

УДК 517.5

Р. В. ХАЦЬ

**ПРО АСИМПТОТИЧНЕ ПОВОДЖЕННЯ КАНОНІЧНОГО
ДОБУТКУ ЦІЛОГО ПОРЯДКУ**

R. V. Khats'. *On asymptotic behaviour of canonical product of entire order*, Matematychni Studii, **22** (2004) 105–110.

For a canonical product L of entire order $\rho \in (0; +\infty)$ which equals the genus of the product we prove that if the counting function of the zeros satisfies $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$ ($t \rightarrow +\infty$), $\rho_1 \in (0, \rho)$, then $\ln |L(z)| = \frac{1}{\rho} \operatorname{Re} \left\{ z^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} \right\} - \Delta |z|^\rho \left(\frac{1}{\rho} \cos \rho\varphi + (\varphi - \pi) \sin \rho\varphi \right) + o(|z|^{\rho_2})$ ($|z| \rightarrow +\infty$), $\rho_2 \in (0; \rho)$.

Р. В. Хаць. *Об асимптотическом поведении канонического произведения целого порядка* // Математичні Студії. – 2004. – Т.22, №1. – С.105–110.

Для канонического произведения L целого порядка $\rho \in (0; +\infty)$, равного роду произведения, доказано, что если для считающей функции последовательности нулей выполняется условие $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$ ($t \rightarrow +\infty$), $\rho_1 \in (0, \rho)$, то $\ln |L(z)| = \frac{1}{\rho} \operatorname{Re} \left\{ z^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} \right\} - \Delta |z|^\rho \left(\frac{1}{\rho} \cos \rho\varphi + (\varphi - \pi) \sin \rho\varphi \right) + o(|z|^{\rho_2})$ ($|z| \rightarrow +\infty$), $\rho_2 \in (0; \rho)$.

Нехай $\Delta \in [0; +\infty)$, (λ_n) — послідовність додатних чисел таких, що $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \rightarrow +\infty$ ($n \rightarrow +\infty$) і $n(t) = \sum_{\lambda_n \leq t} 1$. Відомо [1, 2], що якщо $\rho \in (0; +\infty)$ — ціле число і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову $n(t) = \Delta t^\rho + o(t^{\rho_1})$ ($t \rightarrow +\infty$), то для канонічного добутку

$$L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E\left(\frac{z}{\lambda_n}; p\right), \quad E(u; p) = (1 - u) \exp\left(u + u^2/2 + \dots + u^p/p\right) \quad (1)$$

порядку ρ зовні деяких виняткових множин виконується співвідношення

$$\ln |L(z)| = \Lambda(z) + o(|z|^\rho) \quad (z = re^{i\varphi} \rightarrow \infty),$$

де

$$\Lambda(z) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} \operatorname{Re} \left\{ z^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} \right\} - \Delta |z|^\rho \left(\frac{1}{\rho} \cos \rho\varphi + (\varphi - \pi) \sin \rho\varphi \right), & \rho = p, \\ 0, & \rho = p + 1. \end{cases} \quad (2)$$

В ряді праць [3–7] вивчалися тонші асимптотичні оцінки для цілих функцій. Метою даної статті є доведення наступного твердження, яке доповнює результат, отриманий для нецілого порядку в [5].

athematics Subject Classification: 30D15.

Keywords: canonical product, entire order, zero counting function

doi:10.30970/ms.22.1.105-110

© Р. В. Хаць, 2004

Теорема 1. Нехай $\rho \in (0; +\infty)$ — ціле число, і при деякому $\rho_1 \in (0; \rho)$ неспадна до $+\infty$ послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову

$$d(t) \stackrel{\text{def}}{=} n(t) - \Delta t^\rho = o(t^{\rho_1}) \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (3)$$

Тоді існують $\rho_2 \in (0; \rho)$ і система U кругів в \mathbb{C} із скінченною сумою радіусів такі, що при $U \not\ni z = re^{i\varphi} \rightarrow \infty$ і $\varphi \in [0; 2\pi)$ для цілої функції (1) виконується

$$\ln |L(z)| = \Lambda(z) + o(|z|^{\rho_2}),$$

де $\Lambda(z)$ визначена формулою (2).

Через c_0, c_1, c_2, \dots позначаємо деякі додатні сталі. Для доведення теореми 1 потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. Нехай виконуються умови теореми 1 і

$$L_r(z) = \prod_{\lambda_n \leq r} E\left(\frac{z}{\lambda_n}; \rho - 1\right) \prod_{\lambda_n > r} E\left(\frac{z}{\lambda_n}; \rho\right).$$

Тоді

$$\ln |L_r(z)| = -\Delta |z|^\rho \left(\frac{1}{\rho} \cos \rho\varphi + (\varphi - \pi) \sin \rho\varphi \right) + \eta(z), \quad (4)$$

при цьому $\eta(z) = o(|z|^{\rho_3})$, $E_\varepsilon \not\ni z \rightarrow \infty$ для будь-якого $\varepsilon \in (0; (\rho - \rho_1)/2)$ і для будь-якого $\rho_3 \in (\rho_1 + 2\varepsilon; \rho)$, де $E_\varepsilon = \{z : |\arg z| < 1/|z|^\varepsilon\}$.

Доведення. Нехай $z = re^{i\varphi}$, $\varphi \in (0; 2\pi)$. Тоді, за умови (3), при $r \rightarrow +\infty$ отримуємо ([1, с. 91], [3, с. 106])

$$\ln |L_r(re^{i\varphi})| = -\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \cos \rho\varphi + (\pi - \varphi) \Delta r^\rho \sin \rho\varphi + I_1 + I_2 + o(r^{\rho_1}), \quad (5)$$

де

$$I_1 = r^\rho \int_0^r d(t) \frac{r \cos(\rho - 1)\varphi - t \cos \rho\varphi}{t^\rho(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)} dt, \quad I_2 = r^{\rho+1} \int_r^{+\infty} d(t) \frac{r \cos \rho\varphi - t \cos(\rho + 1)\varphi}{t^{\rho+1}(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)} dt,$$

при цьому $d(t) = o(t^{\rho_1})$ ($t \rightarrow +\infty$) і $|d(t)| \leq c_0 t^{\rho_1}$ ($t \in [0; +\infty)$). Подібно, як у доведенні леми 1 з [5, с. 142], для будь-якого $\rho_3 \in (\rho_1 + 2\varepsilon; \rho)$, матимемо

$$|I_1 + I_2| \leq \frac{c_0 r^{\rho_1}}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} \left(\int_0^1 \frac{u^{\rho_1 - \rho}}{u + 1} du + \int_1^{+\infty} \frac{u^{\rho_1 - \rho - 1}}{u + 1} du \right) \leq c_1 r^{\rho_3} \quad (r \rightarrow +\infty).$$

Звідси і з (5) випливає (4). □

Лема 2. Нехай послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (3), $0 < \rho_1 < \rho_3 < \rho$, $\beta > \rho - \rho_3$, $R_k = k^{1/\beta}$ і

$$\psi_k(z) = \prod_{R_{k-1} < \lambda_n \leq R_{k+2}} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n} \right) \quad (k \in \mathbb{N}). \quad (6)$$

Тоді для всіх $k \in \mathbb{N}$ і всіх $z \in \mathbb{C}$ виконується

$$\ln |\psi_k(z)| \leq c_2 R_k^{\rho_3} \ln(1 + |z|/R_{k-1}), \quad (7)$$

і, крім цього, існує така система U виняткових кругів із скінченною сумою радіусів, що

$$(\exists c_2) (\forall k \in \mathbb{N}) (\forall z \in \mathbb{C} \setminus U) : \ln |\psi_k(z)| \geq -c_2 R_k^{\rho_3}. \quad (8)$$

Доведення. Нерівність (8) доведено в лемі 4 з [5, с. 143, 144]. Доведемо (7). Оскільки в (6) $\lambda_n > R_{k-1}$, то $|1 - z/\lambda_n| \leq 1 + |z|/R_{k-1}$. Тому для всіх $k \in \mathbb{N}$ і всіх $z \in \mathbb{C}$

$$\ln |\psi_k(z)| \leq n_k \ln(1 + |z|/R_{k-1}),$$

де

$$\begin{aligned} n_k &= n(R_{k+2}) - n(R_{k-1}) = \Delta(R_{k+2}^\rho - R_{k-1}^\rho) + o(R_k^{\rho_1}) = \\ &= \frac{3\rho\Delta}{\beta}(1 + o(1))R_k^{\rho-\beta} + o(R_k^{\rho_1}) \quad (k \rightarrow +\infty). \end{aligned}$$

З останньої нерівності випливає (7). \square

Лема 3. Нехай $\rho \in (0; +\infty)$ – ціле число, $\rho_1 \in (\rho - 1; \rho)$ і послідовність додатних чисел (λ_n) задовольняє умову (3). Тоді для цілої функції (1)

$$(\forall \rho_3 \in (\rho_1; \rho)) (\exists c_3) (\forall z \in \mathbb{C}) : \ln |L(z)| \leq \Lambda(z) + c_3 |z|^{\rho_3}, \quad (9)$$

і для кожного $\varepsilon \in (0; (\rho - \rho_1)/2)$ існує в \mathbb{C} система U кругів із скінченною сумою радіусів така, що для кожного $\rho_3 \in (\rho_1 + 2\varepsilon; \rho)$ при $\tilde{E}_\varepsilon \ni z \rightarrow \infty$ виконується

$$\ln |L(z)| \geq \Lambda(z) - c_3 |z|^{\rho_3}, \quad (10)$$

де $\Lambda(z)$ задається формулою (2), $\tilde{E}_\varepsilon = E_\varepsilon \cap U$, $\varphi = \arg z \in [0; 2\pi)$, і E_ε визначене у формулюванні лемі 1.

Доведення. Спочатку доведемо, що для (1) виконується (9). Виберемо β , R_k так, як і в лемі 2. Згідно з лемою 1, нерівність (9) досить довести для $z \in E_\varepsilon$. Для кожного $z = re^{i\varphi} \in E_\varepsilon$ існує $k \in \mathbb{N}$, для якого $R_k \leq |z| < R_{k+1}$. Нехай $p = \rho$. Подібно, як і в лемі 5 з [5, с. 144], маємо

$$\ln |L(z)| = \frac{1}{\rho} \operatorname{Re} \left\{ z^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} \right\} + I_3 + I_4 + \ln |\psi_k(z)| + I_5 + I_6 + I_7, \quad (11)$$

де

$$I_3 = -\frac{r^\rho}{\rho} \cos \rho\varphi \sum_{R_{k-1} < \lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho}, \quad I_4 = \sum_{R_{k-1} < \lambda_n \leq R_{k+2}} \left(\sum_{\nu=1}^{\rho} \frac{r^\nu \cos \nu\varphi}{\nu \lambda_n^\nu} \right);$$

$$I_5 = \operatorname{Re} \left\{ -z^\rho \int_0^{R_{k-1}} \frac{n(t)dt}{t^\rho(t-z)} - z^{\rho+1} \int_{R_{k+2}}^{+\infty} \frac{n(t)dt}{t^{\rho+1}(t-z)} \right\};$$

$$I_6 = \frac{1}{2} \left(n(R_{k-1}) \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2} \right) - n(R_{k+2}) \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k+2}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k+2}^2} \right) \right);$$

$$I_7 = n(R_{k-1}) \sum_{\nu=1}^{\rho-1} \frac{r^\nu \cos \nu\varphi}{\nu R_{k-1}^\nu} - n(R_{k+2}) \sum_{\nu=1}^{\rho} \frac{r^\nu \cos \nu\varphi}{\nu R_{k+2}^\nu}.$$

Далі, зауважимо, що $\frac{z^{\rho+1}}{t(t-z)} = z^\rho \left(\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t} \right)$,

$$-\frac{z^{\rho+1}}{t^{\rho+1}(t-z)} = -\frac{z^\rho}{t^\rho(t-z)} + \frac{z^\rho}{t^{\rho+1}}, \quad -\frac{z^{\rho+1}}{t^{\rho+1}(t-z)} = -\frac{z}{t(t-z)} + \frac{1}{t^{\rho+1}} \sum_{j=1}^{\rho} z^j t^{\rho-j},$$

і для $t \in \mathbb{R}$

$$\operatorname{Re} \left(\frac{z^m}{t-z} \right) = \frac{r^\rho (t \cos m\varphi - r \cos (m-1)\varphi)}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2} \quad (m \in \mathbb{Z}_+),$$

Внаслідок цього, враховуючи (3), отримуємо

$$\begin{aligned} I_5 &= \operatorname{Re} \left\{ -\lim_{\delta \rightarrow 0+} \Delta z^\rho \left(\int_0^{r-\delta} \frac{dt}{t-z} + z \int_{r+\delta}^{+\infty} \frac{dt}{t(t-z)} \right) - z^\rho \int_0^{R_{k-1}} d(t) \frac{dt}{t^\rho(t-z)} - \right. \\ &\quad \left. - z^{\rho+1} \int_{R_{k+2}}^{+\infty} d(t) \frac{dt}{t^{\rho+1}(t-z)} + \lim_{\delta \rightarrow 0+} \Delta z^\rho \left(\int_{R_{k-1}}^{r-\delta} \frac{dt}{t-z} + z \int_{r+\delta}^{R_{k+2}} \frac{dt}{t(t-z)} \right) \right\} = \\ &= \Delta r^\rho \lim_{\delta \rightarrow 0+} \left(\int_0^{1-\delta/r} \frac{\cos(\rho-1)\varphi - u \cos \rho\varphi}{u^2 - 2u \cos \varphi + 1} du + \int_{1+\delta/r}^{+\infty} \frac{\cos \rho\varphi - u \cos(\rho+1)\varphi}{u(u^2 - 2u \cos \varphi + 1)} du \right) + \\ &+ I_{5,1} + I_{5,2} + \lim_{\delta \rightarrow 0+} (I_{5,3} + I_{5,4}) = \Delta r^\rho (\pi - \varphi) \sin \rho\varphi + I_{5,1} + I_{5,2} + \lim_{\delta \rightarrow 0+} (I_{5,3} + I_{5,4}), \quad (12) \end{aligned}$$

де $I_{5,1} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5$;

$$\sigma_1 = \int_0^{R_{k-1}} \frac{d(t)}{t^{\rho+1}} \sum_{j=1}^{\rho-1} t^{\rho-j} r^j \cos j\varphi dt, \quad \sigma_2 = \int_{R_{k+2}}^{2R_{k+2}} \frac{d(t)}{t^{\rho+1}} \sum_{j=1}^{\rho} t^{\rho-j} r^j \cos j\varphi dt,$$

$$\sigma_3 + \sigma_4 = r \left(\int_0^{R_{k-1}} + \int_{R_{k+2}}^{2R_{k+2}} \right) d(t) \frac{r - t \cos \varphi}{t(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)} dt,$$

$$\sigma_5 = r^{\rho+1} \int_{2R_{k+2}}^{+\infty} d(t) \frac{r \cos \rho\varphi - t \cos(\rho+1)\varphi}{t^{\rho+1}(t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2)} dt;$$

$$I_{5,2} = \Delta r^\rho \quad v.p. \int_{R_{k-1}}^{R_{k+2}} \frac{t \cos \rho\varphi - r \cos(\rho-1)\varphi}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2} dt;$$

$$I_{5,3} = -\Delta r^\rho \cos \rho\varphi \int_{r+\delta}^{R_{k+2}} \frac{dt}{t}; \quad I_{5,4} = -\Delta r^\rho \int_{r-\delta}^{r+\delta} \frac{t \cos \rho\varphi - r \cos(\rho-1)\varphi}{t^2 - 2rt \cos \varphi + r^2} dt.$$

Позаяк $r \in [R_k; R_{k+1})$, то з (7) випливає, що для всіх $z \in \mathbb{C}$ при $k \rightarrow +\infty$

$$\ln |\psi_k(z)| \leq o(R_k^{\rho_3}), \quad (13)$$

і, як в [5, с. 145, 146, 148], отримуємо

$$I_8 = |I_4 + \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5| \leq o(r_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty). \quad (14)$$

Оскільки $|\varphi| < 1/r^\varepsilon$, то $\Delta r^\rho \sin \rho\varphi = o(R_k^{\rho_3})$ ($k \rightarrow +\infty$), і подібно до [5, с. 147]

$$I_{5,2} = -\frac{\Delta}{2} r^\rho \cos \rho\varphi \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2rR_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2rR_{k+2} \cos \varphi + r^2} + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty).$$

До того ж,

$$I_{5,4} = -\frac{\Delta}{2} r^\rho \cos \rho\varphi \ln \frac{(r + \delta)^2 - 2r(r + \delta) \cos \varphi + r^2}{(r - \delta)^2 - 2r(r - \delta) \cos \varphi + r^2} + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Крім того, $I_{5,3} = \Delta r^\rho \cos \rho\varphi \ln((r + \delta)/R_{k+2})$, і, за умови (3), маємо

$$I_3 = -\Delta r^\rho \cos \rho\varphi \ln(r/R_{k-1}) + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Тому

$$I_9 = I_3 + \lim_{\delta \rightarrow 0^+} (I_{5,3} + I_{5,4}) = \Delta r^\rho \cos \rho\varphi \ln(R_{k-1}/R_{k+2}) + o(R_k^{\rho_3}) \quad (k \rightarrow +\infty).$$

Далі, подібно як в [5, с. 147, 148], для $r \in [R_k; R_{k+1})$ при $k \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} I_{10} = |I_9 + I_6 + I_{5,2}| &\leq \Delta R_{k+1}^\rho \sin^2 \frac{\rho\varphi}{2} \left(2 \ln \frac{R_{k+2}}{R_{k-1}} + \left| \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2rR_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2rR_{k+2} \cos \varphi + r^2} \right| \right) + \\ &+ (n(R_{k+2}) - \Delta R_k^\rho) \left(\ln \frac{R_{k+2}}{R_{k-1}} + \frac{1}{2} \left| \ln \frac{R_{k-1}^2 - 2rR_{k-1} \cos \varphi + r^2}{R_{k+2}^2 - 2rR_{k+2} \cos \varphi + r^2} \right| \right) + \\ &+ \frac{1}{2} (n(R_{k-1}) - n(R_{k+2})) \left| \ln \left(1 - \frac{2r}{R_{k-1}} \cos \varphi + \frac{r^2}{R_{k-1}^2} \right) \right| + o(R_k^{\rho_3}) = o(R_k^{\rho_3}). \end{aligned} \quad (15)$$

Крім цього, подібно до [5, с. 148], для $r \in [R_k; R_{k+1})$ при $k \rightarrow +\infty$

$$I_7 = -\frac{\Delta}{\rho} r^\rho \cos \rho\varphi + o(R_k^{\rho_3}). \quad (16)$$

Об'єднуючи (11)–(16), отримуємо

$$\ln |L(z)| \leq \frac{1}{\rho} \operatorname{Re} \left\{ z^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} \right\} - \frac{\Delta}{\rho} r^\rho \cos \rho\varphi + (\pi - \varphi) \Delta r^\rho \sin \rho\varphi + o(r^{\rho_3}) \quad (r \rightarrow +\infty),$$

тобто виконується (9). Доведемо (10). Для цього, подібно до леми 4 з [5, с. 144], побудуємо систему U виняткових кругів із скінченною сумою радіусів. Згідно з лемою 1, нерівність (10) досить довести для $z \in E_\varepsilon \setminus U$. Для кожного $z = re^{i\varphi} \in E_\varepsilon \setminus U$ існує

$k \in \mathbb{N}$, для якого $R_k \leq |z| < R_{k+1}$. Тому, використовуючи (8), (11), (12), (14)–(16), як і вище отримуємо

$$\begin{aligned} \ln |L(z)| &\geq \frac{1}{\rho} \operatorname{Re} \left\{ z^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} \right\} + (\pi - \varphi) \Delta r^\rho \sin \rho \varphi + I_7 - (I_8 + I_{10}) + o(R_k^{\rho_3}) \geq \\ &\geq \frac{1}{\rho} \operatorname{Re} \left\{ z^\rho \sum_{\lambda_n \leq r} \lambda_n^{-\rho} \right\} - \frac{\Delta}{\rho} r^\rho \cos \rho \varphi + (\pi - \varphi) \Delta r^\rho \sin \rho \varphi + o(r^{\rho_3}) \quad (\tilde{E}_\varepsilon \not\exists z = r e^{i\varphi} \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Отже, виконується (10). Нехай тепер $p = \rho - 1$. Тоді

$$\ln |L(z)| = -\frac{1}{\rho} \left(\sum_{R_{k-1} < \lambda_n \leq R_{k+2}} + \sum_{\lambda_n > R_{k+2}} \right) \operatorname{Re} \{z/\lambda_n^\rho\} + I_3 + I_4 + \ln |\psi_k(z)| + I_5 + I_6 + I_7,$$

де I_3, I_4, I_5, I_6, I_7 — визначені у випадку $\rho = p$. Оскільки в даному випадку ряд $\sum_n \lambda_n^{-\rho}$ є збіжним, і $n(t) = o(t^{\rho_1})$ ($t \rightarrow +\infty$), то при $k \rightarrow +\infty$

$$-\frac{1}{\rho} \sum_{R_{k-1} < \lambda_n \leq R_{k+2}} \operatorname{Re} \{z/\lambda_n^\rho\} - \frac{1}{\rho} \sum_{\lambda_n > R_{k+2}} \operatorname{Re} \{z/\lambda_n^\rho\} = o(R_k^{\rho_3}).$$

Внаслідок цього, робимо висновок, що у випадку $\rho = p + 1$ потрібне твердження випливає із доведення випадку $\rho = p$. Лему 3 повністю доведено. \square

Теорема 1 безпосередньо випливає з леми 3.

ЛІТЕРАТУРА

1. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.— 632 с.
2. Гришин А. Ф. *О регулярности роста субгармонических функций* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков).— 1968.— Вып. 6.— С.3–29.
3. Гольдберг А. А., Островский И. В. Распределение значений мероморфных функций.— М.: Наука, 1970.— 591 с.
4. Субханкулов М. А. Тауберовы теоремы с остатком.— М.: Наука, 1976.— 399 с.
5. Винницький Б. В., Хаць Р. В. *Про асимптотичну поведінку цілих функцій нецілого порядку* // Матем. студії.— 2004.— Т. 21, № 2.— С. 140–150.
6. Агранович П. З., Логвиненко В. Н. *Аналог теоремы Валирона-Титчмарша для двучленных асимптотик субгармонической функции с массами на конечной системе лучей* // Сиб. мат. ж.— 1985.— Т. 26, № 5.— С. 3–19.
7. Логвиненко В. Н. *О целых функциях с нулями на полупрямой. I* // Теория функций, функц. анализ и их прилож. (Харьков).— 1972.— Вып. 16.— С. 154–158.

Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка,
Інститут фізики, математики та інформатики
mathanalys@mail.ru

Надійшло 13.05.2004
Після переробки 07.10.2004