

УДК 517.5

Б. В. Винницький, Р. В. Хаць

**ПРО АСИМПТОТИЧНУ ПОВЕДІНКУ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ
НЕЦІЛОГО ПОРЯДКУ**

B. V. Vynnyts'kyi, R. V. Khats'. *On asymptotic behaviour of entire functions of nonentire order*, Matematychni Studii, **21** (2004) 140–150.

For an entire function L of nonentire order $\rho \in (0; +\infty)$ we obtain a criterion on zeros under which $\ln |L(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_2})$ ($r_k \rightarrow +\infty$), $0 < \rho_2 < \rho$, holds on some circles $\{z : |z| = r_k\}$ uniformly in $\varphi \in [0; 2\pi)$.

Б. В. Винницький, Р. В. Хаць. *Об асимптотическом поведении целых функций нецелого порядка* // Математичні Студії. – 2004. – Т.21, №2. – С.140–150.

Для целой функции L нецелого порядка $\rho \in (0; +\infty)$ получены условия на нули, при выполнении которых на некоторых окружностях $\{z : |z| = r_k\}$ равномерно по $\varphi \in [0; 2\pi)$ выполняется $\ln |L(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_2})$ ($r_k \rightarrow +\infty$), $0 < \rho_2 < \rho$.

Нехай $0 < \Delta < +\infty$, (λ_n) — послідовність додатних чисел таких, що $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$), $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$ і

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t)}{t} dt, \quad r > 0.$$

Відомо [1], що для того щоб для канонічного добутку

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) \exp\left(\sum_{\nu=1}^p \frac{1}{\nu} \frac{z^\nu}{\lambda_n^\nu}\right), \quad p = [\rho], \quad (1)$$

нецілого порядку $\rho \in (0; +\infty)$ існувала послідовність (r_k) така, що

$$0 < r_k \uparrow +\infty, \quad r_{k+1}/r_k \rightarrow 1 \quad (k \rightarrow +\infty), \quad (2)$$

і рівномірно за $\varphi \in [0; 2\pi]$ виконувалось

$$\ln |L(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r_k^\rho) \quad (k \rightarrow +\infty), \quad (3)$$

2000 *Mathematics Subject Classification*: 30D15.

Keywords: entire function, nonentire order, asymptotic equality

doi:10.30970/ms.21.2.140-150

© Б. В. Винницький, Р. В. Хаць, 2004

необхідно і досить, щоб

$$n(t) = \Delta t^\rho + o(t^\rho) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (4)$$

Відмітимо, що умова (2) рівносильна до співвідношення $r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^\rho)$ ($k \rightarrow +\infty$). Зауважимо, що тонші, ніж (3) асимптотики функції (1) вивчались в багатьох працях (див., наприклад, [2–7]).

Нашою метою є доведення наступного твердження, яке стикається із результатами А. Гришина [2], В. Логвиненка [4] та В. Логвиненко і П. Агранович [5], на що вкажемо пізніше.

Теорема 1. *Для того, щоб для цілої функції вигляду (1) нецілого порядку $\rho \in (0; +\infty)$ існували $\rho_2 \in (0; \rho)$ і послідовність (r_k) такі, що*

$$0 < r_k \uparrow +\infty, \quad r_{k+1}^\rho - r_k^\rho = o(r_k^{\rho_2}) \quad (k \rightarrow +\infty) \quad (5)$$

і рівномірно по $\varphi \in [0; 2\pi]$ виконувалося

$$\ln |L(r_k e^{i\varphi})| = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_2}) \quad (k \rightarrow +\infty), \quad (6)$$

необхідно і досить, щоб при деякому $\rho_1 \in (0; \rho)$

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} n(t) - \Delta t^\rho = o(t^{\rho_1}) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (7)$$

Через c_0, c_1, c_2, \dots позначатимемо деякі додатні сталі. Для доведення теореми 1 нам будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $\rho \in (0; +\infty)$ — неціле число, $p < \rho_1 < \rho < p+1$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (7). Тоді для цілої функції (1) виконується*

$$(\forall \rho_4 \in (\rho_1; \rho)) (\exists c_1 \in (0; +\infty)) (\forall z = r e^{i\varphi} \in \mathbb{C}, \varphi \in [0; 2\pi]) :$$

$$\ln |L(z)| \leq \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + c_1(1 + r^{\rho_4}) \quad (8)$$

і

$$\ln |L(z)| = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + \eta(z), \quad (9)$$

при цьому $\eta(z) = o(|z|^{\rho_3})$, $E_\varepsilon \not\ni z \rightarrow \infty$ для будь-якого $\varepsilon \in (0; (\rho - \rho_1)/2)$ і для будь-якого $\rho_3 \in (\rho_1 + 2\varepsilon; \rho)$, де $E_\varepsilon = \{z = r e^{i\varphi} : |\varphi| \leq 1/r^\varepsilon\}$.

Доведення. Спочатку доведемо, що для (1) виконується співвідношення (9). Маємо ([3, с. 92])

$$\begin{aligned} \ln |L(z)| &= \operatorname{Re} \left\{ -z^{p+1} \int_0^{+\infty} n(t) \frac{dt}{t^{p+1}(t-z)} \right\} = \\ &= -r^{p+1} \int_0^{+\infty} \frac{t \cos(p+1)\varphi - r \cos p\varphi}{t^{p+1}(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)} n(t) dt =: I. \end{aligned}$$

Врахувавши (7), за формулою (5.2₂) з [3, с. 94] отримаємо

$$\begin{aligned} I &= -\Delta r^{p+1} \int_0^{+\infty} t^{\rho-p-1} \frac{t \cos(p+1)\varphi - r \cos p\varphi}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2} dt + I_1 = \\ &= \Delta r^\rho \int_0^{+\infty} u^{\rho-p-1} \frac{\cos p\varphi - u \cos(p+1)\varphi}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du + I_1 = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + I_1, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$I_1 = r^{p+1} \int_0^{+\infty} d(t) \frac{r \cos p\varphi - t \cos(p+1)\varphi}{t^{p+1}(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)} dt,$$

причому $d(t) = o(t^{\rho_1})$ ($t \rightarrow +\infty$) і $|d(t)| \leq c_0 t^{\rho_1}$ ($t \in [0; +\infty)$). Скориставшись нерівностями $u^2 - 2u \cos \varphi + 1 \geq (1 - \cos \varphi)(u^2 + 1)$, $u^2 + 1 \geq \frac{(u+1)^2}{2}$, для будь-якого $\rho_3 \in (\rho_1 + 2\varepsilon; \rho)$, матимемо

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq c_0 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} u^{\rho_1-p-1} \left| \frac{\cos p\varphi - u \cos(p+1)\varphi}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} \right| du \leq \\ &\leq c_0 r^{\rho_1} \int_0^{+\infty} \frac{(u+1)u^{\rho_1-p-1}}{(1 - \cos \varphi)(u^2 + 1)} du \leq \frac{c_0 r^{\rho_1}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \int_0^{+\infty} \frac{u^{\rho_1-p-1}}{u+1} du \leq c_2 r^{\rho_3} \quad (r \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Звідси і з (10) випливає (9). Тепер доведемо (8). Для цього розглянемо функцію

$$F(z) = L(z) \cdot f(z), \quad f(z) = \exp \left(-\frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} (ze^{-\pi i})^\rho - c_1 z^{\rho_4} \right).$$

За природного вибору однозначної вітки, функція F в куті $\mathbb{C}(-\delta; \delta) = \{z : |\arg z| < \delta\}$ задовольняє умову

$$(\exists \sigma > 0)(\exists c_3 \in (0; +\infty))(\forall z \in \mathbb{C}(-\delta; \delta)) : |F(z)| \leq c_3 e^{\sigma |z|^\rho}.$$

Крім цього, із (9) випливає, що на межі кута функція F є обмежена, тобто

$$|F(z)| \leq c_2, \quad z \in \partial \mathbb{C}(-\delta; \delta) = \{z : |\arg z| = \delta\}.$$

Вибравши δ достатньо малим, за принципом Фрагмена-Ліндельофа [1, с. 69] приходимо до висновку, що $|F(z)| \leq c_2$ для всіх $z \in \mathbb{C}(-\delta; \delta)$. Тому,

$$|L(z)| \leq c_2 / |f(z)| \leq c_2 \exp \left(\frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + c_1 r^{\rho_4} \right).$$

Звідси випливає (8). □

Лема 2. Нехай $0 < \rho < +\infty$ і для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ для цілої функції вигляду (1) існує послідовність (r_k) з властивостями (5) і (6). Тоді

$$N(r) = \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_2}) \quad (r \rightarrow +\infty). \quad (11)$$

Доведення. Справді, за рівністю Єнсена [1, с. 24] $N(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |L(re^{i\varphi})| d\varphi$, отримуємо

$$N(r_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r_k^{\rho_2}) \right) d\varphi = \frac{\Delta}{\rho} r_k^\rho + o(r_k^{\rho_2}) \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Для кожного $r > r_1$ існує k таке, що $r_k \leq r < r_{k+1}$. Оскільки $N(r)$ є неспадною функцією, то за умовою (5) при $r \rightarrow +\infty$ маємо

$$N(r) \leq N(r_{k+1}) = \frac{\Delta}{\rho} r_{k+1}^\rho + o(r_{k+1}^{\rho_2}) \leq \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_2}).$$

З іншого боку, за умовою (5) при $r \rightarrow +\infty$

$$N(r) \geq N(r_k) = \frac{\Delta}{\rho} r_k^\rho + o(r_k^{\rho_2}) = \frac{\Delta}{\rho} r_{k+1}^\rho + o(r_{k+1}^{\rho_2}) \geq \frac{\Delta}{\rho} r^\rho + o(r^{\rho_2}).$$

З останніх нерівностей випливає (11). \square

Лема 3. Нехай $0 < \Delta < +\infty$, $0 < \rho < +\infty$. Для того, щоб для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконувалось (7), необхідно і досить, щоб для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ виконувалось (11).

Доведення. Необхідність випливає безпосередньо із означення $N(r)$. Доведемо достатність. Позаяк для $0 < r < R < +\infty$

$$n(r) \ln \frac{R}{r} \leq N(R) - N(r) = \int_r^R \frac{n(t)}{t} dt \leq n(R) \ln \frac{R}{r},$$

то, взявши у лівій нерівності $R = r + r^\alpha$, де $1 + \rho_2 - \rho < \alpha < 1$, $\max\{\rho_2 - \alpha + 1, \rho + \alpha - 1\} < \rho_1 < \rho$, при $r \rightarrow +\infty$ отримуємо

$$n(r) \leq \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho ((1 + r^{\alpha-1})^\rho - 1) + o(r^{\rho_2})}{\ln(1 + r^{\alpha-1})} = \frac{\frac{\Delta}{\rho} r^\rho (\rho r^{\alpha-1} + O(r^{2(\alpha-1)})) + o(r^{\rho_2})}{r^{\alpha-1} + O(r^{2(\alpha-1)})} = \Delta r^\rho + o(r^{\rho_1}).$$

З іншого боку, взявши у правій нерівності $r = R - R^\alpha$, при $R \rightarrow +\infty$ маємо

$$\begin{aligned} n(R) &\geq \frac{\frac{\Delta}{\rho} R^\rho (1 - (1 - R^{\alpha-1})^\rho) + o(R^{\rho_2})}{-\ln(1 - R^{\alpha-1})} = \\ &= \frac{\Delta R^\rho + O(R^{\rho-1+\alpha}) + o(R^{\rho_2+1-\alpha})}{1 + O(R^{\alpha-1})} = \Delta R^\rho + o(R^{\rho_1}). \end{aligned}$$

Отже, з обидвох останніх нерівностей випливає (7). \square

Лема 4. Нехай послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (7), $0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho$, $\beta > \rho - \rho_1$ і $R_k = k^{1/\beta}$. Тоді для кожного $k \in \mathbb{N}$ в \mathbb{C} існує система U виняткових кругів із скінченною сумою радіусів така, що для функцій

$$\psi_k(z) = \prod_{R_{k-1} < |\lambda_n| \leq R_{k+2}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right) \quad (12)$$

виконується

$$(\exists c_4 \in (0; +\infty)) (\forall k \in \mathbb{N}) (\forall z \in \mathbb{C} \setminus U) : \ln |\psi_k(z)| \geq -c_4 R_k^{\rho_3}. \quad (13)$$

Доведення. Нехай $H_k = R_k \exp(-R_k^{\varepsilon_0})$, де $\varepsilon_0 \in (0; \rho_3 - \rho_1) \cap (0; \beta - \rho + \rho_3)$. За теоремою Картана [1, с. 31] поліном

$$p_k(z) = \prod_{R_{k-1} < |\lambda_n| \leq R_{k+2}} (z - \lambda_n)$$

задовольняє нерівність $\ln |p_k(z)| \geq n_k \ln(H_k/e)$ для всіх z зовні системи U_k виняткових кругів із загальною сумою радіусів $2H_k$, де

$$\begin{aligned} n_k &= n(R_{k+2}) - n(R_{k-1}) = \Delta(R_{k+2}^\rho - R_{k-1}^\rho) + o(R_k^{\rho_1}) = \\ &= \frac{3\rho\Delta}{\beta}(1 + o(1))R_k^{\rho-\beta} + o(R_k^{\rho_1}) \quad (k \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

Оскільки в (12) $|\lambda_n| \leq R_{k+2}$, то з останньої нерівності отримаємо, що

$$\ln |\psi_k(z)| \geq n_k \ln \left(\frac{R_k e^{-R_k^{\varepsilon_0}}}{e R_{k+2}} \right)$$

для всіх k і всіх z , які не належать до цих виняткових кругів. Оскільки $\sum_k 2H_k < +\infty$, то звідси випливає (13). \square

Лема 5. Нехай $\rho \in (0; +\infty)$ — неціле число, $\rho < \rho_1 < \rho$ і послідовність (λ_n) задовольняє умову (7). Тоді для кожного $\varepsilon \in (0; (\rho - \rho_1)/2)$ існує в \mathbb{C} множина U кругів із скінченною сумою радіусів така, що для кожного $\rho_3 \in (\rho_1 + 2\varepsilon; \rho)$ для цілої функції (1) при $\tilde{E}_\varepsilon \not\equiv z \rightarrow \infty$ виконується

$$\ln |L(z)| \geq \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} |z|^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(|z|^{\rho_3}), \quad (14)$$

де $\tilde{E}_\varepsilon = E_\varepsilon \cap U$, $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$, і E_ε визначене у формулюванні лемі 1.

Доведення. Виберемо $\varepsilon_0, \beta, R_k$ так, як і в лемі 4, і подібно побудуємо систему U виняткових кругів із скінченною сумою радіусів. Згідно з лемою 1, твердження лемі 5 досить довести для $z \in E_\varepsilon \setminus U$. Для кожного $z \in E_\varepsilon \setminus U$ існує $k \in \mathbb{N}$, для якого $R_k \leq |z| < R_{k+1}$. Маємо

$$\begin{aligned} \ln |L(z)| &= \left(\sum_{|\lambda_n| \leq R_{k-1}} + \sum_{|\lambda_n| > R_{k+2}} \right) \left(\ln \left| 1 - \frac{z}{\lambda_n} \right| + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{\nu=1}^p \frac{z^\nu}{\nu \lambda_n^\nu} \right\} \right) + \\ &+ \ln |\psi_k(z)| + \operatorname{Re} \left\{ \sum_{R_{k-1} < |\lambda_n| \leq R_{k+2}} \left(\frac{z}{\lambda_n} + \frac{z^2}{2\lambda_n^2} + \dots + \frac{z^p}{p\lambda_n^p} \right) \right\} = \\ &= I_2 + I_3 + I_4 + \ln |\psi_k(z)| + I_5, \end{aligned} \quad (15)$$

де

$$I_2 = \operatorname{Re} \left\{ -z^{p+1} \int_{[0, +\infty) \setminus [R_{k-1}; R_{k+2}]} \frac{n(t)}{t^{p+1}(t-z)} dt \right\};$$

$$\begin{aligned}
 I_3 &= \frac{1}{2} \left(n(R_{k-1}) \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2} \right) - n(R_{k+2}) \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k+2}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k+2}^2} \right) \right); \\
 I_4 &= n(R_{k-1}) \sum_{\nu=1}^p \frac{r^\nu \cos \nu \varphi}{\nu R_{k-1}^\nu} - n(R_{k+2}) \sum_{\nu=1}^p \frac{r^\nu \cos \nu \varphi}{\nu R_{k+2}^\nu}; \\
 I_5 &= \sum_{R_{k-1} < |\lambda_n| \leq R_{k+2}} \left(\sum_{\nu=1}^p \frac{r^\nu \cos \nu \varphi}{\nu \lambda_n^\nu} \right).
 \end{aligned}$$

Далі, зауважимо, що

$$-\frac{z^{p+1}}{t^{p+1}(t-z)} = -\frac{z}{t(t-z)} + \frac{1}{t^{p+1}} \sum_{j=1}^p z^j t^{p-j}$$

і для $k \in \mathbb{Z}_+$

$$\operatorname{Re} \left(-\frac{z^{k+1}}{t^{k+1}(t-z)} \right) = \frac{r^{k+1}(r \cos k\varphi - t \cos (k+1)\varphi)}{t^{k+1}(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)}.$$

Внаслідок цього, враховуючи (7), отримуємо

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \Delta r^{p+1} \int_0^{+\infty} t^{\rho-p-1} \frac{r \cos p\varphi - t \cos (p+1)\varphi}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2} dt + I_{2,1} - I_{2,2} + I_{2,3} = \\
 &= \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + I_{2,1} - I_{2,2} + I_{2,3},
 \end{aligned} \tag{16}$$

де

$$I_{2,1} = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4; \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
 \sigma_0 + \sigma_1 &= \left(\int_0^{R_{k-1}} + \int_{R_{k+2}}^{2R_{k+2}} \right) \frac{d(t)}{t^{p+1}} \sum_{j=1}^p t^{p-j} r^j \cos j\varphi dt, \\
 \sigma_2 + \sigma_3 &= r \left(\int_0^{R_{k-1}} + \int_{R_{k+2}}^{2R_{k+2}} \right) d(t) \frac{r - t \cos \varphi}{t(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)} dt, \\
 \sigma_4 &= r^{p+1} \int_{2R_{k+2}}^{+\infty} d(t) \frac{r \cos p\varphi - t \cos (p+1)\varphi}{t^{p+1}(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)} dt;
 \end{aligned}$$

$$I_{2,2} = \Delta \int_{R_{k-1}}^{R_{k+2}} t^{\rho-p-1} \sum_{j=1}^p t^{p-j} r^j \cos j\varphi dt; \quad I_{2,3} = \Delta r \quad v.p. \int_{R_{k-1}}^{R_{k+2}} t^{\rho-1} \frac{t \cos \varphi - r}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2} dt.$$

Далі, оскільки $u^2 - 2u \cos \varphi + 1 \geq (1-u)^2$, $(1-u \cos \varphi)^2 \leq u^2 - 2u \cos \varphi + 1$, то

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{1 - u \cos \varphi}{u(u^2 - 2u \cos \varphi + 1)} \right| &= \left(\frac{(1-u)^2}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} \right)^{1/2} \left(\frac{(1-u \cos \varphi)^2}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} \right)^{1/2} \frac{1}{|u(1-u)|} \leq \\
 &\leq \frac{1}{|u(1-u)|} \leq \frac{1}{|1-u|} + \frac{1}{|u|}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

Крім цього, при $k \rightarrow +\infty$

$$R_{k+1} - R_k = \frac{1}{\beta}(1 + o(1))R_k^{1-\beta}, R_{k+2} - R_k = \frac{2}{\beta}(1 + o(1))R_k^{1-\beta},$$

$$\ln \frac{2R_{k+2} - R_k}{R_{k+2} - R_k} = \beta(1 + o(1)) \ln R_k.$$

Тому,

$$|\sigma_2 + \sigma_3| \leq c_5 R_{k-1}^{\rho_1} \left(1 + \ln \frac{R_k - R_{k-1}}{R_k} \right) +$$

$$+ c_6 R_{k+2}^{\rho_1} \left(\ln 2 + \ln \frac{2R_{k+2} - R_k}{R_{k+2} - R_k} \right) = o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (19)$$

Далі,

$$|\sigma_4| \leq c_7 r^{p+1} \int_{2R_{k+2}}^{+\infty} \frac{r+t}{(t-r)^2} t^{\rho_1-p-1} dt \leq c_8 r^{\rho_1} \int_{2R_{k+2}/r}^{+\infty} u^{\rho_1-p-2} du = o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (20)$$

До того ж,

$$|\sigma_0| \leq c_{10} \int_0^{R_{k-1}} \sum_{j=1}^p R_{k+1}^j t^{\rho_1-j-1} dt = c_{10} \sum_{j=1}^p \int_0^{R_{k-1}} R_{k+1}^j t^{\rho_1-j-1} dt =$$

$$= c_{10} R_{k-1}^{\rho_1} \sum_{j=1}^p \frac{1}{\rho_1 - j} \left(\frac{R_{k+1}}{R_{k-1}} \right)^j = o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (21)$$

Подібно,

$$|\sigma_1| \leq c_{11} \sum_{j=1}^p \int_{R_{k+2}}^{2R_{k+2}} R_{k+1}^j t^{\rho_1-j-1} dt = c_{11} \sum_{j=1}^p \frac{R_{k+1}^j}{\rho_1 - j} \left((2R_{k+2})^{\rho_1-j} - R_{k+2}^{\rho_1-j} \right) =$$

$$= c_{11} R_{k+2}^{\rho_1} \sum_{j=1}^p \frac{(2^{\rho_1-j} - 1)}{\rho_1 - j} \left(\frac{R_{k+1}}{R_{k+2}} \right)^j = o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (22)$$

Крім цього,

$$|I_{2,2}| \leq \Delta \sum_{j=1}^p \int_{R_{k-1}}^{R_{k+2}} R_{k+1}^j t^{\rho-j-1} dt = \Delta \sum_{j=1}^p \frac{R_{k+1}^j}{\rho - j} (R_{k+2}^{\rho-j} - R_{k-1}^{\rho-j}) =$$

$$= \Delta \sum_{j=1}^p \frac{1}{\rho - j} \left(R_{k+2}^\rho \left(\frac{R_{k+1}}{R_{k+2}} \right)^j - R_{k-1}^\rho \left(\frac{R_{k+1}}{R_{k-1}} \right)^j \right) \leq$$

$$\leq c_{12} (R_{k+2}^\rho - R_{k-1}^\rho) = c_{13} R_k^{\rho-\beta} = o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (23)$$

Далі, оскільки

$$t^{\rho-1} \frac{t \cos \varphi - r}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2} = (t^{\rho-1} - 1) \frac{t \cos \varphi - r}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2} + \frac{t \cos \varphi - r}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2},$$

і при $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}\Delta r^\rho \sin \varphi &= o(R_k^{\rho_3}), \\ \Delta r^{\rho-1}(R_{k+2} - R_{k-1}) &= \frac{3\Delta}{\beta}(1 + o(1))R_k^{\rho-\beta} = o(R_k^{\rho_3}),\end{aligned}$$

то, скориставшись першою нерівністю з (18), отримаємо

$$\begin{aligned}I_{2,3} &= \Delta r^\rho \quad v.p. \int_{R_{k-1}/r}^{R_{k+2}/r} \frac{u \cos \varphi - 1}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du + o(R_k^{\rho_3}) = \\ &= -\frac{\Delta}{2} r^\rho \cos \varphi \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2r R_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2r R_{k+2} \cos \varphi + r^2} + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty).\end{aligned}$$

До того ж,

$$\begin{aligned}n(R_{k+2}) - \Delta r^\rho \cos \varphi &= (n(R_{k+2}) - \Delta r^\rho) + 2\Delta r^\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2}, \\ \ln \frac{R_{k+2}}{R_{k-1}} &= \ln \left(1 + \frac{R_{k+2} - R_{k-1}}{R_{k-1}} \right) = \frac{3}{\beta}(1 + o(1))R_k^{-\beta} \quad (k \rightarrow +\infty),\end{aligned}$$

і для $r \in [R_k, R_{k+1})$, вважаючи, що $\beta < 1$,

$$\begin{aligned}\left| \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2r R_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2r R_{k+2} \cos \varphi + r^2} \right| &\leq 2 \ln \frac{R_k + R_{k+2}}{R_k - R_{k-1}}, \\ \ln \frac{R_k + R_{k+1}}{R_k - R_{k-1}} &= \beta \ln R_k + O(1) \quad (k \rightarrow +\infty).\end{aligned}$$

Крім того,

$$n(R_{k-1}) - n(R_{k+2}) = -\frac{3\rho\Delta}{\beta}(1 + o(1))R_k^{\rho-\beta} + o(R_k^{\rho_1}) \quad (k \rightarrow +\infty)$$

і для $r \in [R_k, R_{k+1})$

$$\begin{aligned}\left| \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2} \right) \right| &\leq 2 \ln \max \left\{ 1 + \frac{R_{k+1}}{R_{k-1}}, \frac{R_k}{R_k - R_{k-1}} - 1 \right\}, \\ \frac{1}{2}(n(R_{k-1}) - n(R_{k+2})) \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2} \right) &= o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty).\end{aligned}$$

Внаслідок цього, для $r \in [R_k; R_{k+1})$ при $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned}I_{2,3} + I_3 &= n(R_{k+2}) \ln \frac{R_{k+2}}{R_{k-1}} + \frac{1}{2}(n(R_{k+2}) - \Delta r^\rho) \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2r R_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2r R_{k+2} \cos \varphi + r^2} + \\ &\quad + \Delta r^\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2r R_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2r R_{k+2} \cos \varphi + r^2} + \\ &\quad + \frac{1}{2}(n(R_{k-1}) - n(R_{k+2})) \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2} \right) + o(R_k^{\rho_3}) \geq\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\geq -\frac{1}{2} \left(n(R_{k+2}) - \Delta R_{k+1}^\rho \right) \left| \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2r R_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2r R_{k+2} \cos \varphi + r^2} \right| - \\
&\quad - \Delta R_{k+1}^\rho \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left| \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2r R_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2r R_{k+2} \cos \varphi + r^2} \right| + \\
&\quad + \frac{1}{2} (n(R_{k-1}) - n(R_{k+2})) \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2} \right) + \\
&\quad + \Delta R_{k+2}^\rho \ln \frac{R_{k+2}}{R_{k-1}} + o(R_k^{\rho_3}) = o(R_k^{\rho_3}). \tag{24}
\end{aligned}$$

Зауважимо, що для $r \in [R_k, R_{k+1})$ при великих k правильні нерівності

$$\left| \sum_{\nu=1}^p \frac{r^\nu \cos \nu \varphi}{\nu R_{k-1}^\nu} \right| \leq 2p, \quad r^\nu \left(\frac{1}{R_{k-1}^\nu} - \frac{1}{R_{k+2}^\nu} \right) \leq \left(\frac{R_{k+2}}{R_{k-1}} \right)^\nu - 1.$$

Тому для $r \in [R_k, R_{k+1})$ при $k \rightarrow +\infty$ маємо

$$\begin{aligned}
I_4 &= (n(R_{k-1}) - n(R_{k+2})) \sum_{\nu=1}^p \frac{r^\nu \cos \nu \varphi}{\nu R_{k-1}^\nu} + n(R_{k+2}) \sum_{\nu=1}^p \frac{r^\nu \cos \nu \varphi}{\nu} \left(\frac{1}{R_{k-1}^\nu} - \frac{1}{R_{k+2}^\nu} \right) \geq \\
&\geq -n(R_{k+2}) \left| \sum_{\nu=1}^p \frac{r^\nu \cos \nu \varphi}{\nu} \left(\frac{1}{R_{k-1}^\nu} - \frac{1}{R_{k+2}^\nu} \right) \right| - \\
&\quad - (n(R_{k+2}) - n(R_{k-1})) \left| \sum_{\nu=1}^p \frac{r^\nu \cos \nu \varphi}{\nu R_{k-1}^\nu} \right| = o(R_k^{\rho_3}). \tag{25}
\end{aligned}$$

Далі, оскільки, як відзначалось вище,

$$n_k = n(R_{k+2}) - n(R_{k-1}) = \frac{3\rho\Delta}{\beta} (1 + o(1)) R_k^{\rho-\beta} + o(R_k^{\rho_1}) = o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty),$$

то

$$|I_5| \leq p \left(\frac{R_{k+1}}{R_{k-1}} \right)^p n_k = o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty). \tag{26}$$

Об'єднуючи (13), (15)–(26), отримуємо

$$\begin{aligned}
\ln |L(z)| &\geq \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} R_k^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(R_k^{\rho_3}) = \\
&= -\frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} |(R_k^\rho - r^\rho) \cos \rho(\varphi - \pi)| + \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(R_k^{\rho_3}) \geq \\
&\geq \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} (R_k^\rho - R_{k+1}^\rho) + \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^{\rho_3}) = \\
&= \frac{\pi\Delta}{\sin \pi\rho} r^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(r^{\rho_3}) \quad (z = r e^{i\varphi} \rightarrow +\infty, z \notin \tilde{E}_\varepsilon).
\end{aligned}$$

Отже, виконується нерівність (14). Лему 5 доведено. \square

Теорема 2. Нехай $\rho \in (0; +\infty)$ — неціле число, $p < \rho_1 < \rho$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (7). Тоді існують $\rho_2 \in (0; \rho)$ і система U кругів в \mathbb{C} із скінченною сумою \tilde{S} радіусів такі, що для цілої функції вигляду (1) при $U \not\exists z \rightarrow \infty$ і $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ виконується

$$\ln |L(z)| = \frac{\pi \Delta}{\sin \pi \rho} |z|^\rho \cos \rho(\varphi - \pi) + o(|z|^{\rho_2}). \quad (27)$$

Ця теорема є наслідком лем 1 та 5.

Зауважимо, що деякі достатні умови, за яких зовні множини кругів із скінченною сумою радіусів виконується співвідношення (27) з $\rho_2 = \rho$, вказані А. Гришиним [2]. З теореми, отриманої в [2], випливає, що за умови (7) зовні системи кругів із скінченною сумою радіусів виконується $\ln |L(z)| = |z|^\rho h(\varphi) + o(|z|^\rho)$ ($z \rightarrow \infty$). За цієї ж умови (7) з результатів В. Логвиненка [4, с. 155] випливає справедливості асимптотичної формули (27) зовні прямокутників

$$\tilde{U}_n = \{z : x'_n \leq \operatorname{Re} z \leq x''_n, \quad |\operatorname{Im} z| \leq y_n\}$$

таких, що

$$x'_n > 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\sum_{x'_n \leq R} (x''_n - x'_n) = o(R) \quad (R \rightarrow +\infty), \quad \sup_{x'_n \leq R} |y_n| \leq R.$$

Проте, такі прямокутники не можна, взагалі кажучи, покрити кругами із скінченною сумою радіусів. Із результатів статті [5] за умови (7) випливає справедливості асимптотичної формули (27) зовні C^0 -множини, а такі множини також не обов'язково покриваються кругами із скінченною сумою радіусів.

Доведення теореми 1. Необхідність безпосередньо випливає із лем 2 та 3. Доведемо достатність. Нехай $\rho_k = k^{1/\beta}$, $\rho - \rho_2 < \beta < 1$, де $0 < \rho_2 < \rho$ число, про яке говориться в теоремі 2. Тоді $\rho_{k+1} - \rho_k = \frac{1}{\beta}(1 + o(1))\rho_k^{1-\beta} \rightarrow +\infty$ ($k \rightarrow +\infty$). Тому $\rho_{k+1} - \rho_k > 2\tilde{S}$ для великих k . Внаслідок цього, існує послідовність (r_k) така, що $\rho_k < r_k < \rho_{k+1}$ і кола $\partial V_k = \{z : |z| = r_k\}$ з системою U виняткових кругів із теореми 2 не перетинаються. Отже, при $\bigcup_k \partial V_k \ni z \rightarrow \infty$ виконується (27). Крім цього,

$$r_{k+1}^\rho - r_k^\rho \leq \rho_{k+2}^\rho - \rho_k^\rho = \frac{2\rho}{\beta}(1 + o(1))\rho_k^{\rho-\beta} = o(r_k^{\rho_2}) \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Звідси випливає потрібне твердження. Теорему 1 повністю доведено. \square

З теорем 1 і 2 випливає також наступне твердження.

Теорема 3. Для того, щоб для цілої функції (1) нецілого порядку $\rho \in (0; +\infty)$ з додатними нулями існувала множина U кругів в \mathbb{C} із скінченною сумою \tilde{S} радіусів така, що при $U \not\exists z \rightarrow \infty$ і $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$ для деякого $\rho_2 \in (0; \rho)$ виконувалось співвідношення (27), необхідно і досить, щоб для деякого $\rho_1 \in (0; \rho)$ виконувалась умова (7).

Автори вдячні П. З. Агранович за корисні зауваження.

ЛІТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
2. Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). – 1968. – Вып.6. – С.3–29.
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
4. Логвиненко В. Н. *О целых функциях с нулями на полупрямой. I* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков). – 1972. – Вып.16. – С.154–158.
5. Агранович П. З., Логвиненко В. Н. *Аналог теоремы Валирона–Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей* // Сиб. мат. ж. – 1985. – Т. 26, №5. – С.3–19.
6. Винницкий Б. В. *Об эквивалентности некоторых условий для целых функций нулевого порядка* // Изв. вузов. Мат. – 1991. – №2. – С.193–196.
7. Vynnyts'kyi B. V., Khats' R. V. *On asymptotic behaviour of entire functions of order less than one* // Mat. Studii. – 2003. – V.19, №1. – P.97–105.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики і математики

Надійшло 2.10.2003
Після переробки 26.02.2004