



УДК 378.147:51

[https://doi.org/10.52058/2786-6300-2026-3\(45\)-2190-2199](https://doi.org/10.52058/2786-6300-2026-3(45)-2190-2199)

**Хаць Руслан Васильович** кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, <https://orcid.org/0000-0001-9905-5447>

**Комарницька Леся Іванівна** кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, Львівська область, м. Дрогобич, <https://orcid.org/0009-0001-0907-1038>

**Матурін Юрій Петрович** кандидат фізико-математичних наук, доцент, Дрогобицький державний педагогічний університет імені Івана Франка, м. Дрогобич, <https://orcid.org/0000-0002-0544-1329>

## КЛАСИФІКАЦІЯ ВІДОБРАЖЕНЬ У КУРСАХ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ: МІЖДИСЦИПЛІНАРНИЙ АСПЕКТ

**Анотація.** У статті актуалізовано проблему фрагментарності формування фундаментальних математичних понять у процесі фахової підготовки здобувачів вищої освіти. Об'єктом дослідження є методика навчання поняття «відображення» (функції), яке виступає інваріантним ядром сучасної математики, проте часто сприймається студентами ізольовано в контексті окремих навчальних дисциплін.

Метою роботи є теоретичне обґрунтування та розробка цілісної методичної системи класифікації відображень, що базується на міждисциплінарному синтезі знань із дискретної математики, лінійної та абстрактної алгебри, а також математичного аналізу.

Авторами здійснено ґрунтовний порівняльний аналіз реалізації властивостей ін'єктивності, сюр'єктивності та бієктивності в різних математичних структурах. Для лінійної алгебри систематизовано критерії класифікації операторів через поняття ядра (Kernel) та образу (Image), а також проілюстровано дію теореми про ранг і дефект у скінченновимірних просторах.

Особливу увагу приділено подоланню когнітивних розривів при переході до нескінченновимірних просторів. На прикладі векторного простору многочленів та операторів диференціювання і множення на змінну розкрито обмеженість інтуїтивних уявлень про матриці та продемонстровано випадки існування односторонніх обернених операторів (лівих та правих), що є критично важливим для розуміння основ функціонального аналізу та квантової механіки.



В межах абстрактної алгебри проаналізовано гомоморфізми груп, де властивості відображень інтерпретуються через структурні теореми про ізоморфізм та теорему Келі про вкладення в групу підстановок (перестановок).

Ключовим елементом наукової новизни та методичної цінності роботи є детальне розкриття «анатомії оберненості». Автори виходять за межі шкільного розуміння бієкції, вводячи поняття лівого та правого оберненого відображення як самостійних математичних об'єктів. Встановлено логічний зв'язок між сюр'єктивністю та Аксиомою вибору (Axiom of Choice), а також між ін'єктивністю та властивістю ретракції. Такий підхід дозволяє інтегрувати в базові курси елементи теорії категорій, зокрема узагальнення понять ін'єкції та сюр'єкції до мономорфізмів та епіморфізмів відповідно.

У статті також висвітлено прикладний аспект класифікації відображень, зокрема в теорії кодування та криптографії, де вимоги до ін'єктивності та оборотності є критичними для коректності алгоритмів шифрування та відновлення даних.

Запропонована методика дозволяє трансформувати сприйняття студентами математичних дисциплін від набору розрізнених алгоритмів до єдиної логічно впорядкованої системи. Зроблено висновок, що наскрізне вивчення класифікації відображень сприяє формуванню універсальної математичної компетентності, розвиває абстрактне мислення та забезпечує глибше розуміння структурної єдності математики.

Результати дослідження можуть бути імплементовані в навчальні програми університетських курсів для підвищення якості фізико-математичної освіти.

**Ключові слова:** класифікація відображень, міждисциплінарний підхід, ін'єкція, сюр'єкція, бієкція, ліве та праве обернене відображення, лінійна алгебра, математичний аналіз, дискретна математика, теорія категорій, методика навчання математики, універсальна компетентність.

**Ruslan Khats'** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Docent of Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, <https://orcid.org/0000-0001-9905-5447>

**Lesia Komarnytska** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Docent of Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, <https://orcid.org/0009-0001-0907-1038>.

**Yuriy Maturin** Candidate of Sciences in Physics and Mathematics, Docent, Docent of Ivan Franko Drohobych State Pedagogical University, Drohobych, <https://orcid.org/0000-0002-0544-1329>.



## CLASSIFICATION OF MAPPINGS IN HIGHER MATHEMATICS COURSES: AN INTERDISCIPLINARY ASPECT

**Abstract.** The article addresses the problem of the fragmented formation of fundamental mathematical concepts during the professional training of higher education students. The object of the study is the methodology of teaching the concept of "mapping" (function), which acts as an invariant core of modern mathematics but is often perceived by students in isolation within the context of separate academic disciplines. The aim of the work is to theoretically substantiate and develop a holistic methodological system for the classification of mappings, based on an interdisciplinary synthesis of knowledge from discrete mathematics, linear and abstract algebra, and mathematical analysis.

The authors conducted a thorough comparative analysis of the realization of injectivity, surjectivity, and bijectivity properties across various mathematical structures. For linear algebra, the criteria for classifying operators are systematized through the concepts of Kernel and Image, and the application of the Rank-Nullity Theorem in finite-dimensional spaces is illustrated.

Special attention is paid to bridging cognitive gaps during the transition to infinite-dimensional spaces. Using the example of the vector space of polynomials and differentiation and multiplication operators, the limitations of intuitive matrix conceptions are revealed, and cases of the existence of one-sided inverse operators (left and right) are demonstrated, which is critically important for understanding the foundations of functional analysis and quantum mechanics. Within abstract algebra, group homomorphisms are analyzed, where mapping properties are interpreted through structural isomorphism theorems and Cayley's theorem on embedding into a permutation group.

A key element of the scientific novelty and methodological value of the work is the detailed exposition of the "anatomy of invertibility." The authors go beyond the school-level understanding of bijection by introducing the concepts of left and right inverse mappings as independent mathematical objects. A logical connection is established between surjectivity and the Axiom of Choice, as well as between injectivity and the property of retraction. Such an approach allows for the integration of Category Theory elements into basic courses, specifically the generalization of injection and surjection concepts to monomorphisms and epimorphisms, respectively.

The article also highlights the applied aspect of mapping classification, particularly in coding theory and cryptography, where requirements for injectivity and invertibility are critical for the correctness of encryption algorithms and data recovery. The proposed methodology allows transforming students' perception of mathematical disciplines from a set of disjointed algorithms into a unified, logically ordered system. It is concluded that the cross-cutting study of mapping classification promotes the



formation of universal mathematical competence, develops abstract thinking, and ensures a deeper understanding of the structural unity of mathematics. The research results can be implemented in university course curricula to enhance the quality of physics and mathematics education.

**Keywords:** classification of mappings, interdisciplinary approach, injection, surjection, bijection, left and right inverse mapping, linear algebra, mathematical analysis, discrete mathematics, Category Theory, mathematics teaching methodology, universal competence.

**Постановка проблеми.** Сучасна математична освіта вимагає від здобувачів не лише володіння окремими алгоритмами, а й розуміння глибинних зв'язків між різними розділами математики. Поняття відображення (функції) є фундаментальним для всіх математичних дисциплін, проте студенти часто сприймають його властивості (ін'єктивність, сюр'єктивність, бієктивність) фрагментарно, залежно від контексту конкретного курсу. Відсутність цілісного бачення призводить до нерозуміння того, що «ядро лінійного оператора» в алгебрі та «монотонність функції» в аналізі є проявами однієї й тієї ж структурної властивості відображень. Актуальність дослідження зумовлена необхідністю систематизації знань про класифікацію відображень для формування у студентів універсальної математичної компетентності.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питання методики викладання фундаментальних математичних понять розглядаються у працях багатьох вітчизняних та закордонних науковців. Як зазначається у дослідженнях [1–3], значна частина труднощів студентів пов'язана з невмінням переносити знання з однієї дисципліни в іншу. Водночас, питання інтеграції категорних понять (зокрема, узагальненої оберненості) у базові курси вищої математики залишається висвітленим недостатньо, хоча саме такий підхід дозволяє побачити «велику картинку» математики.

**Мета статті** полягає в теоретичному обґрунтуванні та структуруванні методичного матеріалу щодо класифікації відображень, виявленні спільних рис та специфічних відмінностей цих понять у дискретній математиці, лінійній алгебрі, абстрактній алгебрі та математичному аналізі, а також у введенні понять лівого та правого оберненого відображення як інструменту розв'язання прикладних задач.

**Виклад основного матеріалу.**

**Вступ: Три типи відображень**

Перш ніж заглиблюватися в окремі дисципліни, нагадаємо фундамент. Нехай  $f: A \rightarrow B$  - відображення з множини  $A$  в множину  $B$ .

1. **Ін'єкція (Вкладення):** Різні елементи переходять у різні.  $\forall x_1, x_2 \in A: f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ . *Суть:* Інформація не втрачається (не «склеюється»).



2. **Сюр'єкція (Накриття):** Кожен елемент  $B$  має прообраз.  $\forall y \in B, \exists x \in A: f(x) = y$ . *Суть:* Ми покриваємо весь цільовий простір.

3. **Бієкція (Взаємно однозначна відповідність):** І те, й інше. *Суть:* Множини  $A$  і  $B$  мають однакову кількість елементів (або потужність) [3,7].

**1. Дискретна Математика.** У дискретній математиці, де множини часто скінченні, властивості відображень тісно пов'язані з комбінаторикою та потужністю множин («принцип Діріхле»).

*Особливості:* **Принцип рівноправності:** Якщо  $|A| = |B|$  (скінченні), то: Ін'єктивність  $\Leftrightarrow$  Сюр'єктивність  $\Leftrightarrow$  Бієктивність Це не працює для нескінченних множин (приклад:  $f(n) = 2n$  на  $\mathbb{Z}$  - ін'єкція, але не сюр'єкція).

*Приклади:*

- **Булеві функції** ( $f: \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}$ ). При  $n > 1$  така функція **ніколи не може бути ін'єктивною** (принцип Діріхле:  $2^n$  входів, 2 виходи). Вона є сюр'єктивною майже завжди (окрім двох випадків: константа 0 або константа 1).

- **Криптографія (S-блоки).** В алгоритмах шифрування (наприклад, AES) використовуються відображення  $S: \{0,1\}^8 \rightarrow \{0,1\}^8$ . Вимога: **сувора бієктивність**. Це гарантує, що процес шифрування можна розвернути назад (дешифрувати) [5].

**2. Лінійна алгебра.** Тут відображення - це лінійні оператори ( $T: V \rightarrow W$ ). Структура векторного простору дає нам потужні критерії перевірки через Ядро (Kernel) та Образ (Image) [1].

*Особливості:*

- **Критерій ін'єктивності:** Лінійне відображення ін'єктивне тоді й лише тоді, коли його ядро тривіальне:  $\ker(T) = \{0\}$  *Фізичний зміст:* Система рівнянь  $Ax=0$  має лише нульовий розв'язок. Це означає «єдиність розв'язку».

- **Критерій сюр'єктивності:** Відображення сюр'єктивне, якщо ранг відображення дорівнює розмірності простору прибуття:  $\dim(\text{Im}(T)) = \dim(W)$  *Фізичний зміст:* Система  $Ax=b$  має розв'язок для будь-якого вектора  $b$  («існування розв'язку»).

- **Теорема про ранг і дефект (Rank-Nullity Theorem):** Зв'язує ці поняття:  $\dim(V) = \dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T)$ . Це означає, що для квадратних матриць (операторів  $V \rightarrow V$ ) ін'єктивність автоматично тягне за собою сюр'єктивність (і навпаки).

**Приклад. Оператори у просторі многочленів (нескінченновимірний випадок)** Розглянемо векторний простір многочленів  $V = F[x]$  над полем  $F$ . Це нескінченновимірний простір (базис:  $1, x, x^2, \dots$ ). Тут класична інтуїція скінченних матриць не працює, що демонструють два фундаментальні оператори.

**1. Оператор диференціювання (D):** Діє за правилом:  $D(a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots) = a_1 + 2a_2x + \dots$



- **Сюр'єктивність:** Так. Кожен многочлен має первісну (інтеграл), тому для будь-якого  $q(x)$  існує  $p(x)$ , таке що  $D(p) = q$ .  $D$  — це епіморфізм (праве обернене існує — оператор інтегрування).

- **Ін'єктивність:** Ні. Ядро  $\ker(D)$  складається з усіх констант (похідна константи — нуль). Оскільки  $\ker(D) \neq \{0\}$ , оператор не є ін'єктивним («склеює»  $p(x)$  і  $p(x)+C$ ).

**2. Оператор множення на змінну ( $M_x$ ):** Діє за правилом:  $M_x(p(x)) = x \cdot p(x)$ .

- **Ін'єктивність:** Так. Якщо  $x \cdot p(x) = 0$ , то  $p(x) = 0$  (у кільці многочленів немає дільників нуля).  $\ker(M_x) = \{0\}$ , отже, це мономорфізм (ліве обернене існує).

- **Сюр'єктивність:** Ні. Образ  $\text{Im}(M_x)$  містить лише многочлени з нульовим вільним членом ( $a_0 = 0$ ). Многочлени-константи (наприклад,  $p(x) = 1$ ) не мають прообразу.

*Висновок:* У просторі  $F[x]$  ми маємо приклад оператора  $D$ , який є сюр'єктивним, але не ін'єктивним, і оператора  $M_x$ , який є ін'єктивним, але не сюр'єктивним. Більше того, їх комутатор  $[D, M_x] = D \circ M_x - M_x \circ D = \text{Id}$  (тотожний оператор), що є основою квантової механіки (алгебра Гейзенберга-Вейля) [1].

**3. Абстрактна алгебра.** Тут ми розглядаємо гомоморфізми груп ( $f: G \rightarrow H$ ). Це відображення, що зберігають операцію множення.

*Особливості:*

- **Мономорфізм (ін'єкція):** Як і в лінійній алгебрі, перевіряється через ядро:  $\ker(f) = \{e_G\}$ . Це дозволяє розглядати групу  $G$  як підгрупу в  $H$ .

- **Епіморфізм (сюр'єкція):** Це означає, що  $H$  є «гомоморфним образом»  $G$ . Всі властивості  $G$  (наприклад, комутативність) передаються на  $H$ .

- **Теорема про ізоморфізм:** Це місток між сюр'єкцією та бієкцією. Будь-який гомоморфізм можна перетворити на ізоморфізм, якщо «відфакторизувати» по ядру:  $G / \ker(f) \cong \text{Im}(f)$  *Суть:* Якщо ми «склеїмо» всі елементи, які відображаються в одне й те саме, ми отримаємо бієкцію [2].

**Приклад: Теорема Келі (вкладення в групу підстановок)** Одним із найважливіших результатів теорії груп є **Теорема Келі**, яка стверджує, що абстрактна структура будь-якої групи насправді реалізується через підстановки (перестановки). Це класичний приклад побудови **ін'єктивного гомоморфізму** [2].

Нехай  $G$  — довільна скінченна група. Побудуємо відображення цієї групи у симетричну групу  $S_G$  (групу всіх бієкцій множини  $G$  на себе).

1. Для кожного елемента  $g \in G$  розглянемо відображення  $\lambda_g: G \rightarrow G$ , задане лівим множенням:  $\lambda_g(x) = g \cdot x$

2. Оскільки в групі виконуються закони скорочення,  $\lambda_g$  є бієкцією (перестановкою елементів групи).

3. Розглянемо відображення  $\Phi: G \rightarrow S_G$ , яке кожному елементу  $g$  ставить у відповідність перестановку  $\lambda_g$ .



### Аналіз відображення $\Phi$ :

- **Гомоморфність:**  $\Phi(g \cdot h)$  відповідає перестановці  $\lambda_{\{gh\}}$ .  $\lambda_{\{gh\}}(x) = (gh)x = g(hx) = \lambda_g(\lambda_h(x)) = (\lambda_g \circ \lambda_h)(x)$ . Отже,  $\Phi(gh) = \Phi(g) \circ \Phi(h)$ . Операція групи переходить у композицію перестановок.

- **Ін'єктивність:** Знайдемо ядро  $\ker(\Phi)$ . Якщо  $\Phi(g) = \text{id}$  (тотожна перестановка), це означає, що для всіх  $x \in G$ :  $g \cdot x = x$ . Поклавши  $x = e$  (нейтральний елемент), маємо  $g \cdot e = e$ , звідки  $g = e$ . Отже,  $\ker(\Phi) = \{e\}$ , що доводить ін'єктивність.

*Суть прикладу:* Теорема Келі показує, що кожна група порядку  $n$  ізоморфна підгрупі симетричної групи  $S_n$ . Це універсальний спосіб «матеріалізації» абстрактної групи: ми завжди можемо уявити елементи групи як перестановки деяких об'єктів.

**4. Математичний аналіз.** Тут ми працюємо з функціями  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Інструментарій змінюється: замість алгебраїчних ядер ми використовуємо похідні та границі.

*Особливості:*

- **Ін'єктивність (монотонність):** Якщо функція  $f(x)$  строго монотонна (строго зростає або строго спадає) на інтервалі, вона є ін'єктивною. *Критерій через похідну:* Якщо  $f'(x) > 0$  (або  $< 0$ ) на інтервалі, функція ін'єктивна. *Геометрично:* «Тест горизонтальної прямої» - будь-яка горизонтальна лінія перетинає графік не більше одного разу.

- **Сюр'єктивність (неперервність + границі).** Тут працює теорема про проміжні значення (Больцано-Коші) [6]. Якщо функція неперервна і  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$  та  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  (або навпаки), то вона сюр'єктивна на  $\mathbb{R}$  (приймає всі значення). *Приклад:* Поліном непарного степеня завжди сюр'єктивний. Поліном парного степеня - ні.

- **Бієкція та обернена функція.** Тільки для бієктивної функції існує обернена функція  $f^{-1}$ . *Теорема:* Якщо  $f$  - неперервна бієкція на інтервалі, то вона строго монотонна, а її обернена функція  $f^{-1}$  теж неперервна [6].

**5. Особливості оберненості: лівий, правий та єдиний** На шкільних факультативах стверджується: «Якщо функція бієктивна, у неї є обернена». Але у вищій математиці це поняття розбивається на дві незалежні частини: **ліву** та **праву** оберненість. Це дозволяє працювати з «неідеальними» системами (наприклад, коли рівнянь менше, ніж невідомих).

**5.1. Ліве обернене відображення.** Нехай  $f: A \rightarrow B$ . Відображення  $g: B \rightarrow A$  називається **лівим оберненим** до  $f$ , якщо:  $g \circ f = \text{id}_A$  (Тобто:  $g(f(x)) = x$  для всіх  $x \in A$ ).

*Теорема (Критерій ін'єктивності):* Відображення  $f$  є **ін'єктивним** (вкладенням) тоді й лише тоді, коли для нього існує ліве обернене. *Інтуїція:* «Ліве обернене» - це здатність «відкотити зміни». Якщо  $f$  не склеює різні точки



(ін'єкція), ми завжди можемо відновити початковий  $x$  з його образу  $f(x)$ . *Важливо:* Якщо  $f$  не сюр'єктивне, то ліве обернене  $g$  визначене неоднозначно на тих елементах  $B$ , куди  $f$  «не влучило».

**5.2. Праве обернене відображення.** Нехай  $f: A \rightarrow B$ . Відображення  $h: B \rightarrow A$  називається **правим оберненим** до  $f$ , якщо:  $f \circ h = \text{id}_B$  (Тобто:  $f(h(y)) = y$  для всіх  $y \in B$ ).

*Теорема (Критерій сюр'єктивності):* Відображення  $f \in$  **сюр'єктивним** (накриттям) тоді й лише тоді, коли для нього існує праве обернене. *Інтуїція:* Праве обернене обирає для кожного  $y$  один конкретний прообраз  $x$ . Це як меню в автоматі: ви натискаєте кнопку (обираєте  $y$ ), і механізм знаходить відповідний товар ( $x=h(y)$ ), який на виході дасть  $y$ . *Аксиома вибору:* Саме існування правого оберненого для довільної сюр'єкції спирається на аксіому вибору [3].

**5.3. Критерій бієктивності (двостороннє обернене)** Тут сходяться дві попередні ідеї. *Головна теорема:* Відображення  $f: A \rightarrow B \in$  **бієктивним** тоді й лише тоді, коли існує відображення  $f^{-1}: B \rightarrow A$ , яке є одночасно і лівим, і правим оберненим:  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$  та  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$ . У цьому випадку  $f^{-1}$  є **єдиним**.

**6. Деякі застосування.** Процес кодування повідомлення  $E: M \rightarrow C$  має бути ін'єктивним. Процес декодування  $D: C \rightarrow M$  — це **ліве обернене** до кодування ( $D \circ E = \text{id}_M$ ). Якщо при передачі виникли помилки і ми отримали «побитий» код  $c'$ , який не є образом жодного повідомлення, функція декодування  $D$  повинна спроектувати його на найближче правильне повідомлення.

У теорії категорій (зокрема, в категорії множин **Set**) ці поняття узагальнюються через властивість скорочення [4]:

- **Мономорфізм** (узагальнення ін'єкції):  $f \circ g = f \circ h \Rightarrow g = h$  (скорочення зліва).
- **Епіморфізм** (узагальнення сюр'єкції):  $g \circ f = h \circ f \Rightarrow g = h$  (скорочення справа).

**Висновки.** У результаті проведеного дослідження теоретично обґрунтовано та розроблено методичну систему класифікації відображень, яка базується на міждисциплінарному синтезі знань та дозволяє сформулювати у здобувачів вищої освіти цілісне розуміння структурної єдності математики.

На основі детального аналізу отримано наступні узагальнення:

**1. Інтеграція математичних структур.** Доведено, що наскрізне вивчення властивостей відображень виступає інваріантним ядром, яке об'єднує дискретну математику, лінійну алгебру, абстрактну алгебру та математичний аналіз. Показано, що такі різні поняття, як тривіальність ядра лінійного оператора, монотонність функції в аналізі та відсутність колізій у хешуванні, є проявами однієї фундаментальної властивості ін'єктивності. Такий підхід трансформує сприйняття студентами математичних дисциплін від набору розрізнених алгоритмів до єдиної логічно впорядкованої системи.



**2. Анатомія оберненості як елемент наукової новизни.** Вагомим результатом роботи є детальне розкриття концепції оберненості через введення понять лівого та правого оберненого відображення як самостійних математичних об'єктів.

○ Встановлено критичну роль лівої оберненості для теорії кодування та криптографії, де вона гарантує коректність алгоритмів відновлення даних та дешифрування.

○ Через аналіз правого оберненого відображення продемонстровано логічний зв'язок між сюр'єктивністю та аксіомою вибору, що дозволяє інтегрувати в базові курси глибокі теоретико-множинні концепції.

**3. Подолання когнітивних розривів у нескінченновимірних просторах.** У роботі розкрито обмеженість інтуїтивних уявлень про матриці при переході до нескінченновимірних векторних просторів. На прикладі простору многочленів та операторів диференціювання і множення продемонстровано існування односторонніх обернених операторів, що є неможливим у скінченновимірному випадку. Цей аналіз не лише поглиблює розуміння лінійної алгебри, але й слугує важливим етапом підготовки до вивчення функціонального аналізу та основ квантової механіки.

**4. Категорне узагальнення.** Запропонована методика дозволяє природним чином імплементувати елементи теорії категорій у навчальний процес. Узагальнення понять ін'єкції та сюр'єкції до мономорфізмів та епіморфізмів через властивості скорочення забезпечує вищий рівень абстракції та готує студентів до сприйняття сучасної математичної мови.

**5. Практична цінність.** Результати дослідження підтверджують, що систематизація знань про класифікацію відображень сприяє формуванню універсальної математичної компетентності та розвиває абстрактне мислення. Запропонований підхід може бути ефективно імплементований у навчальні програми університетських курсів для підвищення якості фізико-математичної освіти.

**Література:**

1. Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right* (3rd ed.). Cham: Springer.
2. Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (3rd ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.
3. Halmos, P. R. (1974). *Naive Set Theory*. New York: Springer-Verlag.
4. Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician* (2nd ed.). New York: Springer.
5. Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and its Applications* (8th ed.). New York: McGraw-Hill Education.
6. Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill Education.
7. Velleman, D. J. (2019). *How to Prove It: A Structured Approach* (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.



**References:**

1. Axler, S. (2015). *Linear Algebra Done Right* (3rd ed.). Cham: Springer.
2. Dummit, D. S., & Foote, R. M. (2004). *Abstract Algebra* (3rd ed.). Hoboken: John Wiley & Sons.
3. Halmos, P. R. (1974). *Naive Set Theory*. New York: Springer-Verlag.
4. Mac Lane, S. (1998). *Categories for the Working Mathematician* (2nd ed.). New York: Springer.
5. Rosen, K. H. (2019). *Discrete Mathematics and its Applications* (8th ed.). New York: McGraw-Hill Education.
6. Rudin, W. (1976). *Principles of Mathematical Analysis* (3rd ed.). New York: McGraw-Hill Education.
7. Velleman, D. J. (2019). *How to Prove It: A Structured Approach* (3rd ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Дата першого надходження статті до видання: 19.02.2026

Дата прийняття статті до друку після рецензування: 10.03.2026