h(\varphi)$ задовольняє умову Ліпшиця і $|\widetilde{\theta} - \varphi| \le \arcsin |z|^{\gamma-1}$, то

$$|h(\widetilde{\theta}) - h(\varphi)| \le c_4 \arcsin |z|^{\gamma-1}.$$

Звідси і з (11) випливає (10). Лему 3 доведено. □

Наслідок 3.1. *Якщо ціла функція f є функцією п.р.зр., тобто виконується (2), то вона має порядок ρ і індикатор h.*

З лем 2 і 3 безпосередньо випливає наступна

Лема 4. *Якщо f — ціла функція п.р.зр., то для деякого $\rho_4 \in (0, \rho)$ і кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$ рівномірно за $\varphi \in [\varphi_j, \widetilde{\varphi_j}]$, $\psi_j < \varphi_j < \widetilde{\varphi_j} < \psi_{j+1}$, виконується*

$$J_f^t(\varphi) = \int_0^t \frac{\ln |f(ue^{i\varphi})|}{u}\, du = \frac{t^\rho}{\rho} h(\varphi) + o(t^{\rho_4}) \quad (t \to +\infty).$$

Лема 5. *Якщо ціла функція f нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ задовольняє умови другої частини теореми 1 і $f(0) \ne 0$, то при деякому $\rho_7 \in (0, \rho)$ та кожному $j \in \{1, \ldots, m\}$*

$$N_j(r) = \int_0^r \frac{n_j(t)}{t}\, dt = \frac{\Delta_j}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_7}) \quad (r \to +\infty, \quad \Delta_j \in [0, +\infty)), \quad r > 0. \tag{12}$$

Доведення. Запишемо узагальнену формулу Йєнсена [1, с. 188]

$$N(r, \alpha, \beta) = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{d\varphi} \int_0^r J_f^t(\varphi) \frac{dt}{t} \right]_{\varphi = \beta} - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d}{d\varphi} \int_0^r J_f^t(\varphi) \frac{dt}{t} \right]_{\varphi = \alpha} + \frac{1}{2\pi} \int_\alpha^\beta \ln |f(re^{i\varphi})|\, d\varphi, \tag{13}$$

де $N(r,\alpha,\beta)=\int_0^r \frac{n(t,\alpha,\beta)}{t}\,dt$, $n(t,\alpha,\beta)$ — кількість нулів функції f в секторі $\{z:|z|\le t, \alpha\le \arg z\le \beta\}$ і $J_f^t(\varphi)$ — функція з леми 4. Нехай $\rho_4\in(0,\rho)$ — число з леми 4, $\mu=(\rho-\rho_4)/2$ і $q=r_k^{-\mu}$, де (r_k) — послідовність з леми 1. Для кожного $j\in\{1,\dots,m\}$ виберемо числа α і β так, щоб $\psi_{j-1}<\alpha<\psi_j<\beta<\psi_{j+1}$, де $\psi_0=\psi_m-2\pi$, $\psi_{m+1}=\psi_1+2\pi$. Тоді з (13), подібно як і в [1, с. 199], маємо

$$N_j(r_k)=\frac{1}{q^2}\int\limits_{\beta}^{\beta+q}\left(\int\limits_{\alpha}^{\alpha+q}N_j(r_k)\,d\alpha_*\right)\,d\beta_*=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\int\limits_0^{r_k}\frac{J_f^t(\beta+q)-J_f^t(\beta)}{q}\frac{dt}{t}-\int\limits_0^{r_k}\frac{J_f^t(\alpha+q)-J_f^t(\alpha)}{q}\frac{dt}{t}\right\}+$$

$$+\frac{1}{2\pi q^2}\int\limits_{\beta}^{\beta+q}\left(\int\limits_{\alpha}^{\alpha+q}\left(\int\limits_{\alpha_*}^{\beta_*}\ln|f(r_ke^{i\varphi})|\,d\varphi\right)\,d\alpha_*\right)\,d\beta_*. \tag{14}$$

За лемою 4, отримуємо

$$J_f^t(\beta+q)-J_f^t(\beta)=\frac{t^\rho}{\rho}(h(\beta+q)-h(\beta))+o(t^{\rho_4})\quad(t\to+\infty), \tag{15}$$

і, подібно,

$$J_f^t(\alpha+q)-J_f^t(\alpha)=\frac{t^\rho}{\rho}(h(\alpha+q)-h(\alpha))+o(t^{\rho_4})\quad(t\to+\infty). \tag{16}$$

Оскільки в кожному куті $\{z:\psi_j<\arg z<\psi_{j+1}\}$, $j\in\{1,\dots,m\}$, індикатор h є тригонометричним і $\frac{\sin x}{x}=1+o(x)$ $(x\to0)$, то $\frac{h(\beta+q)-h(\beta)}{q}=h'(\beta)+o(q)$, $q\to0$. Тому з (15) і (16) при $k\to+\infty$ отримуємо

$$\int\limits_0^{r_k}\frac{J_f^t(\beta+q)-J_f^t(\beta)}{q}\frac{dt}{t}=\frac{r_k^\rho}{\rho^2}\frac{h(\beta+q)-h(\beta)}{q}+o(r_k^{\rho_5})=\frac{r_k^\rho}{\rho^2}h'(\beta)+o(r_k^{\rho_5})\quad(\rho_5<\rho), \tag{17}$$

$$\int\limits_0^{r_k}\frac{J_f^t(\alpha+q)-J_f^t(\alpha)}{q}\frac{dt}{t}=\frac{r_k^\rho}{\rho^2}\frac{h(\alpha+q)-h(\alpha)}{q}+o(r_k^{\rho_5})=\frac{r_k^\rho}{\rho^2}h'(\alpha)+o(r_k^{\rho_5})\quad(\rho_5<\rho). \tag{18}$$

Крім цього, за лемою 1, при $k\to+\infty$ маємо

$$\int\limits_{\alpha_*}^{\beta_*}\ln|f(r_ke^{i\varphi})|\,d\varphi=r_k^\rho\int\limits_{\alpha_*}^{\beta_*}h(\varphi)\,d\varphi+o(r_k^{\rho_2})\quad(\rho_2<\rho).$$

До того ж, скориставшись теоремою про середнє для подвійних інтегралів, при $k\to+\infty$ одержимо

$$\frac{1}{q^2}\int\limits_{\beta}^{\beta+q}\left(\int\limits_{\alpha}^{\alpha+q}\left(\int\limits_{\alpha_*}^{\beta_*}\ln|f(r_ke^{i\varphi})|\,d\varphi\right)\,d\alpha_*\right)\,d\beta_*=\frac{r_k^\rho}{q^2}\int\limits_{\beta}^{\beta+q}\left(\int\limits_{\alpha}^{\alpha+q}\left(\int\limits_{\alpha_*}^{\beta_*}h(\varphi)\,d\varphi\right)\,d\alpha_*\right)\,d\beta_*+$$

$$+o(r_k^{\rho_2}) = r_k^\rho \int\limits_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}} h(\varphi)\,d\varphi + o(r_k^{\rho_2}) = r_k^\rho \left(\int\limits_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)\,d\varphi + \int\limits_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}} h(\varphi)\,d\varphi - \int\limits_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)\,d\varphi \right) + o(r_k^{\rho_2}), \tag{19}$$

де $\alpha < \widetilde{\alpha} < \alpha + q$, $\beta < \widetilde{\beta} < \beta + q$. Але

$$\left| \int\limits_{\widetilde{\alpha}}^{\widetilde{\beta}} h(\varphi)\,d\varphi - \int\limits_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)\,d\varphi \right| \le \int\limits_{\alpha}^{\widetilde{\alpha}} |h(\varphi)|\,d\varphi + \int\limits_{\beta}^{\widetilde{\beta}} |h(\varphi)|\,d\varphi < 2c_5 q = c_6 r_k^{-\mu}. \tag{20}$$

Отже, з (14), (17)–(20) випливає, що для деякого $\rho_6 \in (0, \rho)$ і кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$N_j(r_k) = \frac{r_k^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha, \beta) + o(r_k^{\rho_6}) \quad (k \to +\infty),$$

де

$$s_f(\alpha, \beta) = h'(\beta) - h'(\alpha) + \rho^2 \int\limits_{\alpha}^{\beta} h(\varphi)\,d\varphi. \tag{21}$$

Далі, для кожного $r > r_1$ існує k таке, що $r_k \le r < r_{k+1}$. Оскільки функції $N_j(r)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, є неспадними, то за умови (6), при $r \to +\infty$

$$N_j(r) \le N_j(r_{k+1}) = \frac{r_{k+1}^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha, \beta) + o(r_{k+1}^{\rho_6}) = \frac{r_k^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha, \beta) + o(r_k^{\rho_7}) \le$$

$$\le \frac{r^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha, \beta) + o(r^{\rho_7}) \quad (\rho_7 < \rho).$$

З іншого боку, за умови (6), при $r \to +\infty$

$$N_j(r) \ge N_j(r_k) = \frac{r_k^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha, \beta) + o(r_k^{\rho_6}) = \frac{r_{k+1}^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha, \beta) + o(r_{k+1}^{\rho_7}) \ge$$

$$\ge \frac{r^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha, \beta) + o(r^{\rho_7}) \quad (\rho_7 < \rho).$$

З останніх нерівностей випливає, що для деякого $\rho_7 \in (0, \rho)$ і кожного $j \in \{1, \ldots, m\}$

$$N_j(r) = \frac{r^\rho}{2\pi\rho^2} s_f(\alpha, \beta) + o(r^{\rho_7}) \quad (r \to +\infty), \tag{22}$$

де функція $s_f(\alpha, \beta)$ визначена рівністю (21). Нехай $i > j$. Тоді, якщо $\alpha \le \varphi \le \beta$, то $\psi_i \le \varphi + 2\pi \le \psi_i + 2\pi$, і з (5) отримуємо

$$h_i(\varphi) = h_i(\varphi + 2\pi) = \frac{\pi\Delta_i}{\sin\pi\rho} \cos\rho(\varphi - \psi_i + \pi). \tag{23}$$

Тому

$$h_i'(\beta) - h_i'(\alpha) + \rho^2 \int\limits_{\alpha}^{\beta} h_i(\varphi)\,d\varphi = 0. \tag{24}$$

Якщо ж $i < j$, і $\alpha \le \varphi \le \beta$, то $\psi_i \le \varphi < \psi_i + 2\pi$, $h_i(\varphi)$ має вигляд (5) і виконується (24). Нехай $i = j$. Якщо $\alpha \le \varphi \le \psi_j$, то $\psi_j \le \varphi + 2\pi \le \psi_j + 2\pi$, і $h_j(\varphi) = h_j(\varphi + 2\pi)$ визначається формулою (23). Якщо ж $\psi_j \le \varphi \le \beta$, то $\psi_j \le \varphi < \psi_j + 2\pi$, і $h_j(\varphi)$ визначається рівністю (5). Тому,

$$h_j'(\beta) - h_j'(\alpha) + \rho^2 \int\limits_{\alpha}^{\beta} h_j(\varphi)\, d\varphi = h_j'(\beta) - h_j'(\alpha) + \rho^2 \left(\int\limits_{\alpha}^{\psi_j} + \int\limits_{\psi_j}^{\beta} \right) h_j(\varphi)\, d\varphi = 2\pi\rho\Delta_j.$$

Звідси і з (4), (21), (22) і (24) отримаємо (12). Лему 5 доведено. $\square$

Лема 6. *Нехай $\rho \in (0, +\infty)$, $\Delta_j \in [0, +\infty)$, $j \in \{1, \ldots, m\}$. Для того, щоб при деякому $\rho_1 \in (0, \rho)$ та кожному $j \in \{1, \ldots, m\}$ виконувалось (3), необхідно і достатньо, щоб при деякому $\rho_7 \in (0, \rho)$ та кожному $j \in \{1, \ldots, m\}$ виконувалось (12).*

Доведення леми 6 міститься в доведенні леми 3 з [4, с. 143].

Доведення теореми 1. При доведенні, для простоти вважатимемо, а це не зменшує загальності, що у зображенні (1) $\lambda = 0$ і $Q(z) = 0$. Твердження другої частини теореми безпосередньо випливає з лем 5 і 6. Доведемо першу частину. Маємо $f(z) = \prod_{j=1}^{m} L_j(z)$, де L_j — канонічний добуток, побудований по нулях функції f, які лежать на промені $\arg z = \psi_j$, і виконується (3). За теоремою 2 з [4, с. 149], зовні кожної виняткової множини $U_j \subset \mathbb{C}$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, кругів із скінченною сумою радіусів при $z \to \infty$ виконується

$$\ln |L_j(z)| = |z|^{\rho} h_j(\varphi) + o(|z|^{\rho_2}) \quad (\rho_2 < \rho),$$

де функція $h_j(\varphi)$ визначена формулою (5). Тому існує така виняткова множина $U = \bigcup_j^m U_j$ кругів в $\mathbb{C}$ із скінченною сумою радіусів, що

$$\ln |f(z)| = \sum_{j=1}^{m} \ln |L_j(z)| = |z|^{\rho} \sum_{j=1}^{m} h_j(\varphi) + o(|z|^{\rho_2}) = |z|^{\rho} h(\varphi) + o(|z|^{\rho_2}) \ (U \not\ni z = re^{i\varphi} \to \infty).$$

Теорему 1 доведено. $\square$

З теореми 1 як наслідок випливає наступне твердження.

Теорема 2. *Для того, щоб ціла функція f нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з нулями на скінченній кількості променів $\arg z = \psi_j$, $j \in \{1, \ldots, m\}$, $0 \le \psi_1 < \psi_2 < \ldots < \psi_m < 2\pi$, була функцією п.р.зр. з індикатором h, визначеним формулою (4), необхідно і достатньо, щоб при деякому $\rho_1 \in (0, \rho)$ та кожному $j \in \{1, \ldots, m\}$ виконувалось (3).*

Зауваження. Якщо виконується (3), то [5] для цілої функції f нецілого порядку $\rho \in (0, +\infty)$ з індикатором h співвідношення $\ln |f(z)| = |z|^{\rho} h(\varphi) + o(|z|^{\rho})$ $(z \to \infty)$ виконується зовні деякої виняткової множини кругів із скінченною сумою радіусів, а (2) виконується [6] зовні деякої C_0–множини, а такі множини не обов'язково покриваються кругами із скінченною сумою радіусів. Крім цього, при виконанні (3) існує [8] ціла функція f порядку $\rho \in (0, +\infty)$, для якої (2) виконується зовні деякої виняткової множини кругів із скінченною сумою радіусів. Достатню частину теореми 1 можна також отримати з [7].

ЛІТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
2. Кондратюк А. А. Ряды Фурье и мероморфные функции. – Львов: Выща школа, 1988. – 196 с.
3. Субханкулов М. А. Тауберовы теоремы с остатком. – М.: Наука, 1976. – 399 с.
4. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку* // Матем. студії. – 2004. – Т. 21, № 2. – С. 140–150.
5. Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций. I* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). – 1968. – Вып. 6. – С. 3–29.
6. Агранович П. З., Логвиненко В. Н. *Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей* // Сиб. мат. ж. – 1985. – Т. 26, № 5. – С. 3–19.
7. Khabibullin B. N. *Asymptotic behaviour of the difference of subharmonic functions* // Mat. Studii. – 2004. – V. 21, № 1. – P. 47–63.
8. Юлмухаметов Р. С. *Аппроксимация субгармонических функций* // Analysis Mathematica. – 1985. – Т. 11, № 3. – С. 257–282.
9. Логвиненко В. Н. *О целых функциях с нулями на полупрямой. I* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). – 1972. – Вып. 16. – С. 154–158.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики
mathanalys@mail.ru

Надійшло 24.02.2005