Василь Янішевський, *кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри курортного менеджменту Дрогобицького державного педагогічного університету імені Івана Франка*

ЕКОНОФІЗИКА – ПЕРСПЕКТИВНИЙ НАПРЯМОК ДОСЛІДЖЕНЬ. АНАЛІЗ РИНКУ В РАМКАХ МОДЕЛІ “MINORITY GAME”

Стаття знайомить з основними ідеями та методами еконофізики. Детально висвітлюється модель minority game, яка моделює роботу фондових та фінансових ринків. Запропонована більш проста схема дослідження системи рівнянь для параметрів моделі в методі реплік. На її основі проведено аналіз розв'язків системи рівнянь, визначена критична точка та характер розв'язків в околі критичної точки. В роботі сформульовані також деякі проблемні питання, які потребують розв'язання. Стаття буде корисна як для студентів, так і науковців, що матимуть бажання оволодіти цікавими методами та ідеями еконофізики.

Постановка проблеми та аналіз основних досліджень та публікацій. Уже майже десять років, як термін “еконофізика” (econophysics) набув широкого вжитку в середовищі фізиків. Початком можна вважати 1997 рік коли була організована конференція з еконофізики (“Workshop on Econophysics”) в Будапешті [6]. В подальшому еконофізичний напрям сформувався до кінця 90-х років минулого століття завдяки піонерським науковим роботам [7, 8, 9]. Головним чинником становлення цієї науки слід вважати час відомих криз 1997 – 1998 рр. Власне за цей період були розроблені найбільш глибокі та плідні підходи до опису стрибкоподібних та різких рухів глобальних та локальних ринків. З'ясувалось, що фінансові кризи можна описати теорією динамічних фазових переходів. Автори даної теорії [10, 6] дали пояснення крахів фондових ринків 1929, 1987 та 1998 рр. на основі нового підходу для економічної науки. Цей, за аналогією з фізикою, – “мікроскопічний підхід” був стимульований сучасною теорією критичних явищ, фізикою твердого тіла та невпорядкованих систем. Якщо раніше для опису ринків брали за основу деякі макроскопічні параметри, наприклад, попит та пропозиція, то представники “мікроскопічного підходу” ввели у вжиток поняття ансамблю агентів (трейдерів). І тому основним завданням в описі динаміки цін стає вивчення мікроскопічних взаємодій між трейдерами. Іншими словами, еконофізики розглядають фінансові ринки як складні системи, що еволюціонують, чиї коливання виникають у результаті тих або інших дій тисяч трейдерів, інвесторів та спекулянтів, що продають та купують акції в надії на прибуток. За допомогою моделей (в тому числі комп'ютерних), аналогічних тим, що використовуються у фізиці для аналізу взаємодії між молекулами, фізики намагаються відтворити вплив різних стратегій поведінки на ринку окремих гравців на ринок у цілому. При цьому основна мета полягає у пошуку простих правил, що зможуть пояснити та прогнозувати загальні рухи великих ринків.

Звичайно, застосування загальнонаукових методів в економіці – загальновідома річ. Уже багато десятиліть для аналізу економічних процесів використовується економетрика – статистичні методи прогнозування на основі економічних та фінансових даних. Проте еконофізика використовує сучасний математичний апарат нелінійної динаміки та статистичної фізики, чим принципово відрізняється від економетрики, заснованої на лінійних моделях. Невідповідність економічних теорій та реальності свідчать про доцільність такого підходу. На сьогодні переваги використання сучасних фізичних концепцій для опису й аналізу фінансових систем стають все більш очевидні. Взаємний інтерес фізиків та економістів до спільних досліджень підсилюється великою кількістю баз економічних даних (зараз легко доступними в Internet) та появою нових фізичних результатів і парадигм, таких, як критичні явища, неупорядковані системи, системи з нелінійною динамікою. Як зауважує [7] професор фізики університету Бостона Стенлі – метою нової науки є вивчення економіки “на наукових підставах”: “Зазвичай економісти починають зі створення теоретичних моделей, що потім перевіряються на реальних даних. Фізики ж, навпаки, починають з вивчення фактів”.

Оскільки, в економіці на відміну від фізики (зокрема статистичної механіки) відсутні загальні принципи та підходи для побудови моделей динаміки ринків, то приходиться діяти “навмання”; таким чином з’явились різні моделі, запропоновані фізиками. На їх основі сформувалась деяка парадигма, перелік загальних вимог до моделі: 1) необхідна наявність великої кількості агентів; 2) кожен агент має альтернативу у своєму виборі; 3) сумарна дія агентів формує ціну, яка відома всім; 4) агенти використовують ціну для планування дій. Ці вимоги дуже загальні, які можна доповнити також зовнішніми впливами на ринок. На сьогодні можна виділити основні розділи в області еконофізики: а) теорія “minority game” [12 – 16]; б) теорія фондових крахів [10, 6]; в) теорія запропонована Луксом [17 – 19]. Наведений перелік не є вичерпним, ситуація в цій новій галузі має тенденцію швидко змінюватись, з’являються нові ідеї та пропозиції.

На Заході еконофізика розвивається дуже активно, у нас же в Україні вона належної уваги поки не отримала. Дещо краща ситуація в Росії. Зокрема, на фізичному факультеті Санкт-Петербурзького Державного Університету створена спеціальність для підготовки спеціалістів в галузі еконофізики, яка отримала назву: “Інформаційні технології, еконофізика та менеджмент складних систем”. Значне збільшення кількості наукових статей, монографій, конференцій за останні роки демонструють зростаючу популярність еконофізики. Відповідно до журналу Інституту фізики Великобританії, фінансовий сектор економіки став одним з основних роботодавців молодих фізиків-теоретиків.

Мета статті. В даній роботі розглядається одна зі складових еконофізики, що сформувалась на сьогодні – теорія “minority game” в рівноважному випадку. Запропонована робота має також певну педагогічну мету, тому при викладі будемо дотримуватись наступного плану. Спочатку наведені основні передумови виникнення моделі, її вихідні положення та методика розв’язку. Далі наводиться система рівнянь, що описує параметри моделі та проводиться її аналіз на основі запропонованого в даній роботі підходу, який дещо відрізняється від загальноприйнятого в літературі. Відзначаються труднощі, які виникають при розгляді моделі та пропонуються шляхи для їх подолання.

Виклад основного матеріалу. 1. Основи моделі “minority game”. Дана модель була створена з метою опису фондових та фінансових ринків. На сучасних ринках акцій, валют і товарів інформація про рух цін поширюється серед всіх учасників. Добре відомо, що колективна поведінка ринку переривається різкими змінами (що приводять до крахів ринків). Поки до кінця не зрозуміло, чи це є наслідком зовнішніх дій, чи до них приводять взаємодії агентів, складових ринку. З фізичної точки зору ринок – наглядний приклад самоорганізованої системи; кожен агент визначає свою поведінку згідно зі своїми поглядами на події. В найпростішому випадку ці події полягають у коливанні цін. На ціну впливають як внутрішні, так і зовнішні фактори. В даній моделі не враховуються зовнішні фактори. Всі агенти вважаються спекулянтами, вони торгують лише з метою збільшення власного капіталу. Незважаючи на простоту моделі та стратегій її учасників, спостерігається поведінка, яка виявляється достатньо реалістичною. Це свідчить, що фондовий ринок є самоорганізованою критичною системою. Зауважимо також, що дана модель виникла також на основі задачі “EL Farol Bar”[1], розглянутої в роботі [20]. Challet та Zhang [12] дали точне математичне формулювання згаданої задачі та ввели назву “minority game” (MG) (дослівно – гра в меншість). Модель отримала подальший розвиток у роботах [21 – 24].

Отже, модель ринку складається з N агентів, які можуть знаходитись в кожен момент часу t в двох станах “купівля” (buy) та “продаж” (sell) . В моделі це описується наступним чином: кожен агент $i=1,\ldots,N$ в момент часу t здійснює дію $a_i(t)=+1$ (buy) або $a_i(t)=-1$ (sell). Враховуючи дії всіх агентів виграш i агента є наступним:

$$u_i(t)=-a_i(t)\cdot A(t)\text{, де }\quad A(t)=\sum_{i=1}^{N}a_i(t)\text{.} \qquad (1)$$

Рівняння (1) моделює основну структуру ринкової взаємодії, де дохід кожного агента визначається дією всіх решти учасників ринку через величину $A(t)$, яка пропорційна ціні активу та визначається всім ринком. Лінійна залежність $u_i(t)$ від $A(t)$ вибирається на початку для простоти, інші залежності можуть бути розглянуті таким же чином. Тип взаємодії (1) відображає правило меншості (виграє той, хто в кінцевому підсумку

[1] Назва походить від назви ресторану “EL Farol ” в місті Santa FE (США).

перебуває в меншості: виграш становить $a_i(t) = -sign(A(t))$, втрати більшості рівні $-|A(t)|$). Загальний дохід агентів $\sum_{i=1}^{N} u_i = -A^2$, який є від'ємний. Звичайно, що тут кількість тих, що програли більше кількості тих, що виграли і агенти не можуть знати, що буде робити більшість до тих пір, поки не буде здійснено вибір. Всі агенти мають доступ до спільної інформації, що описується цілим числом m та набуває значень від 1 до P. В момент t інформація набуває значення $m(t)$. Коли агенти мають деяку інформацію про ринок, то різні значення $m(t)$ для нього не рівнозначні, що визначається його власним досвідом впливу інформації на дохід. Точніше кажучи, $A(t)$ залежить лише від того, як агенти діють, так що $m(t)$ не має прямого впливу на ринок. Звичайно, якщо поведінка агентів впливає на ринок, то ми будемо позначати цю дію через $A^{m(t)}(t)$. Далі необхідно врахувати як агенти вибирають свої дії на основі інформації $m(t)$. Якщо агенти вважають, що містить деяку інформацію про ринок, то вони дотримуються деякої стратегії передбачень, яка визначає, яку дію здійснювати при конкретних значеннях. Загалом існує 2^P стратегій, але ми вважатимемо, що кожен агент вибирає із загальної кількості лише S. Дія агента i, якщо він дотримується стратегії s, враховуючи інформацію $m(t)$ є $a_{s,i}^m$ (надалі часову змінну t для спрощення запису опускатимемо). Тоді формулу (1) для доходу слід записати у вигляді:

$$u_i = -a_{s,i}^m \cdot A^m \text{, де } A^m = \sum_{i=1}^{N} a_{s,i}^m . \qquad (2)$$

Далі вважаємо, що P є великим числом, іншими словами того ж самого порядку, що N. Позначимо $\alpha = P/N$, величина яка залишається скінченною при $N \to \infty$. Це співвідношення є аналогічне термодинамічної границі в статистичній фізиці [2]. Як показано в [25], властивості моделі залежать власне від комбінації $\alpha = P/N$ в границі великих значень N. Змінна m несе певну інформацію про середовище в якому перебуває агент. Значення m описується певним розподілом ρ^{μ}, незалежно для кожного часового кроку.

Надалі зручно використовувати векторні позначення $\vec{a}_i = (a_{1,i},..., a_{S,i})$ для підмножини стратегій, що використовує агент i. Приймемо ще одне з важливих припущень, що для кожного часового кроку дії агентів $a_{s,i}$ є випадковими та незалежними між собою. А саме ймовірності прийняття дій агентами в кожному стані рівні:

$$P(a_{s,i}^m = +1) = P(a_{s,i}^m = -1) = \frac{1}{2}, \qquad \forall i \in N,$$
$$s \in \{1,..., S\},\ m \in \{1...P\}. \qquad (2)$$

Аналогічно як в теорії ігор [1] для аналізу гри вводимо змішані стратегії. Позначимо їх $p_{s,i}$, $s = 1,.., S$ для кожного агента, що позначають ймовірності з якими i- ий агент застосовує дану стратегію. Надалі використовуватимемо векторне позначення $\vec{p}_i = (p_{1,i},..., p_{S,i}) \in \Delta_i$, де Δ_i – S – вимірний симплекс для i – го агента. Має місце умова нормування $\vec{p}_i \cdot \vec{p}_i = \sum_s p_{s,i} \cdot p_{s,i} = 1$. Визначимо також прямий добуток $\Delta^N = \prod_{i=1}^{N} \Delta_i$, що визначає відповідно фазовий простір моделі. Точка $(p_1,..., p_N) \in \Delta^N$ визначає стан системи. В результаті ми можемо визначати середні величини в фазовому просторі, наприклад:

$$\langle A^m \rangle = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \cdot \vec{a}_i^m . \qquad (3)$$

Визначена модель описує колективні процеси, що відбуваються в ринку. Тому важливо визначити основні величини, які визначають рівноважні характеристики ринку. Одна з важливих величин – дисперсія, що визначає флуктуації величини (3)

$$s^2 \equiv \overline{\langle A \rangle^2} = \sum_{m=1}^{P} r^m \left\langle \left(\sum_{i=1}^{N} a_{s,i}^m \right)^2 \right\rangle, \qquad (4)$$

де $\langle ... \rangle$ позначає усереднення за змішаними стратегіями гравців.

Величина s^2, як зазначалось вище, визначає також загальний програш гравців ($-\sum_{i=1}^{N} u_i = s^2$).

Мале значення величини s^2 свідчить про певну координацію у грі, тим самим в діях агентів на ринку.

Модель, що описується (4) є симетричною відносно $A^m = \sum_{i=1}^{N} a_{s,i}^m$, тобто величини протилежних знаків дають однаковий внесок. Для визначення асиметрії, тобто розділення позитивних та негативних внесків вводять величину.

$$H \equiv \overline{\langle A\rangle^2} = \sum_{m=1}^{P} r^m \left(\sum_{i=1}^{N} \mathbf{\vec{p}}_i \cdot \mathbf{\vec{a}}_i^m \right)^2 . \qquad (5)$$

Якщо $H > 0$, гра асиметрична (тобто для деякого m маємо $A^m > 0$). Це означає, що існує краща стратегія, яка може дати додатній прибуток. Використовуючи економічну термінологію можна сказати, що в системі можливий арбітраж і дана величина є мірою цього арбітражу. Як функція $a = P/N$ система демонструє фазовий перехід з порушенням симетрії [21 – 23]. Для $a > a_c$ симетрія між двома знаками $A(t)$ порушена. H – досить інформативна величина, оскільки в [22] було показано, що індуктивна динаміка еквівалентна динаміці системи, що мінімізує H.

Величина (5) має властивості гамільтоніану невпорядкованої системи, причому величину (5) можна інтерпретувати як гамільтоніан в наближенні середнього поля. Для вивчення властивостей величини (5) використовують методи розвинуті в теорії невпорядкованих систем [18].

2. Мінімізація в методі реплік. Основна мета полягає у вивченні мінімуму гамільтоніану (5) як функції параметрів моделі. Мінімізація гамільтоніану є досить нетривиальною задачею. Для її використання використовуються методи розроблені фізиками-теоретиками в теорії невпорядкованих систем. Гамільтоніан (5) визначений у фазовому просторі змінних $\Delta^N = \{p_i, i = (1..N)\}$. Тому мінімум H можна розглядати як значення гамільтоніану системи, що досягається при нулі “температури”. Цей прийом часто використовується фізиками при дослідженні основного стану фізичної системи [2]. З цією метою визначимо статистичну суму системи

$$Z(b) = Sp_p \exp(-b \cdot H(p)), \qquad (6)$$

де b є обернена температура та Sp позначає суму за всіма станами системи (інтеграл за p в фазовому просторі системи Δ^N), $H(p)$ – вказує на функціональну залежність від ймовірностей змішаних стратегій. Таким чином, мінімум гамільтоніану визначити так:

$$\min_{p\in\Delta^N} H(p) = -\lim_{b\to\infty} b^{-1} \ln Z(b) . \qquad (7)$$

У (4) міститься залежність від всіх можливих реалізацій дій гравців $a_{s,i}^m$. Іншими словами, щоб отримати змістовні величини потрібно усереднити (7) за всіма можливими діями гравців $a_{s,i}^m$. З цією метою використовується метод розвинутий в теорії невпорядкованих систем – метод реплік [26]. А саме, усереднення $\ln Z(b)$ за всіма $a_{s,i}^m$, яке ми позначимо $\langle ...\rangle_a$ за допомогою методу реплік запишемо наступним чином:

$$\langle \ln Z(b)\rangle_a = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \ln \langle Z(b)^n \rangle_a . \qquad (8)$$

Суть методу реплік полягає в тому, що обчислення у (8) виконуються для цілих n. Для цілих значень n обчислення $\langle Z(b)^n\rangle_a$ приводить до n копій (реплік) тієї ж системи з тими ж самими реалізаціями $a_{s,i}^m$. Далі для кожної репліки вводиться своя множина динамічних змінних $p_a \equiv \{p_{s,i,a}\}$, які ми позначатимемо індексом $a = 1,...,n$. Кожній репліці відповідає гамільтоніан, який позначимо $H^a(p_a)$. Множина динамічних змінних для всіх реплік є прямими добутком n фазових просторів Δ^N - $(\Delta^N)^n$. Для обчислення границі $n \to 0$ в (8) здійснюється аналітичне продовження для дійсних значень n.

Наступні перетворення є основними в методі реплік та широко описані в літературі [26]. Ми будемо дотримуватись в основному схеми прийнятої в [22], вказуючи на деякі відмінності в ході викладок. Отже, використовуючи метод реплік запишемо:

$$Z(b)^n = Sp_p \prod_{a=1}^{n} \prod_{m=1}^{P} \left\langle \exp(-b \cdot r^m \cdot (A_a^m)^2) \right\rangle_a$$

$$= Sp_p \prod_{m=1}^{P} \prod_{a=1}^{n} E_{z_a^m} \left\langle \exp(-i \cdot \sqrt{2br^m} \cdot z_a^m \cdot A_a^m \right\rangle_a .$$
(9)

Тут $E_z(...)$ позначує усереднення за гаусовим розподілом змінних z для кожної репліки з густиною ймовірності $1/\sqrt{2p}\cdot\exp(-z^2/2)$. В формулі (9) вжито також скорочене позначення Sp_p для інтегралів по всьому фазовому простору системи. Представлення (9) дозволяє факторизувати усереднення за $a^m_{s,i}$

$$\prod_{a=1}^{n}\left\langle \exp(-i\cdot\sqrt{2br^{m}}\cdot z_a^m\cdot A_a^m)\right\rangle_a$$
$$=\prod_{i=1}^{N}\prod_{s=1}^{S}\left\langle \exp(-i\cdot\sqrt{2br^{m}}\cdot(\sum\nolimits_a z_a^m\cdot p^{a}_{s,i})\cdot a^m_{s,i})\right\rangle_a =$$

використовуючи розподіл (2) для ймовірностей вибору дій агентами, отримуємоЖ

$$\prod_{i=1}^{N}\prod_{s=1}^{S}\cos\left(\sqrt{2br^{m}}\cdot\sum_{a=1}^{n} z_a^m\cdot p^{a}_{s,i}\right)$$
$$=\exp\left(-br^{m}\sum_{a,b=1}^{n} z_a^m z_b^m\sum_{i=1}^{N} p_i^{a}\cdot p_i^{b}\right).$$

В останньому виразі використано відоме наближення $\cos(x)\approx\exp(-x^2/2)$ для малих значень x. Дане наближення є виправданим з огляду на те, що при $N\to\infty$ $r^m\to 0$ для кожного $m=(1..P)$.

Дальші обчислення спрямовані на те, щоб факторизувати в (9) статистичну суму за індексом агентів i. Цього досягають введенням матриць $G\equiv\{G_{a,b};\ a,b=1..n\}$ та $r\equiv\{r_{a,b};\ a,b=1..n\}$ за допомогою інтегрального представлення $d(x)$ функції Дірака

$$1=\int dG_{a,b}d\left(G_{a,b}-\frac{1}{N}\sum_{i\in N}p_i^{a}\cdot p_i^{b}\right)$$
$$=\int\frac{dG_{a,b}dr_{a,b}}{2p}\exp\left(-ir_{a,b}\left(G_{a,b}-\frac{1}{N}\sum_{i\in N}p_i^{a}\cdot p_i^{b}\right)\right)$$

Після підстановки отримаємо однократні інтеграли за індексами агентів. Інтеграли за змінними z_a^m є гаусовими та обчислюються за відомими формулами [3], в результаті отримаємо представлення статистичної суми в методі реплік

$$\left\langle Z^n\right\rangle_a=\int\frac{dG_{a,b}dr_{a,b}}{2p}\exp\left(-bnNF(G,r)\right). \qquad (10)$$

де – має зміст функціоналу вільної енергії та представляється наступним виразом

$$F(G,r)=\frac{a}{2nb}\ln\det\left(\mathbb{1}+\frac{2b}{a}G\right)$$
$$+i\frac{1}{b}\sum_{a,b}r_{a,b}G_{a,b}-\frac{1}{nb}\ln Sp_p\ \exp\left(i\sum_{a,b}r_{a,b}p^{a}p^{b}\right).$$

(11)

При розрахунках враховано також, що $r^m=1/P$, $\mathbb{1}$ – позначає одиничну матрицю. Перший доданок в (10) виникає при інтегруванні за змінними z_a^m. Зауважимо також, що в результаті ми отримали систему взаємодіючих міх собою реплік. Фазовий простір реплік має вимір $n^2\times n^2$.

Інтегрування в (10) за змінними $\{G_{a,b},r_{a,b};\ a,b=1..n\}$ можна виконати в границі $N\to\infty$ методом перевалу. Основний внесок в інтеграл від точки перевалу в якій функція досягає екстремуму. Використовуючи необхідні умови екстремуму $\partial F(G,r)/\partial G_{a,b}=0$, $\partial F(G,r)/\partial r_{a,b}=0$ отримуємо систему рівнянь:

$$G_{a,b}=\frac{\int dp'\exp\left(\sum_{a,b}r_{a,b}p^{a}p^{b}\right)\left(p^{a}p^{b}\right)}{\int dp'\exp\left(\sum_{a,b}r_{a,b}p^{a}p^{b}\right)},$$

$$r_{a,b}=-b\left(\mathbb{1}+\frac{2b}{a}G\right)^{-1}_{ba}. \qquad (12)$$

де штрих біля змінної інтегрування вказує на обмеження, що накладається на змінні інтегрування $\sum_s p_s^a=1$. В формулі (11) виконана також заміна $ir_{a,b}\to r_{a,b}$.

3. Наближення симетричних реплік. Система (12) містить $2n^2$ нелінійних рівнянь для знаходження екстремальної точки. Зрозуміло, що в загальному випадку отримати розв’язки цієї системи рівнянь надто складна задача. Тому далі використовується наближення симетричних реплік. Це наближення отримується, якщо покласти:

$$r_{a,b}=r+(R-r)d_{ab},\qquad G_{a,b}=g+(G-g)d_{ab}.$$

(13)

Заміна (13) дозволяє скоротити кількість рівнянь до чотирьох з невідомими параметрами r, R, g, G. Після підстановки (13) в (12) та проведення нескладних перетворень отримаємо:

$$F_1(G,r)=\frac{a}{2b}\left(\ln\left(1+\frac{2b}{a}(G-g)\right)+\frac{2bg/a}{1+\frac{2b}{a}(G-g)}\right)+\frac{1}{b}(GR-gr)-\frac{1}{b}E_y\ln\langle\Phi\rangle$$

(14)

де $\Phi=\int dp'\exp\left((R-r)\sum_s p_s^2+\sqrt{2r}\sum_s p_s y_s\right)$,

$$E_y\langle\ldots\rangle=\int\frac{dy}{\sqrt{2p}}\exp\left(-\sum_s y_s^2\right)(\ldots).$$

Система рівнянь (12) відповідно матиме вигляд:

$$R=-b\frac{1}{\left(1+\frac{2b}{a}(G-g)\right)}+b\frac{2bg/a}{\left(1+\frac{2b}{a}(G-g)\right)^2},$$

$$r=b\frac{2bg/a}{\left(1+\frac{2b}{a}(G-g)\right)^2},$$

$$G=E_y\left\langle\left\langle\sum_s p_s^2\right\rangle_p\right\rangle,\quad g=E_y\left\langle\left\langle\sum_s p_s\right\rangle_p^2\right\rangle. \qquad (15)$$

Або з двох останніх рівнянь можна утворити також наступне рівняння

$$G-g=\frac{1}{\sqrt{2r}}E_y\left\langle\left\langle\sum_s y_s p_s\right\rangle_p\right\rangle.$$

(15а)

Тут введено також позначення

$$\langle\ldots\rangle_p=\frac{\int dp'\exp\left((R-r)\sum_s p_s^2+\sqrt{2r}\sum_s p_s y_s\right)(\ldots)}{\int dp'\exp\left((R-r)\sum_s p_s^2+\sqrt{2r}\sum_s p_s y_s\right)}$$

(16)

Система рівнянь (15) була отримана в [17] та є вихідною в більшості робіт для дослідження властивостей моделі MG. Незважаючи на суттєві спрощення, система рівнянь (15) залишається досить складною. Нагадаємо, що реальний зміст параметри моделі отримують в границі $b\to\infty$, при цьому система (15) містить лише один незалежний параметр a.

В літературі, як в піонерських роботах [21 – 23] так і в наступних вводиться величина

$$\chi=\frac{2\beta(G-g)}{\alpha}, \qquad (17)$$

яка за своєю структурою є аналогом сприйнятливості спінової системи [26, 25], якщо p вважати спіновою змінною, що неперервним чином розподілена на проміжку. Далі розглядаються випадки, в яких сприйнятливість при $b\to\infty$ є скінченою та розбігається в залежності від параметра a. Таким чином було встановлено існування критичної точки a_c в даній моделі.

Ми запропонуємо в даній роботі інший, більш наочний підхід до аналізу розв’язків системи рівнянь (15). Звернемо увагу ще на одну трудність, яка полягає в тому, що інтегрування за різними p_s не є незалежними, а виконуються за умови $\sum_{s=1}^{S}p_s=1$. Тому на початку, для простоти обмежимось випадком $S=2$.

4. MG для кількості стратегій S=2. Розглянемо більш детально розрахунок величини Φ, що у випадку двох стратегій матиме вигляд:

$$\Phi=\int dp'\exp\left((R-r)\sum_{s=1}^{2}p_s^2+\sqrt{2r}\sum_{s=1}^{2}p_s y_s\right). \qquad (18)$$

Для того, щоб інтегрування за p_1,p_2 були незалежними, умову $p_1+p_2=1$ забезпечимо ввівши під інтеграл дельта функцію Дірака $d(p_1+p_2-1)$. Використовуючи властивості d-функції одне інтегрування в (18) можна виконати. В результаті отримаємо:

$$\Phi=\exp(R-r+\sqrt{2r}y_2)\int_0^1 dp\,\exp\left(2(R-r)p^2+[-2(R-r)+\sqrt{2r}(y_1-y_2)]p\right).$$

(19)

Для системи рівнянь (15), (15а) отримаємо:

$$G=1-2E_y\left\langle\langle p\rangle_p\right\rangle+2E_y\left\langle\langle p^2\rangle_p\right\rangle,$$

$$G-g=\frac{1}{\sqrt{2r}}E_y\left\langle\langle(y_1-y_2)p\rangle_p\right\rangle. \qquad (20)$$

Рівняння для параметрів R, r мають той ж самий вигляд (15). Усереднення за p в (20) здійснюється з функціоналом (19). Зручно ввести також змінну $x = y_1 - y_2$, відповідно отримаємо:

$$\Phi = \exp(R-r)\int_0^1 dp \exp \left(2(R-r)p^2 + [-2(R-r)+\sqrt{2r}x]p\right), \tag{21}$$

$$G = 1 - 2E_x\left\langle\langle p\rangle_p\right\rangle + 2E_x\left\langle\langle p^2\rangle_p\right\rangle ,$$

$$G - g = \frac{1}{\sqrt{2r}}E_x\left\langle\langle xp\rangle_p\right\rangle. \tag{22}$$

де позначено $E_x\langle ...\rangle = \int \frac{dx}{\sqrt{4p}}\exp\left(-\frac{1}{4}x^2\right)(...)$.

З рівнянь для R, r легко зауважити, що при $b\to\infty$ та $G - g \to G_0 - g_0 \neq 0$, матиме місце $F_1(G,r)\to 0$. Це відповідає симетричній фазі, про яку мова йшла вище. Порушення симетрії можливе лише за умови $G_0 = g_0$. В цьому випадку зручно ввести наступні асимптотики величин в околі $b\to\infty$:

$$G \approx g_0 + G_1\cdot\frac{1}{b},\ g \approx g_0 + g_1\cdot\frac{1}{b}. \tag{23}$$

Підставляючи в (15) отримаємо:

$$R \approx -\frac{a(2G_1 - 4g_1 + a)}{(a+2(G_1-g_1))^2}b + \frac{2g_0 a}{(a+2(G_1-g_1))^2}b^2,$$

$$r \approx \frac{2g_1 a}{(a+2(G_1-g_1))^2}b + \frac{2g_0 a}{(a+2(G_1-g_1))^2}b^2.$$

(24)

Формули (24) визначають асимптотику параметрів R, r при $b\to\infty$. Зокрема:

$$R - r \approx -b\frac{a}{a+2\Delta G},$$

$$r \approx b^2\frac{2ag_0}{(a+2\Delta G)^2} + b\frac{2ag_1}{(a+2\Delta G)^2}, \tag{25}$$

де введено позначення $\Delta G = G_1 - g_1$.

Підставляючи формули (25) в (21), після нескладних перетворень для величини Φ отримаємо:

$$\Phi = \exp(-bA + 2bAz^2)\Phi_0 ,$$

$$\Phi_0 = \int_0^1 dp \exp\left(-2bA(p-z)^2\right)\exp(B_1 px). \tag{26}$$

де введено позначення $A = \frac{a}{a+2\Delta G}$,

$$B_1 = \frac{\sqrt{ag_0}}{a+2\Delta G}\frac{g_1}{g_0},\ z = \frac{1}{2}\left(1+\sqrt{\frac{g_0}{a}}x\right).$$

Асимптотика інтегралів типу (26) розглянута в [5]. Там показано, зокрема, що характер асимптотики залежить від того, в яку область потрапляє параметр z. Оскільки z в нашому випадку залежить від x, що має зміст випадкової змінної з гаусовим розподілом, то й параметр z може набувати різних значень. Для подальших розрахунків зручно виконати заміну змінних та перейти при інтегруванні від x до змінної z, враховуючи, що $x = (2z-1)\sqrt{\frac{a}{g_0}}$. Після зазначених перетворень отримаємо для вільної енергії:

$$F_1 = F_0 + \frac{1}{2}\frac{a-2g_0}{a+2\Delta G} - \frac{1}{b}\int_0^\infty dz f(z)\ln\langle\Phi_1\rangle_p, \tag{27}$$

де введені позначення також позначення:

$$F_0 = 2\frac{g_0 a\Delta G}{(a+2\Delta G)^2} + \frac{1}{b}\left(\frac{1}{2}a\ln\left(1+\frac{2\Delta G}{a}\right) - \frac{a\Delta G(-2g_1 + a + 2\Delta G)}{(a+2\Delta G)^2}\right)$$

$$f(z) = \sqrt{\frac{a}{pg_0}}\exp\left(-\frac{a}{4g_0}z^2\right)$$

та усереднення за відбувається за формулою:

$$\langle ...\rangle_p = \frac{1}{\Phi_1}\int_{-1}^1 dp \exp(-bA(p-z)^2)\cdot\exp(\frac{1}{2}b_1 p\cdot z)(...), \tag{28}$$

де $\Phi_1 = \int_{-1}^1 dp \exp(-bA(p-z)^2)\cdot\exp(\frac{1}{2}b_1 p\cdot z)$,

$$b_1 = \frac{a}{a+2\Delta G}\frac{g_1}{g_0}$$

Формули (27), (28) дозволяють провести дослідження моделі в нульовому та першому наближенні за степенями $\frac{1}{b}$. Зокрема розв’язки системи рівнянь в нульовому наближенні для параметрів g_0, g_1, ΔG наступні:

$$g_0 = 1 + \left(\frac{g_0}{\alpha} - \frac{1}{2}\right)\cdot erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\alpha}{g_0}}\right) - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{g_0}{\alpha}}\exp\left(-\frac{\alpha}{4g_0}\right). \quad (29)$$

$$\Delta G = \frac{1}{2a} erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g_0}}\right)(a + 2\Delta G). \quad (30)$$

де $erf(x) = \frac{2}{\sqrt{p}}\int_0^x \exp(-t^2)dt$ – функція похибок.

Рівняння для достатньо громіздке і тут не наводиться. Рівняння (29) є нелінійним та визначає залежність параметра g_0 від a. Рівняння (30) є лінійним відносно ΔG та визначає умову при якій мають місце наведені розв'язки. Дійсно, з нього можна знайти зокрема, що

$$a + 2\Delta G = \frac{a^2}{a - erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g_0}}\right)}. \quad (31)$$

Наведені вище розрахунки мають місце за умови $a + 2\Delta G > 0$, або $a - erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g_0}}\right) > 0$.

Тим самим умова $a - erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g_0}}\right) = 0$ сумісно з рівнянням (32) визначає критичну точку $a_c \approx 0.33740...$. Дана ситуація зображена на рис.1, де вказано залежність величини $\Delta(a) = a - erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g_0(a)}}\right)$ від параметра α. Рівняння (29), (31) з певною заміною змінних співпадає з літературними даними [21 – 23], отриманими, як вже вказувалось іншим способом.

Наведемо вільну енергію як функцію g_0 та a використавши розв'язки рівнянь. Після нескладних, але громіздких перетворень, які ми опускаємо, отримаємо:

$$F_1 = g_0\left(1 - \frac{1}{a} erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g_0}}\right)\right)^2. \quad (32)$$

Формула (32) сумісно з рівнянням (29) визначає залежність F_1 від a. З врахуванням співвідношення (17) формула (32) узгоджується з отриманою в роботі [22]. Хід цієї залежності зображений на рис.2. Очевидно, що $F_1 > 0$ при $a > a_C$ та $F_1 = 0$ при $a < a_C$ (оскільки порушується умова існування розв'язків $a - erf\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{g_0}}\right) > 0$). Знайдемо, характер залежності F_1 в околі критичної точки a_C. Використовуючи рівняння (32) після нескладних, однак достатньо громіздких, перетворень можна показати, що в околі критичної точки має місце співвідношення:

$$\Delta g_0 \approx \frac{(2 - a_c - 2g_{0c})g_{0c}}{a_c(2 - a_c)}(a - a_c), \quad (33)$$

де позначено $\Delta g_0 = g_0 - g_{0C}$, g_{0C} – значення параметра g_0 в критичній точці.

Відповідно для вільної енергії можна отримати залежність в околі критичної точки:

$$F_{1C} \approx \frac{1}{4}\frac{(a - a_c)^2}{a_c^2}. \quad (34)$$

Формула (34) ілюструє квадратичну залежність в околі критичної точки, що співпадає з результатами робіт [21 – 23], однак формула (34) додатково визначає також амплітуду цієї степеневої залежності.

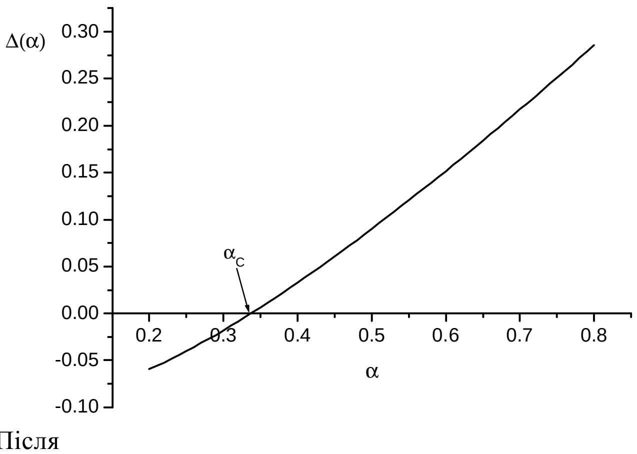

Рис.1. Ілюстрація існування критичної точки $a_c \approx 0.33740$.

Декілька зауважень зробимо, щодо дослідження стійкості розв'язку моделі (29), (30) отриманого в методі симетричних реплік. В розглянутому нами підході для слід отримати

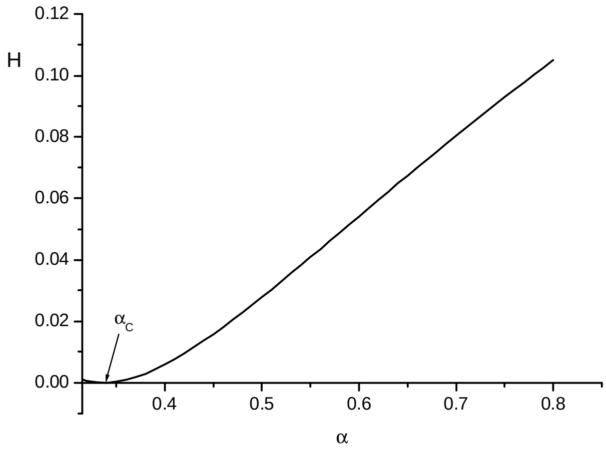

Рис. 2. Залежність мінімуму H як функції параметра α.

наступне наближення за параметром $\frac{1}{b}$ та вивчати подібно як в статистичній механіці [26, 25] ентропію, яку визначають за відомим співвідношенням: $S = b^2 \partial / \partial b F_1$. Однак, на цьому шляху виникають труднощі пов’язані з тим, що асимптотика F_1 при $b \to \infty$ містить доданки $\sim \frac{\ln b}{b}$, внесок яких в ентропію є розбіжним при $b \to \infty$. Тут до речі провести аналогію з класичним ідеальним газом статистичної фізики [2], вільна енергія якого також містить подібний доданок, який власне і приводить до розбіжності ентропії при $b \to \infty$. У випадку з ідеальним газом вирішення проблеми полягає у застосуванні квантової статистики. Подібність ситуації у нашому випадку зумовлена тим, що змінні p які введені згідно (6) та описують стан системи є неперервними, а співвідношення (7) визначає стан системи при нулі “температури”. Додамо також, що співвідношення (7) використовувалось в фізичних дослідженнях основного стану квантових систем, спектр яких є дискретним. Маючи на увазі цю трудність в роботі [27] інтегрування за змінною p замінюють сумою ввівши дискретну змінну. Однак, цей половинчатий підхід потребує додаткового вивчення та дискретність повинна задаватись на самому початку із введенням співвідношення (7).

Висновки. Дана робота знайомить читача з основними ідеями еконофізики – нового перспективного напрямку досліджень. Коротко проаналізовані основні передумови виникнення цієї наукової галузі та завдання, які вона розв’язує. Детально висвітлюється модель MG, яка була запропонована як модель для аналізу роботи фондових та фінансових ринків. Дана модель була сконструйована за методологію дослідження фізичних систем, де основою моделі є множина агентів, які взаємодіють між собою та визначають стан ринкової системи в цілому.

У роботі розглянута одна з основних реалізацій моделі MG в рівноважному випадку. Основний результат роботи – запропонована більш проста схема дослідження системи рівнянь для параметрів моделі в методі реплік. У результаті при цьому отримані рівняння, що описують поведінку моделі (у випадку двох стратегій $S = 2$), досліджена характер розв’язків в околі критичної точки. В роботі сформульовані також деякі проблемні питання, які потребують розв’язання та будуть розглянуті в наступних роботах.

Підбиваючи підсумок слід зазначити, що в рамках теорії minority game вперше було проілюстровано, що різкі зміни, які відбуваються на фінансових ринках, можуть бути зумовлені внутрішньою поведінкою агентів – гравців на ринку. Стало зрозуміло, що адекватна ринку модель повинна містити певні параметри зміни відносно яких ринкова система виявляє критичну поведінку. Безумовно, еконофізика – наука, яка робить перші кроки, ситуація багато в чому нагадує початкову стадію розвитку термодинаміки і квантової механіки. На думку багатьох, економіка повинна ставати такою же точною наукою, якими є фізика, хімія, математика. Оскільки в багатьох економічних явищах діють певні закони, а закон – це повторюване явище яке описують фізико-математичні моделі. Вже зараз зрозуміло, що будувати моделі в економіці – справа хоч дуже важка, зате цілком реальна.

Слід зазначити також, що багато провідних економістів вважають, що між природничими науками та економікою все-таки існує велика різниця, оскільки в економіці немає природничих законів. Коливання цін викликається поведінкою людей. Якщо змінюються моделі поведінки, то вже виявлені закономірності більше не виконуються. Проте історичний досвід свідчить також, що відкриття в економіці часто здійснювали представники інших дисциплін. Тому еконофізика напевно не зможе підмінити собою економіку, однак зможе збагатити її новими відкриттями.

1. *Исследование операций в экономике: Учеб. пособие. / Под ред. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1999.*

2. *Климонтович Ю.Л. Статистическая физика. – М.: Наука, 1982. – 608 с.*

3. *Куни Ф. М. Статистическая физика и термодинамика. – М.: Наука, 1981. – 352 с.*

4. *Паташинский А.З., Покровский В.Л. Флуктуационная теория фазивых переходов. – М.: Наука, 1980. – 320 с.*

5. *Федорюк М.В. Асимптотика: Интегралы и ряды. – М.: Наука, 1987. – 544 с.*

6. *Kondor and J. Krtesz (eds), Econophysics: An Emerging Science, Kluwer, Dordrecht 1999.*

7. *Mantegna R.N., Stanley H.E. An Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance. Cambrige University Press, 1999. 180 p.*

8. *J.P. Bouchaud, M. Potters, Theory of Financial Risks, Cambridge Univ. Press, Cambrodge 2001.*

9. *B.M. Roehner, Patterns of Speculation, Cambridge Univ. Press, Cambridge 2001.*

10. *Johansen A. and Sornette D., Finansial “ant-bubbles”: log-periodicy in Gold and Nikkei collapses. // Int. J. Mod. Phys. B, 1999., preprint htpp://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9901268.*

11. *Johansen A., Lcdoit O. and Sornette D., Crashes as critical points. // Int. J. Theor. & Appl. Finanse. Vol.3, No. 1, 1998, preprint htpp://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9810071.*

12. *D. Challet, Y. C. Zhang, Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game, Physica A 246, 407 (1997)*

13. *Y. C. Zhang, Modeling Market Mechanism with Evolutionary Games, Europhy. News 29, 51 (1998)*

14. *D. Challet, Y. C. Zhang, On the Minority Game: Analytical and Numerical Studies, Physica A 256, 514 (1998)*

15. *R. Manuca, R. Riolo, R. Savit, The Structure of Adaptive Competition in Minority Games (1998), preprint*

16. *R. Savit, R. Manuca, R. Riolo, Adaptive Competition, Market Efficiency, Phase Transitions, PRL, 82(10), 2203 (1999)*

17. *T. Lux, Applied Financial Economics 6, 463 (1996).*

18. *T. Lux and M. Marchesi, Nature 297, 498 (1999).*

19. *T. Lux, M. Marchesi Int. J. Theo. Appl. Fin. 3, 675 (2000).*

20. *Arthur W. B., Inductive reasoning and bounded rationality (the EL Farol problem), Am. Econ. Assoc. Papers and Proc 84, 406, 1994.*

21. *Challet D., Marsili M. and Zecchina R. Statistical mechanics of systems with heterogeneous agents: Minority Games. Phys. Rev. Lett., vol.84, p. 1824 – 1827, 2000 (cond-mat/9904392).*

22. *Challet D., Marsili M. and Zecchina R. Exact solution of a modified El Farol’s bar problem: Efficiency and the role of market impact. Physica A vol. 280, p. 522-533, 2000, vol.256 (cond-mat/9901243).*

23. *De Martino A and Marsili M. Replica symmetry breaking in the minority game. J/ Phys. A: Math. Gen., vol. 34 p. 2525-2537, 2001.(Preprint cond-mat/0007397).*

24. *Challet D., Chessa A, Marsili M. and Zhang Y-C. From minority game to real markets. Quantitative Finance, vol.1, p. 168-176, 2001.(Preprint cond-mat/0011042).*

25. *Savit R., Manuca R., and Riolo R., Adaptive competition, marcet efficiency and phase transition, Phys. Rev. Lett., 82, 2203, 1999.*

26. *M. Mezard, G. Parisi, M. A. Virasoro, Spin glass theory and beyong (World Scientific, 1987).*

27. *De Martino A. Replica symmetry breaking and long-term memory in large games with heterogeneous players. Thesis submitted for the degree of “Doctor Philosophie”. Trieste. 2001.*

В КОЖНІЙ ФРАЗІ – ДУМКА

“Для вченої й освіченої людини жити – значить, мислити”.

Цицерон

“Виховання – велика справа: воно вирішує долю людини”.

В. Белінський